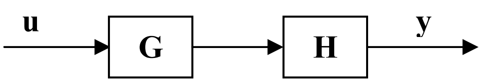
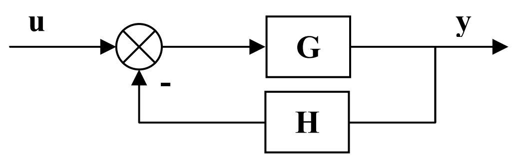
Badanie stabilności układów na podstawie kryterium Nyquista. Zapas fazy i wzmocnienia

1. Stabilność

Istnieje wiele interpretacji pojęcia stabilności. W przypadku układów liniowych, stacjonarnych, o parametrach skupionych **układ jest stabilny, gdy przy wymuszeniu (wejściu) ograniczonym co do wartości i czasu trwania odpowiedź układu będzie także ograniczona**. Natomiast układ jest **stabilny asymptotycznie**, gdy odpowiedź układu będzie ograniczona nawet przy wymuszeniu (ograniczonym) trwającym dowolnie długo.

2. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista jest metodą semigraficzną pozwalającą określić stabilność układu zamkniętego na podstawie analizy charakterystyki amplitudowo-fazowej (wykresu Nyquista) układu otwartego.

układ otwarty	układ zamknięty
	
transmitancja = $G(s) * H(s)$	transmitancja = $\frac{G(s)}{1+G(s)*H(s)}$

2.1. Najważniejsze cechy Kryterium Nyquista:

- dostarcza informacji o stabilności względnej (patrz Roz. 3) i stopniu niestabilności układu niestabilnego
- dostarcza informacji w jaki sposób poprawić stabilność (jeśli jest taka potrzeba)
- jest użyteczne dla układów z czystym opóźnieniem, których nie da się analizować metodą Routha-Hurwitza.

2.2. Kryterium stabilności Nyquista

Niech będzie dany układ zamknięty typu SISO o transmitancji:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Równanie charakterystyczne tego układu:

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

W ogólnym przypadku, gdy w układzie występuje wiele pętli sprzężenia zwrotnego, równanie charakterystyczne można zapisać:

$$\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$$

gdzie *L(s)* jest transmitancją pętli otwartej.

<u>Identyfikacja zer i biegunów</u>:

- zera transmitancji pętli otwartej: zera ***L(s)***
- bieguny transmitancji pętli otwartej: bieguny ***L(s)***
- bieguny transmitancji pętli zamkniętej: zera **1+*L(s)*** (czyli pierwiastki równania charakterystycznego)
- bieguny 1 + L(s) = bieguny L(s)

Kryterium stabilności Nyquista wychodzi z tzw. *zasady argumentu*, która stanowi, że:

$$\boldsymbol{N = Z - P}$$

gdzie:

N – jest liczbą okrążeń punktu (−1, j0) przez wykres Nyquista L(s).

Z – jest liczbą zer 1+ L(s) w prawej półpłaszczyźnie s

P – jest liczbą biegunów 1+ L(s) w prawej półpłaszczyźnie s (*zauważ, że bieguny 1+ L(s) są takie same jak te z L(s)*).

Aby **pętla otwarta** była stabilna, **P** musi być równe zero.
Aby **pętla zamknięta** była stabilna, **Z** musi być równe zero.

Z powyższego wynika następujący warunek dotyczący stabilności przy użyciu kryterium Nyquista:

$$\boldsymbol{N = -P}$$

Czyli układ z pętlą zamkniętą będzie stabilny jeśli wykres Nyquista L(s) będzie okrążał punkt (−1, j0) tyle razy ile wynosi liczba biegunów L(s), które znajdują się w prawej półpłaszczyźnie s i okrążanie jeśli jest, musi być w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

W niniejszym konspekcie ograniczymy rozważania do **układów minimalnofazowych**, które charakteryzują się m.in. następującymi cechami:

- Transmitancja minimalnofazowa <u>nie zawiera biegunów ani zer w prawej półpłaszczyźnie</u> ani na osi jω, z wyjątkiem początku układu.
- Wartość transmitancji minimalnofazowej dla pewnej skończonej częstotliwości niezerowej nie może być równa zero ani nieskończoność.

