



**PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
FINANCEIRA E FINANÇAS  
2023/2024**

**Caso Prático 2 – Otimização da Carteira**

**Trabalho Realizado por:**  
Beatriz Rafael Simões Gomes  
Rui Jorge Carvalho Caseiro

**Coimbra, junho de 2024**

## Introdução

No âmbito da unidade curricular de Gestão de Carteiras e Planeamento Financeiro lecionada pelo Professor Vítor Ribeiro, este trabalho dá seguimento ao caso 1, abordando a questão da alocação de ativos ótima para a família torga.

Com base na Investment Policy Statement (IPS) e no Capital Market Expectations Report (CME), apresentamos diferentes estratégias de alocação de ativos, incluindo estratégias de risco mínimo e de maximização do rácio de Sharpe.

Iniciaremos com uma análise estatística das classes de ativos, identificando aquelas que possuem os melhores retornos, como o SPY e o EXSA.DE, bem como as que possuem maior volatilidade, como o AAXJ e o EEM. Esta análise também incluirá as respectivas médias geométricas e um mapa das correlações anuais para avaliar quais os ativos contribuem para a diversificação dos investimentos.

Em seguida, iremos desenvolver a estratégia de alocação de ativos que melhor se adequa ao perfil da família torga, tendo em conta o seu perfil de risco, o retorno necessário para atingir os seus objetivos e a sua capacidade de suportar uma queda no portfólio.

Finalizamos com uma simulação de Monte Carlo para a SAA desenvolvida para a família, proporcionando uma visão mais completa sobre os possíveis resultados da carteira de investimento e permitindo uma gestão eficaz dos riscos associados.

## Análise e desenvolvimento do caso

Iniciamos com a análise estatística das classes de ativos propostas de modo a entender o comportamento e desempenho das mesmas ao longo do tempo. Focando na média geométrica e aritmética, nos desvios padrões e nas correlações anuais dos retornos, considerando horizontes temporais rolantes de 5 e 10 anos permite avaliar como as métricas variam ao longo do tempo.

No anexo 5 encontram-se as médias geométricas dos diferentes ativos bem como o período de análise. Observamos que o SPY é o ativo com a maior média geométrica (9,05%, 20 anos), o que sugere que o investimento no ETF que replica o índice do S&P 500 tem sido o mais lucrativo. O ativo EXSA.DE e o GLD ambos apresentam médias geométricas elevadas, destacando-se como boas opções de investimento. O GLD está associado ao ouro, um ativo mais tradicional considerando-se uma opção mais segura devido ao seu alto retorno associado a sua capacidade de preservar valor mesmo em períodos de instabilidade económica.

Consideramos interessante também analisar o JPXN, um ETF que replica um índice japonês com as maiores 400 empresas, demonstrando uns retornos moderados, sendo menos expressivo comparado com outros mercados. O BND, representa as obrigações globais com uma média de retorno anualizada de 2,55%. Por fim o BIL, um ETF que investe mais de 80% em bilhetes do tesouro americanos de 3 meses, com a menor crescimento anualizado de apenas 0,74%.

Os anexos 2 e 3 demonstram as médias aritméticas segundo dois horizontes temporais rolantes.

No anexo 2 das médias aritméticas rolantes a 5 anos, destacamos o BND com umas médias rolantes consistentes durante todo o período analisado. O GLD e o BIL são os ativos que apresentam mais médias rolantes negativas (3). Os seguintes ativos

apresentaram médias positivas para todo o período analisado: VWEHX, VNQ, SPY, JPXN, EXSA.DE e BND.

No anexo 3 das médias aritméticas rolantes a 10 anos nenhum dos ativos apresenta um resultado negativo quer isto dizer que nenhum destes ativos deu um retorno negativo num horizonte temporal de 10 anos. O SPY e BND revelam resultados bastante consistentes. O AAXJ e o EEM apresentam resultados bastantes inconsistentes no período analisado.

No anexo 6 observamos para cada ativo o respetivo desvio padrão, destacando o AAXJ e EEM como os ativos com maior desvio padrão, ou seja, com maior volatilidade. O GLD, o SPY e o JPXN possuem um nível de risco similar. O BND e BILL são deste modo os ativos com menor desvio padrão, menor volatilidade, sendo ideais para a preservação do capital e para investidores extremamente avessos ao risco.

O anexo 4 apresenta as correlações entre os retornos anuais das diferentes classes de ativos. Podemos identificar como correlações positivas muito fortes o AAXJ e EEM (0,9527), o AAXJ e SPY (0,8090) e o SPY e EEM (0,8375), o que indica que os ativos tendem a se movimentar de maneira muito semelhante. Sugerindo que ao investirmos, por exemplo, em ambos o AAXJ e SPY não contribuem para a diversificação do portfólio.

Relativamente às correlações baixas e negativas, destacamos a maioria das correlações do BIL com outros ativos, como BILL e SPY (-0,1323) o que indica que o BIL pode atuar como um bom ativo de diversificação de portfólio uma vez que tende a comportar-se de maneira diferente aos outros ativos. As correlações do GLD com outros ativos também são em geral baixas, confirmando o papel tradicional do ouro como um ativo seguro proporcionando diversificação à carteira.

## Otimização de carteiras

Seguindo para a otimização da carteira de investimentos, esta consiste em alterar a carteira para alcançar objetivos específicos de retorno e gestão de risco, selecionando diferentes classes de ativos de modo a diversificar a carteira. Markowitz (1952) desenvolveu a teoria moderna do portfólio, que lhe rendeu um nobel de economia em 1990, este argumentava que o investidor deve avaliar o retorno e risco dos ativos em conjunto. Markowitz (1952) comprovou no seu estudo que para além do risco e retorno dos ativos, também a correlação dos ativos entre si, dita a performance do portfólio, um portfólio deve ser diversificado. Através da diversificação obtém-se melhores resultados de retorno-risco (Mauricio, 2022), num portfólio bem diversificado, com ativos descorrelacionados, as perdas de uns ativos são compensadas pelos ganhos de outros ativos (Bernarda, 2021). Este é um método matemático de otimização de seleção de investimentos, que permite a criação de uma fronteira eficiente de portfólios ótimos que oferecem o maior retorno possível para determinado nível de risco (Bernarda, 2021).

A seleção dos ativos do portfólio consiste em 2 fases: a primeira fase é a de análise de dados históricos de determinado conjunto de ativos para se ter uma expectativa do comportamento futuro destes ativos, a segunda fase é a de construção do portfólio com base nos dados obtidos na primeira fase (Markowitz, 1952). A teoria moderna do

portfólio segue alguns pressupostos: o desvio-padrão é utilizado como um *proxy* de risco, os investidores são racionais e querem maximizar a sua utilidade, os investidores têm acesso a toda a informação necessária, os mercados são eficientes, os investidores são avessos ao risco e tomam as suas decisões de acordo com essa premissa e a maximização do retorno tendo em conta o nível de risco (Bernarda, 2021; Mauricio, 2022).

Apresentamos e caracterizamos de seguida as diversas estratégias de alocação de ativos que visam maximizar o desempenho da carteira em diferentes cenários. ~

### Portfólio de risco mínimo

Primeiramente temos a estratégia de alocação de ativos de risco mínimo que consiste na construção de uma carteira que minimize o risco, ou seja, uma carteira que possua a menor variância posto um conjunto de ativos e as suas correlações. Este tipo de carteira é ideal para os investidores extremamente avessos ao risco que procuram preservar o seu capital investido.

Ao observarmos o anexo 8 concluímos que a carteira que possui o menor risco é composta por 98,5% pelo ativo BILL, 1,02% pelo ativo BND e o restante por EEM, EXSA.DE, SPY e VWEHX.

A fronteira eficiente deste portfólio, anexo 9, ao ser quase 100% constituído por um fundo monetário (BIL) apresenta uma volatilidade bastante baixa, mas também um retorno bastante baixo.

