

Лекция 8. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума. Анализ сходимости схемы и общей погрешности

8.1. Принцип максимума

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -f(x, y) \text{ при } (x, y) \in G \\ u(x, y) &= \mu(x, y) \text{ при } (x, y) \in \partial G\end{aligned}\quad (8.1)$$

где $G \cup \partial G = \{[a, b] \times [c, d]\}$, и разностную схему

$$\begin{aligned}v_{x\bar{x}, ij} + v_{y\bar{y}, ij} &= -f_{ij}, \\ \text{при } i &= 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1; \\ v_{ij} &= \mu(x_i, y_j) \\ \text{при } i &= 0, n, j = 1, \dots, m-1; \\ \text{при } j &= 0, m, i = 1, \dots, n-1\end{aligned}\quad (8.2)$$

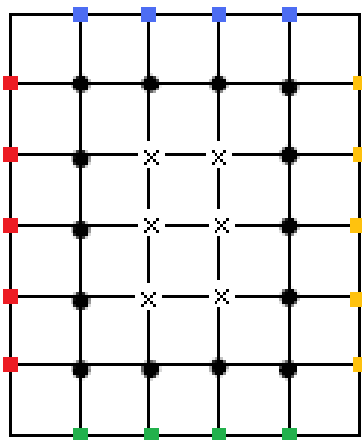


Рис. 8.1. Сетка размерности (5,6)

Определение. Шаблоном узла (x_i, y_j) называем $Ш(x_i, y_j)$ – множество узлов, участвующих в уравнении, ассоциированном с узлом (x_i, y_j) .

Например, для узла (3,2)

$$Ш(3,2) = \{ (3,2), (2,2), (4,2), (3,1), (3,3) \}$$

Определение. Окрестность узла (x_i, y_j) обозначим $Ш'(x_i, y_j)$ и определим ее как шаблон узла без самого узла: $Ш'(x_i, y_j) = Ш(x_i, y_j) \setminus (x_i, y_j)$.

Например, для узла (3,2)

$$Ш'(3,2) = \{ (2,2), (4,2), (3,1), (3,3) \}.$$

Определение. Узел сетки будем называть граничным (топологически граничным), если его окрестность пустая: $Ш'(x_i, y_j) = \emptyset$.

Например, узел (0,1) является топологически граничным:

$$Ш(0,1) = \{ (0,1) \}, Ш'(0,1) = \emptyset.$$

Определение. Узел сетки будем называть внутренним (топологически внутренним), если его окрестность непустая: $Ш'(x_i, y_j) \neq \emptyset$.

Например, узел (3,2) является топологически внутренним:

$$Ш'(3,2) \neq \emptyset.$$

Определение. Среди внутренних (топологически внутренних) узлов выделим узлы: 1-го типа – его окрестность содержит только внутренние узлы; 2-го типа – его окрестность содержит хотя бы один граничный узел.

Например, узел (3,2) является топологически внутренним узлом 1-го типа, узел (1,1) – топологически внутренним 2-го типа.

$$Ш'(1,1) = \{ (2,1), (0,1), (1,0), (1,2) \}.$$

Множество топологически внутренних узлов сетки обозначим ω_{hk} .

Множество топологически граничных узлов обозначим γ_{hk} .

Множество всех узлов сетки обозначим $\Omega_{hk} = \omega_{hk} \cup \gamma_{hk}$.

Тогда схему (8.2) можно записывать в виде

$$\begin{aligned} (v_{x\bar{x}})_{ij} + (v_{y\bar{y}})_{ij} &= -f_{ij}, \quad (i, j) \in \omega_{hk} \\ v_{ij} &= \mu(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma_{hk} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Различные типы узлов на примере сетки (5,6) показаны на рис. 8.1.

Граничные узлы отмечены цветными прямоугольниками, внутренние узлы 1-го типа – крестом, внутренние узлы 2-го типа – темной точкой.

Угловые граничные узлы в записи схемы не участвуют.

Система $\mathcal{A} V = F$ содержит уравнения только для внутренних узлов. Внутренним узлам 1-го типа в матрице \mathcal{A} соответствует строка, в которой 5 ненулевых элементов:

$$A = -2 \times \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right), \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2}.$$

Внутренним узлам 2-го типа в матрице \mathcal{A} соответствует строка, в которой менее 5 ненулевых элементов.

Чтобы сформулировать принцип максимума, введем новые обозначения. Пусть V - вектор размерности $(n-1)(m-1)$:

$$V = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n-1,1}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n-1,2}, \dots, v_{1,m-1}, v_{2,m-1}, \dots, v_{n-1,m-1}).$$

Запись $V \geq 0$ означает, что все компоненты вектора неотрицательны: $v_{ij} \geq 0$ при $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$.

Выражение $\mathcal{A} V$ есть вектор той же размерности $(n-1)(m-1)$. Вектор $\mathcal{A} V$ есть результат применения матрицы \mathcal{A} к вектору V , см. рис. 8.2.

Запись $\mathcal{A} V \geq 0$ означает, что все компоненты вектора $\mathcal{A} V$ неотрицательны, то есть $\{\mathcal{A} V\}_{ij} \geq 0$ при $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$.

$$\begin{pmatrix} (Av)_{11} \\ (Av)_{21} \\ (Av)_{31} \\ (Av)_{41} \\ (Av)_{12} \\ (Av)_{22} \\ (Av)_{32} \\ (Av)_{42} \\ (Av)_{13} \\ (Av)_{23} \\ (Av)_{33} \\ (Av)_{43} \\ (Av)_{14} \\ (Av)_{24} \\ (Av)_{34} \\ (Av)_{44} \\ (Av)_{15} \\ (Av)_{25} \\ (Av)_{35} \\ (Av)_{45} \end{pmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \\ v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \\ v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ v_{43} \\ v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ v_{44} \\ v_{15} \\ v_{25} \\ v_{35} \\ v_{45} \end{pmatrix}$$

Рис. 8.2. Вектор $\mathcal{A} V$, сетка (5,6), размерность вектора $(n-1)(m-1) = 20$

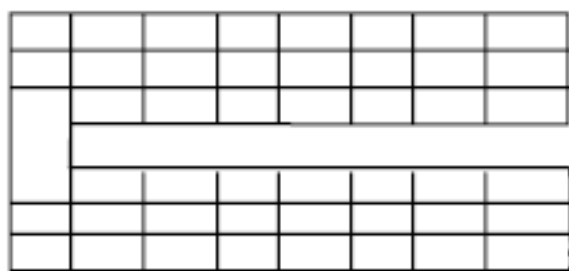
Принцип максимума справедлив для широкого класса разностных схем на *связных сетках*.

