# Reprezentacja układów liniowych niezmienniczych w czasie w Matlabie

W Matlabie istnieją trzy podstawowe sposoby reprezentacji układów LTI (ang. *Linear Time-Invariant*):

- za pomocą transmitancji (ang. *transfer function*),
- za pomocą zer, biegunów i wzmocnienia układu (ang. *zero/pole/gain*)
- w przestrzeni stanów (ang. *state space*)

Można także zbudować schemat blokowy układu w Simulinku.
Na ćwiczeniach należy wykonać w Matlabie/Simulinku wszystkie poniższe przykłady obrazujące zastosowanie różnych metod reprezentacji i konwersji liniowych układów dynamicznych.

## 1. Transmitancja

Dla obiektu o postaci:


**Transmitancja operatorowa** (funkcja przejścia) to stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego Y(s) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego U(s) przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

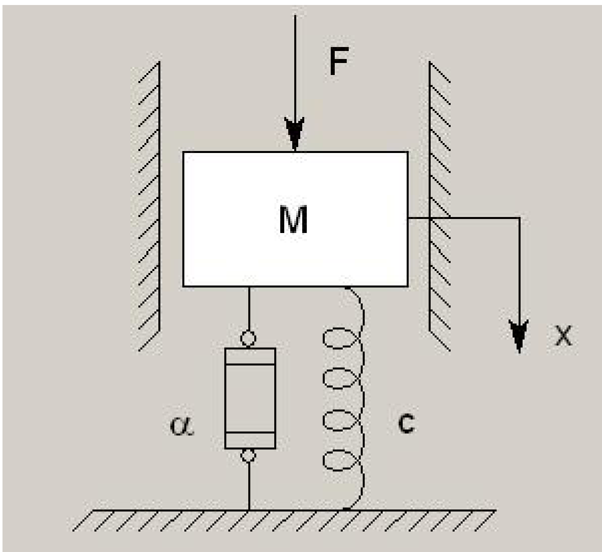
Transmitancja w postaci wielomianowej jest dana wzorem:

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}{a_1 s^{m-1}+\ldots+a_{m-1}s+a_m}$$

Przykładowo, prosty model zawieszenia samochodowego można przedstawić za pomocą układu inercyjnego II rzędu. Taki model składa się z masy osadzonej na sprężynie i tłumiku. Pod wpływem siły zewnętrznej masa może się przemieszczać w osi pionowej. Schemat układu przedstawia poniższy rysunek.

Oznaczenia:

F – siła wymuszająca
M – masa „pojazdu”
x – przemieszczenie masy
α – stała tłumika
c – stała sprężyny



Układ można opisać równaniem różniczkowym II rzędu:

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F$$

Aby policzyć transmitancję, obie strony równania należy poddać transformacie Laplace'a (zakładamy zerowe warunki początkowe):

$$Ms^2 X(s) + \alpha s X(s) + cX(s) = F(s)$$

Po uporządkowaniu:

$$X(s)(Ms^2 + \alpha s + c) = F(s)$$

Zakładając, że $F(s)$ jest wejściem, a $X(s)$ wyjściem układu, transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + c}$$

Przyjmij następujące parametry układu:

$M = 1000$; $F = 1000$; $\alpha = 500$; $c = 400$;

Aby zapisać tą transmitancję w Matlabie należy podać współczynniki licznika i mianownika, zaczynając od najwyższej potęgi $s$:

```
licz = [0 0 1];
mian = [1000 500 400];
```

Licznik i mianownik transmitancji w pełni charakteryzują obiekt, można ich używać jako argumenty np. funkcji **`step`** (odpowiedź skokowa) i **`impulse`** (odpowiedź impulsowa):

```
step(licz,mian);
impulse(licz,mian);
```

Innym sposobem jest zastosowanie funkcji **`tf`**:

```
obiekt = tf(licz,mian)
```

gdzie *obiekt* jest strukturą przechowującą wszystkie informacje o obiekcie. Aby wyświetlić pola tej struktury należy zastosować polecenie **`get(obiekt)`**. *obiekt* można stosować podobnie jak licznik i mianownik transmitancji, np:

```
step(obiekt);
impulse(obiekt);
```

W wersji sfaktoryzowanej transmitancję można wyrazić jako:

$$G(s) = k\frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_m)}$$

gdzie: $z_1 \ldots z_n$ – **zera**, $p_1 \ldots p_m$ – **bieguny**, k – **wzmocnienie**.

