

Лекция 7. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Выбор и реализация численного решения

7.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -f(x, y) \text{ при } x \in (a, b), y \in (c, d) \\ u(a, y) &= \mu_1(y), \quad u(b, y) = \mu_2(y), \\ u(x, c) &= \mu_3(x), \quad u(x, d) = \mu_4(x),\end{aligned}\tag{7.1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, функции $f(x, y)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$ заданы и числа a, b, c, d определены ($b > a, d > c$).

Пример: $u(x, y)$ – прогиб мембраны (прямоугольной формы) с закрепленными краями. Края мембраны закреплены ($\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$) и она находится под внешним воздействием $f(x, y)$.

Другой пример: $u(x, y)$ – температура (прямоугольной) пластины, на краях которой поддерживается постоянная температура ($\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$). Поверхность пластины теплоизолирована и на ней имеются поверхностные источники (стоки) тепла с плотностью $f(x, y)$.

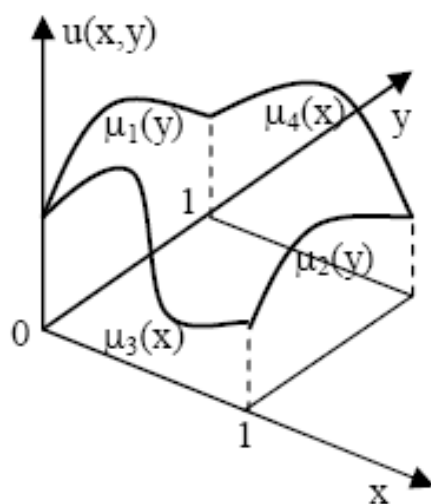


Рис. 7.1

С целью численного решения задачи (7.1) введем на множестве $[a, b] \times [c, d]$ прямоугольную сетку размерности (n, m) , равномерную по каждому из направлений x и y с шагами h и k соответственно:
 $h = (b - a) / n, k = (d - c) / m$.

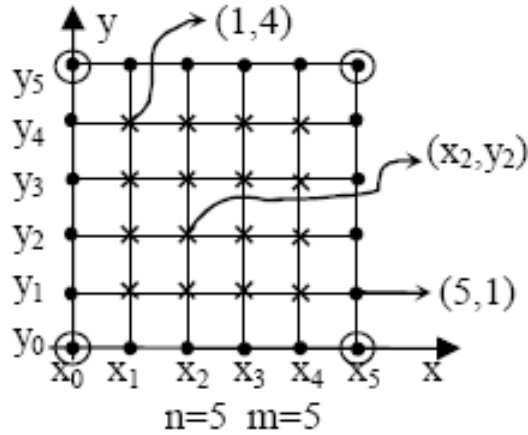


Рис. 7.2

Пары значений (x_i, y_j) , где $x_i = a + ih, y_j = c + jk, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$, назовем узлами сетки. Для узла (x_i, y_j) используем краткое обозначение (i, j) .

На рисунке отмечены:

$$x_i = ih, i = 0, n; h = 1/n; y_j = jk, j = 0, m; k = 1/m$$

(x_i, y_j) – узел сетки

• - граничные, × - внутренние, ⊙ - граничные угловые.

В граничных угловых функции μ должны стыковаться друг с другом.

Через $u(x, y)$ обозначим точное решение задачи (7.1), а через $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ – его значение в узле (i, j) .

Значения функции $u(x, y)$ в граничных узлах известны из граничных условий задачи.

Сеточной функцией называют функцию, заданную на множестве всех узлов сетки $(i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m)$.

Если функция $u(x, y)$, являющаяся точным решением задачи (7.1), рассматривается только в узлах сетки, считаем, что обозначение $u(x, y)$ соответствует сеточной функции.

Если $v(x, y)$ – сеточная функция, то $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ – ее значение в узле $(i, j), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$.

Для отыскания численного решения задачи (7.1) построим *разностную схему*.

7.2. Разностные операторы для вычисления частных производных. Погрешность операторов

$$x_{i\pm 1} = x_i \pm h \quad y_{j\pm 1} = y_j \pm k$$

Рассмотрим функцию $u(x, y)$

$$\left(u_{xx}\right)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} \quad (5) \quad \left(u_{yy}\right)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{k^2} \quad (6)$$

Утверждение:

■ (x_i, y_{j-1})

Если $u(x, y)$ – достаточно гладкая, то разностные операторы (5), (6) аппроксимируют $u_{xx}|_{x_i, y_j}$, $u_{yy}|_{x_i, y_j}$ со вторым порядком по h и k соответственно.

$$u_{xx}|_{x=x_i, y=y_j} = \left(u_{xx}\right)_{ij} + O(h^2) \quad u_{yy}|_{x=x_i, y=y_j} = \left(u_{yy}\right)_{ij} + O(k^2)$$

Доказательство: рассмотрим

$$u(x, y), \text{ пусть } \varphi(x) = u(x, y_j) \quad \varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{h^2} + \frac{h^2}{12} \varphi'''(\xi), \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

$$\text{по определению: } \varphi''(x_i) = u_{xx}|_{x=x_i, y=y_j}; \quad \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{h^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}$$

$$\frac{h^2}{12} \varphi'''(\xi) = u_{xxx}|_{x=\xi, y=y_j}, \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]; \quad \varphi''(x_i) = u_{xx}|_{x=x_i, y=y_j} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \frac{h^2}{12} u_{xxx}|_{x=\xi, y=y_j} \quad (7)$$

$$(8) \quad u_{yy}|_{x=x_i, y=y_j} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{k^2} + \frac{k^2}{12} u_{yyy}|_{x=x_i, y=\zeta}, \zeta \in [y_{j-1}, y_{j+1}]$$

Таким образом, рассмотренные выше операторы аппроксимируют оператор Лапласа со вторым порядком по h и k .