Tabela 1 - Alocações Portfólio Risco Mínimo

	weights
AAXJ	0,00
BIL	0,98
BND	0,01
EEM	0,00
EXSA.DE	0,00
GLD	0,00
JPXN	0,00
SPY	0,00
VNQ	0,00
VWEHX	0,01

### Portfólio com menor probabilidade de retornar abaixo de obrigações

A segunda estratégia consiste na construção de uma carteira que minimiza o risco de o portfólio retornar um valor abaixo das obrigações de 3 meses alemãs. Consideramos a taxa das obrigações a 3 meses da Alemanha como a taxa de investimento sem risco, 3,415% (World Government Bonds, 2024).

Como se observa no anexo 11, o portfólio é composto em cerca de 47% por um EFT de um fundo monetário e 45% por obrigações. O ouro (GLD), uma *commodity*, representa cerca de 4,5% do portfólio. Não existe presença de um EFT de ações neste portfólio.

Na fronteira eficiente, anexo 12, para um retorno exigido de 3,42% este portfólio apresenta um CVaR de sensivelmente 6,2%.

Tabela 2-Alocações Portfolio CVaR

weights	
AAXJ	0,00
BIL	0,60
BND	0,00
EEM	0,00
EXSA.DE	0,03
GLD	0,20
JPXN	0,00
SPY	0,17
VNQ	0,00
VWEHX	0,00

### Maximização de rácio de Sharpe

A terceira estratégia de alocação de ativos ótima procura maximizar o rácio de Sharpe, ou seja, dá-nos o máximo de retorno possível por cada unidade de risco. Este rácio foi desenvolvido por William Sharpe e é uma das métricas de performance de portfólios mais utilizadas por profissionais da indústria financeira, medindo o excesso de retorno por unidade de risco do portfólio. O rácio de sharpe calcula-se da seguinte forma:

$$\text{Rácio sharpe} = \frac{ER_p - r_f}{\sigma_p}$$

Em que  $ER_p$  é o retorno esperado do portfólio,  $r_f$  é a risk free rate de investimento e  $\sigma_p$  é o risco do portfólio dado pelo desvio padrão. Quanto maior o rácio de sharpe melhor é o investimento em termos de retorno por unidade de risco. Um rácio de sharpe alto não garante o maior retorno ou o menor nível de risco (Mauricio, 2022).

Tabela 3-Alocações Portfolio Sharpe Máximo

weights	
AAXJ	0,00
BIL	0,07
BND	0,00
EEM	0,00
EXSA.DE	0,09
GLD	0,44
JPXN	0,00
SPY	0,40
VNQ	0,00
VWEHX	0,00

Tendo sido este portfolio, construído sem qualquer restrição aplicada, apresenta uma grande sobre exposição ao fundo monetário BIL (93,1%), como se pode observar no anexo 14.

No entanto um alto rácio de sharpe não é sinonimo de um alto retorno, sendo este portfolio a prova disso, com um rácio de sharpe de 1,6 apresenta um retorno médio esperado de cerca de 1%, como se pode constatar pelo anexo 15.

### Maximização de rácio de Sharpe com restrições

A última estratégia consiste na alocação de ativos ótima que maximiza o rácio de sharpe e a introdução de pesos para as diferentes classes de ativos. As restrições que optamos visam proporcionar à carteira uma maior diversificação geográfica de investimentos e limitar o excesso de concentração numa classe de ativos específica. Deste modo as restrições escolhidas para as classes de ativos foram as exemplificadas na tabela a abaixo.

Tabela 4-Restrições Portfolio Sharpe Máximo

Set	Position	Sign	Weight
All assets		<=	0,25
geografia	global	>=	0,2
geografia	europa	>=	0,15
geografia	usa	<	0,5
geografia	japão	>=	0,05
geografia	asia	>=	0,05
tipo	ações	<=	0,7
tipo	obrigações	<=	0,5
tipo	reit	>=	0,05
tipo	commodities	>=	0,05

De modo a não incorrerem em sobre exposição a um ativo de forma a conseguir alcançar um bom nível de diversificação, aplicou-se um peso máximo de 25% a qualquer ativo. De maneira a garantir-se uma boa diversificação geográfica exigiu-se em forma de restrição uma exposição mínima global de 20%, europeia de 15%, japonesa de 5% e asiática de 5%. Colocou-se também um teto máximo sobre o peso do mercado americano nos 50%. Quanto aos tipos de investimento, colocou-se um peso máximo nas ações e obrigações, 70% e 50% respetivamente. Exigiu-se um investimento mínimo de 5% nos Reits e Commodities.

Estas restrições resultaram num portfolio, anexo 17, bastante diversificado, em que o fundo monetário BIL ocupa a alocação máxima por ativo de 25%, as ações representam cerca de 45% deste portfolio e as obrigações 13,4%. O ouro está acima da exposição mínima exigida, e o VNQ, EFT do setor dos Reits apenas apresenta a exposição mínima exigida.

Tabela 5-Alocações Portfolio Sharpe Máximo c/restrições

weights	
AAXJ	0,05
BIL	0,20
BND	0,00
EEM	0,00
EXSA.DE	0,15
GLD	0,25
JPXN	0,05
SPY	0,25
VNQ	0,05
VWEHX	0,00

Relativamente ao anexo 18, como se pode notar este portfolio apresenta um retorno aritmético esperado superior aos restantes portfolios contruídos até agora, com um retorno esperado de 6,49% e com um desvio padrão de 9,9%, o que se traduz num rácio de sharpe de 0,65.

## Portfolio família Torga

Com a finalidade de se contruir uma carteira de ativos o mais adequada possível às ambições, objetivos e necessidades da família Torga explanas na sua IPS, foi necessário proceder-se à utilização de restrições geográficas, tipo de investimento e o desenvolvimento de mercado.

A tabela 6 apresenta as restrições utilizadas neste caso, em primeiro colocou-se um teto máximo de 40% a qualquer ativo, de modo a garantir que não haja uma sobre exposição a um único ativo. Em termos de geografia colocou-se uma exposição mínima de 10% ao mercado europeu, tal deve-se à segurança que a família sente em relação ao que conhecem. Em termos de desenvolvimento de mercado, sendo esta família avessa ao risco e sendo os mercados emergentes por natureza mais arriscados, bem como confirmam as nossas análises iniciais de volatilidade dos ativos, do que os mercados desenvolvidos estipulou-se um peso máximo de 10% a este. Quanto aos tipos de investimento, exigiu-se no mínimo uma exposição de 10% ao fundo monetário uma vez que este é um fundo que apresenta retorno aritmético positivo com a volatilidade mais baixa de toda a amostra analisada. Garantiu-se também uma exposição mínima de 5% ao mercado imobiliário americano e às commodities de forma a garantir diversificação de setores de investimento.

Devido à natureza conservadora da família colocou-se um peso máximo às ações de 50%, por desejo da família esta alocação seria ainda menor, no entanto, no nosso entender, sendo o horizonte temporal de investimento tão alargado, 20 anos, qualquer nível de risco que corram será muito bem recompensado com maiores retornos para garantir que atingem o seu objetivo financeiro.

**Tabela 6-Restrições Portfolio família Torga**

Set	Position	Sign	Weight
All Assets		<=	0,4
tipo	ações	<	0,5
geografia	europa	>=	0,1
mercado	emergente	<	0,1
tipo	moneymarket	>=	0,1
tipo	reit	>=	0,05
tipo	commodities	>=	0,05

**Tabela 7-Alocações Portfolio família Torga**

	weights
AAXJ	0,10
BIL	0,10
BND	0,00
EEM	0,00
EXSA.DE	0,10
GLD	0,28
JPXN	0,00
SPY	0,30
VNQ	0,12
VWEHX	0,00

**Tabela 8-Alocações portfolio família Torga por tipo**

tipo	weights
ações	0,50
commodities	0,28
moneymarket	0,10
obrigações	0,00
reit	0,12

**Tabela 9-Alocações portfolio família Torga por geografia**

geografia	weights
asia	0,10
europa	0,10
global	0,28
japão	0,00
usa	0,52



Após análise do anexo 20, ficamos com um portfólio constituído por 6 ativos, ficando apenas de fora BND, EEM, JPXN e VWEHX. O maior destaque vai para o SPY, o ETF que replica o índice do S&P500, com uma alocação de 30%, seguido pelo GLD, um ETF de ouro, esta grande alocação em ouro faz sentido não só em termos matemáticos, mas também em termos práticos para a família Torga, uma vez que estes são bastante conservadores o ouro parece atender bem os desejos da família. O EXSA.DE representa a Europa nesta carteira de investimento com apenas 10%, o mínimo exigido para esta área geográfica. Também o BIL apresenta apenas o mínimo exigido pelas restrições, por outro lado o peso do AAXJ que se encontra nos 10% encontra-se limitado na parte superior, possivelmente, caso não houvesse a restrição máxima de 10% aos mercados emergentes a sua exposição fosse maior. O VNQ com uma alocação de 12.2% parece não ter sido afetado por qualquer restrição.