W celu znalezienia zer (pierwiastków licznika transmitancji), biegunów (pierwiastków mianownika transmitancji) oraz wzmocnienia układu, można zastosować funkcję **`tf2zp`** (ang. *transfer **f**unction **to** zero-**p**ole*) konwersji transmitancji do reprezentacji zera/bieguny/wzmocnienie:

```
[z, p, k] = tf2zp(licz, mian);
```

Wektor **z** zawiera zera układu, wektor **p** – bieguny, **k** – wzmocnienie.
Zera i bieguny można przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej za pomocą funkcji **`pzmap`**:

```
pzmap(p,z);
```

albo:

```
pzmap(licz,mian);
```

albo:

```
pzmap(obiekt);
```

### 1.1. Współczynnik tłumienia

Transmitancję można przedstawić w postaci standardowej (wyraz wolny mianownika jest jedynką):

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2+\alpha s+c}=\frac{\frac{1}{c}}{\frac{M}{c}s^2+\frac{\alpha}{c}s+1}$$

Porównując ten wzór ze wzorem transmitancji dla układu inercyjnego II rzędu w postaci standardowej:

$$G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2T\xi s+1}$$

gdzie: $\boldsymbol{K}$ – wzmocnienie, $\boldsymbol{T}$ – stała czasowa, $\boldsymbol{\xi}$ - współczynnik tłumienia
można wyliczyć, że w naszym przypadku:

$$K=\frac{1}{c}$$

$$T=\sqrt{\frac{M}{c}}$$

$$\xi=\frac{\alpha}{2\sqrt{cM}}$$

Współczynnik tłumienia $\xi$ określa charakter układu:

- dla $\xi < 1$ układ jest oscylacyjny
- dla $\xi \geq 1$ układ jest tłumiony

**Zadanie 1**

a) Odpowiedz na pytania:
- czy bieguny są rzeczywiste?
- czy układ jest stabilny?
- czy układ jest nieminimalnofazowy? (czyli czy posiada zera w prawej półpłaszczyźnie *s*)

b) Za pomocą funkcji *tf2zp* oblicz zera, bieguny i wzmocnienie transmitancji i przedstaw ją w postaci sfaktoryzowanej.

c) Dobierz tak parametry układu aby zaobserwować odpowiedzi układu na skok jednostkowy w przypadku oscylacyjnym i tłumionym.

## 2. Schemat blokowy

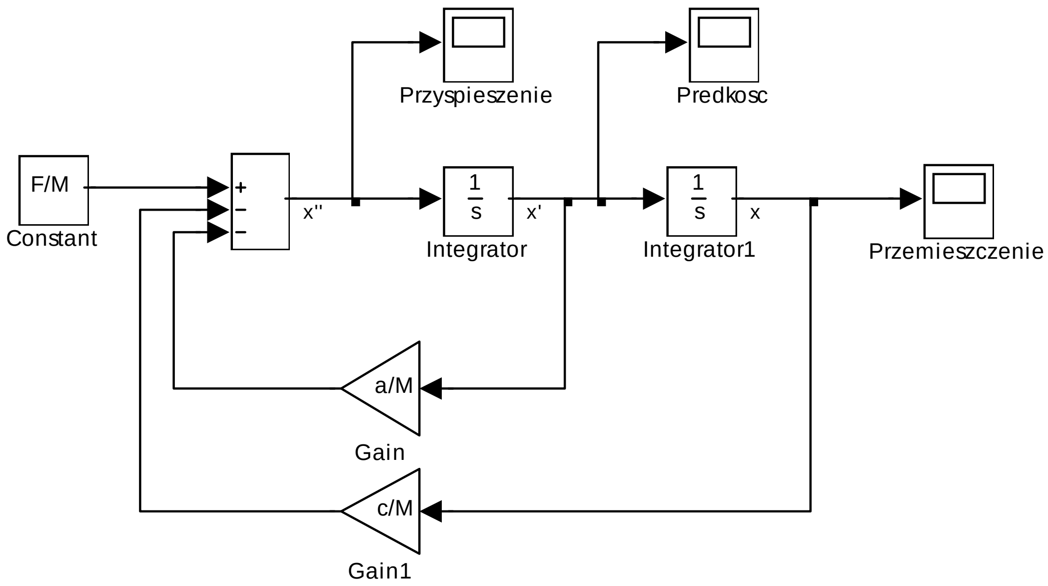
Jak wspomniano w Rozdz. 1, model zawieszenia samochodowego można opisać równaniem różniczkowym II rzędu:

$$M\ddot{x}+\alpha\dot{x}+cx=F$$

W celu utworzenia schematu blokowego należy napisać równanie układu w wygodniejszej postaci:

$$\ddot{x}=\frac{F}{M}-\frac{\alpha}{M}\dot{x}-\frac{c}{m}x$$

Analizując powyższe równie, można je łatwo przedstawić w postaci schematu blokowego:




Zbuduj taki układ w Simulinku i przeprowadź symulacje. Wpisz w Matlabie następujące parametry układu:
M = 1000; F = 1000; a = 500; c = 400;

Zaobserwuj na oscyloskopach jak zmieniają się przebiegi przemieszczenia ***x***, prędkości ***x'*** oraz przyspieszenia ***x''***.

## 3. Zera, bieguny, wzmocnienie

Dany jest układ o transmitancji:

$$G(s) = \frac{3s+1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{3(s+1/3)}{s(s+1)(s+3)}$$

Jak widać jest jedno zero z = –1/3 oraz trzy bieguny $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -3$. Wzmocnienie wynosi k = 3. Licznik i mianownik transmitancji w postaci wielomianowej łatwo jest znaleźć stosując funkcję **`zp2tf`** (ang. *zero-**p**ole **to** transfer **f**unction*) konwersji reprezentacji zera/bieguny/wzmocnienie do transmitancji:

```
[licz,mian] = zp2tf(z, p, k);
```
czyli:
```
[licz,mian] = zp2tf(-1/3,[0 -1 -3],3);
```

Aby wyświetlić transmitancję należy wpisać:

```
printsys(licz, mian);
```

Innym sposobem jest zastosowanie funkcji *zpk*:

```
obiekt = zpk(-1/3,[0 -1 -3],3)
```

**Zadanie 2.**
Za pomocą funkcji *zpk* zapisz poniższą transmitancję:

$$G(s) = \frac{4s+1}{s(0.2s+1)(10s+1)}$$

Uwaga: przed użyciem funkcji *zpk* transmitancję należy przekształcić tak, aby współczynnikiem przy każdym *s* była jedynka.

## 4. Przestrzeń stanów

Obiekt w tzw. „przestrzeni stanów” jest opisany za pomocą układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

gdzie **u** jest wejściem, **y** – wyjściem, **x** – stanem układu.
Współrzędne stanu wybiera się zazwyczaj jako wyjścia z integratorów (bloków całkujących). W naszym przypadku (modelu zawieszenia) możemy wybrać jako zmienne stanu przemieszczenie *x* oraz prędkość *dx/dt*:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \qquad \text{zmienne stanu}$$

Wobec tego, pochodne zmiennych stanu wynoszą:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{F}{M} - \dfrac{\alpha}{M} x_2 - \dfrac{c}{M} x_1 \end{cases}$$

co można zapisać w postaci macierzowej dla równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{M} & -\dfrac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} F$$

i dla równania wyjścia:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierze A, B, C, D wynoszą więc:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{M} & -\dfrac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D} = 0$$

Aby zamienić transmitancję na reprezentację w przestrzeni stanów, należy zastosować funkcję:

```
[A,B,C,D] = zp2ss(z,p,k)          % zero-pole to state space
```

lub:

```
[A,B,C,D] = tf2ss(licz,mian)      % transfer function to state space
```

Macierze **A,B,C,D** w pełni charakteryzują obiekt, można ich używać jako argumenty np. funkcji **step** i **impulse**:

```
step(A,B,C,D);
impulse(A,B,C,D);
```

Aby obliczyć wzmocnienie w stanie ustalonym można zastosować funkcję *dcgain*:

```
k = dcgain(A,B,C,D);
```

**Zadanie 3.**

Dokonaj konwersji transmitancji modelu zawieszenia do przestrzeni stanów obiema metodami tj. za pomocą funkcji **zp2ss** oraz **tf2ss** i porównaj wyniki (czy macierze **A,B,C,D** są takie same? czy odpowiedzi skokowe są takie same?).