Определение. Сетка разностной схемы называется связной, если для любой пары узлов, один из которых имеет непустую окрестность, можно предложить последовательность узлов, соединяющих два исходных узла с помощью своих окрестностей. А именно, пусть (l, s) – начальный узел, $Ш'(l, s) \neq \emptyset$. Пусть (p, q) – конечный узел. Пусть $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_r$ – связующие узлы. Тогда

$$(i, j)_1 \in Ш'(l, s), (i, j)_2 \in Ш'(i, j)_1 \dots (p, q) \in Ш'(i, j)_r.$$

Сетка, представленная на рис. 8.1, является связной.

Пример несвязной сетки приведен на рис. 8.3 (недостаточно «густая» сетка для решения модельной задачи в области «подкова»).



пример не связной сетки

Рис. 8.3

Для задач (8.1), (8.2) сформулируем и докажем теорему о принципе максимума.

Теорема. Пусть сетка задачи (8.2) является связной. Пусть для некоторого $V \in R^{(n-1)(m-1)}$ $\mathcal{A} V \geq 0$. Тогда $V \leq 0$.

Доказательство. От противного. Рассмотрим схему доказательства для сетки (5,6).

Пусть среди компонент вектора V есть положительная компонента. Определим максимальную из них:

$$v_{ls} = \max_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, m-1}} (v_{ij}) = C$$

Здесь $C > 0$ и (l, s) есть индекс той компоненты вектора V , на которой достигается максимум (без модуля, с учетом знака). Рассмотрим два возможных случая, когда индекс (l, s) соответствует внутреннему узлу 2-го или 1-го типа.

Случай 1. Пусть (l, s) есть топологически внутренний узел 2-го типа. Например, узел $(1, 1)$. Рассмотрим компоненту вектора $\mathcal{A} V$ с тем же индексом $(l, s) = (1, 1)$:

$$\{\mathcal{A} V\}_{11} = Av_{11} + \frac{1}{h^2}v_{21} + \frac{1}{k^2}v_{12}$$

Сгруппируем слагаемые и получим:

$$\{\mathcal{A} V\}_{11} = \frac{1}{h^2}(v_{21} - v_{11}) + \frac{1}{k^2}(v_{12} - v_{11}) - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{11} < 0, \text{ так как}$$

$$\frac{1}{h^2}(v_{21} - C) \leq 0, \frac{1}{k^2}(v_{12} - C) \leq 0, -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)C < 0.$$

Так как внутренним узлам 2-го типа в матрице \mathcal{A} соответствует строка, в которой менее 5 ненулевых элементов, при других значениях (l, s) результат будет таким же: $\{\mathcal{A} V\}_{ls} < 0$.

По условию теоремы $\mathcal{A} V \geq 0$ и узел (l, s) не может быть внутренним узлом 2-го типа.

Случай 2. Пусть (l, s) есть топологически внутренний узел 1-го типа. Рассмотрим компоненту $\mathcal{A} V$ с тем же индексом (l, s) .

$$\{\mathcal{A} V\}_{ls} = Av_{ls} + \frac{1}{h^2}v_{l+1s} + \frac{1}{h^2}v_{l-1s} + \frac{1}{k^2}v_{ls+1} + \frac{1}{k^2}v_{ls-1}$$

Сгруппируем слагаемые и получим:

$$\{\mathcal{A} V\}_{ls} = \frac{1}{h^2}(v_{l+1s} - v_{ls}) + \frac{1}{h^2}(v_{l-1s} - v_{ls}) + \frac{1}{k^2}(v_{ls+1} - v_{ls}) + \frac{1}{k^2}(v_{ls-1} - v_{ls}) \leq 0,$$

так как после группировки ни одно из четырех слагаемых не может быть положительным: $(v_{l\pm 1s} - C) \leq 0$, $(v_{ls\pm 1} - C) \leq 0$.

Так как по условию теоремы $\mathcal{A} V \geq 0$, получим $v_{ls} = v_{l\pm 1s} = v_{ls\pm 1} = C$ (если положительный максимум достигается во внутреннем узле 2-го типа, то во всех узлах из его окрестности компоненты вектора V принимают такое же значение).

Используя связность, нетрудно добраться из узла (l, s) до какого-нибудь топологически внутреннего узла 1-го типа – обозначим его (p, q) . Пусть $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_r$ – связующие узлы. Так как

$$(i, j)_1 \in \Pi'(l, s), (i, j)_2 \in \Pi'(i, j)_1 \dots (p, q) \in \Pi'(i, j)_r.,$$

очевидно

$$v_{ls} = v_{l\pm 1s} = v_{ls\pm 1} = \dots = v_{pq} = C.$$

Получено противоречие: во внутреннем узле 2-го типа (p, q) не может достигаться положительный максимум.

Значит, $V \leq 0$ (среди компонент вектора V нет положительных).

Следствие 1. Матрица разностной схемы \mathcal{A} такова, что из $\mathcal{A} V \geq 0$ следует $V \leq 0$, из $\mathcal{A} V \leq 0$ следует $V \geq 0$.

Следствие 2. Рассмотрим уравнение $\mathcal{A} V = F$. Пусть $F \geq 0$. Тогда для вектора V , являющегося решением данного уравнения, верно $V \leq 0$.

Следствие 3. Матрица разностной схемы не является вырожденной: $\det \mathcal{A} \neq 0$. Решение разностной схемы (8.2) при любой правой части задачи (8.1) существует и единственно.

Доказательство. Если $\det \mathcal{A} = 0$, уравнение $\mathcal{A} V = 0$ обязано иметь нетривиальные решения (матрица имеет нулевое собственное число).

Из $\mathcal{A} V \geq 0$ следует $V \leq 0$, из $\mathcal{A} V \leq 0$ следует $V \geq 0$. Следовательно, $V = 0$, $\det \mathcal{A} \neq 0$.

8.2. Доказательство теоремы о сходимости

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -f(x, y) \text{ при } x \in (a, b), y \in (c, d) \\ u(a, y) &= \mu_1(y), \quad u(b, y) = \mu_2(y), \\ u(x, c) &= \mu_3(x), \quad u(x, d) = \mu_4(x),\end{aligned}\tag{8.1}$$

Сетка (n, m) , шаги $h = (b - a) / n$, $k = (d - c) / m$, узлы (x_i, y_j) , $(i, j) \in \Omega_{hk}$, где $\Omega_{hk} = \omega_{hk} \cup \gamma_{hk}$, где ω_{hk} – множество топологически внутренних узлов сетки, γ_{hk} – множество топологически граничных узлов, $\Omega_{hk} = \{(x_i, y_j), \text{ где } i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m, \text{ кроме угловых узлов } (0, 0), (0, m), (n, 0), (n, m)\}$.