Dla takich układów, kryterium Nyquista stanowi:

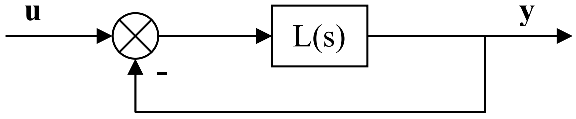
$$\boldsymbol{N = 0}$$

co można rozwinąć następująco:

Minimalnofazowe układy otwarte są po zamknięciu stabilne, jeżeli ich charakterystyki amplitudowo-fazowe nie obejmują punktu (-1, j0), tzn., że poruszając się wzdłuż charakterystyki amplitudowo-fazowej w kierunku wzrastających częstotliwości, punkt (-1, j0) znajduje się zawsze po lewej stronie.

2.3. Wpływ wzmocnienia na stabilność układu

Zbadaj stabilność poniższego układu



dla:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}; \qquad K = \{30, 250\}$$

Dla każdego K narysuj charakterystyki Nyquista w osobnych okienkach graficznych.

2.4. Wpływ dodawania do układu biegunów na jego stabilność

Zbadaj stabilność poniższych układów:

$$L_1(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$L_2(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

dla: *$K=10$, $T_1=0.1$, $T_2=0.5$, $T_3=0.8$*

Zaobserwuj co dzieje się ze stabilnością gdy dodajemy do układu niezerowe bieguny. Obie charakterystyki Nyquista narysuj w tym samym okienku graficznym (tj. oba przebiegi na tym samym wykresie).

2.5. Wpływ dodawania do układu zerowych biegunów na jego stabilność

Zbadaj stabilność poniższych układów:

$$L_0(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$$L_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$L_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$L_3(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

Zaobserwuj co dzieje się ze stabilnością gdy dodajemy do układu bieguny w s = 0. Dla każdego układu narysuj charakterystyki Nyquista w osobnych okienkach graficznych.

2.6. Wpływ dodawania do układu zer na jego stabilność

Zbadaj stabilność poniższych układów:

$$L_1(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$L_2(s) = \frac{K(T_d s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Dla: *K=2; T1=0.1; T2=0.9; Td=0.7*

Zaobserwuj co dzieje się ze stabilnością gdy dodajemy do układu zera. Obie charakterystyki Nyquista narysuj w tym samym okienku graficznym (tj. oba przebiegi na tym samym wykresie).

