Ekuazio diferentzial arrunten zenbakizko integrazioa: 3. atala

Zientziarako Konputazioa,
Informatika Fakultatea,
Euskal Herriko Unibertsitatea / Universidad del Pais Vasco (UPV/EHU)

Euler-en metodo hobetua

Metodo honetan, $u_k \approx u(t_k)$ hurbilpenak $k = 1, \ldots, n$ indizeetarako kalkulatzeko

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_k &= u_{k-1} + hf(t_{k-1}, u_{k-1}, p), \\
t_k &= t_{k-1} + h, \\
u_k &= u_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f\left(t_{k-1}, u_{k-1}, p\right) + f\left(t_k, \tilde{u}_k, p\right)\right).
\end{aligned}$$

Euler-en metodo hobetua

Metodo honetan, $u_k \approx u(t_k)$ hurbilpenak $k = 1, \ldots, n$ indizeetarako kalkulatzeko

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_k &= u_{k-1} + hf(t_{k-1}, u_{k-1}, p), \\
t_k &= t_{k-1} + h, \\
u_k &= u_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f\left(t_{k-1}, u_{k-1}, p\right) + f\left(t_k, \tilde{u}_k, p\right)\right).
\end{aligned}$$

Baina zein zentzutan da Euler-en metodoa baino hobea?

Euler-en metodo hobetua

Metodo honetan, $u_k \approx u(t_k)$ hurbilpenak $k = 1, \ldots, n$ indizeetarako kalkulatzeko

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_k &= u_{k-1} + hf(t_{k-1}, u_{k-1}, p), \\
t_k &= t_{k-1} + h, \\
u_k &= u_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f\left(t_{k-1}, u_{k-1}, p\right) + f\left(t_k, \tilde{u}_k, p\right)\right).
\end{aligned}
$$

Baina zein zentzutan da Euler-en metodoa baino hobea?
Honi erantzuten saiatzeko, adibide sinple bat hartuko dugu, bertikalki erortzen ari den tenisko pelotaren abiaduraren eredua sinplifikatua:

$$
\frac{dv}{dt} = -g + \frac{c}{M} v^2, \qquad v(0) = 0.
$$

non $g = 9{,}8\, m/s^2$, $M = 0{,}058\, kg$, eta $c = \frac{M}{180}$ diren.

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Bere soluzioa:

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Bere soluzioa:

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetua aplikatuko ditugu, metodo hauek aplikatzen direnean egiten den errorea azterteko asmotan.

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Bere soluzioa:

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetua aplikatuko ditugu, metodo hauek aplikatzen direnean egiten den errorea azterteko asmotan.

1. Denbora diskretizazioa aukeratuko dugu lehenengo:

   $$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots,\ t_{n-1} = (n-1)h,\ t_n = nh = 30,$$

   non $n = 240$ eta $h = 30/n = 1/8$,

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Bere soluzioa:

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetua aplikatuko ditugu, metodo hauek aplikatzen direnean egiten den errorea azterteko asmotan.

1. Denbora diskretizazioa aukeratuko dugu lehenengo:

   $$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots,\ t_{n-1} = (n-1)h,\ t_n = nh = 30,$$

   non $n = 240$ eta $h = 30/n = 1/8$,
2. eta Euler-en metodoa aplikatuko dugu $v_j \approx v(t_j)$ hurbilketak lortzeko $j = 1, 2, \ldots, n$ indizeetarako, hau da,

   $$v_j = v_{j-1} + h\,(-9{,}8 + v_{j-1}^2/180).$$

Tenisko pelotaren abiaduraren problema:

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Bere soluzioa:

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetua aplikatuko ditugu, metodo hauek aplikatzen direnean egiten den errorea azterteko asmotan.