Задачу (8.1) решаем на сетке (n, m) с помощью разностной схемы (8.2):

$$\begin{aligned}(v_{x\bar{x}})_{ij} + (v_{y\bar{y}})_{ij} &= -f_{ij}, \quad (i, j) \in \omega_{hk} \\ v_{ij} &= \mu(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma_{hk}\end{aligned}\tag{8.2}$$

Определение. Погрешностью решения задачи (8.1) с помощью разностной схемы (8.2) называют сеточную функцию $z = u - v$ ($z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$, $(i, j) \in \Omega_{hk}$).

Определение. Погрешностью аппроксимации ψ называют невязку разностной схемы (8.2), при условии, что в нее подставлено точное решение задачи (8.1): $\psi = \{\psi_{ij}\}$, $(i, j) \in \Omega_{hk}$.

Утверждение 1 (доказано ранее). Если решение (8.1) существует, единственно и является достаточно гладким, то

$$|\psi_{ij}| \leq \hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2, \quad (i, j) \in \omega_{hk}, \quad \psi_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma_{hk}\tag{8.3}$$

где

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{12} \cdot \max_{(x, y) \in \bar{G}} |u_{xxxx}^{IV}(x, y)|, \quad \hat{M}_2 = \frac{1}{12} \cdot \max_{(x, y) \in \bar{G}} |u_{yyyy}^{IV}(x, y)|\tag{8.3*}$$

и не зависят от h, k .

Утверждение 2. Для пары задач (8.1) и (8.2) погрешности z и ψ связаны уравнениями

$$\begin{aligned}(z_{x\bar{x}})_{ij} + (z_{y\bar{y}})_{ij} &= \psi_{ij}, \quad (i, j) \in \omega_{hk} \\ z_{ij} &= 0, \quad (i, j) \in \gamma_{hk}\end{aligned}\tag{8.4}$$

Теорема о сходимости. Пусть решение (8.1) существует, единственно и является достаточно гладким. Тогда при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ решение

разностной схемы (8.2) сходится к решению задачи (8.1) со вторым порядком по h, k с оценками

$$\max_{(i,j) \in \omega_{hk}} |z_{ij}| \leq \frac{\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2}{16} \cdot ((b-a)^2 + (d-c)^2), \quad (8.5)$$

$$\max_{(i,j) \in \gamma_{hk}} |z_{ij}| = 0,$$

где \hat{M}_1, \hat{M}_2 см. (8.3*), они не зависят от h, k .

Для доказательства сходимости решения разностной схемы (8.2) к решению задачи (8.1) используем функцию

$$\hat{z}(x, y) = K \cdot ((x-a)(b-x) + (y-c)(d-y)) \quad (8.6)$$

где $K = \text{const} > 0$.

Утверждение 3. При $(x, y) \in \bar{G}$ $\hat{z}(x, y) \geq 0$.

Утверждение 4. Функция $\hat{z}(x, y)$ является решением дифференциального уравнения (8.6*)

$$\begin{aligned} \Delta \hat{z}(x, y) &= -4K \leq 0, \quad x \in (a, b), \quad y \in (c, d), \\ \hat{z}(a, y) &= K(y-c)(d-y) \geq 0, \quad y \in [c, d], \\ \hat{z}(b, y) &= K(y-c)(d-y) \geq 0, \quad y \in [c, d], \\ \hat{z}(x, c) &= K(x-a)(b-x) \geq 0, \quad x \in [a, b], \\ \hat{z}(x, d) &= K(x-a)(b-x) \geq 0, \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (8.6^*)$$

На сетке (n, m) задача (8.6*) решается численно с помощью разностной схемы (8.7):

$$\begin{aligned} (\hat{z}_{\bar{x}\bar{x}})_{ij} + (\hat{z}_{\bar{y}\bar{y}})_{ij} &= -4K, \quad (i, j) \in \omega_{hk}, \\ \hat{z}_{ij} &= \hat{\mu}(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma_{hk} \end{aligned} \quad (8.7)$$

где функцию $\hat{\mu}(x, y)$ определяем в топологически граничных узлах:

$$\hat{\mu}(x_i, y_j) = K((x_i - a)(b - x_i) + (y_j - c)(d - y_j)) \geq 0, \quad (i, j) \in \gamma_{hk}.$$

Утверждение 5. Точным решением (8.7) является (8.6).

Комментарий. Поскольку $\hat{z}(x, y)$ квадратично зависит от x и y , значения разностных операторов численного дифференцирования, используемых в схеме (8.7), совпадают со значениями соответствующих частных производных в уравнении (8.6*):

$$(\hat{z}_{x\bar{x}})_{ij} = \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, y_j)}, \quad (\hat{z}_{y\bar{y}})_{ij} = \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial y^2} \Big|_{(x_i, y_j)}, \quad (i, j) \in \omega_{hk}.$$

Запишем задачи (8.4) и (8.7) в матричном виде

$$\mathcal{A} \mathbf{Z} = \Psi \quad (8.4^*)$$

$$\mathcal{A} \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\Psi} \quad (8.7^*)$$

(см. семестр 1). Напомним, что в задачах (4*) и (7*) матрица \mathcal{A} состоит из $(n-1) \times (n-1)$ блоков, размерность блока $(m-1) \times (m-1)$. Развернутый вид уравнений (4*) и (7*) для случая $(n, m) = (4, 5)$ показан на рис. 8.4, 8.5: размерность СЛАУ составляет 12×12 .

В общем случае в задачах (8.4*) и (8.7*) искомыми являются векторы

$$\mathbf{Z} = (z_{11}, z_{21}, \dots, z_{n-1,1}, z_{12}, z_{22}, \dots, z_{n-1,2}, \dots, z_{1m-1}, z_{2m-1}, \dots, z_{n-1,m-1}),$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{z}_{11}, \hat{z}_{21}, \dots, \hat{z}_{n-1,1}, \hat{z}_{12}, \hat{z}_{22}, \dots, \hat{z}_{n-1,2}, \dots, \hat{z}_{1m-1}, \hat{z}_{2m-1}, \dots, \hat{z}_{n-1,m-1}).$$

Они состоят из компонент погрешности z и значений сеточной функции \hat{z} при $(i, j) \in \omega_{hk}$ соответственно. Правая часть (8.4*) записывается в виде

$$\Psi = (\psi_{11}, \psi_{21}, \dots, \psi_{n-1,1}, \psi_{12}, \psi_{22}, \dots, \psi_{n-1,2}, \dots, \psi_{1m-1}, \psi_{2m-1}, \dots, \psi_{n-1,m-1})$$

и состоит из компонент вектора погрешности аппроксимации ψ при $(i, j) \in \omega_{hk}$. Правая часть (8.7*) записана в виде вектора

$$\hat{\Psi} = (\hat{\psi}_{11}, \hat{\psi}_{21}, \dots, \hat{\psi}_{n-1,1}, \hat{\psi}_{12}, \hat{\psi}_{22}, \dots, \hat{\psi}_{n-1,2}, \dots, \hat{\psi}_{1m-1}, \hat{\psi}_{2m-1}, \dots, \hat{\psi}_{n-1,m-1}),$$

компоненты которого определены формулами вида

$$\psi_{ij} = -4K - \frac{1}{h^2} (\alpha_1 \hat{\mu}_{i,j-1} + \alpha_2 \hat{\mu}_{i,j+1}) - \frac{1}{k^2} (\alpha_3 \hat{\mu}_{i-1,j} + \alpha_4 \hat{\mu}_{i+1,j}), \quad (i, j) \in \omega_{hk},$$

$$\hat{\mu}_{pq} = \hat{\mu}(x_p, y_q), \quad (p, q) \in \gamma_{hk}, \quad \alpha_l \in \{0; 1\}, \quad l = 1, \dots, 4.$$

Если $(i, j) \in \omega_{hk}$ является топологически внутренним узлом 1-го типа, то все коэффициенты $\alpha_l, l = 1, \dots, 4$, равны нулю и $\psi_{ij} = -4K$.