Com se observa no anexo 21, o portfolio da família Torga apresenta-se com um retorno médio esperado de 8.42%, mesmo retorno exigido na sua IPS com uma volatilidade anual esperada de 13.71% o que se traduz num rácio de sharpe de 0.61. Dadas as restrições aplicadas, este é o portfólio que maximiza o retorno por unidade de risco assumida.

### **Simulação de Monte Carlo**

Esta é uma ferramenta matemática que permite testar estatisticamente diversos cenários para avaliar a incerteza e o risco nos investimentos. Baseando-se no retorno e volatilidade esperados do portefólio é possível gerar milhares de simulações de onde o portfolio poderá ir parar em x tempo. A simulação de Monte Carlo oferece uma visão clara dos possíveis desempenhos da carteira em diferentes cenários de mercado.

Foram então realizadas 10 000 simulações para o portfolio Torga com um retorno esperado de 8.42% e volatilidade de 13.71% num horizonte temporal de 5 anos, como se pode contactar pelo anexo 23 Colocou-se como valor inicial do portfólio 111 000€, é este o montante estipulado na IPS para a carteira de investimentos. Após as 10 000 simulações a média dos valores calculados situa-se nos 169 039€, quer isto dizer que, assumindo o retorno médio, caso a família Torga investisse agora a totalidade da sua carteira de investimentos neste portfolio selecionado, dentro de 5 anos expectavelmente a sua carteira de investimentos, descontabilizando quaisquer cash-flows de entrada, teria valorizado para 169 039€.

O histograma, anexo 24, dos valores finais da carteira demonstra que das 10 000 simulações efetuadas, o intervalo de valores de carteira que tem mais observações, ou seja, mais probabilidade de acontecer é entre os 100 000€ e 220 000€.

## **Conclusão**

A análise das classes de ativos propostas para a família torga evidenciou o SPY (EFT do S&P 500) como o mais lucrativo, devido a sua média geométrica de 9,05% em 20 anos. Destacamos também o GLD (ouro) graças ao seu elevado retorno e segurança, atendendo assim às necessidades da família.

Relativamente à otimização da carteira, foram apresentadas e caracterizadas quatro estratégias de alocação de ativos ótima, considerando diferentes cenários e objetivos. A proposta de portfólio ideal para a família torga inclui uma alocação diversificada, tanto a geograficamente quanto ao tipo de investimento. O portfólio final

fica assim composto maioritariamente por ações e ouro, com uma expectativa de retorno de 8,42%.

Em suma, a proposta de alocação ótima visa proporcionar um equilíbrio adequado entre o retorno e o risco, atendendo as necessidades, objetivos e vontades da família torga tendo em conta o seu perfil de investidor mais conservador. Com este portfólio pretendemos proporcionar à família uma diversificação eficaz e um potencial retorno alinhado com as duas expectativas financeiras de longo prazo.

## Bibliografia

Bernarda, M. (2021). Portfolio Optimization: From Markowitz to Machine Learning.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

Mauricio, G. (2022). COVID -19: Grande oportunidade de Investimento?

World Government Bonds (2024). World Government Bonds  
<https://www.worldgovernmentbonds.com/bond-historical-data/germany/3-months/>

## Anexos

**Anexo 1-Capital Market Expectations**

		Correlação											
Classe de Ativos		Retorno Esperado	Desvio Padrão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	AAXJ - Ações Asia Pacifico ex-Japão	6,21%	24,15%	1,00									
2	BIL- Mercado Monetário	0,74%	1,37%	-0,128	1,00								
3	BND- Obrigações Globais	2,55%	5,53%	0,006	-0,032	1,00							
4	EEM- Ações Mercados Emergentes	4,91%	23,96%	0,953	-0,135	-0,004	1,00						
5	EXSA.DE- Ações Europa	7,75%	13,43%	0,590	-0,135	0,024	0,587	1,00					
6	GLD- Ouro	7,65%	15,12%	0,136	0,049	0,247	0,146	0,021	1,00				
7	JPXN- Ações Japão	3,42%	14,51%	0,711	-0,104	0,059	0,728	0,579	0,104	1,00			
8	SPY- Ações EUA	9,05%	14,44%	0,809	-0,132	0,012	0,838	0,622	0,051	0,757	1,00		
9	VNQ- Reit	6,53%	17,71%	0,644	-0,065	0,024	0,682	0,420	0,072	0,582	0,764	1,00	
10	VWEHX- Obrigações High Yield globais	5,16%	10,89%	0,317	-0,031	0,250	0,302	0,468	0,059	0,314	0,380	0,273	1,00

**Anexo 2-Média Aritmética rolante 5 anos**

Date	AAXJ	BIL	BND	EEM	EXSA.DE	GLD	JPXN	SPY	VNQ	VWEHX
31/12/2013	0,179	0,000	0,037	0,164	0,121	0,082	0,077	0,183	0,174	0,154
31/12/2014	0,048	-0,001	0,042	0,018	0,082	0,030	0,057	0,157	0,175	0,085
31/12/2015	-0,005	-0,001	0,030	-0,047	0,083	-0,050	0,048	0,130	0,123	0,059
31/12/2016	0,045	0,000	0,019	0,012	0,109	-0,053	0,088	0,150	0,123	0,067
31/12/2017	0,081	0,001	0,022	0,049	0,102	-0,041	0,112	0,161	0,097	0,052
31/12/2018	0,048	0,005	0,026	0,025	0,039	0,012	0,031	0,088	0,081	0,037
31/12/2019	0,078	0,009	0,032	0,070	0,081	0,052	0,083	0,123	0,078	0,060
31/12/2020	0,145	0,010	0,046	0,136	0,056	0,123	0,094	0,157	0,063	0,073
31/12/2021	0,125	0,010	0,038	0,107	0,102	0,099	0,088	0,191	0,127	0,058
31/12/2022	0,000	0,011	0,003	-0,009	0,060	0,072	0,007	0,111	0,065	0,026
31/12/2023	0,041	0,017	0,014	0,040	0,113	0,101	0,076	0,173	0,101	0,055

### Anexo 3-Média Aritmética rolante 10 anos

Date	AAXJ	BIL	BND	EEM	EXSA.DE	GLD	JPXN	SPY	VNQ	VWEHX
31/12/2018	0,114	0,002	0,032	0,095	0,080	0,047	0,054	0,135	0,127	0,096
31/12/2019	0,063	0,004	0,037	0,044	0,081	0,041	0,070	0,140	0,126	0,072
31/12/2020	0,070	0,005	0,038	0,045	0,069	0,037	0,071	0,144	0,093	0,066
31/12/2021	0,085	0,005	0,029	0,060	0,106	0,023	0,088	0,170	0,125	0,062
31/12/2022	0,041	0,006	0,012	0,020	0,081	0,015	0,060	0,136	0,081	0,039
31/12/2023	0,044	0,011	0,020	0,033	0,076	0,056	0,054	0,130	0,091	0,046