Шаблон аппроксимации оператора Лапласа показан на рисунке:

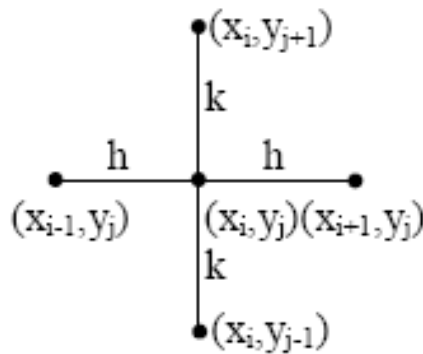


Рис. 7.3

7.3. Запись разностной схемы

Для отыскания численного решения задачи (7.1) используем *разностную схему*, основанную на аппроксимации частных производных второго порядка по x и по y центральными разностными операторами на трехточечных шаблонах.

$$\begin{aligned}v_{x\bar{x},ij} + v_{y\bar{y},ij} &= -f_{ij}, \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1; \\v_{0j} &= \mu_{1j} = \mu_1(y_j), \quad v_{nj} = \mu_{2j} = \mu_2(y_j) \quad \text{при } j = 0, \dots, m; \\v_{i0} &= \mu_{3i} = \mu_3(x_i), \quad v_{im} = \mu_{4i} = \mu_4(x_i) \quad \text{при } i = 0, \dots, n\end{aligned}\tag{7.2}$$

где

$$v_{x\bar{x},ij} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h^2}, \quad v_{y\bar{y},ij} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{k^2}.\tag{7.3}$$

Точное решение задачи (7.2) обозначим через $v(x, y)$.

Указанная функция является сеточной.

Будем рассматривать ее как численное (приближенное) решение задачи (7.1).

Очевидно, что значения граничных условий ($\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$) в граничных угловых узлах не влияют на решение разностной схемы. Поэтому граничные условия (7.2) записываем с индексами $j = 1, \dots, m-1$ вместо $j = 0, \dots, m$, с индексами $i = 1, \dots, n-1$ вместо $i = 0, \dots, n$.

В дальнейшем (7.2) записываем в виде

$$\begin{aligned}v_{x\bar{x},ij} + v_{y\bar{y},ij} &= -f_{ij}, \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1; \\v_{0j} &= \mu_{1j} = \mu_1(y_j), \quad v_{nj} = \mu_{2j} = \mu_2(y_j) \quad \text{при } j = 1, \dots, m-1; \\v_{i0} &= \mu_{3i} = \mu_3(x_i), \quad v_{im} = \mu_{4i} = \mu_4(x_i) \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1\end{aligned}\tag{7.2*}$$

7.4. Запись схемы в матричном виде

Так как значения v_{ij} при $i = 0$ или $i = n$ и значения v_{ij} при $j = 0$ или $j = m$ в задаче (7.2*) заданы явно, указанную задачу можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных v_{ij} , где $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$.

Запишем (7.2*) в матричном виде. Для этого определим вектор V размерности $(n-1)(m-1)$:

$$\mathbf{V} = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n-1,1}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n-1,2}, \dots, v_{1,m-1}, v_{2,m-1}, \dots, v_{n-1,m-1}).$$

Если отложить по оси абсцисс x , по оси ординат y и нарисовать на плоскости (x, y) сетку с узлами (i, j) , то окажется, что компоненты вектора \mathbf{V} упорядочены слева направо по x и затем снизу вверх по y .

Далее тем же способом упорядочим уравнения задачи (7.2): слева направо по x и снизу вверх по y . Тогда (7.2) примет вид:

$$\mathcal{A} \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (7.4)$$

Здесь \mathcal{A} – матрица размерности $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ и \mathbf{F} – вектор размерности $(n-1)(m-1)$.

На рис. 7.4 и 7.5 показан вид (7.4) для сетки $(n, m) = (5, 6)$.

Это два способа записи, отличающиеся лишь написанием правой части системы.

Число A , расположенное на главной диагонали матрицы \mathcal{A} , определяется шагами сетки:

$$A = -2 \times \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right). \quad (7.5)$$

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \frac{v_{41}}{v_{12}} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \frac{v_{42}}{v_{13}} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \frac{v_{43}}{v_{14}} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ \frac{v_{44}}{v_{15}} \\ v_{25} \\ v_{35} \\ v_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{11} - \frac{\mu_{31}}{k^2} - \frac{\mu_{11}}{h^2} \\ -f_{21} - \frac{\mu_{32}}{k^2} \\ -f_{31} - \frac{\mu_{33}}{k^2} \\ -f_{41} - \frac{\mu_{34}}{k^2} - \frac{\mu_{21}}{h^2} \\ -f_{12} - \frac{\mu_{12}}{h^2} \\ -f_{22} \\ -f_{32} \\ -f_{42} - \frac{\mu_{22}}{h^2} \\ -f_{13} - \frac{\mu_{13}}{h^2} \\ -f_{23} \\ -f_{33} \\ -f_{43} - \frac{\mu_{23}}{h^2} \\ -f_{14} - \frac{\mu_{14}}{h^2} \\ -f_{24} \\ -f_{34} \\ -f_{44} - \frac{\mu_{24}}{h^2} \\ -f_{15} - \frac{\mu_{41}}{k^2} - \frac{\mu_{15}}{h^2} \\ -f_{25} - \frac{\mu_{42}}{k^2} \\ -f_{35} - \frac{\mu_{43}}{k^2} \\ -f_{45} - \frac{\mu_{44}}{k^2} - \frac{\mu_{25}}{h^2} \end{pmatrix}$$

где $A = -2 \times \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)$,

$f_{ij} = f(x_i, y_j)$, $\mu_{1j} = \mu_1(y_j)$, $\mu_{2j} = \mu_2(y_j)$, $\mu_{3i} = \mu_3(x_i)$, $\mu_{4i} = \mu_4(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$,

$h = \frac{b-a}{n}$, $k = \frac{d-c}{m}$

Рис. 7.4. Матричная запись разностной схемы на сетке $(n, m) = (5, 6)$

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \frac{v_{41}}{v_{12}} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \frac{v_{42}}{v_{13}} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \frac{v_{43}}{v_{14}} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ \frac{v_{44}}{v_{15}} \\ v_{25} \\ v_{35} \\ v_{45} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{11} + \frac{v_{10}}{k^2} + \frac{v_{01}}{h^2} \\ f_{21} + \frac{v_{20}}{k^2} \\ f_{31} + \frac{v_{30}}{k^2} \\ f_{41} + \frac{v_{40}}{k^2} + \frac{v_{51}}{h^2} \\ \hline f_{12} + \frac{v_{02}}{h^2} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} + \frac{v_{52}}{h^2} \\ \hline f_{13} + \frac{v_{03}}{h^2} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} + \frac{v_{53}}{h^2} \\ \hline f_{14} - \frac{v_{04}}{h^2} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} - \frac{v_{54}}{h^2} \\ \hline f_{15} + \frac{v_{16}}{k^2} + \frac{v_{05}}{h^2} \\ f_{25} + \frac{v_{26}}{k^2} \\ f_{35} + \frac{v_{36}}{k^2} \\ f_{45} + \frac{v_{46}}{k^2} + \frac{v_{55}}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{где } A = -2 \times \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right),$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), v_{0j} = \mu_1(y_j), v_{5j} = \mu_2(y_j), v_{i0} = \mu_3(x_i), v_{i6} = \mu_4(x_i), i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1,$$