Если $(i, j) \in \omega_{hk}$ – топологически внутренний узел 2-го типа, среди коэффициентов $\alpha_l, l = 1, \dots, 4$, найдется равный единице, причем таких коэффициентов может быть не более двух. Поскольку $\hat{\mu}_{pq} = \hat{\mu}(x_p, y_q) \geq 0, (p, q) \in \gamma_{hk}$, получим $\hat{\psi}_{ij} \leq -4K$.

В любом случае

$$\hat{\psi}_{ij} \leq -4K, (i, j) \in \omega_{hk}.$$

Теперь подберем такое положительное число K , чтобы модули правых частей задачи (8.7*) ограничивали модули правых частей задачи (8.4*):

$$4K = \hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2, \quad (8.8)$$

где числа \hat{M}_1 , \hat{M}_2 определены формулой (8.3*), они не зависят от h, k .

Далее рассмотрим уравнения

$$\mathcal{A}(\hat{\mathbf{Z}} + \mathbf{Z}) = (\hat{\Psi} + \Psi), \quad (8.9)$$

$$\mathcal{A}(\hat{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}) = (\hat{\Psi} - \Psi). \quad (8.10)$$

Так как для \mathcal{A} справедлив принцип максимума

$$\begin{aligned} (\hat{\Psi} + \Psi) \leq \mathbf{0} &\Rightarrow (\hat{\mathbf{Z}} + \mathbf{Z}) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Z} \geq -\hat{\mathbf{Z}}, \quad (\hat{\Psi} - \Psi) \leq \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (\hat{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Z} \leq \hat{\mathbf{Z}}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$-\hat{\mathbf{Z}} \leq \mathbf{Z} \leq \hat{\mathbf{Z}} \quad (8.11)$$

или

$$-\hat{z}_{ij} \leq z_{ij} \leq \hat{z}_{ij}, \quad (i, j) \in \omega_{hk}. \quad (8.12)$$

Так как при $(i, j) \in \omega_{hk}$ $\hat{z}_{ij} \geq 0$, для компонент погрешности z верно

$$|z_{ij}| \leq \hat{z}_{ij}, \quad (i, j) \in \omega_{hk}. \quad (8.13)$$

Таким образом, используя (8.6) и (8.4), получим (8.5):

$$\begin{aligned} \max_{(i,j) \in \omega_{hk}} |z_{ij}| &\leq \max_{(i,j) \in \omega_{hk}} K((x_i - a)(b - x_i) + (y_j - c)(d - y_j)) \leq \\ &\leq \frac{\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2}{4} \max_{(i,j) \in \omega_{hk}} ((x_i - a)(b - x_i) + (y_j - c)(d - y_j)) \leq \\ &\leq \frac{\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2}{16} \cdot ((b - a)^2 + (d - c)^2). \end{aligned}$$

Выполнение условия

$$\max_{(i,j) \in \gamma_{hk}} |z_{ij}| = 0$$

очевидно. Теорема о сходимости доказана.

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \\ z_{12} \\ z_{22} \\ z_{32} \\ z_{13} \\ z_{23} \\ z_{33} \\ z_{14} \\ z_{24} \\ z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \psi_{31} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \\ \psi_{13} \\ \psi_{23} \\ \psi_{33} \\ \psi_{14} \\ \psi_{24} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}$$

Рис. 8.4

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{z}_{11} \\ \hat{z}_{21} \\ \hat{z}_{31} \\ \hat{z}_{12} \\ \hat{z}_{22} \\ \hat{z}_{32} \\ \hat{z}_{13} \\ \hat{z}_{23} \\ \hat{z}_{33} \\ \hat{z}_{14} \\ \hat{z}_{24} \\ \hat{z}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{11} \\ \hat{\psi}_{21} \\ \hat{\psi}_{31} \\ \hat{\psi}_{12} \\ \hat{\psi}_{22} \\ \hat{\psi}_{32} \\ \hat{\psi}_{13} \\ \hat{\psi}_{23} \\ \hat{\psi}_{33} \\ \hat{\psi}_{14} \\ \hat{\psi}_{24} \\ \hat{\psi}_{34} \end{pmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{01} - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{10} \\ -4K - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{20} \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{41} - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{30} \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{02} \\ -4K \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{42} \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{03} \\ -4K \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{43} \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{04} - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{15} \\ -4K - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{25} \\ -4K - \frac{1}{h^2} \hat{\mu}_{44} - \frac{1}{k^2} \hat{\mu}_{35} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \\ -4K \end{pmatrix}$$

Рис. 8.5

8.3. Оценка общей погрешности

Вернемся к задаче (8.1) и разностной схеме (8.2).

Общей погрешностью решения задачи (8.1) с помощью схемы (8.2) на сетке размерности (n, m) назовем сеточную функцию $z_{общ}(x, y)$, определяемую как

$$z_{общ}(x, y) = u(x, y) - v^{**}(x, y) \quad (8.14)$$

где $u(x, y)$ – сеточная функция, соответствующая точному решению задачи (8.1) и $v^{**}(x, y)$ – сеточная функция, соответствующая какому-либо численному (приближенному) решению разностной схемы (8.2).

Если (8.2) решена с помощью итерационного метода линейной алгебры, общую погрешность можно записать в виде

$$z_{общ}(x, y) = u(x, y) - v_s^{**}(x, y),$$

причем

$$z_{общ}(x, y) = [u(x, y) - v(x, y)] + [v(x, y) - v_s(x, y)] + [v_s(x, y) - v_s^{**}(x, y)].$$

Здесь $v(x, y)$ – сеточная функция, являющаяся точным решением (8.2), $v_s(x, y)$ – сеточная функция, которая должна получиться на итерации с номером s в случае, если погрешность счета отсутствует, и $v_s^{**}(x, y)$ – результат, полученный на итерации с номером s под влиянием погрешности счета.