### Anexo 4-Correlações

Column1	AAXJ	BIL	BND	EEM	EXSA.DE	GLD	JPXN	SPY	VNQ	VWEHX
AAXJ	1,000	-0,128	0,006	0,953	0,590	0,136	0,711	0,809	0,644	0,317
BIL	-0,128	1,000	-0,032	-0,135	-0,135	0,049	-0,104	-0,132	-0,065	-0,031
BND	0,006	-0,032	1,000	-0,004	0,024	0,247	0,059	0,012	0,024	0,250
EEM	0,953	-0,135	-0,004	1,000	0,587	0,146	0,728	0,838	0,682	0,302
EXSA.DE	0,590	-0,135	0,024	0,587	1,000	0,021	0,579	0,622	0,420	0,468
GLD	0,136	0,049	0,247	0,146	0,021	1,000	0,104	0,051	0,072	0,059
JPXN	0,711	-0,104	0,059	0,728	0,579	0,104	1,000	0,757	0,582	0,314
SPY	0,809	-0,132	0,012	0,838	0,622	0,051	0,757	1,000	0,764	0,380
VNQ	0,644	-0,065	0,024	0,682	0,420	0,072	0,582	0,764	1,000	0,274
VWEHX	0,317	-0,031	0,250	0,302	0,468	0,059	0,314	0,380	0,274	1,000

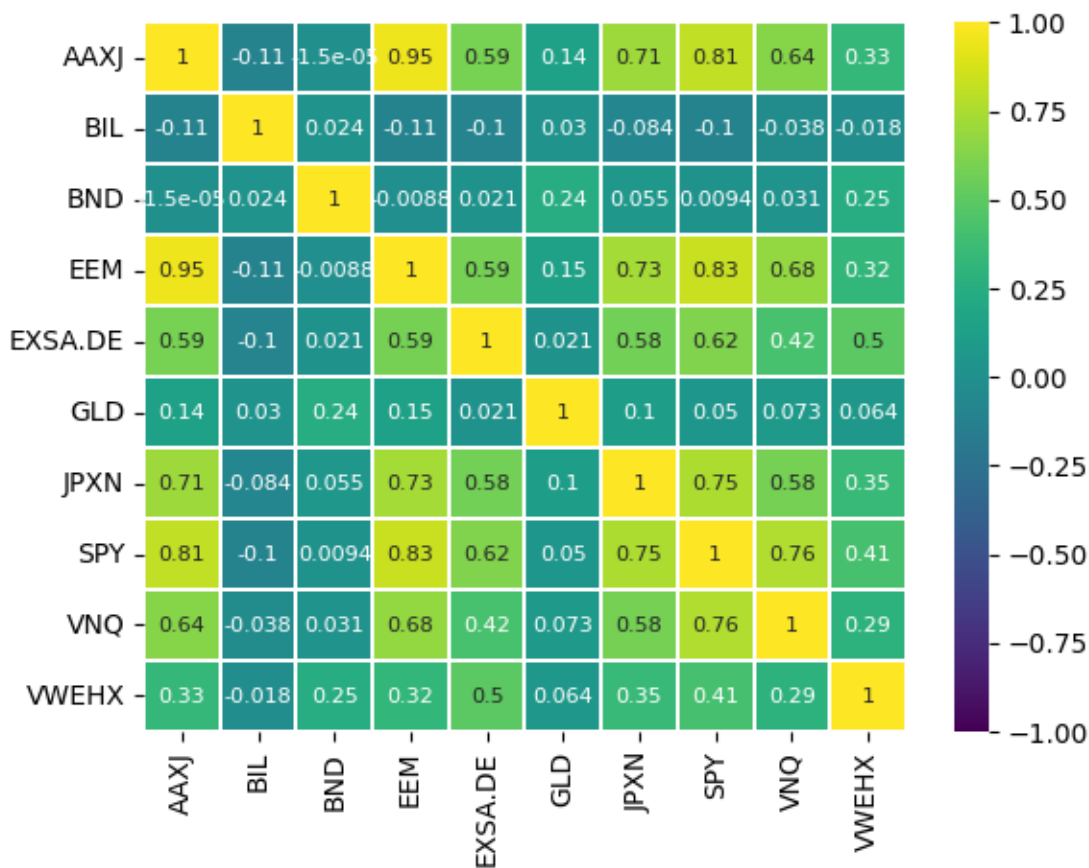
Anexo 5-Médias geométricas

Ativos	Média geométrica	Período de análise
AAXJ	6,21%	16
BIL	0,74%	17
BND	2,55%	17
EEM	4,91%	20
EXSA.DE	7,75%	16
GLD	7,65%	20
JPXN	3,42%	20
SPY	9,05%	20
VNQ	6,53%	20
VWEHX	5,16%	20

Anexo 6-Desvios padrão

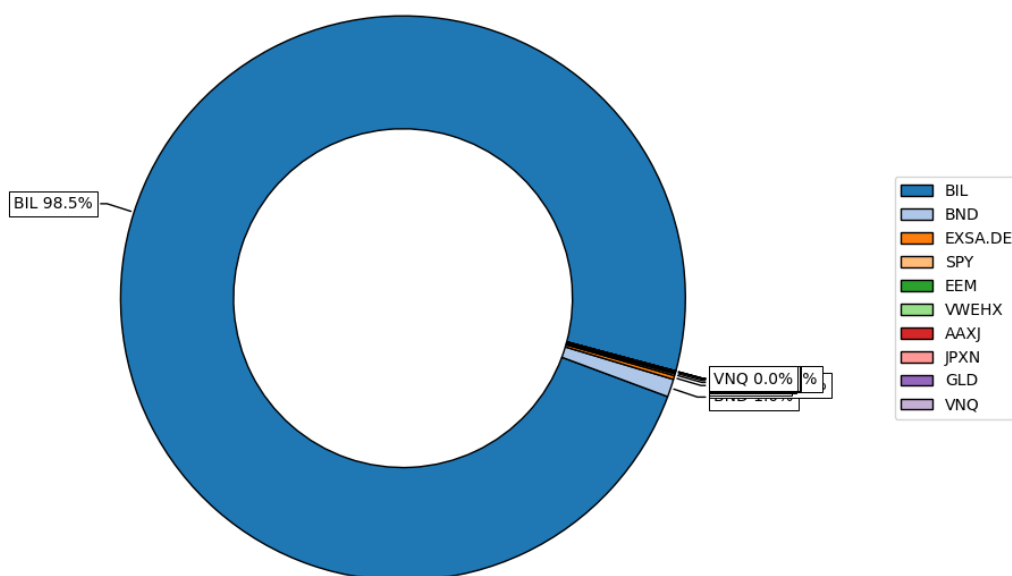
Ativos	Desvio Padrão
AAXJ	0,241541502
BIL	0,0136679
BND	0,055322812
EEM	0,239551021
EXSA.DE	0,1343489
GLD	0,151209229
JPXN	0,145148946
SPY	0,144358109
VNQ	0,177099504
VWEHX	0,108888111

