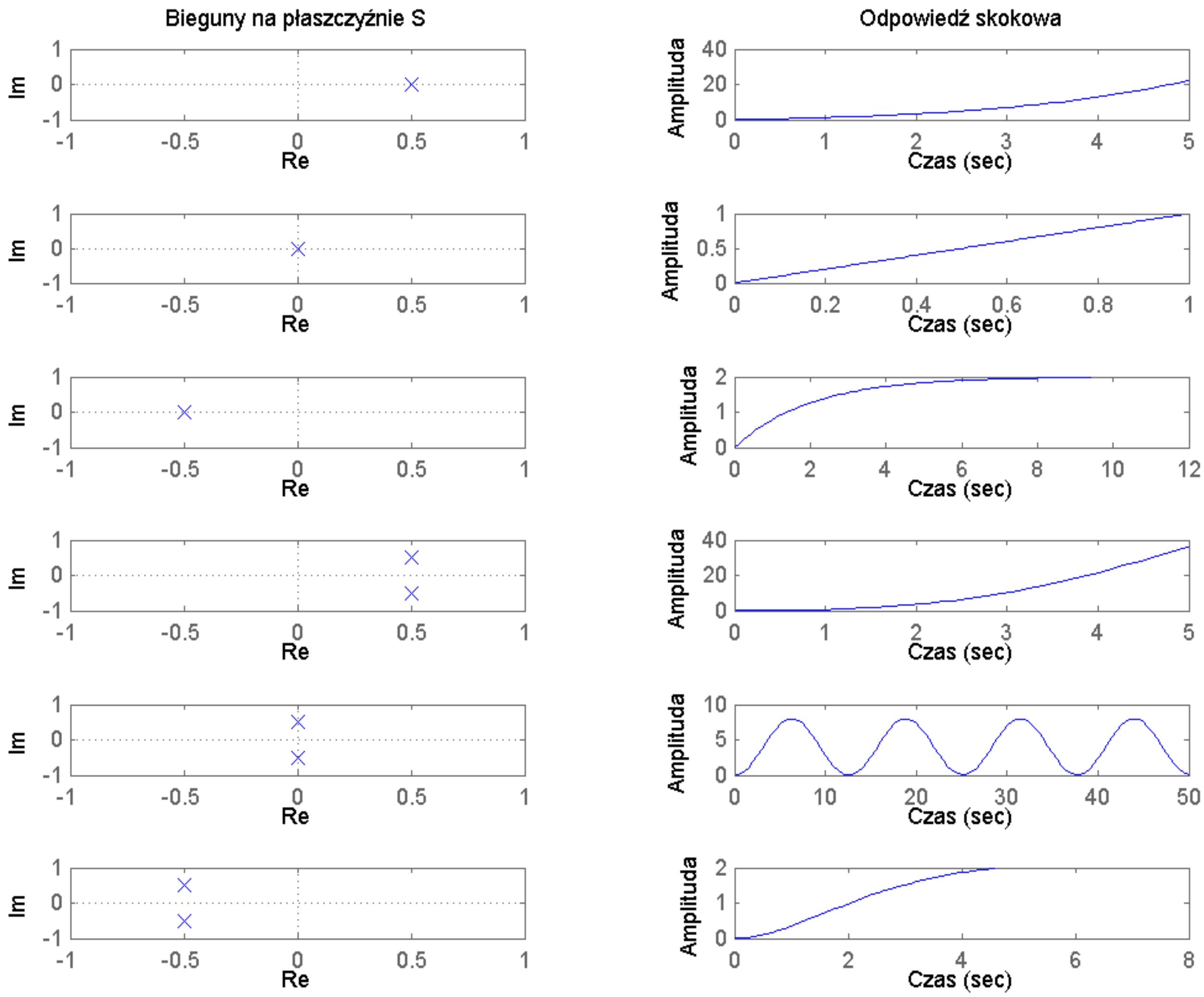
Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Podstawy Automatyki

Informatyka Stosowana, rok II

Metoda projektowania układów regulacji za pomocą linii pierwiastkowych

Wpływ sprzężenia zwrotnego na dynamikę układu w stanie zamkniętym można określić badając rozkład pierwiastków jego równania charakterystycznego (biegunów) na płaszczyźnie *s*. Wpływ rozmieszczenia biegunów na płaszczyźnie *s* na odpowiedź skokową układu obrazuje poniższy rysunek.



Dyskusję parametrów układu zamkniętego związanych z jego własnościami w dziedzinie czasu, takich jak stałe czasowe i współczynniki tłumienia, można przeprowadzić bezpośrednio w dziedzinie Laplace'a:

1. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, to układ jest **stabilny**.
2. Jeżeli wszystkie pierwiastki leżą na osi rzeczywistej, to układ jest **przetłumiony** lub **tłumiony krytycznie**.

