KbG - Azterketa - 2018ko urria

1. (puntua) Definitu triangelu sare anizkoitza (itxia) eta sare anizkoitz mugaduna (bereizi mugako erpinak eta barnekoak). Triangelu sare anizkoitzak noiz du orientazio koherentea? Triangelu sareak orientazio koherentea badu, bektore normalek (eskuin eskuaren arauarekin hartuta) zer adierazten dute?

2. (1,5 puntu)

   a) Izan bedi ABC triangelua, planoan XY ardatz kartesiarrak finkatuz idatzi $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ erlazioa puntuen koordenatu kartesiarren bidez. Koordenatu barizentrikoak ezezagunak badira, zein izango da hirugarren ekuazioa hauek lortzeko? Sistema $M\mathbf{w} = \mathbf{b}$ bezala idazten bada, zein dira M eta $\mathbf{b}$? Ekuazio sistema ebatziz, nola dakigu P puntua triangeluaren barruan dagoen?

   b) Zer da ehundura mapaketa? Azaldu nola egiten diren kalkuluak (XY ardatzetan triangelu bat hartuz, zer dira UV ardatzak, zer dira erpinen u, v koordenatuak, nola egiten da iterpolazio barizentrikoa P puntu baten u, v koordenatuak lortzeko, zer egiten da koordenatu hauekin).

3. (puntua) Espazioan edo planoan lau puntu emanik, eta ardatz kartesiarrak finkatuz, Bézier kurba definituko dugu $\gamma(t) = G \cdot M \cdot \mathbf{t}$ formulan $G = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4]$ geometria matrizea eta oinarri matrize hau hartuz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hasteko kalkulatu $M \cdot \mathbf{t}$ (non $\mathbf{t} = [1\ t\ t^2\ t^3]^T$) eta honen deribatua. Ondoren frogatu baldintza hauek betetzen dituela Bézier kurbak:
   $\gamma(0) = P_1$, $\gamma(1) = P_4$, $\gamma'(0) = 3(P_2 - P_1)$, $\gamma'(1) = 3(P_4 - P_3)$

4. (1,5 puntu)

   a) Zer da Bézier adabakia? Zenbat kontrol puntu behar dira, nola ordenatzen dira espazioan?

b) Aurreko ariketako $M \cdot \mathbf{t}$ biderkaduratik lortu $b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t)$ polinomioak. Kalkulatu polinomio hauek hartzen dituzten balioak t parametroa 0 denean eta 1 denean.

c) Azaldu Bézier adabakiaren formula (non $0 \leq u, v \leq 1$):

$$S(u,v) = \sum_{i,j=0}^{3} P_{ij} b_i(u) b_j(v)$$

d) Aztertu adabakiaren ertzak: $S(u,0), S(u,1), S(0,v), S(1,v)$

5. (puntua)

   a) Planoan koordenatu kartesiarrak hartuz (koordenatu homogeneoak), deskribatu transformazio afinari dagokion matrize zabaldua.

   b) Jatorria ez den $P = (x_0, y_0)$ puntuaren inguruan θ angeluko biraketaren matrize zabaldua definitu hiru transformazio afin konposatuz, hau da, hiru matrize biderkatuz.

6. (puntua) Izan bedi planoan transformazio proiektiboa, koordenatu kartesiarrak hartuz matrize hau duena (espazio proiektiboan):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestalde, Y ardatza idatziko dugu zuzen parametriko bezala:

$$l(t) = (0, t)$$

Kalkulatu zuzenaren transformatu proiektiboa. Parametroaren zein baliok ematen du transformatuaren infinituko puntua? Kalkulatu $t \to \infty$ zein puntu den zuzen transformatuan. Kalkulatu zuzen transformatuan lau puntu hauek: $t = 0, 3, -2, -3$. Marraztu zuzen transformatua t parametroaren balioen arabera (lau puntu horiek, infinituko puntuak eta parametroaren limitea ere).

7. (1,5 puntu)

   a) Transformazio lineal bat isometrikoa bada, biraketa den bezala, bere matrizea ortogonala da. Zer da matrize ortogonala? Zein da bere alderantzizkoa? Biraketaren kasuan, zein da matrizearen autobalioa (erreala) eta autobektorea?

   b) Idatzi Z^+ ardatzaren inguruko $R_{XY}(\theta)$ biraketa matrizea, $\theta = \pi/4$ hartuz. Egiaztatu ortogonala dela. Idatzi matrizea $\theta = -\pi/4$ hartuz, zein da emaitza? Hasierako matrizearekin jarraituz, aztertu $\mathbf{e_3}$ autobektorea den.

   c) Irudi baten bidez adierazi $\theta, \mathbf{w}$ eta $-\theta, -\mathbf{w}$ biraketak. Biraketa berdinak dira eta koaternoi berdina dute? Irudi baten bidez adierazi $\theta, \mathbf{w}$ eta $2\pi - \theta$, $-\mathbf{w}$ biraketak. Biraketa desberdinak dira? Zer erlazio dute koaternoiek? Eta matrizeek?

8. (1,5 puntu) Eredu grafikoaren renderizazioa kamera idealaren artifizioarekin egiten da.

   a) Nola definitzen dira kamerari elkartutako $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bektoreak? Munduko ardatzen oinarri kanonikoa $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bektoreetan transformatzeko zein da biraketa matrizea?

   b) Irudi baten laguntzarekin definitu perspektibadun ikuspegi bolumena mugatzen duten θ_w, θ_h angeluak eta enborra mugatzen duten hurbileko planoa eta urrunekoa (n, f distantziak). Kameraren ardatzetan, bere oinarriko bektoreak eskalatu ondoren, idatzi perspektibadun ikuspegi bolumenaren enborraren zortzi erpinen koordenatuak.

   c) Definitu eredua renderizatzeko egiten den transformazio proiektiboa: nola transformatzen da perspektibadun ikuspegi bolumena? Zein dira enborraren transformatuan zortzi erpinen koordenatuak?

   d) Kamera idealaren zulotik doazen izpiak nola geratzen dira transformazio proiektiboaren ondorioz? Honelako izpi bateko puntuen koordenatuak nolakoak dira transformatu ondoren? Zertarako balio du hirugarren $(-z)$ koordenatuak?