Лабораторная работа №1 (весна) – ступень 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА (метод верхней релаксации, погрешность/точность заданы)

Цель работы: решение разностных схем итерационным методом, решение СЛАУ большой размерности. Разработка, отладка и применение программных средств. Проверка сходимости. Анализ структуры погрешности, оценка погрешности и ее компонент. Ускорение сходимости. Решение модельной задачи с заданной погрешностью/точностью.

I. Постановки задач

Основная задача (задача Дирихле для уравнения Пуассона) имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta u\,(x,y) = -f\,(x,y) \text{ при } x\in(a,b),\ y\in(c,d);\\ u\,(a,y) = \mu_1(y), \qquad u\,(b,y) = \mu_2(y), \qquad y\in[c,d];\\ u\,(x,c) = \mu_3(x), \qquad u\,(x,d) = \mu_4(x). \quad x\in[a,b].\end{gathered} \tag{1}$$

Значения a, b, c, d и функции $f\,(x, y)$, $\mu_l(y)$, l=1,2, $\mu_l(x)$, l=3,4 показаны в Таблице 1 по вариантам заданий. Необходимо найти решение – функцию $u\,(x,y)$, заданную на множестве $x\in[a, b]$, $y\in[c, d]$.

Для проверки программы и анализа всех компонент погрешности используется *тестовая задача*

$$\begin{gathered}\Delta u\,(x,y) = -f^*(x,y) \text{ при } x\in(a,b),\ y\in(c,d);\\ u\,(a,y) = \mu^*_1(y), \qquad u\,(b,y) = \mu^*_2(y), \qquad y\in[c,d];\\ u\,(x,c) = \mu^*_3(x), \qquad u\,(x,d) = \mu^*_4(x), \quad x\in[a,b].\end{gathered} \tag{2}$$

Чтобы записать тестовую задачу, найдите в Таблице 1 функцию $u^*(x,y)$ для своего варианта, подберите самостоятельно такую $f^*(x, y)$ и такие $\mu^*_l(y)$, l=1,2, $\mu^*_l(x)$, l=3,4, чтобы $u^*(x,y)$ являлась решением задачи (2) при $x\in[a, b]$, $y\in[c, d]$. Значения a, b, c, d нужно взять такими, как в задаче (1).

Обозначим через $u(x,y)$ решение задачи (1), через $u^*(x,y)$ – решение задачи (2). При выполнении лабораторной работы решение основной задачи (1) неизвестно, решение тестовой задачи (2) – известно.

За счет выбора размерности сетки (n, m), параметра метода $\omega\in(0, 2)$ и значений критериев остановки $\boldsymbol{\varepsilon_{мет}}$ и $\boldsymbol{N_{max}}$ тестовую задачу (2) нужно решить с *заданной или минимально возможной погрешностью*, основную задачу (1) – с *заданной или максимально высокой точностью*. СЛАУ нужно решить методом верхней релаксации (см. Таблицу 2).

Таблица 1

Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Варианты заданий

№	*a; b; c; d*	$u^*(x,y)$	$f(x,y)$
1	0;1;0;1	$\exp(\sin^2 \pi xy)$	$\sin^2(\pi xy)$
2	–1;1; –1;1	$\exp(1-x^2-y^2)$	$\lvert\sin^3(\pi xy)\rvert$
3	–1;1; –1;1	$\exp(1-x^2-y^2)$	$\lvert x^2-y^2\rvert$
4	1;2;2;3	$\sin(\pi xy)$	$-\exp(-xy^2)$
5	0;2;0;1	$\exp(\sin^2 \pi xy)$	$\lvert x-y\rvert$
6	0;1;0;2	$\exp(\sin^2 \pi xy)$	$\lvert x-y\rvert$
7	0;2;0;1	$\exp(\sin^2 \pi xy)$	$\lvert x^2-2y\rvert$
8	0;3;0;1	$\sin^2(xy^2)$	$\mathrm{ch}(x-y)$
9	1;2;1;2	$\exp(x^2-y^2)$	$\mathrm{arctg}(x/y)$
10	–1;0;0;1	$\exp(xy)$	$\mathrm{ch}(x^2y)$