Первое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, есть *погрешность решения задачи (8.1) с помощью схемы (8.2)*, второе слагаемое в квадратных скобках – *погрешность решения схемы (8.2) с помощью итерационного метода*, и третье слагаемое, заключенное в квадратные скобки, показывает *погрешность счета*, накопленную за s итераций.

Пренебрегая третьим слагаемым, норму общей погрешности можно оценить суммой нормы погрешности схемы и нормы погрешности метода:

$$\|z_{общ}(x, y)\| \leq \|u(x, y) - v(x, y)\| + \|v(x, y) - v_s(x, y)\| \quad (8.15)$$

С одной стороны, для снижения нормы погрешности схемы нужны достаточно большие n и m (см. теорему о сходимости решения (8.2) к решению (8.1)). С другой стороны, чем больше n и m , тем выше обусловленность матрицы \mathbf{A} в задаче

$$-\mathbf{A} \mathbf{V} = -\mathbf{F} \quad (8.16)$$

Тогда для решения задач вида (8.16), имеющих разную размерность, нужно разное число итераций. А именно, при одном и том же ограничении на норму погрешности метода (такое ограничение виртуально устанавливает пользователь) и «сходных» (одинаково похожих на сеточную функцию $u(x, y)$) начальных приближениях для решения (8.16) на более густой сетке (больше n и m) потребуется больше итераций (см. далее теоремы об оценках сходимости методов).

В проведенном выше рассмотрении сеточной функции $v(x, y)$, заданной на сетке (n, m) , соответствует вектор V размерности $(n-1)(m-1)$ с компонентами

$$V = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n-1,1}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n-1,2}, \dots, v_{1,m-1}, v_{2,m-1}, \dots, v_{n-1,m-1}).$$

Тогда норму сеточной функции (т.е. нормированное пространство сеточных функций) можно определить на основе норм соответствующих векторов (т.е. нормированного пространства векторов). Например, включив в описание вектора V компоненты, соответствующие граничным узлам сетки, полагаем

$$\|v(x, y)\| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} |v_{ij}|. \quad (8.17)$$

и оценка (8.15) может быть записана с помощью (8.17).

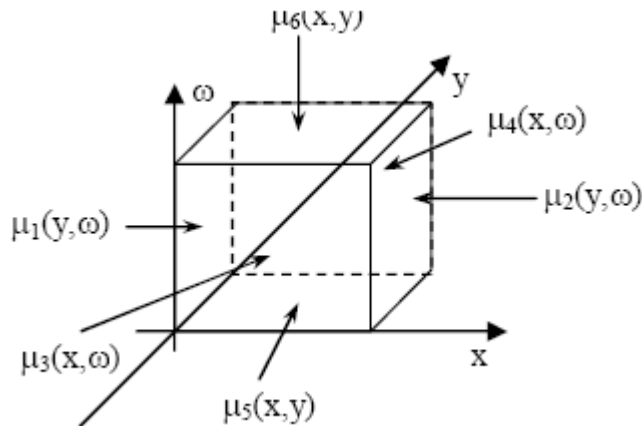
Изучить поведение общей погрешности в зависимости от выбора параметров сетки (n, m) и параметров счета (N_{max} , ε , начальное приближение, иные параметры метода) можно в ходе выполнения лабораторных работ на примере тестовых задач.

8.4. Другие постановки задач. Примеры применения принципа максимума

8.4.1. Задача в трехмерной области (куб)

$$(16) \begin{cases} u(x, y, \omega) = -f(x, y, \omega) \\ (x, y, \omega) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) = G \\ u(x, y, \omega)|_{\partial G} = \mu(x, y, \omega) \end{cases}$$

$$\mu(x, y, \omega) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6\}$$



Сетка: (n, m, p)

$x_i = ih, \quad h = 1/n$

$y_j = jk, \quad k = 1/m$

$\omega_l = ls, \quad l = 1/p$

$u(x, y, \omega) = \{u_{ijl}\}, \quad i=0:n; j=0:m; l=0:p$ – сеточная функция – значение точного решения задачи (16) в узлах сетки.

$v(x, y, \omega) = \{v_{ijl}\}, \quad i=0:n; j=0:m; l=0:p$ – точное решение разностной схемы в узлах сетки

$z_{ijl} = u_{ijl} - v_{ijl}$ – погрешность решения дифференциальной задачи с помощью разностной схемы.

Построим разностную схему 2-го порядка аппроксимации, заменяя 2-е частные производные 3-х точечными разностным оператором 2-й разностной производной.

$$(17) \begin{cases} \left(\frac{v_{xx}}{h^2} \right)_{ijl} + \left(\frac{v_{yy}}{k^2} \right)_{ijl} + \left(\frac{v_{\omega\omega}}{s^2} \right)_{ijl} = -f_{ijl} & i=1, n-1; j=1, m-1; l=1, p-1 \quad (17^*) \\ v_{ij0} = \mu_{5ij}; \quad v_{ijp} = \mu_{6ij}; \quad v_{i0l} = \mu_{3il}; & i=0, n; j=0, m; l=0, p \\ v_{iml} = \mu_{4il}; \quad v_{0jl} = \mu_{1jl}; \quad v_{njl} = \mu_{2jl}; & i=0, n; j=0, m; l=0, p \end{cases}$$

Шаги: $\{h \text{ по } x; k \text{ по } y; s \text{ по } \omega\}$. Размеры сетки (n, m, p) . Индексы i, j, l .

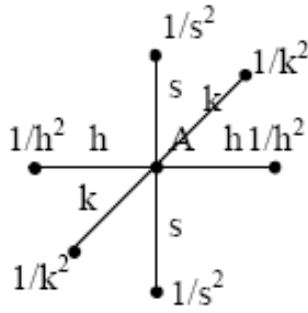
Из физического смысла задачи предполагается, что μ согласуются между собой и на ребрах куба дадут одинаковый результат.

$$(17^*) \text{ это: } \frac{v_{i-1jl} - 2v_{ijl} + v_{i+1jl}}{h^2} + \frac{v_{ijl-1} - 2v_{ijl} + v_{ijl+1}}{k^2} + \frac{v_{ijl-1} - 2v_{ijl} + v_{ijl+1}}{s^2} = -f_{ijl}$$

$$A = -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{s^2} \right)$$

Запишем шаблон для граничных узла: $(0, j, l) \quad (n, j, l) \quad (i, 0, l)$

$(i, m, l) \quad (i, j, 0) \quad (i, j, p)$.



Нетрудно видеть, что узлы, расположенные на ребрах куба в разностной схеме практически не используются – т.е. они не используются в уравнениях, аппроксимирующих основное уравнение задачи Дирихле. Таким образом, узлы, попадающие на ребра при изучении разностной схемы использовать не будем.