1. Denbora diskretizazioa aukeratuko dugu lehenengo:

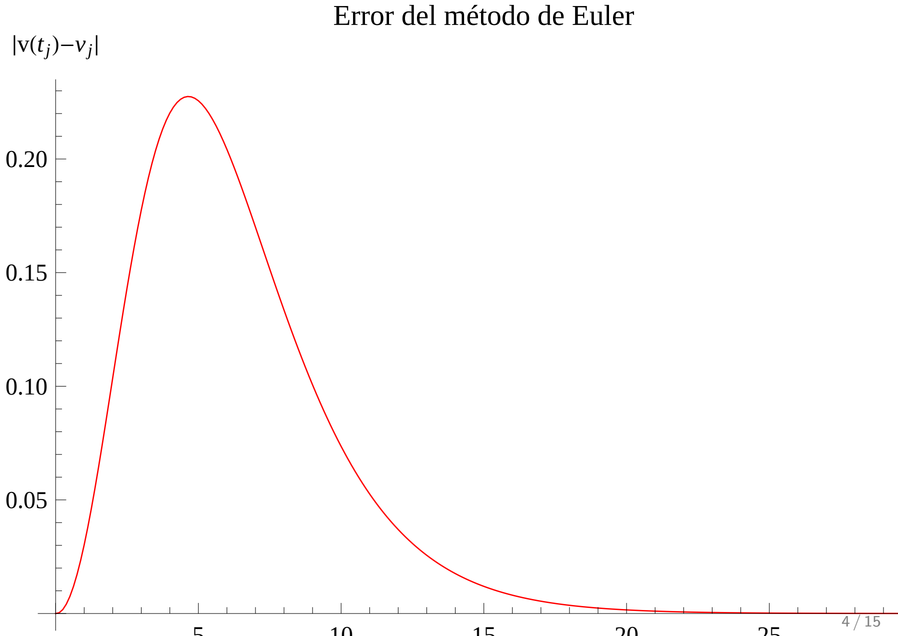
   $$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots,\ t_{n-1} = (n-1)h,\ t_n = nh = 30,$$

   non $n = 240$ eta $h = 30/n = 1/8$,
2. eta Euler-en metodoa aplikatuko dugu $v_j \approx v(t_j)$ hurbilketak lortzeko $j = 1, 2, \ldots, n$ indizeetarako, hau da,

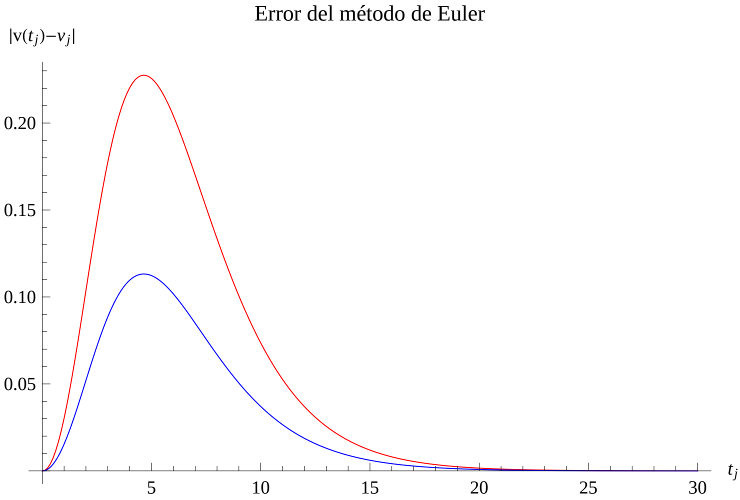
   $$v_j = v_{j-1} + h\,(-9{,}8 + v_{j-1}^2/180).$$

Grafikoki adieraziko ditugu $|v_j - v(t_j)|$ erroreak t_j denborekiko.