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{n}{b-a} \right)^2, \quad \frac{1}{k^2} = \left(\frac{m}{d-c} \right)^2$$

Рис. 7.5. Матричная запись разностной схемы на сетке $(n, m) = (5, 6)$, второй способ

Нетрудно убедиться, что при любых (n, m) , таких, что $n > 2, m > 2$, матрица \mathcal{A} является блочной трехдиагональной, включает $(n-1) \times (n-1)$ блоков размерности $(m-1) \times (m-1)$.

Ненулевые блоки расположены на главной блочной диагонали и блочных диагоналях выше и ниже главной.

На главной блочной диагонали расположены блоки вида

$$\begin{pmatrix} A & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A \end{pmatrix}.$$

Такой блок сам является трехдиагональной матрицей.

На верхней и нижней блочных поддиагоналях расположены блоки, являющиеся диагональными матрицами. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

Далее будет показано, что

$$\det \mathcal{A} \neq 0 \quad (7.6)$$

и решение задачи (7.4) при любой правой части существует и единственно (см. Лекцию 8 – принцип максимума для разностных схем).

7.5. Оценка погрешности аппроксимации. Теорема о сходимости схемы

Погрешность решения дифференциальной задачи (8.1) разностной схемой (8.2) есть вектор \mathbf{z} с компонентами z_{ij} , $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, причем каждая компонента есть разность истинного решения дифференциальной задачи (8.1) и решения разностной схемы (8.2):

$$z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

Погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (8.1) разностной схемой (8.2) есть вектор ψ с компонентами ψ_{ij} , $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, причем каждая компонента есть невязка соответствующего уравнения разностной схемы на решении дифференциальной задачи:

$$\psi_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + f_{i,j},$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

$$\psi_{i0} = u_{i0} - v_{i0} = 0, \quad \psi_{0j} = u_{0j} - v_{0j} = 0,$$

$$\psi_{in} = u_{in} - v_{in} = 0, \quad \psi_{mj} = u_{mj} - v_{mj} = 0,$$

$$i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

Утверждение:

Если точное решение задачи (1) является достаточно гладким, то разностная схема (10) аппроксимирует это решение со 2-м порядком по h и k .

Погрешность решения задачи (1), можно вычислить с помощью схемы (10): $z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$; $i=0, n$; $j=0, m$.

ψ - погрешность аппроксимации: ψ_{ij} - это невязка уравнения, ассоциированного с узлом ij , на решении дифференциальной задачи (1). Для $i=1, n-1$; $j=1, m-1$ (для внутренних узлов):

$$\psi_{ij} = \left(u_{xx} \right)_{ij} + \left(u_{yy} \right)_{ij} + f_{ij} - \left(u_{xx} + u_{yy} + f(x, y) \right) \Big|_{x=x_i, y=y_j} = \left(u_{xx} \right)_{ij} - u_{xx}(x_i, y_j) + \left(u_{yy} \right)_{ij} - u_{yy}(x_i, y_j) =$$

$$= -\frac{h^2}{12} u_{xxxx}^{IV}(\xi, y_j) - \frac{k^2}{12} u_{yyyy}^{IV}(x_i, \zeta), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]; \quad \zeta \in [y_{j-1}, y_{j+1}]$$

$$\Rightarrow \psi_{ij} = -\frac{1}{12} \left(h^2 u_{xxxx}^{IV}(\xi, y_j) + k^2 u_{yyyy}^{IV}(x_i, \zeta) \right) \quad (11)$$

Для граничных точек: $\psi_{0j} = u_{0j} - v_{0j} = 0$ $j = 1, m-1$; $\psi_{nj} = 0$; $\psi_{i0} = 0$; $\psi_{im} = 0$ - погрешности аппроксимации нулевые.

Следствие:

$$\max_{\substack{i=0, n \\ j=0, m}} |\psi_{ij}| \leq \frac{1}{12} (h^2 + k^2) M, \quad \text{где } M = \max_{\substack{x \in (0,1) \\ y \in (0,1)}} \left\{ |u_{xxxx}^{IV}(x, y)|, |u_{yyyy}^{IV}(x, y)| \right\} - \text{не зависит от сетки}$$

Это доказательство порядка аппроксимации, но еще не доказательство сходимости.

Подставим вектор \mathbf{z} в разностную схему:

$$\begin{aligned}
& \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{k^2} = \\
& = \frac{(u_{i+1,j} - v_{i+1,j}) - 2(u_{i,j} - v_{i,j}) + (u_{i-1,j} - v_{i-1,j})}{h^2} + \frac{(u_{i,j+1} - v_{i,j+1}) - 2(u_{i,j} - v_{i,j}) + (u_{i,j-1} - v_{i,j-1})}{k^2} = \\
& = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{k^2} = \\
& = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + f_{i,j} = \psi_{i,j} .
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{k^2} = \psi_{i,j}$$

$$i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, n-1.$$

Погрешность аппроксимации граничных условий является нулевой, т.е. аппроксимация является точной. Тем не менее, можно записать

$$z_{0j} = u_{0j} - v_{0j} = u_{0j} - \mu_{1j} = \psi_{0j} \quad j = 1, \dots, m-1.$$

$$z_{i0} = u_{i0} - v_{i0} = u_{i0} - v_{1j} = \psi_{i0}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$$z_{mj} = u_{mj} - v_{mj} = u_{mj} - \mu_{2j} = \psi_{mj} \quad j = 1, \dots, m-1.$$

$$z_{in} = u_{in} - v_{in} = u_{in} - v_{2j} = \psi_{in}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Утверждение. Погрешность решения является решением разностной схемы, аналогичной схеме (8.2) и отличающейся от нее тем, что в правой части указана погрешность аппроксимации.