Сетка: $H = \{h, k, s\}$

ω_H – топологически внутренние узлы (т.е. $\Pi'(i, j, l) \neq 0$)

$\omega_H = \{ \Pi'(i, j, l) \neq 0; i = 1, n-1; j = 1, m-1; l = 1, p-1 \}$

γ_H – топологически граничные узлы:

$\gamma_H = \{ \Pi'(i, j, l) = 0; (i, 0, l); (i, m, l); (0, j, l); (n, j, l); (i, j, 0); (i, j, p); i = 1, n-1; j = 1, m-1; l = 1, p-1 \}$

$\Omega_H \stackrel{\text{def}}{=} \omega_H \cup \gamma_H$

Сетка является связной.

Теорема 3:

Погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (16) разностной схемой (17) удовлетворяет

$$\text{оценке: } \max_{\substack{i=0,n \\ j=0,m \\ l=0,p}} |\psi_{ijl}| \leq \frac{1}{12} \max_{(x,y,\omega) \in \bar{G}} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial \omega^4} \right| \right\} \cdot (h^2 + k^2 + s^2) \quad (20)$$

Теорема 5:

Если функция z и u достаточно гладкие и точное решение задачи (16) достаточно гладкое, то решение разностной схемы (17) сходиться к решению дифференциальной задачи (16) равномерно

$$\text{по } h, k \text{ и } s \text{ с оценкой: } \max_{\substack{i=0,n \\ j=0,m \\ l=0,p}} |z_{ijl}| \leq \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{6 \cdot 4} \cdot M (h^2 + k^2 + s^2), \quad l_1 = l_2 = l_3 = 1 \quad (24)$$

$$\text{где } M = \frac{1}{12} \max_{(x,y,\omega) \in \bar{G}} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial \omega^4} \right| \right\}$$

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v_{111} \\
v_{211} \\
v_{121} \\
v_{221} \\
v_{112} \\
v_{212} \\
v_{122} \\
v_{222} \\
v_{113} \\
v_{213} \\
v_{123} \\
v_{223} \\
v_{114} \\
v_{214} \\
v_{124} \\
v_{224}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-f_{11} - \frac{1}{h^2} \mu_1 - \frac{1}{k^2} \mu_{31} - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{21} - \frac{1}{h^2} \mu_{32} - \frac{1}{k^2} \mu - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{31} - \frac{1}{h^2} \mu_{33} - \frac{1}{k^2} \mu - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{41} - \frac{1}{h^2} \mu_{34} - \frac{1}{k^2} \mu - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{51} - \frac{1}{h^2} \mu_{12} - \frac{1}{k^2} \mu_{35} \\
-f_{12} - \frac{1}{h^2} \mu_{12} - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{22} - \frac{1}{h^2} \mu - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{32} - \frac{1}{h^2} \mu_{63} - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{43} - \frac{1}{h^2} \mu_{64} - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{52} - \frac{1}{h^2} \mu_{65} - \frac{1}{h^2} \mu_{22} \\
-f_{13} - \frac{1}{h^2} \mu_{13} - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{23} - \frac{1}{h^2} \mu_{53} - \frac{1}{k^2} \mu \\
-f_{14} - \frac{1}{h^2} \mu_{14} - \frac{1}{k^2} \mu - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{24} - \frac{1}{h^2} \mu_{52} - \frac{1}{k^2} \mu - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{15} - \frac{1}{h^2} \mu_{14} - \frac{1}{k^2} \mu_{41} - \frac{1}{s^2} \mu \\
-f_{25} - \frac{1}{h^2} \mu_{53} - \frac{1}{k^2} \mu_{43} - \frac{1}{s^2} \mu
\end{pmatrix}$$

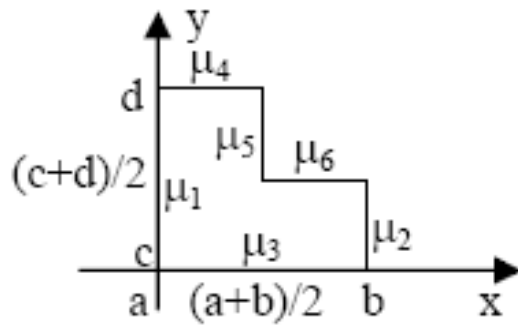
Рис. 8.6.

Разностная схема трехмерной задачи на сетке (n=3,m=3,p=5),
(индексы правой части выписать самим)

8.4.2. Задача на прямоугольнике с выбитым квадрантом

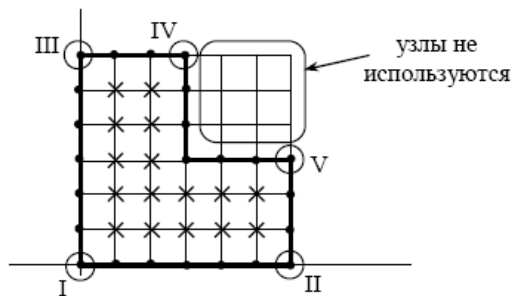
$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in G \\ u|_{\partial G} = \mu(x, y) \end{cases}$$

Функции μ согласованы в граничных точках.

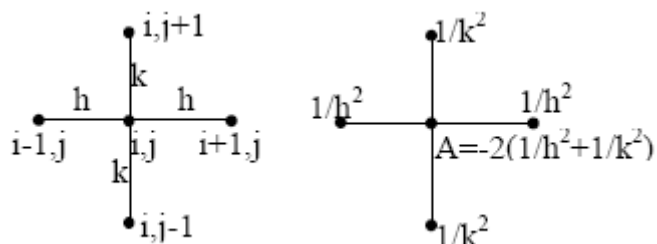


Основа сетки:

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad i = 0, n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n = 2 \cdot n_1 \\ (x_i, y_j): \\ y_j &= c + jk, \quad j = 0, m, \quad k = \frac{d-c}{m}, \quad m = 2m_1 \end{aligned}$$



Описание шаблона оператора:



$H=\{h,k\}$

топологически внутренние узлы – это те физически внутренние узлы, для которых можно применить шаблон крест \times - Ω_H .

γ_H – это те и только те граничные узлы, которые участвуют в шаблоне для внутренних узлов.

Физические граничные узлы I-V в множество γ_H не входят. Таким образом сеткой в нашей задаче считается $\Omega_H \cup \gamma_H = \Omega_H$.

$v_{ij}, (i,j) \in \Omega_H$ – точное решение разностной схемы в узлах сетки.

$u_{ij}, (i,j) \in \Omega_H$ – точное решение дифференциальной задачи в узлах сетки.