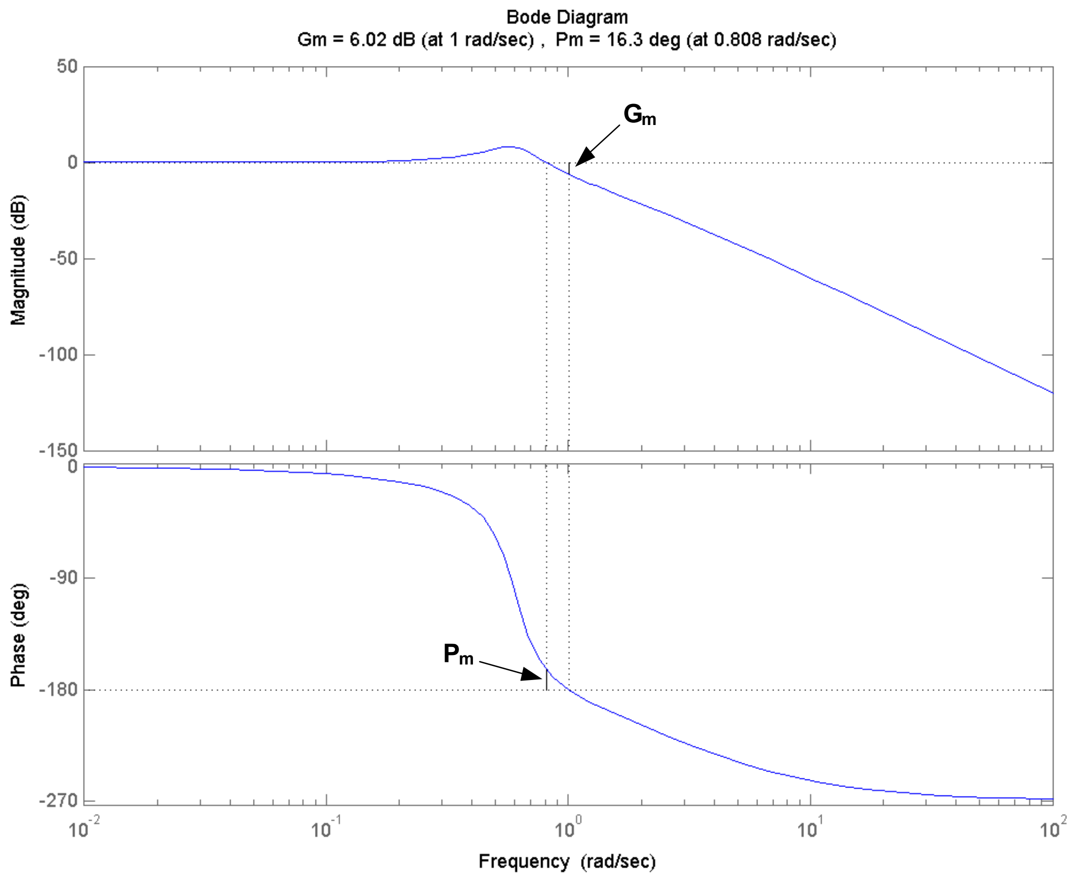
3. Zapas fazy i wzmocnienia

Stabilność względna systemu jest określana przez parametry takie jak zapas wzmocnienia i zapas fazy, które pozwalają na określenie „jak daleko” system znajduje się od granicy stabilności wyznaczonej przez kryterium Nyquista. Parametry te są jednoznacznie zdefiniowane jedynie dla przypadku gdy układ otwarty jest stabilny. Można je wyznaczyć metodą graficzną, na podstawie wykresów Bodego lub Nyquista układu otwartego.

3.1. Wyznaczenie zapasu wzmocnienia i zapasu fazy na podstawie wykresów Bodego

Zapas wzmocnienia G_m (ang. *gain margin*) – wartość wzmocnienia, dla którego faza osiąga -180°. Jego wartość oznacza o ile można zwiększyć wzmocnienie zanim stracimy stabilność.

Zapas fazy P_m (ang. *phase margin*) – wartość fazy dla częstotliwości, przy której wzmocnienie wynosi 1 (0 dB). Jego wartość oznacza o ile można zmniejszyć przesunięcie fazowe zanim stracimy stabilność.