Теорема о сходимости формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть решение (7.1) существует, единственно и является достаточно гладким. Тогда при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ решение разностной схемы (7.2*) сходится к решению задачи (7.1) со вторым порядком по h, k с оценками

$$\begin{aligned}
\max_{(i,j) \in \omega_{hk}} |z_{ij}| & \leq \frac{\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2}{16} \cdot ((b-a)^2 + (d-c)^2), \\
\max_{(i,j) \in \gamma_{hk}} |z_{ij}| & = 0,
\end{aligned} \tag{7.7}$$

где \hat{M}_1, \hat{M}_2 см. выше, они не зависят от h, k .

Доказательство сходимости схемы будет проведено в Лекции 8.

Займемся методом решения схемы (8.2). При больших значениях n и m размерность (7.4) велика. Для решения СЛАУ большой размерности имеет смысл использовать *итерационные методы линейной алгебры*. Кроме того, см. рис. 7.4-7.5, матрица \mathbf{A} является разреженной (не более 5 ненулевых элементов в строке). Это обстоятельство следует учесть при реализации итерационного метода.

7.6. Введение в итерационные методы линейной алгебры

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (7.8)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, матрица \mathbf{A} размерности $n \times n$ не вырождена. Точное решение системы (7.8) обозначим через \mathbf{x}^* .

Определение. Пусть вычислительная погрешность отсутствует. Численные методы, гарантирующие, что через конечное число арифметических действий будет найдено точное решение задачи (7.8), называются прямыми.

К прямым методам решения СЛАУ относят правило Крамера, метод Гаусса, метод Холесского, метод прогонки и др.

Итерационные методы решения СЛАУ используют некоторое начальное приближение $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ и затем строят последовательность $\{\mathbf{x}^s\}$, $s = 1, 2, \dots$, каждый элемент которой, то есть $\mathbf{x}^s \in \mathbf{R}^n$, может рассматриваться как приближенное решение задачи (7.8).

Гарантий совпадения какого-либо \mathbf{x}^s с точным решением \mathbf{x}^* нет.

Определение. При решении задачи (7.8) итерационный метод называется сходящимся, если при любом начальном приближении $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ последовательность $\{\mathbf{x}^s\}$, $s = 1, 2, \dots$, сходится к точному решению (7.8), то есть

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad (7.9)$$

Примечание. В определении сходимости можно использовать любые векторные нормы. При доказательстве сходимости обычно используют

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(x, x)}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, n} |x_i|.$$

В конечномерном пространстве все способы задания нормы эквивалентны. Поэтому если в некоторой норме сходимость будет доказана, она будет иметь место и в любой другой эквивалентной.

Приближенным решением задачи (7.8) на итерации с номером s называют вектор \mathbf{x}^s .

Погрешностью решения задачи (7.8) на итерации с номером s называют вектор $\mathbf{z}^s = \mathbf{x}^s - \mathbf{x}^*$.

Невязкой задачи (7.8) на итерации с номером s , называют вектор $\mathbf{r}^s = A\mathbf{x}^s - \mathbf{b}$.

Погрешность и невязка связаны уравнением $A\mathbf{z}^s = \mathbf{r}^s$.

Для оценки качества решения \mathbf{x}^s используют величины $\|\mathbf{z}^s\|$ и $\|\mathbf{r}^s\|$: чем они меньше, тем лучше.

Если на итерации s задача (7.8) решена точно, т.е. $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*$, то $\|\mathbf{z}^s\| = 0$ и $\|\mathbf{r}^s\| = 0$.

Примечание. Невязку \mathbf{r}^s и ее норму всегда можно вычислить – для этого достаточно знать \mathbf{x}^s . Погрешность \mathbf{z}^s и ее норму можно вычислить только для тестовых задач, так как кроме \mathbf{x}^s нужно знать точное решение \mathbf{x}^* .

Величину $\varepsilon^s = \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^{s-1}\|$ называют *точностью метода на итерации с номером s* . Эта величина показывает, насколько существенно отличаются друг от друга два соседних приближенных решения.

Остановку метода определяют числом N_{\max} – максимально допустимым числом итераций, и числом ε – требуемой точностью. Эти числа устанавливает пользователь.

Как только $s \geq N_{\max}$ либо

$$\varepsilon^s = \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^{s-1}\| \leq \varepsilon. \quad (7.10)$$

(достигнута требуемая точность), дальнейшие итерации не проводятся.

Выход по критерию $s \geq N_{\max}$ называют *выходом по числу итераций*, выход по критерию (7.10) – *выходом по точности*.

Чтобы применить (7.10), в качестве нормы \mathbf{x} обычно используют

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Тогда (7.10) примет вид

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i^s - x_i^{s-1}| \leq \varepsilon.$$

Вектор \mathbf{x}^s , полученный на последней итерации, рассматривают как *итоговое численное решение* (7.8). Норму погрешности \mathbf{z}^s пытаются оценить на основе теорем о сходимости.

Если метод сходится и N_{\max} выбран достаточно большим, то состоится выход по точности, и чем меньше заданное пользователем значение ε , тем, как правило, точнее \mathbf{x}^s соответствует \mathbf{x}^* .

7.7. Примеры итерационных методов

Рассмотрим систему (7.8). Запишем матрицу A в виде

$$A = L + D + R,$$

где D – диагональная матрица (ее главная диагональ совпадает с главной диагональю A), L – нижняя треугольная матрица с нулевой главной диагональю и R – верхняя треугольная матрица с нулевой главной диагональю. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод Якоби запишется в виде

$$D \mathbf{x}^{s+1} = - (R + L) \mathbf{x}^s - \mathbf{b}. \quad (7.11)$$

Метод Зейделя запишется в виде

$$(D + L) \mathbf{x}^{s+1} = -R \mathbf{x}^s - \mathbf{b}. \quad (7.12)$$

Метод верхней релаксации примет вид

$$(D + \omega L)(x^{s+1} - x^s)/\omega + A x^s = b. \quad (7.13)$$

Приведем примеры теорем о сходимости методов.

Теорема. Если матрица A удовлетворяют условию строгого диагонального преобладания, метод Якоби сходится.

Теорема. Если матрица A симметрична и положительно определена, метод Зейделя сходится.

Теорема. Если матрица A симметрична и положительно определена и параметр $\omega \in (0,2)$, метод верхней релаксации (МВР) сходится.

Оценка оптимального значения ω для МВР имеет вид

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \quad (7.14)$$

где $B = D^{-1}(L - R)$, $\rho(B) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(B)|$ - спектральный радиус B .