$z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}, (i,j) \in \Omega_H$ – погрешность.

$$(26) \begin{cases} \left(v_{x\bar{x}} \right)_{ij} + \left(v_{y\bar{y}} \right)_{ij} = -f_{ij} & (26^*) \\ v_{ij} = \mu(x_i, y_j), (i, j) \in \Omega_H \end{cases}$$

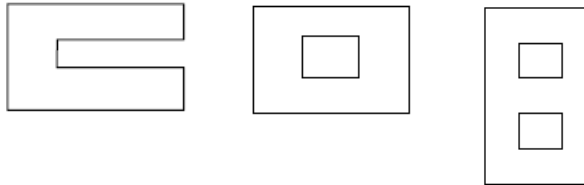
Теорема 8:

Если f и μ из (25), а так же точное решение (25) $u(x,y)$ достаточно гладкие, то решение разностной схемы (26) $v_{ij}, (i,j) \in \Omega_H$ сходиться к решению дифференциальной задачи равномерно со 2-м порядком по h и k :

$$(28) \max_{(i,j) \in \Omega_H} |z_{ij}| \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4 \cdot 4} M (h^2 + k^2), \text{ где } M \text{ из оценки для } \psi : M = \frac{1}{12} \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$$

Доказательство: - самостоятельно.

Задачу (25) можно рассматривать в других областях:



$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \\ v_{51} \\ v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \\ v_{52} \\ v_{13} \\ v_{23} \\ v_{14} \\ v_{24} \\ v_{15} \\ v_{25} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-f_{11} - \frac{1}{h^2} \mu_{11} - \frac{1}{k^2} \mu_{31} \\
-f_{21} - \frac{1}{k^2} \mu_{32} \\
-f_{31} - \frac{1}{k^2} \mu_{33} \\
-f_{41} - \frac{1}{k^2} \mu_{34} \\
-f_{51} - \frac{1}{h^2} \mu_{12} - \frac{1}{k^2} \mu_{35} \\
-f_{12} - \frac{1}{h^2} \mu_{12} \\
-f_{22} - \\
-f_{32} - \frac{1}{k^2} \mu_{63} \\
-f_{43} - \frac{1}{k^2} \mu_{64} \\
-f_{52} - \frac{1}{k^2} \mu_{65} - \frac{1}{h^2} \mu_{22} \\
-f_{13} - \frac{1}{h^2} \mu_{13} \\
-f_{23} - \frac{1}{h^2} \mu_{53} \\
-f_{14} - \frac{1}{h^2} \mu_{14} \\
-f_{24} - \frac{1}{h^2} \mu_{52} \\
-f_{15} - \frac{1}{h^2} \mu_{14} - \frac{1}{k^2} \mu_{41} \\
-f_{25} - \frac{1}{h^2} \mu_{53} - \frac{1}{k^2} \mu_{43}
\end{pmatrix}$$

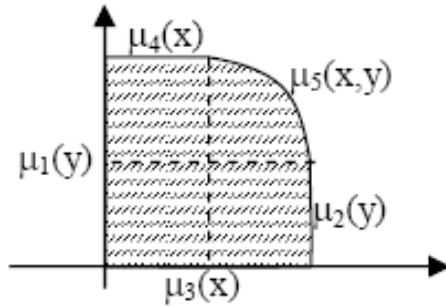
Рис. 8.7.

Разностная схема на прямоугольнике с выбитым квадрантом,
основа сетки (n=6, m=6),
(индексы правой части выписать самим)

8.4.3. Задача на прямоугольнике с закругленным краем

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in G \\ u|_{\partial G} = \mu(x, y) \end{cases}$$

Функции μ согласованы в граничных точках.



Вспомогательная задача.

Рассмотрим $f(x)$, сетка x_i , $x_{i-\alpha} = x_i - \alpha h$, $x_{i+\beta} = x_i + \beta h$.

$\alpha, \beta \in (0, 1]$

$f'(x_i) = ?$



Строим интерполяционный полином $P_2(x)$ по 2-м точкам: $P_2(x_i) = f(x_i)$; $P_2(x_i + \beta h) = f(x_i + \beta h)$; $P_2(x_i - \alpha h) = f(x_i - \alpha h)$. Полагаем, что $P_2'(x_i) \sim f'(x_i)$.

Утверждение:
$$P_2'(x_i) = \frac{2}{h^2} \left(\frac{1}{(\alpha + \beta)\alpha} f_{i-\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} f_i + \frac{1}{(\alpha + \beta)\beta} f_{i+\beta} \right) \quad (33)$$

причем:
$$f''(x_i) = P_2''(x_i) + \left(\frac{h(\alpha - \beta)}{3} f'''(x_i) - \frac{h}{12} \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} f^{(4)}(x_i) + O(h^2) \right) \quad (34)$$

Доказательство: самостоятельно:

(33) – из дифференцирования полинома. (34) – через разложение в ряд Тейлора (33) в $(\cdot) x_i$.

Определение:

Формулу (33) назовем 3-х точечным разностным оператором 2-й разностной производной на несимметричном шаблоне и обозначим $(f_{xx}^-)_i = (33)$.

Свойства: 1) Если $\alpha = \beta$, то $(f_{xx}^-)_i = \frac{1}{(\alpha h)^2} (f_{i-\alpha} - 2f_i + f_{i+\alpha})$, который аппроксимирует $f''(x_i)$ со 2-м порядком по h .

2) если $\alpha \neq \beta$, то $(f_{xx}^-)_i$ аппроксимирует $f''(x_i)$ с 1-м порядком по h .

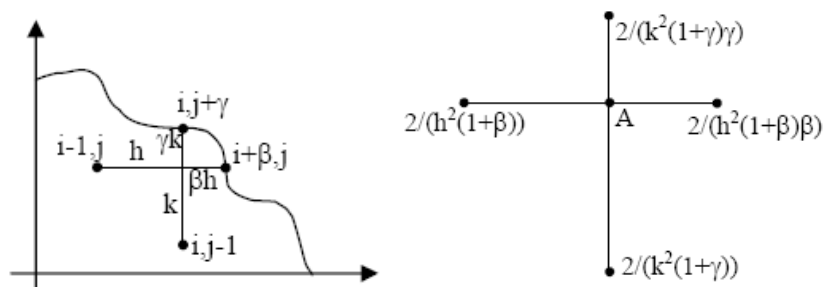
Утверждение:

На несимметричном шаблоне, непрямоугольном сетке u в узле i, j аппроксимируется разностным оператором $(u_{xx}^-)_{ij} + (u_{yy}^-)_{ij}$ с

первым порядком по h и k .

$$A = -\frac{2}{h^2\beta} - \frac{2}{k^2\gamma} = -2 \left(\frac{1}{h^2\beta} + \frac{1}{k^2\gamma} \right)$$

при $\beta = \gamma = 1$ получим шаблон крест.

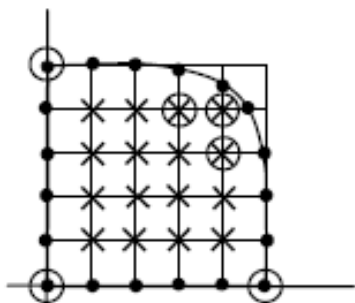


Задача Дирихле на прямоугольнике с закругленным краем.