Граничные условия для основной задачи

№	$\mu_1(y)$	$\mu_2(y)$	$\mu_3(x)$	$\mu_4(x)$
1	$\sin(\pi y)$	$\sin(\pi y)$	$x-x^2$	$x-x^2$
2	$-y^2+1$	$-y^2+1$	$\lvert\sin(\pi x)\rvert$	$\lvert\sin(\pi x)\rvert$
3	$-y^2+1$	$(1-y^2)\exp(y)$	$1-x^2$	$1-x^2$
4	$(y-2)(y-3)$	$y(y-2)(y-3)$	$(x-1)(x-2)$	$x(x-1)(x-2)$
5	$-y(y-1)$	$y(1-y)$	$\lvert\sin(\pi x)\rvert$	$\lvert\sin(\pi x)\rvert\exp(x)$
6	$\sin^2(\pi y)$	$\lvert\exp(\sin\pi y)-1\rvert$	$x(1-x)$	$x(1-x)\exp(x)$
7	$\sin^2(\pi y)$	$\sin^2(2\pi y)$	$\sin^2(\pi x)$	$\sin^2(2\pi x)$
8	$\sin^2(\pi y)$	0	$\mathrm{ch}(x^2-3x)-1$	0
9	0	0	$\sin^2(\pi x)$	$\mathrm{ch}(x-1)(x-2)-1$
10	$\sin(\pi y)$	$\lvert\sin 2\pi y\rvert$	$-x(x+1)$	$-x(x+1)$

Таблица 2

Выбор параметра метода

№ вар-та	Итерационный метод	Выбор параметра
1-10	Метод верхней релаксации, $\omega \in (0, 2)$	1) Оптимальное для сетки и матрицы СЛАУ значение можно получить по формуле 2) Значение, близкое к оптимальному, можно получить в ходе экспериментов с программой-образцом, используя варианты заданий, в которых погрешность схемы отсутствует

II. Ход выполнения работы

Для дискретизации тестовой задачи (2) и основной задачи (1) используйте разностную схему второго порядка аппроксимации, заданную на прямоугольной сетке размерности (n, m).

По направлению x число разбиений равно n, число узлов n+1*,* шаг обозначен через $h = (b - a)/n$. По направлению y число разбиений равно m, число узлов m+1*,* шаг обозначен через $k = (d - c) /m$.

Чтобы решить схему (решить СЛАУ), используйте *метод верхней релаксации (МВР)*. В качестве начального приближения возьмите значения, полученные *линейной интерполяцией граничных условий* по направлению x или y. Для остановки метода нужно указать значения критериев выхода по точности $\boldsymbol{\varepsilon_{мет}}$ и выхода по числу итераций $\boldsymbol{N_{max}}$. Параметр метода – число $\omega \in (0, 2)$ – выбирайте близко к оптимальному значению.

Прежде чем писать программу, изучите структуру отчета (см. бланк) и проведите подготовительную работу:

– запишите схему как систему разностных уравнений на сетке произвольной размерности (n, m);

– запишите схему как СЛАУ на сетке «небольшой» размерности: нужно выписать все элементы матрицы, все элементы искомого вектора и все элементы правой части СЛАУ;

– проверьте, чтобы матрица СЛАУ была положительно определенной, если нужно, поменяйте знаки левой и правой части СЛАУ;

– для СЛАУ «небольшой» размерности запишите, как обновляются компоненты численного решения на очередной итерации;

– оптимизируйте формулы для расчета итерации и запишите их для сетки произвольной размерности, учитывая, что для хранения сеточной функции v (x, y) в программе используется массив размерности $(n+1)\cdot(m+1)$.