Покомпонентная запись методов показана ниже.

7.8. Требования к матрицам СЛАУ

Результаты о сходимости метода Якоби предполагают наличие у матрицы A свойства строгого диагонального преобладания.

Определение. Говорят, что матрица A размерности $n \times n$ удовлетворяет условиям *строгого диагонального преобладания*, если модуль каждого ее диагонального элемента больше суммы модулей недиагональных элементов той же строки:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$$

При выполнении нестрогого неравенства для каждой строки говорят о *нестрогом диагональном преобладании*.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$$

Результаты о сходимости метода Зейделя и МВР предполагают, что матрица СЛАУ *симметрична и положительно определена*.

Матрица A размерности $n \times n$ называется *симметричной*, если $A = A^T$.

Матрица A размерности $n \times n$ называется *положительно определенной* (обозначается $A > 0$), если для $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, такого, что $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, верно $(A\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$.

Матрица A размерности $n \times n$ называется *отрицательно определенной* (обозначается $A < 0$), если для $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, такого, что $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, верно $(A\mathbf{h}, \mathbf{h}) < 0$.

Аналогично формулируются определения, основанные на нестрогих неравенствах, для *неотрицательно определенных* и *неположительно определенных* матриц.

Утверждение. Если матрица A положительно определена, все ее собственные числа положительны.

Доказательство: каждому собственному числу матрицы A соответствует хотя бы один (ненулевой) собственный вектор. Пусть $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ есть собственный вектор для собственного числа λ . Тогда $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, откуда с учетом $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ следует $\lambda > 0$.

Аналогичное утверждение можно доказать для других типов знакоопределенных матриц.

Утверждение. Знакоопределенность симметричной матрицы ($A = A^T$) зависит от знаков ее собственных чисел: если все собственные числа симметричной матрицы положительны, она положительно определена, отрицательны – отрицательно определена.

Доказательство данного утверждения основано на том, что *симметричная матрица имеет ортонормированный базис из собственных векторов*.

Расположение спектра матрицы можно оценить по теореме Гершгорина и следствию из нее.

Теорема. Пусть матрица A имеет размерность $n \times n$. Тогда ее собственные числа лежат на комплексной плоскости в кругах Гершгорина:

$$\left| z - a_{ii} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ij} \right|, i = 1, \dots, n$$

Следствие. Если множество кругов Гершгорина распадается на несколько связных компонент, каждая компонента содержит столько собственных чисел, сколько кругов ее составляет.

Проверим выполнение свойств для матрицы \mathcal{A} из (7.4) на примере сетки (5,6).

Утверждение 1. Для матрицы \mathcal{A} выполняется свойство нестрогого диагонального преобладания.

Доказательство. Очевидно, что для строк матрицы выполняется одно из условий:

$$\left| A \right| > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}, \left| A \right| > \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k^2}, \left| A \right| > \frac{1}{h^2} + \frac{2}{k^2} \text{ либо } \left| A \right| = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}.$$

Утверждение 2. Матрица симметрична: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$.

Утверждение 3. Матрица \mathcal{A} отрицательно определена.

Доказательство. Круги Гершгорина имеют вид

$$\left| z - A \right| \leq \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}, \left| z - A \right| \leq \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k^2}, \left| z - A \right| \leq \frac{1}{h^2} + \frac{2}{k^2}, \left| z - A \right| \leq \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}.$$

Их расположение на комплексной плоскости таково, что собственные числа матрицы \mathcal{A} не могут попасть в полуплоскость справа от мнимой оси (центр кругов находится в точке A , радиус не превышает $|A|$, см. рис. 7.6).

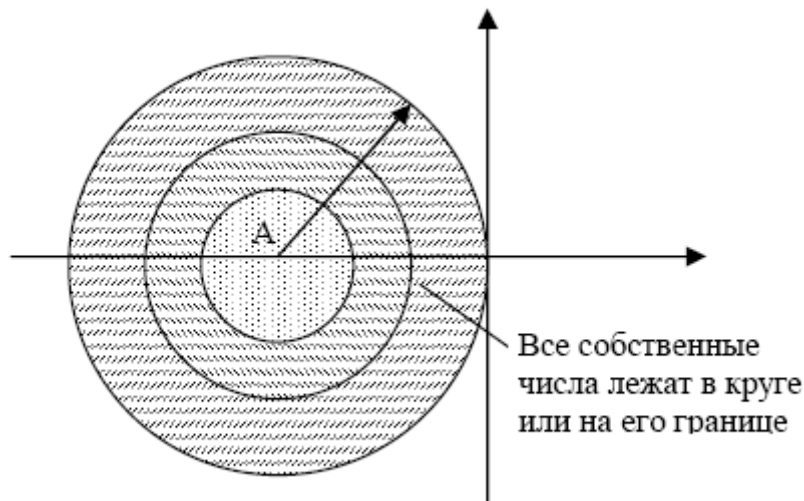


Рис. 7.6

Так как $\det \mathcal{A} \neq 0$ (обоснование см. в Лекции 8), собственное число матрицы \mathcal{A} не может быть нулевым. Так как $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$, собственные числа действительны. Значит, все они отрицательны и матрица \mathcal{A} отрицательно определена.

Утверждения 1-3 для матрицы разностной схемы можно доказать и для сеток произвольной размерности.

7.9. Выбор метода решения

Так как $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T < 0$, умножим левую и правую части (7.4) на -1 :

$$-\mathcal{A} \mathbf{V} = -\mathbf{F} \quad (7.15)$$

Система (7.15) является системой линейных алгебраических уравнений с симметричной и положительно определенной матрицей $(-\mathcal{A})$.

Утверждение. Решение (7.15) существует, единственно и совпадает с решением (7.4). Его можно найти методом Зейделя или методом верхней релаксации.

7.10. Реализация метода Зейделя

Метод Зейделя имеет вид:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L}) \mathbf{x}^{s+1} = -\mathbf{R} \mathbf{x}^s - \mathbf{b}. \quad (7.12)$$

Для вычисления координат \mathbf{x}^{s+1} получим

$$a_{ii} x_i^{s+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{s+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^s = b_i,$$

ИЛИ

$$x_i^{s+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{s+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^s + b_i \right]. \quad (7.16)$$

где $i = 1, \dots, n$.