3. Im dalej na osi rzeczywistej leżą pierwiastki równania charakterystycznego (przyjmują większe wartości ujemne), tym szybsza jest dynamika układu (tym mniejsze są wartości stałych czasowych).
4. Pierwiastki leżące najbliżej osi urojonej będą miały największy wpływ na odpowiedź dynamiczną układu. Im dalej od osi urojonej jest położony pierwiastek, tym szybciej zanikać będzie w czasie reprezentująca go składowa odpowiedzi.
5. Im większa jest odległość sprzężonych pierwiastków zespolonych od osi rzeczywistej, tym bardziej **niedotłumiony** (**oscylacyjny**) jest układ.

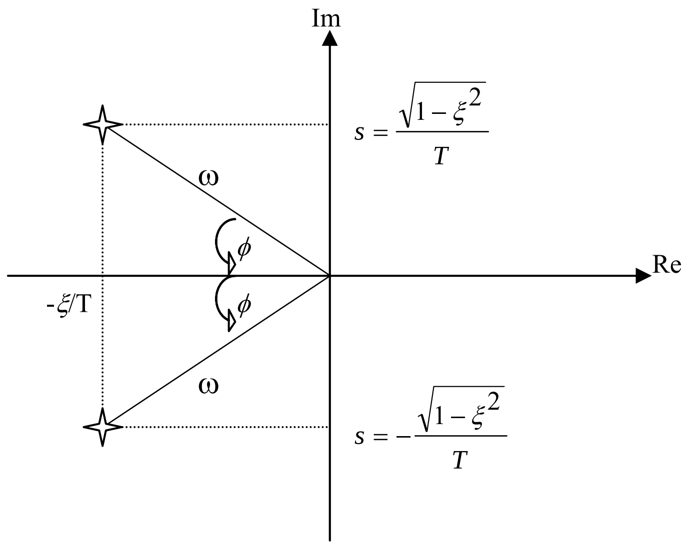
Między rozkładem pierwiastków na płaszczyźnie *s* a wartością współczynnika tłumienia układu istnieje zależność ilościowa. Rozpatrzmy typowy układ II rzędu, o transmitancji:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

który ma nast. dwa bieguny dla **współczynnika tłumienia** $0 \le \xi < 1$:

$$s = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$$

co można przedstawić na rysunku:



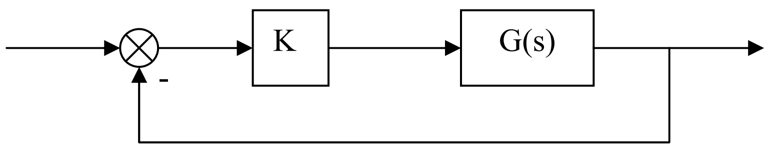
Współczynnik tłumienia wynosi zatem:

$$\xi = \cos\phi$$

a odległość biegunów od początku układu współrzędnych określa tzw. **częstotliwość własną** układu:

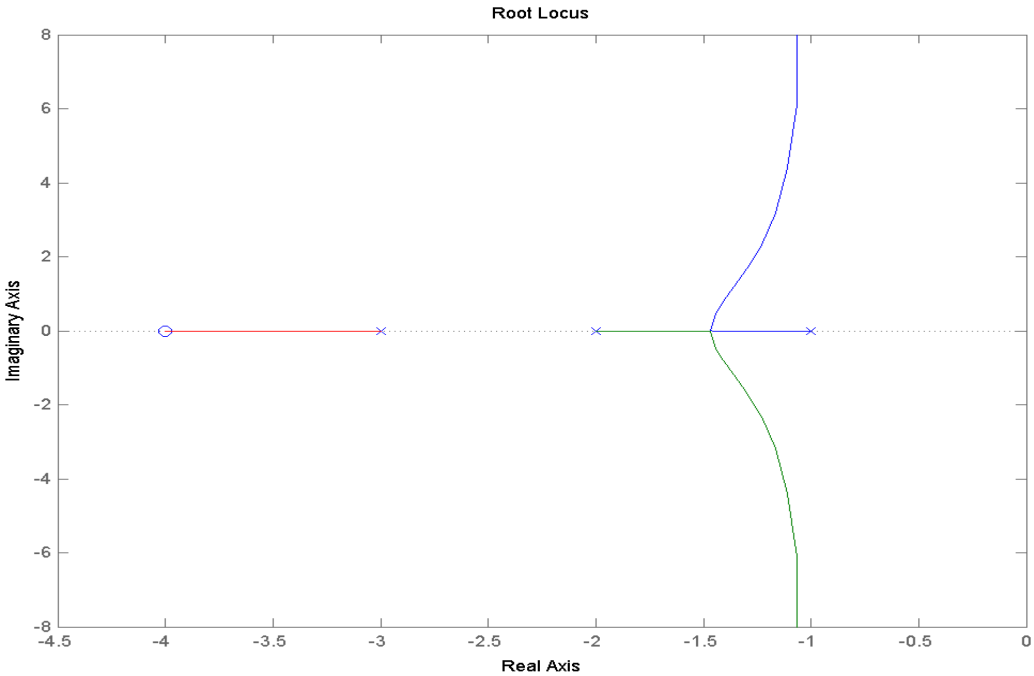
$$\omega = 1/T$$

Linie pierwiastkowe są wykresami pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego w funkcji wartości wzmocnienia regulatora w pętli sprzężenia zwrotnego.