Формулы для расчета итерации должны быть таковы, чтобы матрицу СЛАУ не хранить; а также *не хранить одновременно* векторы текущего и следующего приближения к решению СЛАУ.

Чтобы оценить общую погрешность, с которой решена тестовая задача, и оценить погрешность, с которой решена СЛАУ основной задачи, запишите в отчете определения всех типов погрешностей, возникающих при численном решении задач (1), (2). Запишите в отчете утверждения, необходимые для оценки компонент общей погрешности.

Результаты расчетов тестовой и основной задач должны быть представлены в программе в справках, таблицах и на графиках (см. раздел V). Результаты расчетов тестовой и основной задач, *соответствующие заданным требованиям к погрешности/точности*, должны быть представлены в отчете. Чтобы показать в отчете таблицы и графики, используйте скриншоты интерфейса своей программы.

При отладке программы проведите вычислительный эксперимент и проверьте «порядок сходимости». Результаты проверки укажите в отчете (см. раздел VI).

Код итерационного метода и *расчета невязки (нормы невязки)*, а также расчет *параметра* (если в программе вычисляется оптимальный параметр) должны быть распечатаны и включены в отчет.

III. Погрешность решения тестовой задачи

Пусть $v^{(N)}(x, y)$ – численное решение тестовой задачи, то есть решение схемы, полученное с помощью МВР на шаге N.

Максимум разности точного и численного решений в узлах сетки обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon_1}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = \max_{\substack{i=0,\dots n \\ j=0,\dots m}} |\, u^*(x_i y_j) - v^{(N)}(x_i y_j)|. \tag{3}$$

Величину $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ называют ***погрешностью*** решения тестовой задачи.

За счет выбора сетки (n, m), параметра $\omega \in (0, 2)$ и значений критериев остановки (точность метода $\varepsilon_{мет}$ и максимальное число итераций N_{max}) тестовую задачу нужно решить ***с погрешностью не более*** $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}}$, то есть обеспечить выполнение неравенства

$$\max_{\substack{i=0,\dots n \\ j=0,\dots m}} |\, u^*(x_i y_j) - v^{(N)}(x_i y_j)| \le \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

Величину $\boldsymbol{\varepsilon}$ называют ***заданной погрешностью*** решения задачи.

Если не удается решить тестовую задачу с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, решите ее с *минимально возможной погрешностью*. В отчете объясните, что нужно сделать, чтобы выполнить требование (4).

Программа должна показывать точное решение задачи $u^*(x, y)$, численное решение $v^{(N)}(x, y)$ и значение погрешности $\boldsymbol{\varepsilon_1}$.

IV. Точность решения основной задачи

Пусть $v^{(N)}(x, y)$ – численное решение основной задачи, то есть решение схемы основной задачи, полученное с помощью МВР на шаге N. Предположим, что для отыскания данного решения использована сетка (n, m), параметр ω и значения критериев остановки $\varepsilon_{мет}$ и N_{max} .

Чтобы оценить точность, по каждому из направлений x, y нужно уменьшить шаг сетки в два раза и на дополнительной сетке $(2n, 2m)$ найти численно решение $v2^{(N2)}(x, y)$. Предположим, что для этого используется параметр ω_2 и значения критериев $\varepsilon_{мет\text{-}2}$ и $N_{max\text{-}2}$. Число шагов, затраченное на поиск данного решения, обозначено через $N2$.

Максимум разности численных решений в общих узлах двух сеток (n, m) и $(2n, 2m)$ обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon_2}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon_2} = \max_{\substack{i=0,\dots n \\ j=0,\dots m}} | v^{(N)}(x_i y_j) - v2^{(N2)}(x_{2i} y_{2j}) |. \tag{5}$$

Величину $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ называют ***точностью*** решения основной задачи.