$h = 1/8$ kasuan egiten den errorea honakoa da:

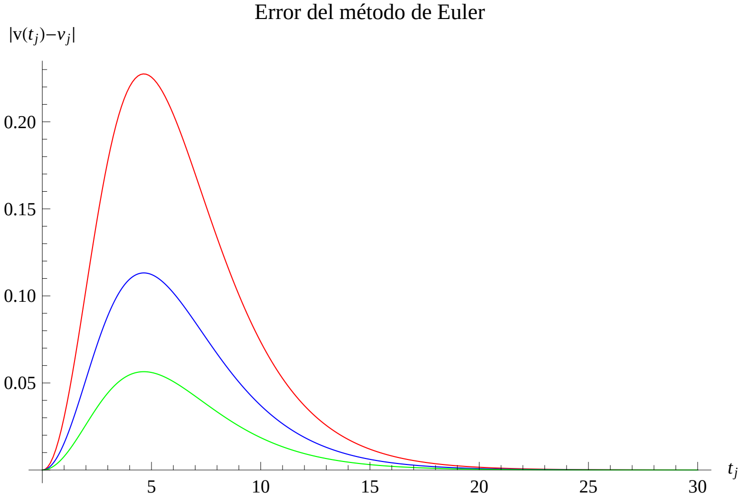


$h = 1/8$ kasuan egiten den errorea honakoa da:



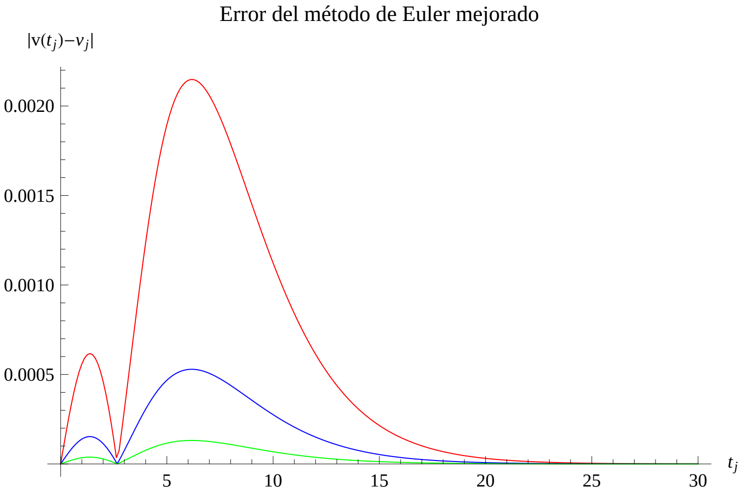
Aldiz, kalkuluak diskretizazio finagoarekin ($h = 1/16$) berreginez gero, errorea txikiagotu egiten da.

$h = 1/8$ kasuan egiten den errorea honakoa da:

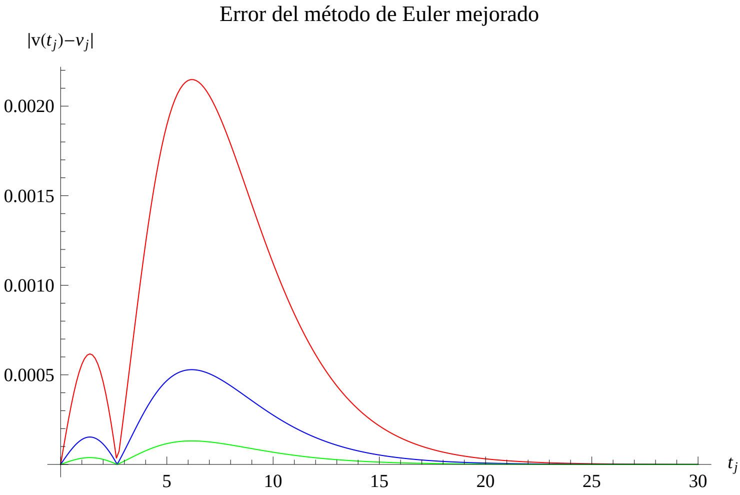


Aldiz, kalkuluak diskretizazio finagoarekin ($h = 1/16$) berreginez gero, errorea txikiagotu egiten da. Eta are txikiagoa $h = 1/32$ kasurako.

Euler hobetuaren metodoa gero eta diskretizazio finagoekin ($h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$) aplikatuz gero, errorea txikitu egiten da baita ere.



Euler hobetuaren metodoa gero eta diskretizazio finagoekin ($h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$) aplikatuz gero, errorea txikitu egiten da baita ere.