Anexo 7-Correlações dos ativos



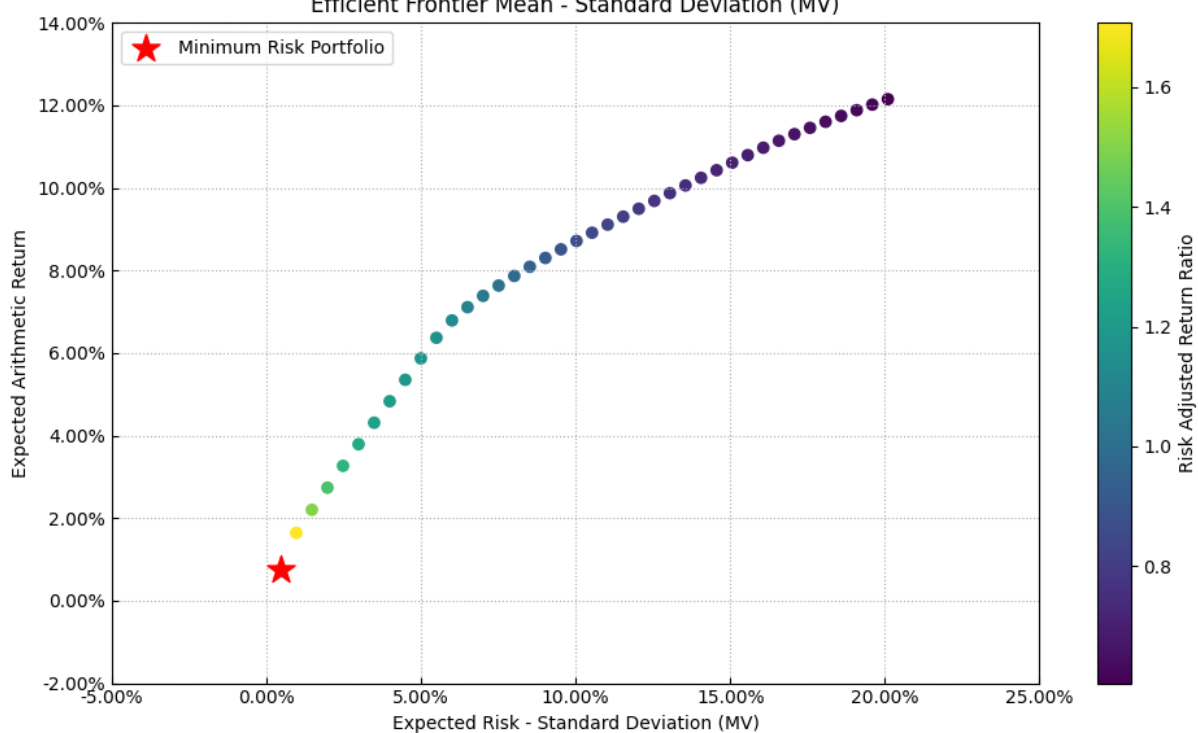
### Anexo 8-Portfolio risco mínimo

Min Risk Portfolio



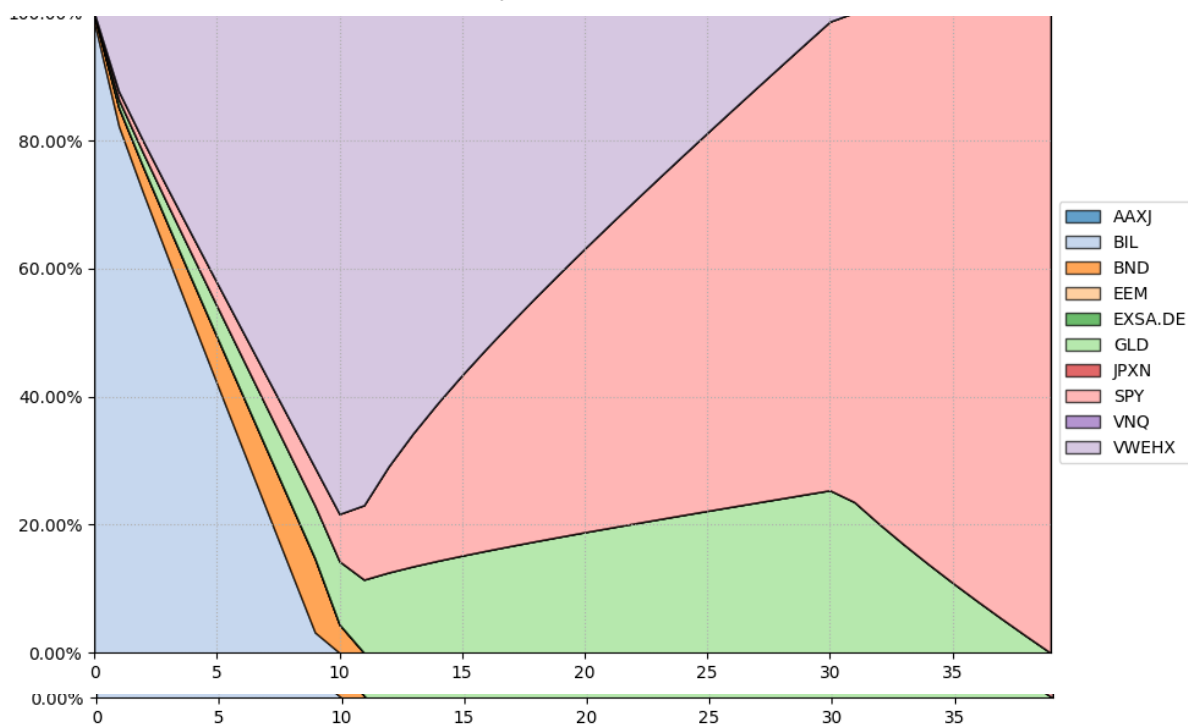
### Anexo 9-Fronteira Eficiente portfolio risco mínimo

Efficient Frontier Mean - Standard Deviation (MV)