За счет выбора сетки, параметров МВР и значений критериев остановки основную задачу нужно решить ***с точностью не хуже чем $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}}$***, то есть обеспечить выполнение неравенства

$$\max_{\substack{i=0,\dots n \\ j=0,\dots m}} | v^{(N)}(x_i y_j) - v2^{(N2)}(x_{2i} y_{2j}) | \le \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

Величину $\boldsymbol{\varepsilon}$ называют ***заданной точностью*** решения основной задачи.

Если не удается решить основную задачу с заданной точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, решите ее с *максимально высокой точностью*. В отчете объясните, что нужно сделать, чтобы выполнить требование (6).

Параметры $\omega \in (0, 2)$ и $\omega_2 \in (0, 2)$ и значения $\varepsilon_{мет}$ и N_{max}, $\varepsilon_{мет\text{-}2}$ и $N_{max\text{-}2}$ подбирают таким образом, чтобы на каждой из сеток (n, m) и $(2n, 2m)$ СЛАУ была решена достаточно быстро и с малой невязкой (малой погрешностью). Так как сетке $(2n, 2m)$ соответствует СЛАУ большей размерности, параметр $\omega_2 \in (0, 2)$ и значения $\varepsilon_{мет\text{-}2}$, $N_{max\text{-}2}$ нужно выбрать соответственно.

Программа должна показывать $v^{(N)}(x, y)$ – решение схемы на сетке размерности (n, m); $v2^{(N2)}(x, y)$ – решение схемы на сетке размерности $(2n, 2m)$; а также значение точности $\boldsymbol{\varepsilon_2}$.

V. Представление результатов счета

Для тестовой задачи (2) и основной задачи (1) ***программа должна выводить справки, таблицы и графики*** (графики – опция).

Справка для тестовой задачи

«Для решения тестовой задачи использованы сетка с числом разбиений по x n = «__» и числом разбиений по y m = «__»,
метод верхней релаксации с параметром ω = «___», применены критерии остановки по точности $\varepsilon_{мет}$ = «__» и по числу итераций N_{max} =«__»

На решение схемы (СЛАУ) затрачено итераций N =«__» и достигнута точность итерационного метода $\varepsilon^{(N)}$ = «__»

Схема (СЛАУ) решена с невязкой $\| R^{(N)} \|$ = «___» (указать норму невязки)
для невязки СЛАУ использована норма «_________________»;
(указать тип: евклидова норма, норма «max»)

Тестовая задача должна быть решена с погрешностью не более $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}}$; задача решена с погрешностью $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ =«___»

Максимальное отклонение точного и численного решений наблюдается в узле x=«___»; y=«___»

В качестве начального приближения использовано
«________________________________»
(указать, что использовано: интерполяция по x, интерполяция по y, иное)».

При оформлении отчета справку нужно дополнить расчетами:

Схема (СЛАУ) решена с погрешностью $\| Z^{(N)} \|_\infty \leq \| Z^{(N)} \|_2 \leq$ «___»
(оценить норму погрешности по текущей невязке)

Погрешность схемы оценивается как $\| z \|_\infty \leq$ «___»
(оценить норму по теореме о сходимости схемы);
использована норма $\| z \|_\infty$ = «_________________» (указать)

Общая погрешность решения тестовой задачи оценивается как $\| z_{общ} \|_\infty \leq$ «___» (оценить норму общей погрешности через нормы ее компонент, вычислительную погрешность не учитывать);
использована норма $\| z_{общ} \|_\infty$ = «_________________» (указать)

а также выписать определения для всех перечисленных выше норм

Таблицы для тестовой задачи

Таблица 3

Значения сеточной функции в узлах сетки (n, m)
($u^*(x, y)$, $v^{(N)}(x, y)$ или разность $u^*(x, y) - v^{(N)}(x, y)$)

	x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_j	j / i	0	1	…	n
y_0	0				
…	…				
y_m	m				

В таблицах должны быть представлены:
– точное решение $u^*(x, y)$ в узлах сетки;
– численное решение $v^{(N)}(x, y)$ в узлах сетки;
– разность точного и численного решения в узлах сетки;

Графики для тестовой задачи

– точное решение $u^*(x, y)$ (поверхность);
– начальное приближение $v^{(0)}(x_i, y_j)$ (поверхность);
– численное решение $v^{(N)}(x, y)$ (поверхность);
– разность точного и численного решения (поверхность).