Gainera, errorearen txikitzea, Euler-en metodoaren aldean, areagotu egin da.

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h urrats luzera txikitzean errorearen txikitze maila desberdina da:

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h urrats luzera txikitzean errorearen txikitze maila desberdina da:

- Euler-en metodoan, h erdibitzean, errorea zati bi egiten da gutxigora behera.

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h urrats luzera txikitzean errorearen txikitze maila desberdina da:

- Euler-en metodoan, h erdibitzean, errorea zati bi egiten da gutxigora behera. Kasu honetan, errorea gutxi gorabehera h-ren proportzionala da.

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h urrats luzera txikitzean errorearen txikitze maila desberdina da:

- Euler-en metodoan, h erdibitzean, errorea zati bi egiten da gutxigora behera. Kasu honetan, errorea gutxi gorabehera h-ren proportzionala da.
- Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h erdibitzeann, errorea zati lau egiten da gutxi gorabehera.

Euler-en metodoa eta Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h urrats luzera txikitzean errorearen txikitze maila desberdina da:

- Euler-en metodoan, h erdibitzean, errorea zati bi egiten da gutxigora behera. Kasu honetan, errorea gutxi gorabehera h-ren proportzionala da.
- Euler-en metodo hobetuaren kasuan, h erdibitzeann, errorea zati lau egiten da gutxi gorabehera. Kasu honetan errorea gutxi gorabehera h^2-ren proportzionala da.

Demagun zenbakizko metodo bat aplikatu dugula

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0 d \tag{2}$$

problemaren $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko $t \in [t_0, T]$ tartean, ondorengo hurbilketak

$$u_k \approx u(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

lortu ditugularik (non $t_k = t_0 + k\,h$ eta $h = (T - t_0)/n$ diren).

Demagun zenbakizko metodo bat aplikatu dugula

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0 d \tag{2}$$

problemaren $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko $t \in [t_0, T]$ tartean, ondorengo hurbilketak

$$u_k \approx u(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

lortu ditugularik (non $t_k = t_0 + k\,h$ eta $h = (T - t_0)/n$ diren). Zenbat eta diskretizazio finagoa erabili (hauda, zenbat eta h txikiago hartu), txikiagoa izango da errorea

$$Error(h) = \max_{1 \le k \le n} ||u(t_k) - u_k||.$$

Demagun zenbakizko metodo bat aplikatu dugula

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0 d \tag{2}$$

problemaren $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko $t \in [t_0, T]$ tartean, ondorengo hurbilketak

$$u_k \approx u(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

lortu ditugularik (non $t_k = t_0 + k\,h$ eta $h = (T - t_0)/n$ diren). Zenbat eta diskretizazio finagoa erabili (hauda, zenbat eta h txikiago hartu), txikiagoa izango da errorea

$$Error(h) = \max_{1 \le k \le n} ||u(t_k) - u_k||.$$

Metodoaren ordenaren definizioa

Metodo r ordenakoa da (2) problemarako $[t_0, T]$ tartean, baldin $\exists C > 0$ non $\frac{1}{h^r}\mathrm{Error(h)} \le C$.

Demagun zenbakizko metodo bat aplikatu dugula

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0 d \tag{2}$$

problemaren $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko $t \in [t_0, T]$ tartean, ondorengo hurbilketak

$$u_k \approx u(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

lortu ditugularik (non $t_k = t_0 + k\,h$ eta $h = (T - t_0)/n$ diren). Zenbat eta diskretizazio finagoa erabili (hauda, zenbat eta h txikiago hartu), txikiagoa izango da errorea

$$Error(h) = \max_{1 \leq k \leq n} ||u(t_k) - u_k||.$$

Metodoaren ordenaren definizioa

Metodo *r ordenakoa* da (2) problemarako $[t_0, T]$ tartean, baldin $\exists C > 0$ non $\dfrac{1}{h^r}\mathrm{Error(h)} \leq C$.

Oharra: $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ bektorea emanik, $||v||$ bektore horren norma Euclidearra da, hots, $||v|| = \sqrt{(v_1)^2 + \cdots + (v_d)^2}$.