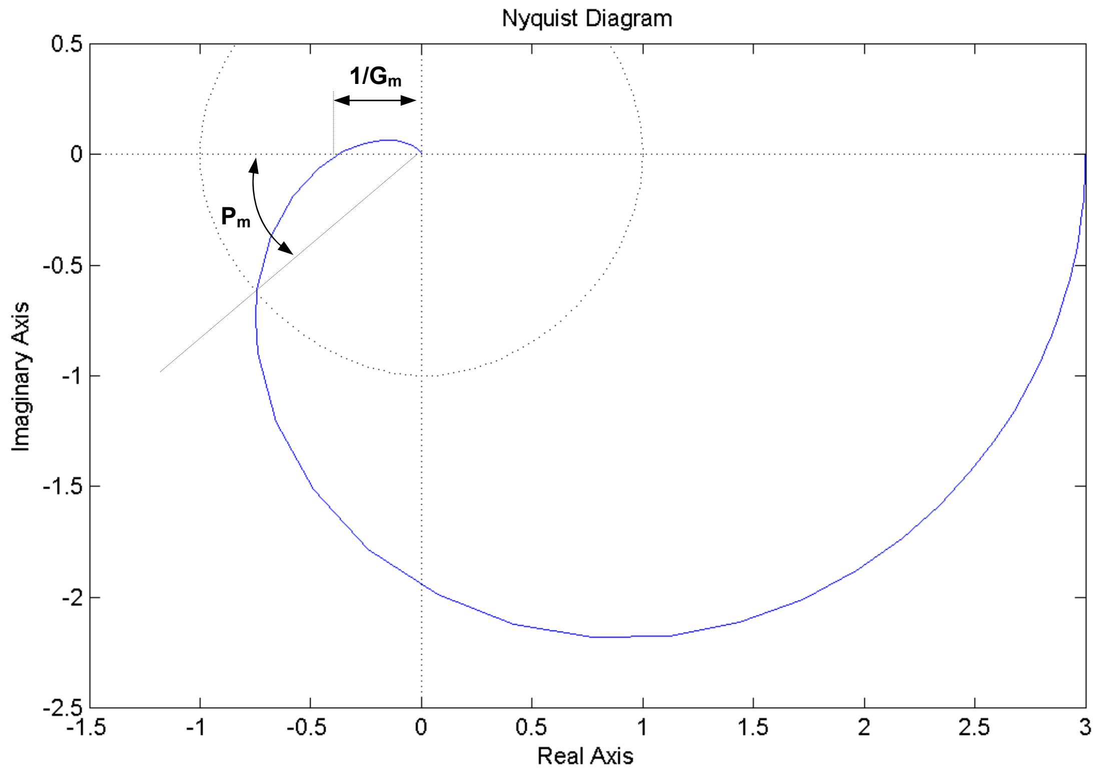


Rys. 1. Wyznaczanie zapasu fazy i wzmocnienia z wykresu Bodego.

3.2. Wyznaczenie zapasu wzmocnienia i zapasu fazy na podstawie wykresów Nyquista

Zapas wzmocnienia G_m – odwrotność długości odcinka wyznaczonego przez początek układu współrzędnych oraz punkt przecięcia wykresu Nyquista z ujemną półosią $Re(G(j\omega))$.

Zapas fazy P_m – kąt między półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych i przechodzącą przez punkt przecięcia wykresu Nyquista z kołem jednostkowym.



Rys. 2. Wyznaczanie zapasu fazy i wzmocnienia z wykresu Nyquista.

3.3. Obliczanie zapasu wzmocnienia i zapasu fazy dla układu zamkniętego

Dany jest układ:

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^3}$$

Zapisujemy licznik i mianownik transmitancji za pomocą zer, biegunów i wzmocnienia:

```
[licz,mian]=zp2tf([],[-1 -1 -1],4)
```

Obliczamy zapas wzmocnienia G_m i zapas fazy P_m za pomocą funkcji **margin**:

```
[Gm,Pm]=margin(licz,mian);
```

3.4. Obliczanie wzmocnienia układu zamkniętego dla zadanego zapasu wzmocnienia i zapasu fazy

Dany jest układ:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

Należy obliczyć wartość wzmocnienia K układu zamkniętego dla którego zapas fazy wynosi 45°.
W tym przypadku nie ma gotowych procedur Matlaba. Rozwiązanie można znaleźć numerycznie, np. za pomocą poniższego programu, poprzez proste przeszukanie całego dozwolonego zbioru wartości parametru K:

```
faza=45;          %zadany zapas fazy
krok=0.01;        %krok o który zwiększamy wzmocnienie
```

```
granica=8;        %granica stabilności, powyżej której nie ma sensu szukać
tolerancja=0.1;   %dokładność obliczeń

for K=1:krok:granica
    [licz,mian]=zp2tf([],[-1 -1 -1],K);  %w każdym kroku obliczamy nowa transmitancje
    [Gm,Pm]=margin(licz,mian);           %liczymy zapas modułu Gm i fazy Pm
    if abs(Pm-faza)<=tolerancja           %sprawdzamy dopuszczalny błąd
        fprintf(1,'Dla wzmocnienia K = %.3f zapas fazy wynosi %.3f stopnie\n',K,Pm)
        fprintf(1,'Blad wynosi %f\n',abs(faza-Pm))
        return
    end
end
fprintf(1,'Nie znaleziono rozwiazania.\nZwieksz tolerancje lub/i zmniejsz krok\n')
```

Zadanie 3.4.1.
Porównaj wyniki dla różnych wartości kroku i tolerancji. Wyjaśnij różnice w działaniu algorytmu.

Bardziej zaawansowana metoda wykorzystuje funkcję optymalizacyjną **`fminsearch`**. Należy w tym celu napisać poniższą funkcję:

```
function e = faza(K)

faza=45;
[licz,mian]=zp2tf([],[-1 -1 -1],K);
[Gm,Pm]=margin(licz,mian);
e=abs(Pm-faza);
```

Funkcję trzeba zapisać w pliku „faza.m” i wywołać ją w MATLABIE w postaci:

```
[wynik,blad] = fminsearch('faza',1)
```

Zadanie 3.4.2.
Zmodyfikuj powyższe programy tak, aby obliczyć wartość wzmocnienia K układu zamkniętego dla którego zapas modułu wynosi 2.

4. Sprawozdanie

- Wykonaj wszystkie zadania z rozdziału 2. Narysuj odpowiednie wykresy i skomentuj wyniki.
- Wykonaj zadania 3.4.1 i 3.4.2.