## 5. Dokładność obliczeń

Funkcje MATLABa dają zazwyczaj wiarygodne wyniki. Należy jednak uważać w przypadku obliczeń zer i biegunów wielokrotnych oraz w przypadku układów wysokiego rzędu. Mogą pojawić się wtedy błędy numeryczne. Jako przykład weźmy układ bez zer i z 10 biegunami wielokrotnymi w s = -1, oraz ze wzmocnieniem k = 1:

```
z = [];
p = [-1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1];
k = 1;
```

przejdź do transmitancji:

```
[licz, mian] = zp2tf(z, p, k);
```

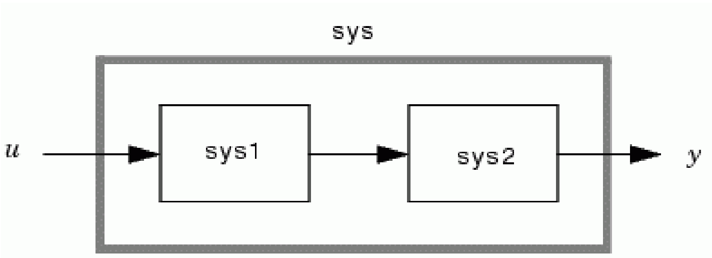
przejdź z powrotem do reprezentacji z/p/k:

```
[z1, p1, k1] = tf2zp(licz, mian);
```

Obliczony wektor biegunów **p1** powinien być taki sam jak wektor zadany **p**, ale nie jest. Jaka jest różnica?

## 6. Łączenie modeli

### 6.1. Łączenie szeregowe

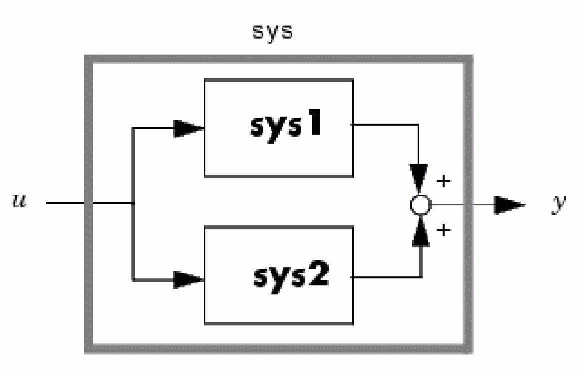



Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone szeregowo, można połączyć w jeden obiekt *sys* za pomocą funkcji *series*:

```
sys = series(sys1,sys2)
```

Transmitancja obiektu *sys* jest nazywana **transmitancją zastępczą** dla całego układu.

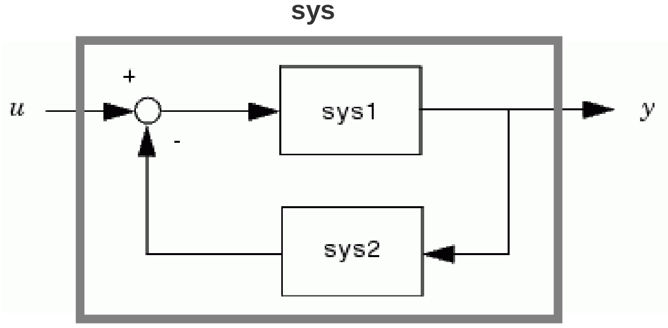
### 6.2. Łączenie równoległe




Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone równolegle, można połączyć w jeden obiekt *sys* za pomocą funkcji *parallel*:

```
sys = parallel(sys1,sys2)
```

### 6.3. Sprzężenie zwrotne




Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone za pomocą ujemnego sprzężenia zwrotnego, można sprowadzić do jednego obiektu *sys* za pomocą funkcji *feedback*:

```
sys = feedback(sys1,sys2)
```

W przypadku dodatniego sprzężenia zwrotnego należy zastosować:

```
sys = feedback(sys1,sys2,+1)
```

**Zadanie 6.**
Oblicz transmitancję zastępczą $G_{sys}$ dla połączenia szeregowego, równoległego i ujemnego sprzężenia zwrotnego, zakładając, że transmitancje obiektów *sys1* i *sys2* są dane jako:

$$G_{sys1}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+1} \quad \text{oraz} \quad G_{sys2}(s) = \frac{1}{s^3+s^2-2s+1}$$

## 7. Sprawozdanie

W sprawozdaniu przedstaw krótko podstawowe sposoby reprezentacji układów LTI w Matlabie. Podaj rozwiązania wszystkich zadań wraz z wynikami i kodem źródłowym.