# KG - Azterketa - 2021eko urria

1. (1,5 puntu)

   *a*) Kalkulatu $ABC$ triangeluko $P$ puntuaren $\alpha, \beta, \gamma$ koordenatu barizentrikoak $t, s$ parametroak ezarri ondoren. Frogatu koordenatu barizentrikoen batura 1 dela eta positiboak direla ($P$ erpinen konbinazio konbexua beraz).

   *b*) Adierazi nola egiten den interpolazio barizentrikoa, triangeluko erpinetan funtzio baten balioak $f(A), f(B), f(C)$ ezagunak badira eta triangelu barruko $P$ puntuan funtzioaren balioa interpolatu nahi bada. Ehundura mapaketaren kasuan, adierazi nola interpolatzen diren ehundura mapako $u, v$ koordenatuak, triangelu bat eta barruko puntu baten koordeantu barizentrikoak emanik.

2. (1,5 puntu)

   *a*) Lau puntu emanik, eta ardatz kartesiarrak finkatuz, Bézier kurba definituko dugu $\gamma(t) = G \cdot M \cdot \boldsymbol{t}$ formulan $G = [P_0\, P_1\, P_2\, P_3]$ geometria matrizea eta $M$ oinarri matrizea hartuz, $\boldsymbol{t} = [1\, t\, t^2\, t^3]^T$:

   $$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hasteko idatzi $\gamma(t) = G \cdot M \cdot \boldsymbol{t}$ biderkatuz $M \cdot \boldsymbol{t}$ eta ondoren $\gamma'(t)$ deribatua ere kalkulatu. Frogatu baldintza hauek betetzen direla: $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(1) = P_3$, $\gamma'(0) = 3(P_1 - P_0)$, $\gamma'(1) = 3(P_3 - P_2)$

   *b*) Espazioan hamasei punturen sareta hartuz, Bézier adabakia da $S(u, v) = \sum_{i,j=0}^{3} P_{ij} b_i(u) b_j(v)$, non $u, v \in [0, 1]$ parametroak diren. Adierazi (frogapen zehatza egin gabe) adabakiaren $S(u, 0)$, $S(u, 1)$, $S(0, v)$, $S(1, v)$ ertzak zer diren, nola definitzen diren kurba horiek saretako $P_{ij}$ puntuen gainean.

3. (puntua) Plano afinean $P$ puntua, $\boldsymbol{a}$ translazio-bektorea eta $T^*$ transformazio lineala emanik, transformazio afina definitzen da $T(Q) =$

$P + T^*(Q - P) + \boldsymbol{a}$ idatziz, edozein puntu $Q$-rako. Ardatz kartesiarrak ezarriz, $P = \boldsymbol{x}_0$ eta $Q = \boldsymbol{x}$ zutabe-bektoreak idatziko ditugu, eta $A$ izango da transformazio linealaren matrizea. (a) Idatzi $A$ matrizea $\theta$ angeluko biraketa egiteko (zutabeak dira oinarri estandarra biratuta). (b) Idatzi $P(x_0, y_0)$ puntuaren inguruan $Q(x, y)$ biratzeko formula, hau da, transformazio afin honen adierazpena zutabe-bektoreekin kalkuluak egiteko, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ moduan idatziz. (c) Edozein transformazio afin emanik, $T(Q) = P + T^*(Q - P) + \boldsymbol{a}$, deduzitu $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$.

4. (1,5 puntu) Kamera $XYZ$ espazioan orientatzeko bi biraketa konposatuko ditugu (1. eta 4. praktikan bezala). Rodrigues-en formularen ordez oinarri estandarraren transformatuak zutabeka idatziko ditugu.

   *a*) Idatzi $R_1$ biraketa matrizea $\pi/4$ angelua biratuz $X$ ardatzaren inguruan eta $R_2$ biraketa matrizea $\pi/4$ angelua biratuz $Y$ ardatzaren inguruan. Marraztu bi irudi, bakoitzean oinarri estandarra eta honen transformatua (eskuin eskuaren arauarekin biratuz beti).