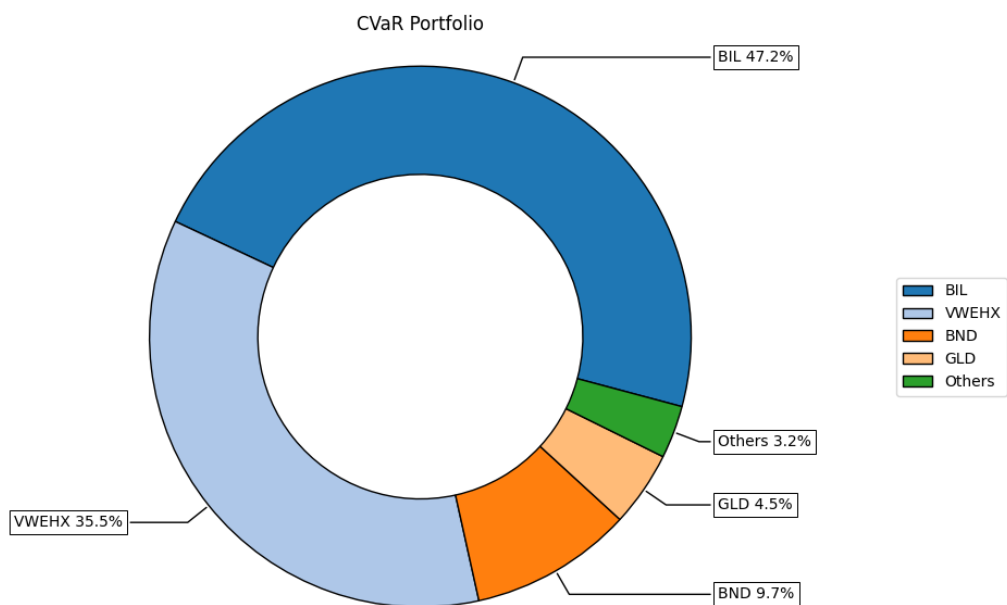




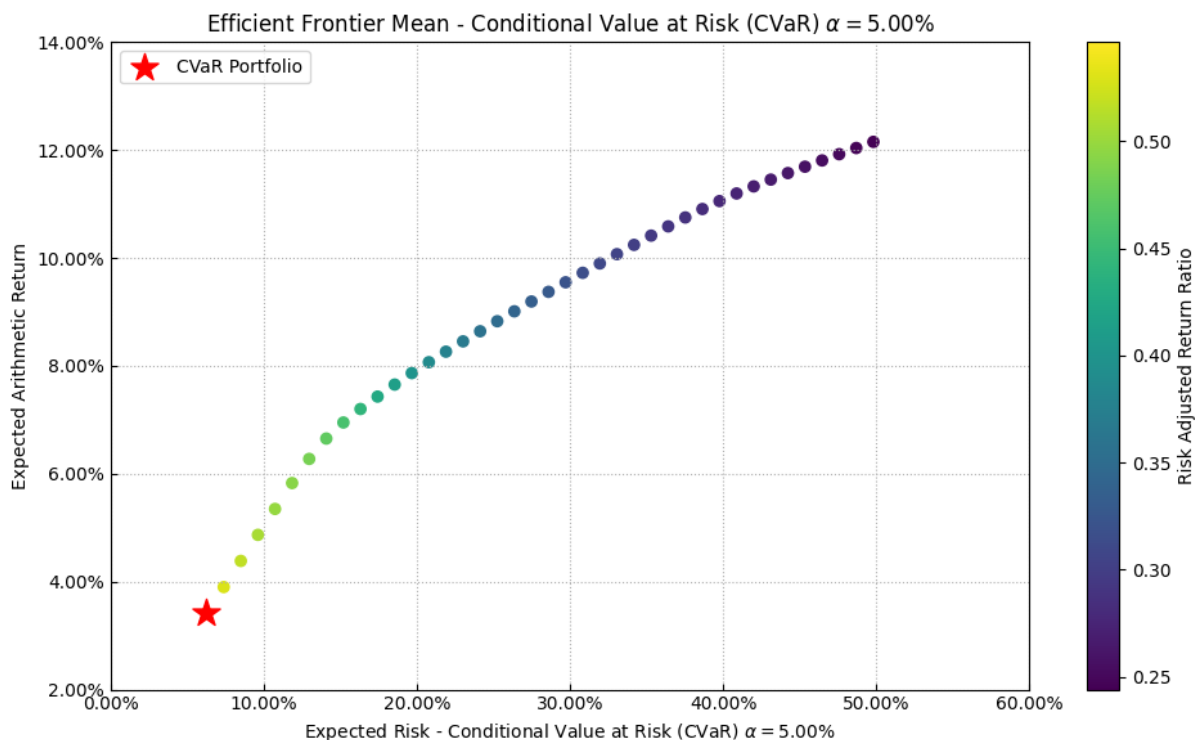
Anexo 10-Composição fronteira eficiente portfolio risco mínimo