Orain arte,

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

moduko hasierako baliodun problemen $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko bi metodo ikusi ditugu:

- Euler-en metodoa. Metodo hau lehen ordenakoa da.
- Euler-en metodo hobetua. Hau bigarren ordenakoa da.

Orain arte,

$$\frac{d}{dt}u = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

moduko hasierako baliodun problemen $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko bi metodo ikusi ditugu:

- Euler-en metodoa. Metodo hau lehen ordenakoa da.
- Euler-en metodo hobetua. Hau bigarren ordenakoa da.

Praktikan, ordena altuagoko metodoak erabiltzea interesatuko zaigu, diskretizazio bererako doitasun hobea emango digutenak. Metodo mota asko ezagutzen dira ordena altuagoko metodoak dituztenak:

Orain arte,

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

moduko hasierako baliodun problemen $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko bi metodo ikusi ditugu:

- Euler-en metodoa. Metodo hau lehen ordenakoa da.
- Euler-en metodo hobetua. Hau bigarren ordenakoa da.

Praktikan, ordena altuagoko metodoak erabiltzea interesatuko zaigu, diskretizazio bererako doitasun hobea emango digutenak. Metodo mota asko ezagutzen dira ordena altuagoko metodoak dituztenak:

- Taylor-en metodoak,
- Runge-Kutta (RK) metodoak,
- Urrats anitzeko metodo linealak,
- ...

Orain arte,

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

moduko hasierako baliodun problemen $u(t)$ soluzioa hurbiltzeko bi metodo ikusi ditugu:

- Euler-en metodoa. Metodo hau lehen ordenakoa da.
- Euler-en metodo hobetua. Hau bigarren ordenakoa da.

Praktikan, ordena altuagoko metodoak erabiltzea interesatuko zaigu, diskretizazio bererako doitasun hobea emango digutenak. Metodo mota asko ezagutzen dira ordena altuagoko metodoak dituztenak:

- Taylor-en metodoak,
- Runge-Kutta (RK) metodoak,
- Urrats anitzeko metodo linealak,
- ...

Hemen, bi Runge-Kutta metodo konkretu azalduko ditugu, bata 4 ordenakoa, eta bestea 5 ordenakoa, praktikan oso erabiliak direnak.

Behin h urrats luzera finkaturik,

Lau ordenako Runge-Kutta metodoa klasikoa (RK4)

$j = 0, 1, 2, \ldots$ indizeetarako, ondorengoak kalkulatzen dira

$$t_{j+1} = t_j + h, \qquad u_{j+1} = u_j + \frac{1}{6}(k_{j,1} + 2k_{j,2} + 2k_{j,3} + k_{j,4}).$$

non

$$\begin{aligned} k_{j,1} &= h\,f(t_j, u_j), \\ k_{j,2} &= h\,f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{1}{2}k_{j,1}), \\ k_{j,3} &= h\,f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{1}{2}k_{j,2}), \\ k_{j,4} &= h\,f(t_j + h, u_j + k_{j,3}), \end{aligned}$$

Behin h urrats luzera finkaturik,

Lau ordenako Runge-Kutta metodoa klasikoa (RK4)

$j = 0, 1, 2, \ldots$ indizeetarako, ondorengoak kalkulatzen dira

$$t_{j+1} = t_j + h, \qquad u_{j+1} = u_j + \frac{1}{6}(k_{j,1} + 2k_{j,2} + 2k_{j,3} + k_{j,4}).$$

non

$$\begin{aligned}
k_{j,1} &= h\,f(t_j, u_j),\\
k_{j,2} &= h\,f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{1}{2}k_{j,1}),\\
k_{j,3} &= h\,f(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{1}{2}k_{j,2}),\\
k_{j,4} &= h\,f(t_j + h, u_j + k_{j,3}),
\end{aligned}$$

Era honetan, ondorengo hurbilpenak lortzen dira

$$u_j \approx u(t_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Oharrak:

- u_j bakoitza d osagaiko bektore bat da ($u_j \in \mathbb{R}^d$), egoera bektorearen $t = t_j$ uneko hurbilpena
- $(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^{d+1}$, bakoitzerako $f(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^d$.