   *b*) Ondoren kalkulatu $R = R_2 R_1$ matrizea eta egiaztatu ortogonala dela, $R^T R = I$ (zutabeak perpendikularrak eta unitarioak).

   *c*) $R$ biraketa matrizea da, ardatza lortzeko $R\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ ekuazioa dugu, beraz $(R - I)\boldsymbol{w} = 0$ ekuazio sistema homogeneoa, idatzi hiru ekuazioak $\boldsymbol{w}(x, y, z)$ kalkulatzeko. Zenbat soluzio ditugu, zein hartuko genuke (soluzioa ez kalkulatu)?

5. (2 puntu)

   *a*) Kamera idealean nola definitzen dira $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ bektoreak? Zer angeluk mugatzen dute ikuspegi bolumena? Marraztu kameraren ikuspegian $n$ eta $f$ distantziak (hurbileko eta urrutiko planoa), ikuspegi enborra eta $A, B, C$ puntuak. Nola definitzen dira $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'$ bektoreak kameraren oinarrirako?

   *b*) Munduaren koordenatuak eta kameraren ikuspegi estandarra erlazionatzeko $O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ oinarria $P, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'$ oinarrian eraldatuko dugu dugu hiru transformazio afin eginez. Deskribatu $M_3, M_2, M_1$ matrizeen elementuak eta dagozkien transformazioak:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Idatzi $M_{per} = M^{-1}$, hiru matrizeen alderantzizkoak kalkulatuz. Azaldu $\boldsymbol{x}_{view} = M_{per}\,\boldsymbol{x}_{world}$ formula.

6. (puntua) Kameraren ikuspegi estandarrean erpin hauek dituen triangeluaren transformatua aztertuko dugu ikuspegi paralelizatuan:
$A(0,0,-1)$, $D(1/3,1/3,-2/3)$ eta $E(-1/3,1/3,-2/3)$.
Paralelizazio transformazioaren matrizea hau da ($n/f = 1/3$ izanik):

$$M_{pp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kalkulatu $A, D, E$ puntuen transformatu proiektiboak (hartu koordenatu homogeneoak eta emaitza ere homogeneizatu). Marraztu $X'Y'$ planoan triangelu transformatua ($z$ koordenaturik gabe). (Laguntza: ikuspegi paraleloan $A$ berdin geratzen da; $D$ eta $E$ bertikalarekiko simetrikoak dira $X'Y'$ planoan.)

7. (1,5 puntu)

a) Eredu grafiko baten argiztapenean, azaldu zer den puntu-argia eta argi direkzionala, ispilu-gainazala eta gainazal difusoa, eta Lambert-en legea, irudiak egin. Triangelu sare batean nola kalkulatzen da argiztapena baldin triangeluak nabarmentzea nahi ez bada?

b) Kameraren ikuspegi paralelizatuan aztertuko dugu izpi baten eta $ABC$ triangelu baten arteko $P$ ebakidura nola kalkulatu koordenatu barizentrikoen bidez. Izpia $(x_0, y_0)$ bikoteak zehazten du, beraz ebakidura, existitzen bada, $P(x_0, y_0, z)$ izango da non $z$ ezezaguna den. $A, B, C$ erpinen koordenatu kartesiarrak ezagunak dira. Idatzi $\alpha A + \beta B + \gamma C = P$ erlazioak ematen dizkigun hiru ekuazioak. Ekuazio hauetan zer dira ezezagunak? Zein izango da laugarren ekuazioa?

c) Triangelu sare bat renderizatzeko kalkuluak antolatzeko bi era daude: izpi-isurketa (ray casting) eta rasterizazioa, azaldu bi metodoak bi eskemaren laguntzarekin. Zer gordetzen da $closest[x, y]$ matrizean (depth buffer)?