KbG - Azterketa - 2020ko urria

1. (2 puntu)

   a) ABC triangeluaren barruko puntu baten koordenatu barizentrikoekin $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ adierazpena dugu: zein dira koordenatu horien ezaugarri nagusiak (ez frogatu, deskribatu bakarrik)? Zergatik esaten dugu P puntua erpinen konbinazio konbexua dela? $\mathbb{R}^3$ espazioan idatzi $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ puntuen koordenatu kartesiarrak hartuz.

   b) $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ adierazpena idazteko jatorri batean oinarritzen gera: $OP = \alpha OA + \beta OB + \gamma OC$. Frogatu behar da espazio afinean jatorri desberdin bat hartuz koordenatu barizentrikoak ez direla aldatzen, α, β, γ berak ditugula, frogapena egiteko hartu O' puntua, adierazpeneko OX bektoreak idatzi $OO' + O'X$ bezala eta ondoren sinplifikatu.

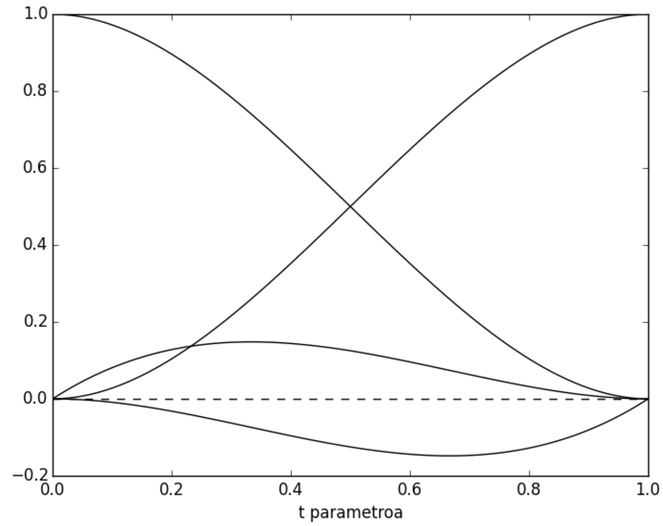
   c) Azkenik frogatu behar da koordenatu barizentrikoak bakarrak direla triangelua eta puntua emanik, $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ idazteko koordenatu hirukote bakarra dugula: absurdura eramanez pentsa P puntuaren konbinazioa idazteko bi koordenatu hirukote ditugula eta deduzitu berdinak izan behar direla (orain espazio afinean OA, OB, OC bektoreak linealki independienteak izango dira).

2. (2 puntu) P, Q puntuak eta $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ deribatu-bektoreak emanik, Hermite-ren kurbaren $\gamma(t) = G \cdot M \cdot \mathbf{t}$ adierazpide parametrikoan $G = [P\ Q\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$ da eta polinomioen zutabe-bektorea:

$$M \cdot \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ 3t^2 - 2t^3 \\ t - 2t^2 + t^3 \\ -t^2 + t^3 \end{bmatrix}$$

   a) Frogatu $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ eta $\gamma'(0) = \mathbf{v}$, $\gamma'(1) = \mathbf{w}$

   b) Identifikatu Hermite-ren lau polinomioak (P, Q puntuen eta $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ bektoreen koefizienteak, t parametroaren funtzioak) irudiko kurba hauetan (kopiatu eskuz gutxi gorabehera):



c) $P_0, P_1, \ldots P_n$ puntuak eta $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ deribatu-bektoreak emanik, nola eraikiko dugu $\gamma(t)$ interpolazio splinea? Nola definitzen dira $\mathbf{v}_i$ deribatu-bektoreak Catmull-Rom splinean?

d) Catmull-Rom splinea $\gamma(t) = \sum_i P_i\, b_{CR}(t{-}i)$ formakoa da. Nolakoa da b_{CR} funtzioa? (gutxi gorabehera)

e) Parametroa finkatuz, adibidez $t = 7,3$, esan nola geratzen den $\gamma(t)$ puntua kontrol puntuen konbinazio bezala.