Oharrak:

- u_j bakoitza d osagaiko bektore bat da ($u_j \in \mathbb{R}^d$), egoera bektorearen $t = t_j$ uneko hurbilpena
- $(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^{d+1}$, bakoitzerako $f(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^d$.
- $k_{j,i}$ bakoitza ere d osagaiko bektorea da, u_{j+1} hubilpena t_j eta u_j balioen arabera kalkulatzeko erabiltzen diren tarteko bektoreak dira. Sarritan, j urrats desberdinetako $k_{j,i}$ bektoreak gordetzen ez direnez, aldagai lokal laguntzaile gisa erabiltzen direlako k_i moduan idazten dira sinplifikatzeko,

Oharrak:

- u_j bakoitza d osagaiko bektore bat da ($u_j \in \mathbb{R}^d$), egoera bektorearen $t = t_j$ uneko hurbilpena
- $(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^{d+1}$, bakoitzerako $f(t_j, u_j) \in \mathbb{R}^d$.
- $k_{j,i}$ bakoitza ere d osagaiko bektorea da, u_{j+1} hubilpena t_j eta u_j balioen arabera kalkulatzeko erabiltzen diren tarteko bektoreak dira. Sarritan, j urrats desberdinetako $k_{j,i}$ bektoreak gordetzen ez direnez, aldagai lokal laguntzaile gisa erabiltzen direlako k_i moduan idazten dira sinplifikatzeko,
- Zenbat eta txikiagoa izan h urrats luzera, orduan eta finago izango da diskretizazioa, eta orduan eta doitasun handiagoa izango dute u_j hurbilpenak.

Dormand eta Prince-ren 5 ordenako RK metodoa

$j = 0, 1, 2, \ldots$ indezeetarako,

$$t_{j+1} = t_j + h, \quad u_{j+1} = u_j + \tfrac{35}{384} k_1 + \tfrac{500}{1113} k_3 + \tfrac{125}{192} k_4 - \tfrac{2187}{6784} k_5 + \tfrac{11}{84} k_6.$$

non j bakoitzerako, tarteko $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{R}^d$ bektoreak horrela kalkulatzen diren

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(t_j, u_j) \\
k_2 &= h\, f(t_j + \tfrac{1}{5} h, u_j + \tfrac{1}{5} k_1) \\
k_3 &= h\, f(t_j + \tfrac{3}{10} h, u_j + \tfrac{3}{40} k_1 + \tfrac{9}{40} k_2) \\
k_4 &= h\, f(t_j + \tfrac{4}{5} h, u_j + \tfrac{44}{45} k_1 - \tfrac{56}{15} k_2 + \tfrac{32}{9} k_3) \\
k_5 &= h\, f(t_j + \tfrac{8}{9} h, u_j + \tfrac{19372}{6561} k_1 - \tfrac{25360}{2187} k_2 + \tfrac{64448}{6561} k_3 - \tfrac{212}{729} k_4) \\
k_6 &= h\, f(t_j + h, u_j + \tfrac{9017}{3168} k_1 - \tfrac{355}{33} k_2 + \tfrac{46732}{5247} k_3 + \tfrac{49}{176} k_4 - \tfrac{5103}{18656} k_5)
\end{aligned}$$

Horrela, ondorengo hurbilpenak lortzen dira

$$u_j \approx u(t_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Problema matematikoen soluzioak kalkulatzeko hurbilpen metodoak erabiltzen direnean: egindako erroreen gaineko informazioa lortzea komeni da, zenbakizko emaitzak nahikoa doiak diren egiaztatu ahal izateko.