Основа сетки:

$$x_i = a + ih \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, n$$

$$y_j = c + jk \quad k = \frac{d-c}{m}, \quad j = 0, m$$



ω_H – те внутренние узлы, на которых можно использовать либо симметричный шаблон, либо несимметричный.

γ_H – физические граничные узлы, которые участвуют в уравнении для узлов из ω_H .

Сетка: $\Omega_H = \gamma_H \cup \omega_H$, $H = \{h, k\}$

Узлы I-III в γ_H не входят.

Разностная схема:

$$(37) \begin{cases} (v_{xx})_{ij} + (v_{yy})_{ij} = -f_{ij}, & (i, j) \in \omega_H \\ v_{ij} = \mu(x_i, y_j), & (i, j) \in \gamma_H \end{cases}$$

Разностная схема (37) удовлетворяет принципу максимума \Rightarrow

- существует единственное решение разностной схемы
- есть сходимость к решению дифференциальной задачи с 1-м порядком по h и k .

$$\begin{pmatrix}
A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & A & \frac{1}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{D} & 0 & \frac{2}{C} & A_{new}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v_{11} \\
v_{21} \\
v_{31} \\
v_{12} \\
v_{22} \\
v_{32} \\
v_{13} \\
v_{23} \\
v_{33}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-f_{11} - \frac{1}{h^2}\mu - \frac{1}{k^2}\mu \\
-f_{21} - \frac{1}{k^2}\mu \\
-f_{31} - \frac{1}{h^2}\mu - \frac{1}{k^2}\mu \\
-f_{12} - \frac{1}{h^2}\mu \\
-f_{22} - \\
-f_{32} - \frac{1}{h^2}\mu \\
-f_{13} - \frac{1}{h^2}\mu - \frac{1}{k^2}\mu \\
-f_{23} - \frac{1}{k^2}\mu \\
-f_{33} - \frac{2}{D\gamma}\mu - \frac{2}{C\beta}\mu
\end{pmatrix}$$

Рис. 8.8.

Разностная схема на прямоугольнике с закругленным краем,
основа сетки (n=4, m=4),
(индексы правой части выписать самим)

8.5. Проверка свойств, гарантирующих сходимость итерационных методов

Уравнение разностной схемы, соответствующей топологически внутренним узлам записывают в виде матрицы: $\bar{A}\bar{v} = \bar{F}$.

Для нумерации компонент вектора строк и столбцов матрицы удобно оставить двойную индексацию: v_{ij} – компонента вектора \bar{v} , соответствующая узлу (x_i, y_j) ; (i, j) – строка матрицы A , которая соответствует уравнению, ассоциированному с узлом (x_i, y_j) ; (l, s) – столбец матрицы A . Элемент матрицы A в строке (i, j) , столбце (l, s) равен коэффициенту с которым v_{ls} входит в уравнение, ассоциированное с узлом (x_i, y_j) . Вектор F содержит слагаемые правой части уравнения, а так же значения функции в топологически – граничных узлах.

8.5.1. Проверка симметрии матрицы

Проверка симметричности:

- в строке (i, j) столбце (l, s) участие (l, s) в уравнении для (i, j) .
- в строке (l, s) столбце (i, j) участие (i, j) в уравнении для (l, s) .

Утверждение:

Матрица разностной схемы задачи Дирихле симметрична.

Доказательство:

$$A = -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)$$

Очевидно, что участие коэффициентов $i \pm 1, j$ в уравнение для i, j будет таким же, как и участие (i, j) для уравнений $(i \pm 1, j)$.

Утверждение:

Разностная схема, для решения задачи Дирихле в 3-х мерном кубе симметрична: $A_{3D} = A_{3D}^T$.

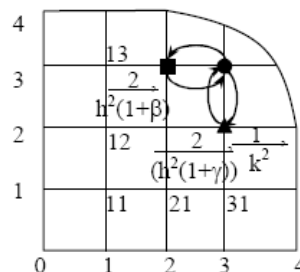
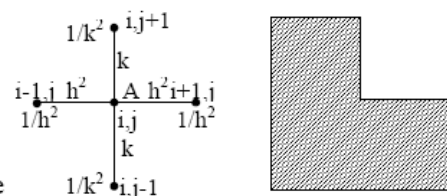
Утверждение:

Матрица разностной схемы, для решения задачи Дирихле в области с закругленным краем не симметрична. $A_0 \neq A_0^T$.

Доказательство: Узел $(3, 3)$ участвует в уравнении для $(2, 3)$ с коэффициентом $1/h^2$, а узел $(2, 3)$ участвует в уравнении для $(3, 3)$ с коэффициентом $\frac{2}{h^2(1+\beta)}$.

Узел $(3, 3)$ участвует в уравнении для $(3, 2)$ с коэффициентом $\frac{1}{k^2}$, а

$(3, 2)$ участвует в уравнении для $(3, 3)$ с коэффициентом $\frac{1}{k^2(1+\gamma)}$



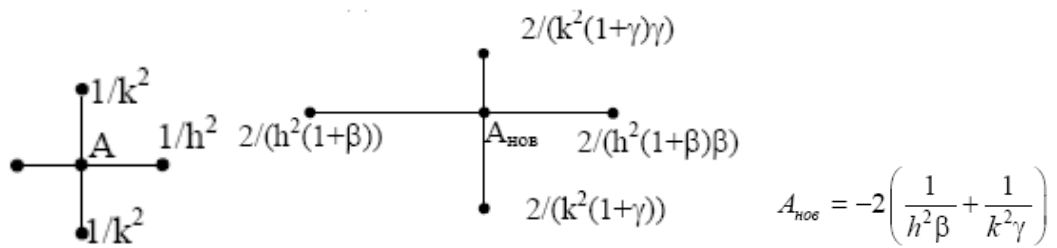
8.5.2. Проверка невырожденности

Проверка невырожденности: $\det A \neq 0$ – это следует из принципа максимума.

8.5.3. Проверка расположения спектра

Проверка расположения собственных чисел – по теореме Гершгорина.

Например, для области с закругленным краем используются два шаблона.



В строках матрицы использующих шаблон

$$|A| \geq \left| \frac{1}{h^2} \right| + \left| \frac{1}{h^2} \right| + \left| \frac{1}{k^2} \right| + \left| \frac{1}{k^2} \right|.$$

В строках матрицы использующих шаблон :

$$A_{\text{нов}} \geq \frac{2}{h^2 (1 + \beta)} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{2}{k^2 (1 + \gamma)} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$$

Теорема:

Матрица разностной схемы для закругленной области не симметрична, но свойство диагонального преобладания имеется.

Собственные числа имеют отрицательную действительную часть, на мнимую ось не попадают.

Имеется нестрогое диагональное преобладание.