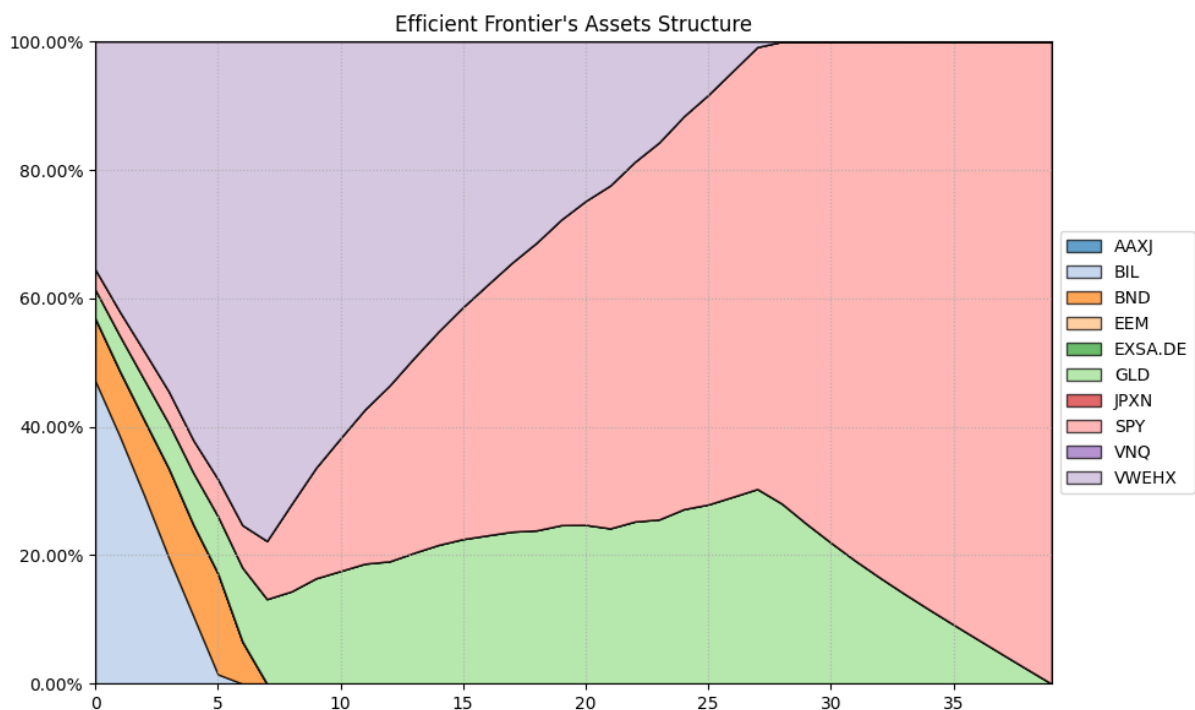
Anexo 11-Portfolio CVaR



### Anexo 12-Fronteira eficiente portfolio CVaR

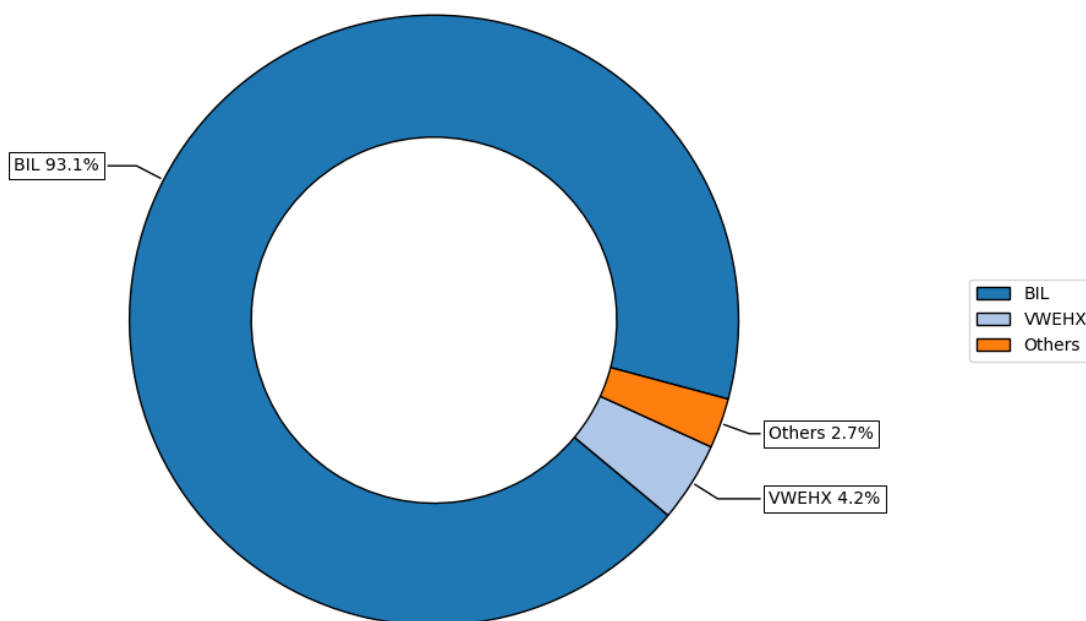


### Anexo 13-Composição fronteira eficiente portfolio CVaR

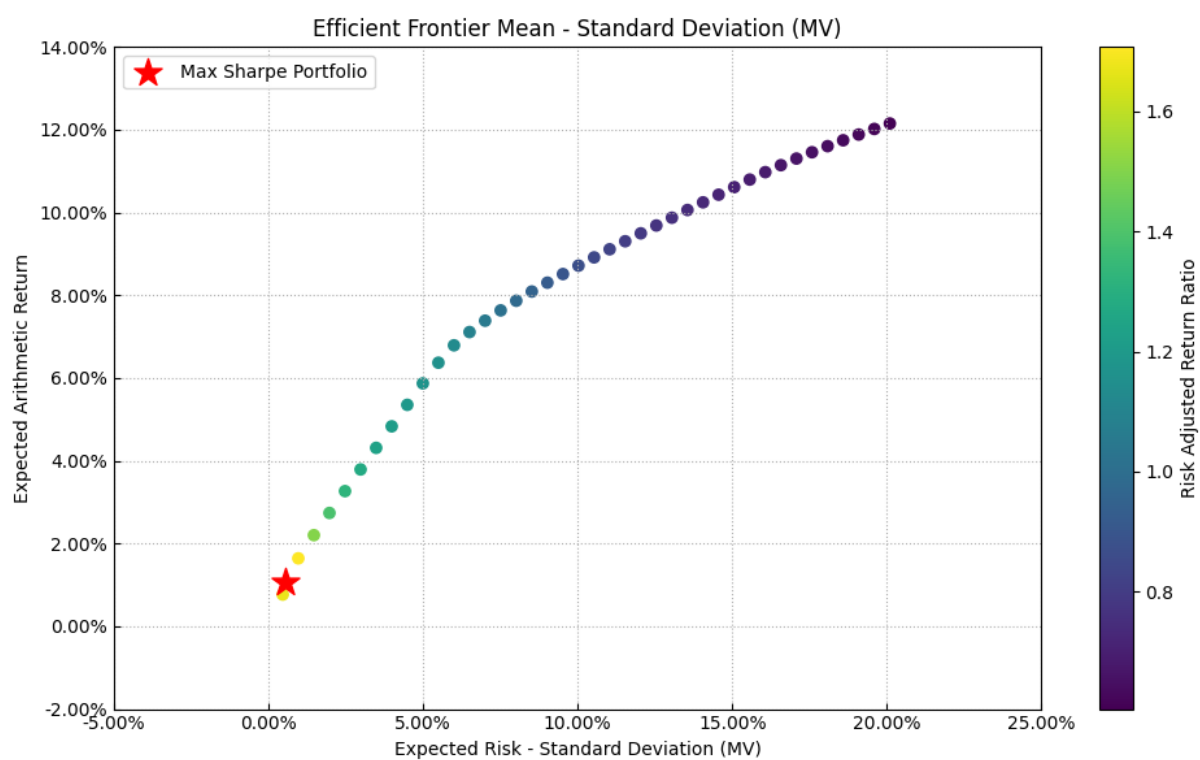


### Anexo 14-Portfolio Sharpe máximo

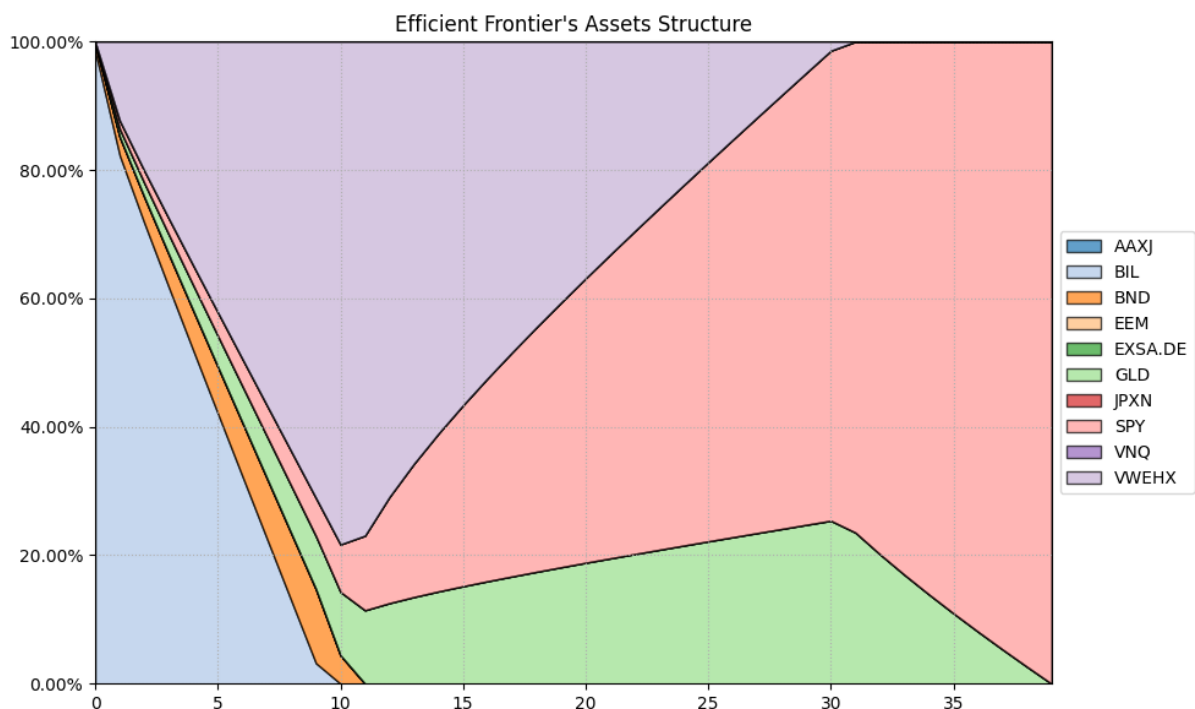
Max Sharpe Portfolio



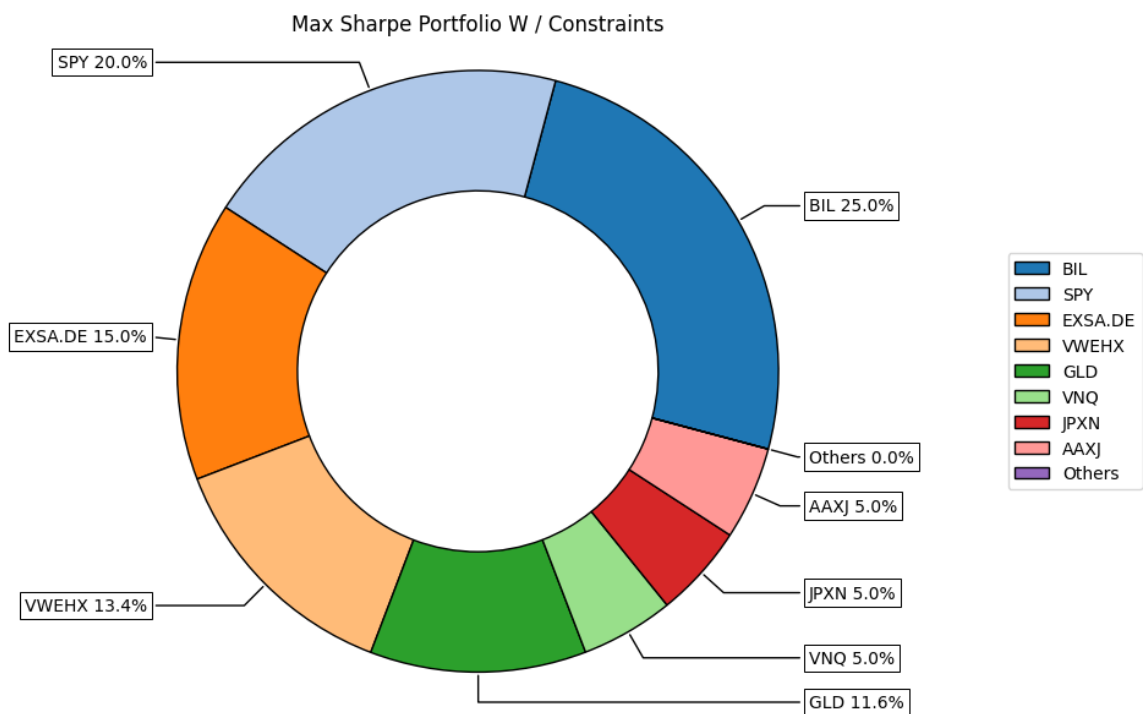
### Anexo 15-Fronteira eficiente portfolio Sharpe máximo