Ниже приведен фрагмент кода, реализующего метод Зейделя:

```

1. int Nmax = 10000; // максимальное число итераций (не менее 1)
2. int S=0; // счетчик итераций
3. double eps = 0.0000001; // минимально допустимый прирост
4. double eps_max = 0; // текущее значение прироста
5. double eps_cur = 0; // для подсчета текущего значения прироста
6. const int n; //размерность системы линейных уравнений
7. double a[n][n]; // элементы матрицы A
8. double x[n]; // искомый вектор x
9. double b[n]; // вектор правой части b
10. int i, j; //индексы
11. double x_old; // старое значение преобразуемой компоненты вектора x
12. double x_new; // новое значение преобразуемой компоненты вектора x
13. bool f = false; // условие остановки
14. while (!f) do
15. { eps_max = 0;
16.   for( i = 0; i < n; i++)
17.   { x_old = x[i];
18.     x_new = b[i];
19.     for( j = 0; j < n; j++)
20.       if (j!=i) { x_new = x_new - a[i][j]*x[j] };
21.     x_new = x_new/a[i][i];
22.     eps_cur = fabs(x_old - x_new);
23.     if (eps_cur > eps_max) {eps_max = eps_cur};
24.     x[i]=x_new;
25.   }
26.   S=S+1;
27.   if ((eps_max < eps) or (S >= Nmax) ){ f = true}
28. }
```

По завершении внешнего цикла переменная S показывает число проведенных итераций, массив $x[n]$ содержит результат последней итерации, переменная eps_max показывает максимальное отличие компонент вектора $x[n]$ от компонент вектора, полученного на предпоследней итерации.

Заметим, что до начала внешнего цикла необходимо задать параметры метода ($Nmax$ и eps), указать размерность системы n , задать (передать, прочесть, вычислить) значения элементов массивов $a[n][n]$, $b[n]$ и задать начальное приближение, записав его в массив $x[n]$.

По завершении работы метода необходимо сообщить пользователю, что «при решении системы $Ax = b$ с помощью метода Зейделя с параметрами $Nmax = \dots$ и $eps = \dots$, за $S = \dots$ итераций получено численное решение $x[i] = \dots$, $i = 0, \dots, n-1$, обеспечивающее точность $eps_max = \dots$ ». Из текста сообщения, в частности, будет видно, как был остановлен метод – по точности или по числу итераций.

При составлении кода учтено, что в C++ массив $x[n]$ содержит элементы от $x[0]$ до $x[n-1]$.

7.11. Решение схемы методом Зейделя

Запишем формулы для решения (7.4) методом Зейделя.

Значения v_{i0} и v_{im} при $i = 1, \dots, n-1$ и значения v_{0j} и v_{nj} при $j = 1, \dots, m-1$ определены граничными условиями задачи (7.1).

Решение задачи (7.2) сводится к решению (7.15). Точное решение системы (7.15) обозначим через V , начальное приближение – через V^0 , а приближение, полученное на итерации с номером s – через V^s . Векторы V , V^0 и V^s имеют компоненты v_{ij} , v_{ij}^0 , v_{ij}^s соответственно, где $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$. При решении (1.6) на сетке $(n, m) = (5, 6)$ на итерации с номером $s + 1$ получим:

$$v_{11}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\left(\frac{1}{h^2} v_{21}^s + \frac{1}{k^2} v_{12}^s \right) + \left(f_{11} + \frac{1}{h^2} v_{01} + \frac{1}{k^2} v_{10} \right) \right),$$

$$v_{21}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\frac{1}{h^2} v_{11}^{s+1} + \left(\frac{1}{h^2} v_{31}^s + \frac{1}{k^2} v_{22}^s \right) + \left(f_{21} + \frac{1}{k^2} v_{20} \right) \right),$$

...

$$v_{12}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\frac{1}{k^2} v_{11}^{s+1} + \left(\frac{1}{h^2} v_{22}^s + \frac{1}{k^2} v_{13}^s \right) + \left(f_{12} + \frac{1}{h^2} v_{02} \right) \right),$$

$$v_{22}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\left(\frac{1}{h^2} v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{ij-1}^{s+1} \right) + \left(\frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s + \frac{1}{k^2} v_{ij+1}^s \right) + f_{22} \right),$$

...

$$v_{45}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\left(\frac{1}{h^2} v_{35}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{44}^{s+1} \right) + \left(f_{45} + \frac{1}{h^2} v_{55}^s + \frac{1}{k^2} v_{46}^s \right) \right).$$

Если организовать массив с элементами v_{ij} , где $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, и использовать для записи метода обозначения $v_{i0}^s, v_{im}^s, v_{0j}^s, v_{nj}^s$, полагая, что $v_{i0}^s = v_{i0}, v_{im}^s = v_{im}, v_{0j}^s = v_{0j}, v_{nj}^s = v_{nj}$ при любом $s = 0, 1, \dots$, расчетные формулы приобретают одинаковый вид:

$$v_{ij}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left(\frac{1}{h^2} v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{ij-1}^{s+1} + \frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s + \frac{1}{k^2} v_{ij+1}^s + f_{ij} \right),$$

где $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$.

Приведем фрагмент кода для решения (1.6) с помощью метода Зейделя:

```

1.  int Nmax = 10000; // максимальное число итераций (не менее 1)
2.  int S = 0; // счетчик итераций
3.  double eps = 0,0000001; // минимально допустимый прирост
4.  double eps_max = 0; // текущее значение прироста
5.  double eps_cur = 0; // для подсчета текущего значения прироста
6.  double a2, k2, h2; // ненулевые элементы матрицы (-A)
7.  const int n, m; // размерность сетки
8.  double v[n+1][m+1]; // искомый вектор v
9.  double f[n+1][m+1]; // f(x,y) из дифф. уравнения в узлах сетки
10. double a, b, c, d; // границы области определения уравнения
11. int i, j; // индексы
12. double v_old; // старое значение преобразуемой компоненты вектора v
13. double v_new; // новое значение преобразуемой компоненты вектора v
14. bool f = false; // условие остановки
15. h2 = -(n/(b-a))^2;
16. k2 = -(m/(d-c))^2;
17. a2 = -2*(h2+k2);
18. while (!f) do
19. { eps_max = 0;
20.   for( j = 1; j < m+1; j++)
21.     for( i = 1; i < n+1; i++)