Справка для основной задачи

«Для решения основной задачи использована сетка с числом разбиений по x n = «__» и числом разбиений по y m = «__», метод верхней релаксации с параметром ω = «__», применены критерии остановки по точности $\varepsilon_{мет}$ = «__» и по числу итераций N_{max} =«__»

На решение схемы (СЛАУ) затрачено итераций N =«__» и достигнута точность итерационного метода $\varepsilon^{(N)}$ = «__»

Схема (СЛАУ) решена с невязкой $\| R^{(N)} \|$ = «___» (указать норму невязки)
использована норма «_________________»
(указать тип: евклидова норма, норма «max», иное)

Для контроля точности решения использована сетка с половинным шагом, метод верхней релаксации с параметром ω_2 = «__», применены критерии остановки по точности $\varepsilon_{мет\text{-}2}$ = «__» и по числу итераций $N_{max\text{-}2}$ =«__»

На решение задачи (СЛАУ) затрачено итераций $N2$ =«__» и достигнута точность итерационного метода $\varepsilon^{(N2)}$ = «__»

Схема (СЛАУ) на сетке с половинным шагом решена с невязкой $\| R^{(N2)} \|$ = «___» (указать норму невязки)
использована норма «_________________»
(указать тип: евклидова норма, норма «max», иное)

Основная задача должна быть решена с точностью не хуже чем $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}}$; задача решена с точностью $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ =«___»

Максимальное отклонение численных решений на основной сетке и сетке с половинным шагом наблюдается в узле x=«___»; y=«___»

В качестве начального приближения на основной сетке использовано «______________________», на сетке с половинным шагом использовано «______________________»
(указать, что использовано: интерполяция по x, интерполяция по y, иное)»..

При оформлении отчета справку нужно дополнить расчетами:

Схема (СЛАУ) решена с погрешностью $\| Z^{(N)} \|_\infty \le \| Z^{(N)} \|_2 \le$ «___»
(оценить норму погрешности)

Схема (СЛАУ) на сетке с половинным шагом решена с погрешностью $\| Z^{(N2)} \|_\infty \le \| Z^{(N2)} \|_2 \le$ «___» (оценить норму погрешности)

а также выписать определения для всех перечисленных выше норм

Таблицы для основной задачи

Таблица 4

Значения сеточной функции в узлах сетки (n, m)
($v^{(N)}(x, y)$, $v2^{(N2)}(x, y)$ или разность $v^{(N)}(x, y) - v2^{(N2)}(x, y)$ в общих узлах)

	x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_j	j / i	*0*	*1*	…	*n*
y_0	*0*				
…	…				
y_m	*m*				

В таблицах должны быть представлены:
– численное решение $v^{(N)}(x, y)$;
– численное решение $v2^{(N2)}(x, y)$, полученное на сетке с половинным шагом;
– разность численных решений $v^{(N)}(x, y)$ и $v2^{(N2)}(x, y)$;

Графики для основной задачи

– начальное приближение $v^{(0)}(x_i, y_j)$ (поверхность);
– начальное приближение $v2^{(0)}(x_i, y_j)$ (поверхность);
– численное решение $v^{(N)}(x, y)$ (поверхность);
– численное решение $v2^{(N2)}(x, y)$, полученное на сетке с половинным шагом (поверхность);
– разность численных решений $v^{(N)}(x, y)$ и $v2^{(N2)}(x, y)$ (поверхность).

Замечание. Если при расчетах используется сетка с большим числом узлов, на графики поверхностей и в таблицы можно выводить не каждый узел: например, каждый 2-й, 5-й, 10-й и т.п.