3. (2 puntu)

a) Plano euklidearrean biraketa matrizea $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ da, interpretatu matrizea bi era hauetan: (i) transformazio geometriko bezala, nola kalkulatzen den transformatua, (ii) bi sistema kartesiarren arteko koordenatu aldaketa bezala, zein erlazio dugun koordenatuen artean.

b) Plano afinean P puntua, $\mathbf{a}$ translazioa eta T^* transformazio lineala emanik, transformazio afina dugu definituz, edozein puntu Q-rako, $T(Q) = P + T^*(Q - P) + \mathbf{a}$. Ardatz kartesiarrak ezarriz, $P = \mathbf{x}_0$ eta $Q = \mathbf{x}$ idatziko dugu, eta A izango da transformazio linealaren matrizea. Esan puntu baten inguruko biraketan zer den definizioko gauza bakoitza.

c) Plano euklidearrean transformazio proiektiboa definituko dugu matrize honen bidez (espazio proiektiboan):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$P(1,0)$ eta $Q(-4,3)$ puntuetatik doan zuzen parametrikoa hau da: $\ell(t) = P + t\,PQ = (1-5t, 3t)$. Idatzi koordenatu homogeneoak eta kalkulatu $M\ell(t)$. Parametroaren zein baliorako da transformatu proiektiboa infinituko puntua? Parametroa balio horren desberdina denean homogeneizatu emaitza, $\ell'(t)$ transformatu proiektiboa lortuz. Kalkulatu $\ell'(t)$ puntua $t \to \infty$ limitean.

4. (2 puntu) 3D biraketak aztertuko ditugu.

   a) Biraketa matrizeak ortogonalak dira, zer esan nahi du R matrizea ortogonala izateak? Zein da bere alderantzizkoa? Matrize ortogonal bat emanik, nola lortuko dugu biraketa ardatza? Eta angelua? Pentsa Rodrigues-en formularekin kalkulatzen ditugula hiru biraketa matrize, angelu/ardatz bikotea izanik: $\theta, \mathbf{w}$, $-\theta, -\mathbf{w}$ eta $2\pi - \theta$, $-\mathbf{w}$, matrizeak desberdinak lirateke? Egin biraketa horien irudiak ere.

   b) Dakigunez biraketak adierazten ditugu koaternoien bidez,

$$\mathbf{q}(\theta, \mathbf{w}) = \cos(\theta/2)\,[1\ 0\ 0\ 0]^T + \sin(\theta/2)\,[0\ \omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^T$$

   Izan bedi $\mathbf{q}(\theta, \mathbf{w})$ koaternoia, non θ eta $\mathbf{w}$ ezagunak diren, kalkulatu $\mathbf{q}(-\theta, -\mathbf{w})$ eta $\mathbf{q}(2\pi - \theta, -\mathbf{w})$ koaternoiak. Emaitza ikusirik, egokia da koaternoia 3D biraketa adierazteko?

5. (2 puntu) 3D eredu grafikoaren renderizazioa aztertuko dugu kamera idealaren bidez.

   a) Definitu kameraren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ bektoreak eta esan nola eskalatzen diren kameraren ardatzetako oinarriaren bektoreak lortzeko.

   b) Kameraren koordenatu sisteman ikuspegi estandarra dugu, hurbileko eta urrutiko planoek ($z = -n/f$ eta $z = -1$) enborra mugatzen dute: idatzi enborraren zortzi erpinen koordenatuak. Paralelizazio transformazioak kubo (irregular) batean bihurtzen du enborra, zein dira erpin berrien koordenatuak?

c) Izan bedi paralelizazio transformazioari dagokion matrizea (espazio proiektiboan) ondorengoa ($n/f = 1/3$):

$$M_{pp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Triangelu baten erpinak, kameraren koordenatu sisteman, hauek dira: $A(0,0,-1)$, $D(1/3,1/3,-2/3)$, $E(-1/3,1/3,-2/3)$. Hartu koordenatu homogeneoak eta kalkulatu transformatuak (homogeneizatu emaitza) eta marraztu $X'Y'$ planoan triangelu transformatua (Z' gabe).

d) Eredu grafikoa triangelu sarea izanik eta argiztapena kontsideratuz, irudi baten languntzaz deskribatu izpi-isurketaren renderizazio algoritmoa (hitzez, algoritmoa idatzi gabe).