```

```

22.     { v_old = v[i][j];
23.       v_new = - (h2*(v[i+1][j]+v[i-1][j]) + k2*(v[i][j+1]+v[i][j-1]));
24.       v_new = v_new + f[i][j];
25.       v_new = v_new/a2;
26.       eps_cur = fabs(v_old - v_new);
27.       if (eps_cur > eps_max) {eps_max = eps_cur};
28.       v[i][j] = v_new;
29.     }
30.     S =S+1;
31.     if ((eps_max < eps) or (S >= Nmax) ){ f = true}
    }

```

По завершении внешнего цикла переменная S показывает число проведенных итераций; массив $v[n+1][m+1]$ содержит граничные условия (при $i=0, i=n, j=1, \dots, m-1$; при $j=0, j=m, i=1, \dots, n-1$) и результат последней итерации (при $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$); переменная eps_max показывает максимальное отличие компонент массива (вектора) $v[n+1][m+1]$ от компонент массива (вектора), полученного на предпоследней итерации.

До начала внешнего цикла необходимо задать параметры метода ($Nmax, eps$); указать границы области (a, b, c, d) и размерность сетки (n, m); задать (передать, прочесть, вычислить) значения элементов $f[i][j]$ при $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$; задать начальное приближение, записав его в элементы $v[i][j]$, $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$; определить значения элементов массива $v[i][j]$ в узлах, расположенных на границе области ($i=0, i=n, j=1, \dots, m-1$ и $j=0, j=m, i=1, \dots, n-1$). Для корректной визуализации численного решения желательно определить значения элементов $v[0][0], v[0][m], v[n][0], v[n][m]$.

По завершении работы метода необходимо сообщить пользователю, что «при решении разностной схемы с помощью метода Зейделя с параметрами $Nmax = \dots$ и $eps = \dots$, за $S = \dots$ итераций получено численное решение $v[i][j] = \dots$, $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$, обеспечивающее точность $eps_max = \dots$ ». Как и в общем случае, из текста сообщения будет видно, как был остановлен метод – по точности или по числу итераций.

При составлении кода учтено, что в C++ массив $v[n+1][m+1]$ содержит элементы от $v[0][0]$ до $v[n][m]$.

Способ записи системы (7.4), использованный при получении кода, показан на рис. 7.7.

$$\begin{pmatrix}
a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h2 & a2 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
k2 & 0 & 0 & 0 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & 0 & a2 & h2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 & 0 & h2 & a2 & h2 & 0
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \\ v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \\ v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ v_{43} \\ v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ v_{44} \\ v_{15} \\ v_{25} \\ v_{35} \\ v_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} - k2 \cdot v_{10} - h2 \cdot v_{01} \\ f_{21} - k2 \cdot v_{20} \\ f_{31} - k2 \cdot v_{30} \\ f_{41} - k2 \cdot v_{40} - h1 \cdot v_{51} \\ f_{12} - h2 \cdot v_{02} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} - h2 \cdot v_{52} \\ f_{13} - h2 \cdot v_{03} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} - h2 \cdot v_{53} \\ f_{14} - h2 \cdot v_{04} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} - h2 \cdot v_{54} \\ f_{15} - k2 \cdot v_{16} - h2 \cdot v_{05} \\ f_{25} - k2 \cdot v_{26} \\ f_{35} - k2 \cdot v_{36} \\ f_{45} - k2 \cdot v_{46} - h2 \cdot v_{55} \end{pmatrix}$$

$$\text{где } h2 = -\frac{1}{h^2}, \quad k2 = -\frac{1}{k^2}, \quad a2 = -A,$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), v_{0j} = \mu_1(y_j), v_{5j} = \mu_2(y_j), v_{i0} = \mu_3(x_i), v_{i6} = \mu_4(x_i), i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1,$$

Рис. 7.7. Матричная запись разностной схемы на сетке $(n, m) = (5, 6)$, третий способ

7.12. Реализация МВР

Метод верхней релаксации (МВР) для решения задачи (7.8) можно записать в каноническом виде:

$$(D + \omega L)(x^{s+1} - x^s) \omega^{-1} + A x^s = b \quad (7.16)$$

где ω – параметр метода, $x^s \in R^n$ – приближение к точному решению системы (2.1), полученное на итерации с номером s , и $x^{s+1} \in R^n$ – приближение, полученное на итерации с номером $s+1$.

Для того, чтобы получить формулы для расчета каждой координаты вектора x^{s+1} , преобразуем выражение (7.16):

$$D \omega^{-1} x^{s+1} + L x^{s+1} + [-D \omega^{-1} x^s - L x^s + A x^s] = b.$$

Выражение в квадратных скобках составляет

$$R x^s + (\omega - 1) \omega^{-1} D x^s.$$

Для вычисления компонент вектора x^{s+1} получим

$$\frac{1}{\omega} a_{ii} x_i^{s+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{s+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^s + (1 - \frac{1}{\omega}) a_{ii} x_i^s = b_i,$$

или

$$x_i^{s+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{s+1} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^s + (1 - \omega) a_{ii} x_i^s + \omega b_i \right]. \quad (7.3)$$

где $i = 1, \dots, n$.

Ниже приведен фрагмент кода, реализующего метод верхней релаксации:

```
1. double w; // параметр метода (в интервале от 0 до 2)
2. int Nmax = 10000; // максимальное число итераций (не менее 1)
3. int S=0; // счетчик итераций
4. double eps = 0,0000001; // минимально допустимый прирост
5. double eps_max = 0; // текущее значение прироста
6. double eps_cur = 0; // для подсчета текущего значения прироста
7. double a[n][n]; // элементы матрицы A
8. double x[n]; // искомый вектор x
9. double b[n]; // вектор правой части b
10. int n; //размерность системы линейных уравнений
11. int i, j; //индексы
12. double x_old; // старое значение преобразуемой компоненты вектора x
```

```

13. double x_new; // новое значение преобразуемой компоненты вектора x
14. bool f = false; // условие остановки
15. while (!f) do
16. { eps_max = 0;
17.   for( i = 0; i < n; i++)
18.     { x_old = x[i];
19.       x_new = (1-w)*a[i][i]*x[i] + w*b[i]
20.       for( j = 0; j < n; j++)
21.         if (j!=i) {x_new = x_new - w*a[i][j]*x[j]};
22.       x_new = x_new/a[i][i];
23.       eps_cur = abs(x_old - x_new);
24.       if (eps_cur > eps_max) {eps_max = eps_cur};
25.       x[i]=x_new;
26.     }
27.   S=S+1;
28.   if ((eps_max < eps) or (S >= Nmax) ){ f = true}
29. }

```

Аналогично программной реализации метода Зейделя (см. п. 2), по завершении внешнего цикла переменная S показывает число проведенных итераций, массив $x[n]$ содержит результат последней итерации, переменная eps_max показывает максимальное отличие компонент вектора $x[n]$ от компонент вектора, полученного на предпоследней итерации.