VI. Проверка программы: контроль «порядка сходимости»

С целью проверки программы проведите вычислительный эксперимент и заполните от руки Таблицы 5, 6. Для тестовой задачи проверьте убывание погрешности ($\boldsymbol{\varepsilon_1}$), для основной задачи проверьте убывание $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ (т.е. повышение точности). Определите «порядок сходимости».

Таблица 5

n	m	ω	$\varepsilon_{мет}$	Тестовая задача, величина $max \mid u^*(x_i y_j) - v^{(N)}(x_i y_j)\mid$	Отношение погрешностей
n_1	m_1	ω_1	$\varepsilon_{м\text{-}1}$	$\boldsymbol{\varepsilon_1}$ для $n_1, m_1, \varepsilon_{м\text{-}1}$	…
n_2	m_2	ω_2	$\varepsilon_{м\text{-}2}$	$\boldsymbol{\varepsilon_1}$ для $n_2, m_2, \varepsilon_{м\text{-}2}$	…
n_3	m_3	ω_3	$\varepsilon_{м\text{-}3}$	$\boldsymbol{\varepsilon_1}$ для $n_3, m_3, \varepsilon_{м\text{-}3}$	…
...	...	…	…	…	…
Порядок					

Таблица 6

n	m	$\varepsilon_{мет}$	$\varepsilon_{м2}$	Основная задача, величина $max \mid v^{(N)}(x_i y_j) - v2^{(N2)}(x_{2i} y_{2j})\mid$	Отношение значений точности
n_1	m_1	$\varepsilon_{м\text{-}1}$	$\varepsilon_{м2\text{-}1}$	$\boldsymbol{\varepsilon_2}$ для $n_1, m_1, \varepsilon_{м\text{-}1}, \varepsilon_{м2\text{-}1}$	…
n_2	m_2	$\varepsilon_{м\text{-}2}$	$\varepsilon_{м2\text{-}2}$	$\boldsymbol{\varepsilon_2}$ для $n_2, m_2, \varepsilon_{м\text{-}2}, \varepsilon_{м2\text{-}2}$	…
n_3	m_3	$\varepsilon_{м\text{-}3}$	$\varepsilon_{м2\text{-}3}$	$\boldsymbol{\varepsilon_2}$ для $n_3, m_3, \varepsilon_{м\text{-}3}, \varepsilon_{м2\text{-}3}$	…
...	...	…	…	…	…
Порядок					

На сетке (n, m) использованы значения ω= (перечислить)
На сетке ($2n$, $2m$) использованы значения ω_2= (перечислить)

Для проведения эксперимента используйте 4–5 разных пар значений (n,m). В каждом расчете критерий выхода по числу итераций (N_{max}) должен быть таким, чтобы итерационный метод был остановлен по точности.

Кроме того, в каждом расчете значение параметра $\omega \in (0, 2)$ желательно брать оптимальным или близким к оптимальному значению соответственно числу участков сетки.

Вопрос: Сходимость и порядок сходимости есть свойства схемы. Ни одно из значений – ни ε_1 , ни ε_2, не является погрешностью схемы. Опираясь на теоретический материал, объясните, почему результаты работы программы должны подтвердить динамику величин ε_1 и ε_2 с каким-либо порядком.

VII. Основные требования к отчету

Отчет нужно оформить ***на бланке*** и заполнить ***все пункты от руки***. В отчет должны быть включены:

– постановки основной и тестовой задач, решение тестовой задачи;

– описание сетки, схемы, метода, выбора параметров метода, описание компонент общей погрешности;

– результаты счета тестовой и основной задач с заданной погрешностью/точностью: справки, графики, таблицы;

– расчет оценок для погрешностей;

– проверка порядка сходимости, ответы на вопросы.

Сведения о программе: описание данных, используемых программой; код итерационного метода и код расчета невязки (нормы невязки) должны быть распечатаны и включены в отчет.