Czyli pokazują **jak będą się przemieszczać bieguny gdy wzmocnienie K będzie rosło**.

Na poniższym rysunku przedstawione są linie pierwiastkowe dla układu III rzędu, posiadającego trzy bieguny: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$ i jedno zero: $z_1 = -4$



Najważniejsze cechy linii pierwiastkowych:

1. Linie pierwiastkowe zaczynają się zawsze w punktach odpowiadającym biegunom transmitancji układu otwartego (K = 0) – na rysunku zaznaczone krzyżykiem.
2. Linie te kończą się w punktach odpowiadającym zerom transmitancji (K = ∞) – na rysunku zaznaczone kółeczkiem.
3. Liczba linii pierwiastkowych równa się rzędowi układu, czyli liczbie biegunów.
4. Części linii będące wykresami pierwiastków zespolonych zawsze występują w postaci par sprzężonych.

W MATLABie do rysowania linii pierwiastkowych stosuje się funkcję **rlocus**:

```
rlocus(licz, mian);
```

której podaje się jako argumenty licznik i mianownik transmitancji G(s) **układu otwartego**. W wyniku działania funkcji powstaje wykres położenia zer i biegunów dla $K \in [0, \infty)$. Można zdefiniować własny przedział wzmocnienia jako wektor. Np. wykres linii pierwiastkowych dla K od 0 do 8 z krokiem 0.1 tworzy się następująco:

```
rlocus(licz, mian,[0:0.1:8]);
```

Zadanie 1.
Zbadaj wykresy linii pierwiastkowych dla nast. układów:

a) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(5s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{0.5s+1}{(s+1)(5s+1)}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(5s+1)(0.5s+1)}$

Jak wynika z wykresu linii pierwiastkowych dla trzeciej transmitancji, dla K większego od pewnej wartości bieguny układu przechodzą na prawą stronę płaszczyzny zespolonej, czyli układ staje się niestabilny. Aby odczytać to wzmocnienie krytyczne można zastosować funkcję **rlocfind**. Po wpisaniu:

```
[K,bieguny] = rlocfind(licz, mian);
```

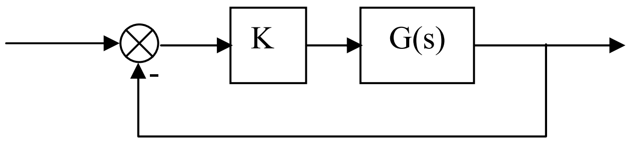
należy kliknąć myszą w punkcie przecięcia się wykresu z osią urojoną (obojętnie – dodatnią lub ujemną). Zmienna K będzie wówczas wartością wzmocnienia tego punktu linii pierwiastkowej, a wektor *bieguny* będzie zawierał wartości biegunów dla tego wzmocnienia.

Pomocnym narzędziem jest polecenie **sgrid**, które wyświetla linie **stałego tłumienia** (wychodzące promieniście z początku układu współrzędnych) oraz linie **stałej częstotliwości własnej** układu (elipsy o środku w początku układu współrzędnych).

Zadanie 2.
Dany jest układ:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

a) Wykorzystując poznane narzędzia dobierz regulator proporcjonalny (wzmocnienie K) aby układ zamknięty miał współczynnik tłumienia $\xi = 0.707$ (wtedy ϕ = 45°). Narysuj odpowiedź skokową układu zamkniętego.

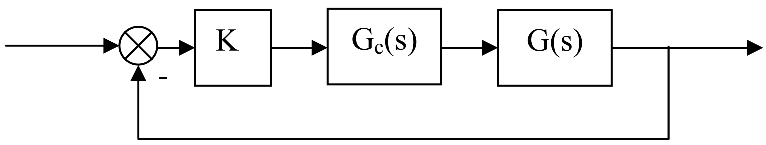


Podpowiedź:
- przydatne będzie narysowanie półprostej pod kątem 45° na wykresie linii pierwiastkowych. Można to zrobić za pomocą funkcji: `line([0 -1],[0 1])` po wcześniejszym użyciu `rlocus`.
- transmitancję układu zamkniętego można obliczyć za pomocą funkcji **feedback**: `sys_zamk = feedback(sys_otw, 1)`

b) Dodaj do układu kompensator (człon przyspieszająco-opóźniający fazę) o transmitancji:

$$G_c(s) = \frac{(s+1)}{(0.1s+1)}$$

czyli utwórz następujący układ:



Podpowiedź:
- Szeregowe łączenie transmitancji można wykonać za pomocą funkcji `series`:
  `sys = series(sys1, sys2);`

  Dobierz wzmocnienie K aby układ zamknięty miał taki sam współczynnik tłumienia jak w punkcie a). Narysuj odpowiedź skokową układu zamkniętego.

Która wersja jest lepsza a) czy b)? Porównaj częstotliwości własne układów oraz ich odpowiedzi skokowe