До начала внешнего цикла необходимо задать параметры метода (w , $Nmax$ и eps), указать размерность системы n , задать (передать, прочесть, вычислить) значения элементов массивов $a[n][n]$, $b[n]$ и задать начальное приближение, записав его в массив $x[n]$.

По завершении работы метода необходимо сообщить пользователю, что «при решении системы $Ax = b$ с помощью МВР с параметрами $w = \dots$, $Nmax = \dots$ и $eps = \dots$, за $S = \dots$ итераций получено численное решение $x[i] = \dots$, $i = 0, \dots, n-1$, обеспечивающее точность $eps_max = \dots$ ». Из текста сообщения будет видно, как был остановлен метод – по точности или по числу итераций.

7.13. Решение схемы с помощью МВР

Формулы для отыскания решения разностной схемы (7.4) методом верхней релаксации можно вывести по аналогии с методом Зейделя. Значения v_{i0} и v_{im} при $i = 1, \dots, n-1$ и значения v_{0j} и v_{nj} при $j = 1, \dots, m-1$ определены граничными условиями задачи (1.1). Точное решение системы (1.6) обозначим через V , начальное приближение – через V^0 , а приближение, полученное на итерации с номером s – через V^s . Векторы V , V^0 и V^s имеют компоненты v_{ij} , v_{ij}^0, v_{ij}^s соответственно, где $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$. При решении (1.6) на сетке $(n, m) = (5, 6)$ на итерации с номером $s+1$ получим:

$$v_{11}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{11}^s + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{21}^s + \frac{1}{k^2} v_{12}^s \right) + \omega \cdot \left(f_{11} + \frac{1}{h^2} v_{01} + \frac{1}{k^2} v_{10} \right) \right),$$

$$v_{21}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{21}^s + \omega \cdot \frac{1}{h^2} v_{11}^{s+1} + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{31}^s + \frac{1}{k^2} v_{22}^s \right) + \omega \cdot \left(f_{ij} + \frac{1}{k^2} v_{20} \right) \right),$$

...

$$v_{12}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{12}^s + \omega \cdot \frac{1}{k^2} v_{11}^{s+1} + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{22}^s + \frac{1}{k^2} v_{13}^s \right) + \omega \cdot \left(f_{12} + \frac{1}{h^2} v_{02} \right) \right),$$

$$v_{22}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{22}^s + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{i+1j}^{s+1} \right) + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s + \frac{1}{k^2} v_{ij+1}^s \right) + \omega \cdot f_{22} \right),$$

...

$$v_{45}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{45}^s + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{35}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{44}^{s+1} \right) + \omega \cdot \left(f_{45} + \frac{1}{h^2} v_{55} + \frac{1}{k^2} v_{46} \right) \right).$$

Если использовать обозначения $v_{i0}^s, v_{im}^s, v_{0j}^s, v_{nj}^s$, полагая, что при любом $s = 0, 1, \dots$ $v_{i0}^s = v_{i0}, v_{im}^s = v_{im}, v_{0j}^s = v_{0j}, v_{nj}^s = v_{nj}$, формулы метода ВР при любых $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$ приобретают одинаковый вид:

$$v_{ij}^{s+1} = -\frac{1}{A} \left((1-\omega) \cdot (-A) \cdot v_{ij}^s + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{i+1j}^{s+1} \right) + \omega \cdot \left(\frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s + \frac{1}{k^2} v_{ij+1}^s \right) + \omega \cdot f_{ij} \right).$$

Приведем фрагмент кода для решения (1.6) с помощью МВР:

```

1. double w; // параметр метода (в интервале от 0 до 2)
2. int Nmax = 10000; // максимальное число итераций (не менее 1)
3. int S = 0; // счетчик итераций
4. double eps = 0,0000001; // минимально допустимый прирост
5. double eps_max = 0; // текущее значение прироста
6. double eps_cur = 0; // для подсчета текущего значения прироста
7. double a2, k2, h2; // ненулевые элементы матрицы ( $-A$ )
8. double v[n+1][m+1]; // искомый вектор  $v$ 
9. double f[n+1][m+1]; //  $f(x,y)$  из дифф. уравнения в узлах сетки
10. double a, b, c, d; // границы области
11. int n, m; //размерность сетки
12. int i, j; //индексы
13. double v_old; // старое значение преобразуемой компоненты вектора  $v$ 
14. double v_new; // новое значение преобразуемой компоненты вектора  $v$ 
15. bool f = false; // условие остановки
16. h2 = - (n/(b-a))^2;
17. k2 = - (m/(d-c))^2;
18. a2 = - 2*(h1+k1);
19. while (!f) do
20. { eps_max = 0;
21.   for( j = 1; j < m; j++)
22.     for( i = 1; i < n; i++)
23.       { v_old = v[i][j];
24.         v_new = - w*(h2*(v[i+1][j]+v[i-1][j]) + k2*(v[i][j+1]+v[i][j-1]));
25.         v_new = v_new + (1-w)*a2*v[i][j] + w*f[i][j];
26.         v_new = v_new/a2;
27.         eps_cur = abs(v_old - v_new);
28.         if (eps_cur > eps_max) {eps_max = eps_cur};
29.         v[i][j] = v_new;
30.       }
31.   S = S+1;
32.   if ((eps_max < eps) or (S >= Nmax) ){ f = true}
33. }

```

По завершении работы метода необходимо сообщить, что «при решении разностной схемы с помощью МВР с параметрами $w = \dots$, $N_{\max} = \dots$ и $\text{eps} = \dots$, за $S = \dots$ итераций получено численное решение $v[i][j] = \dots$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, обеспечивающее точность $\text{eps_max} = \dots$ ». Из сообщения будет видно, как был остановлен метод – по точности или по числу итераций.

Способ записи системы (7.4), использованный при получении кода, показан на рис. 7.7.