Demagun hasierako baliodun $\frac{d}{dt}u = f(t,u)$, $u(t_0) = u_0$ problemaren soluzioa kalkulatu dugula zenbakizko metodoren bat h urrats luzerarekin aplikatuz, $u_j \approx u(t_j)$ hurbilketak lortu ditugularik, ondorengo denboretarako

$$t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_0 + 2h,\ t_3 = t_0 + 3h,\ t_4 = t_0 + 4h, \ldots$$

Jakin nahiko genuke $u_j - u(t_j)$ erroreak nahikoa txikiak diren, baina orohar $u(t_j)$ balio zehatzak ez ditugu ezagutzen.

Problema matematikoen soluzioak kalkulatzeko hurbilpen metodoak erabiltzen direnean: egindako erroreen gaineko informazioa lortzea komeni da, zenbakizko emaitzak nahikoa doiak diren egiaztatu ahal izateko.

Demagun hasierako baliodun $\frac{d}{dt}u = f(t,u)$, $u(t_0) = u_0$ problemaren soluzioa kalkulatu dugula zenbakizko metodoren bat h urrats luzerarekin aplikatuz, $u_j \approx u(t_j)$ hurbilketak lortu ditugularik, ondorengo denboretarako

$$t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_0 + 2h,\ t_3 = t_0 + 3h,\ t_4 = t_0 + 4h, \ldots$$

Jakin nahiko genuke $u_j - u(t_j)$ erroreak nahikoa txikiak diren, baina orohar $u(t_j)$ balio zehatzak ez ditugu ezagutzen. Zenbakizko metodoaren errorea nolabait kontrolatzeko hainbat metodo erabil daitezke. Hemen, horietako bat azalduko dugu:

Problema matematikoen soluzioak kalkulatzeko hurbilpen metodoak erabiltzen direnean: egindako erroreen gaineko informazioa lortzea komeni da, zenbakizko emaitzak nahikoa doiak diren egiaztatu ahal izateko.

Demagun hasierako baliodun $\frac{d}{dt}u = f(t, u),\ u(t_0) = u_0$ problemaren soluzioa kalkulatu dugula zenbakizko metodoren bat h urrats luzerarekin aplikatuz, $u_j \approx u(t_j)$ hurbilketak lortu ditugularik, ondorengo denboretarako

$$t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_0 + 2h,\ t_3 = t_0 + 3h,\ t_4 = t_0 + 4h, \ldots$$

Jakin nahiko genuke $u_j - u(t_j)$ erroreak nahikoa txikiak diren, baina orohar $u(t_j)$ balio zehatzak ez ditugu ezagutzen. Zenbakizko metodoaren errorea nolabait kontrolatzeko hainbat metodo erabil daitezke. Hemen, horietako bat azalduko dugu: Bi diskretizazio desberdinetarako metodo bera bi aldiz aplikatuz lor daitekeena.

Demagun $\frac{d}{dt}u = f(t,u)$, $u(t_0) = u_0$ problemaren soluzioa kalkulatu dugula r ordenako metodoren bat h urrats luzerarekin aplikatuz. Emaitzak bi urratsero gorde ditugu, hau da, u_j egoeratik abiatuz, u_{j+1} egoera lortzeko metodoaren h luzerako bi urrats aplikatu ditugu. Horrela, $u_j \approx u(t_j)$ hurbilketak lortuko ditugu, ondorengo denboretarako

$$t_1 = t_0 + 2h, \;\; t_2 = t_0 + 4h, \;\; t_3 = t_0 + 6h, \;\; t_4 = t_0 + 8h, \ldots,$$

Errorearen estimazioaren prozedura

1. Metodo bera aplikatzen da berriz, baina urrats luzera gisa $2h$ hartuz, honako hurbilpenak lortzen direlarik:

$$\tilde{u}_1 \approx u(t_1), \;\; \tilde{u}_2 \approx u(t_2), \;\; \tilde{u}_3 \approx u(t_3), \ldots$$

2. $u_j - u(t_j)$ errorea estimatzeko, $j = 1, 2, 3, \ldots$ indizeetarako kalkulatuko dugu

$$u_j - u(t_j) \approx \frac{1}{2^r - 1}(\tilde{u}_j - u_j) \qquad (3)$$