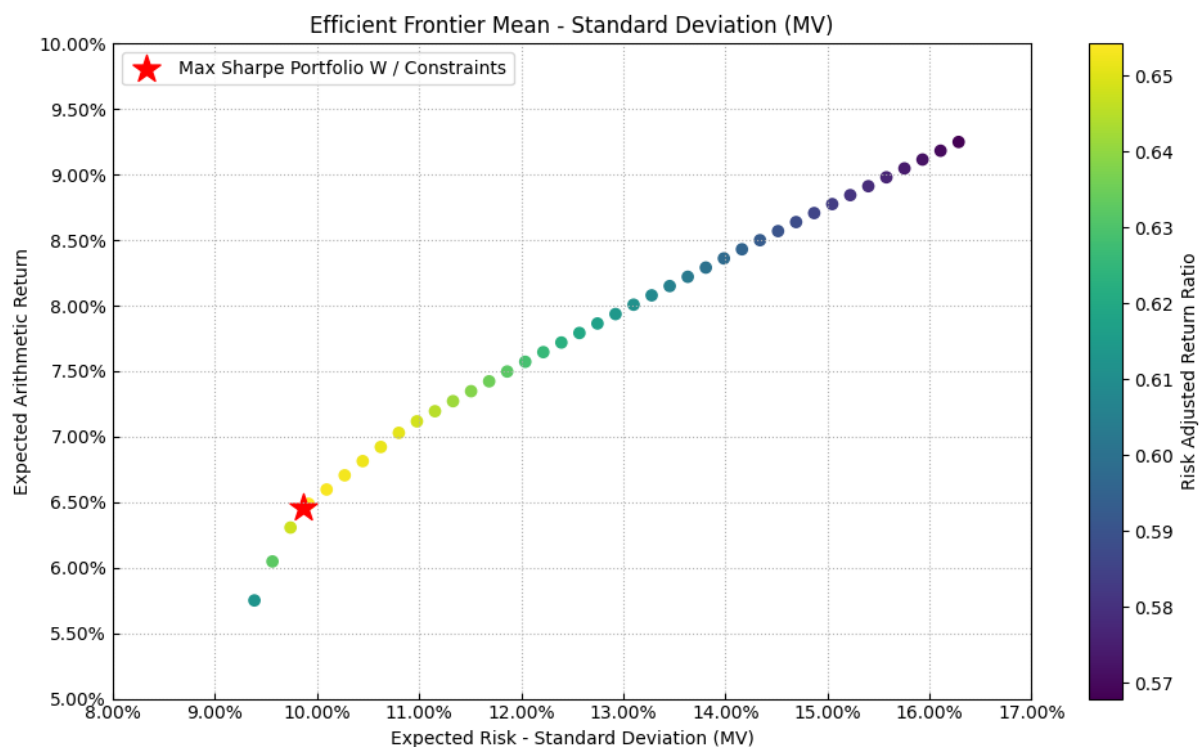
Anexo 16-Composição fronteira eficiente portfolio Sharpe máximo



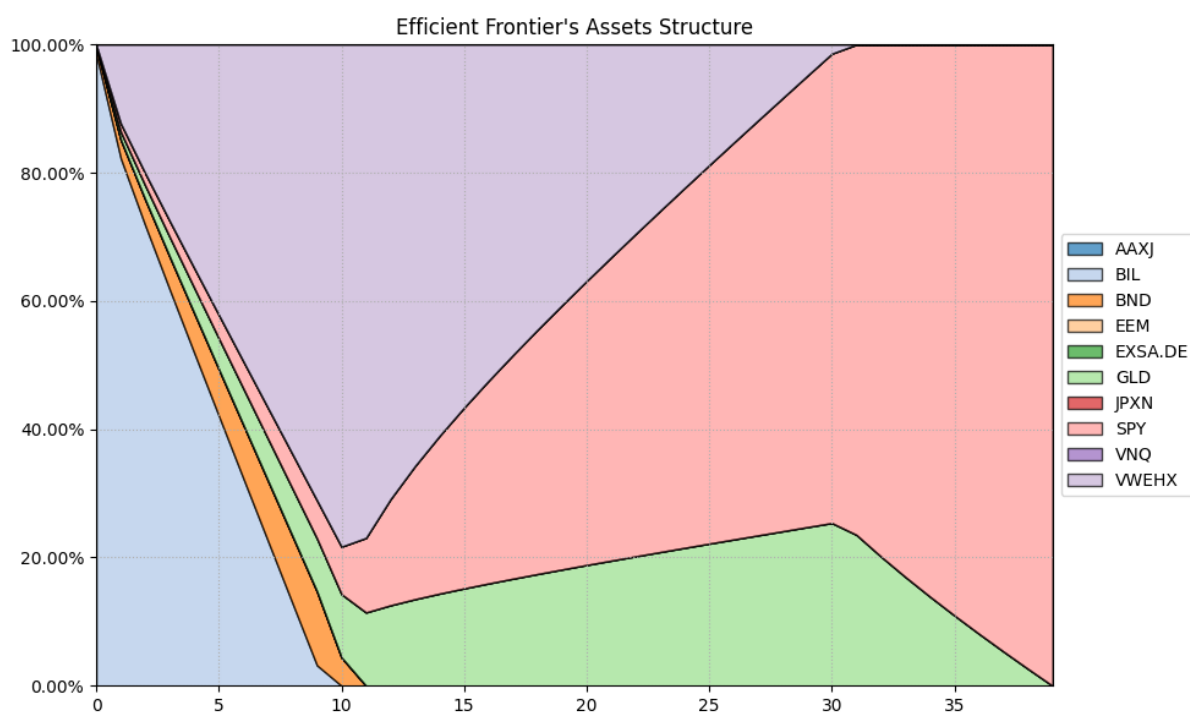
Anexo 17-Portfolio sharpe máximo com restrições



### Anexo 18-Fronteira eficiente sharpe máximo com restrições

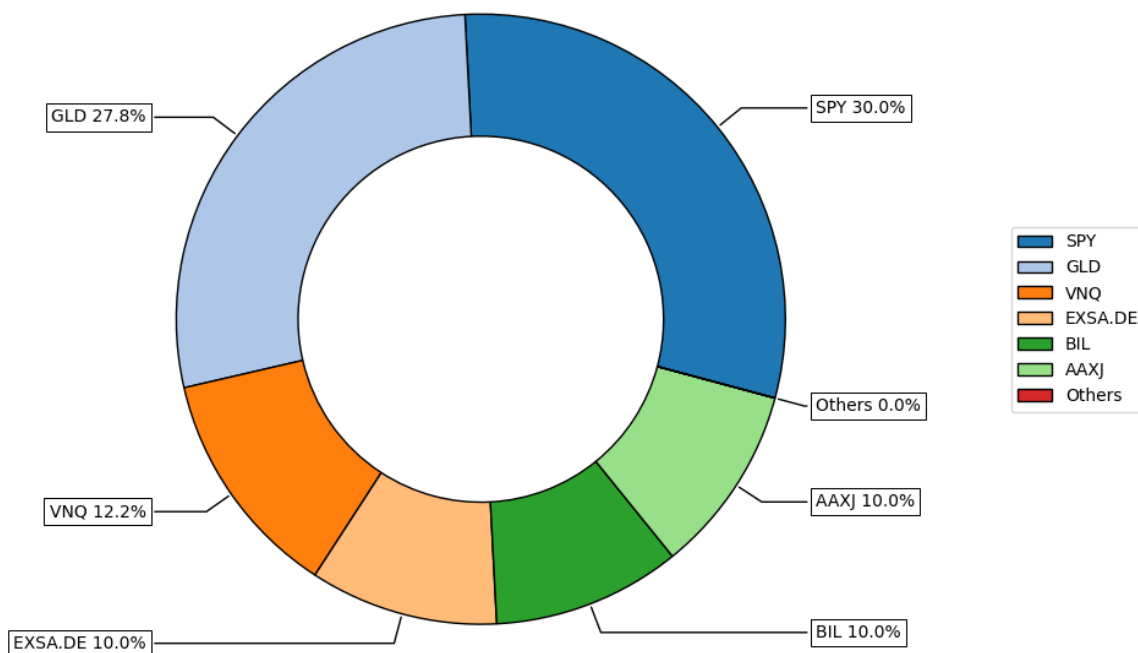


### Anexo 19-Composição fronteira eficiente portfolio sharpe máximo com restrições



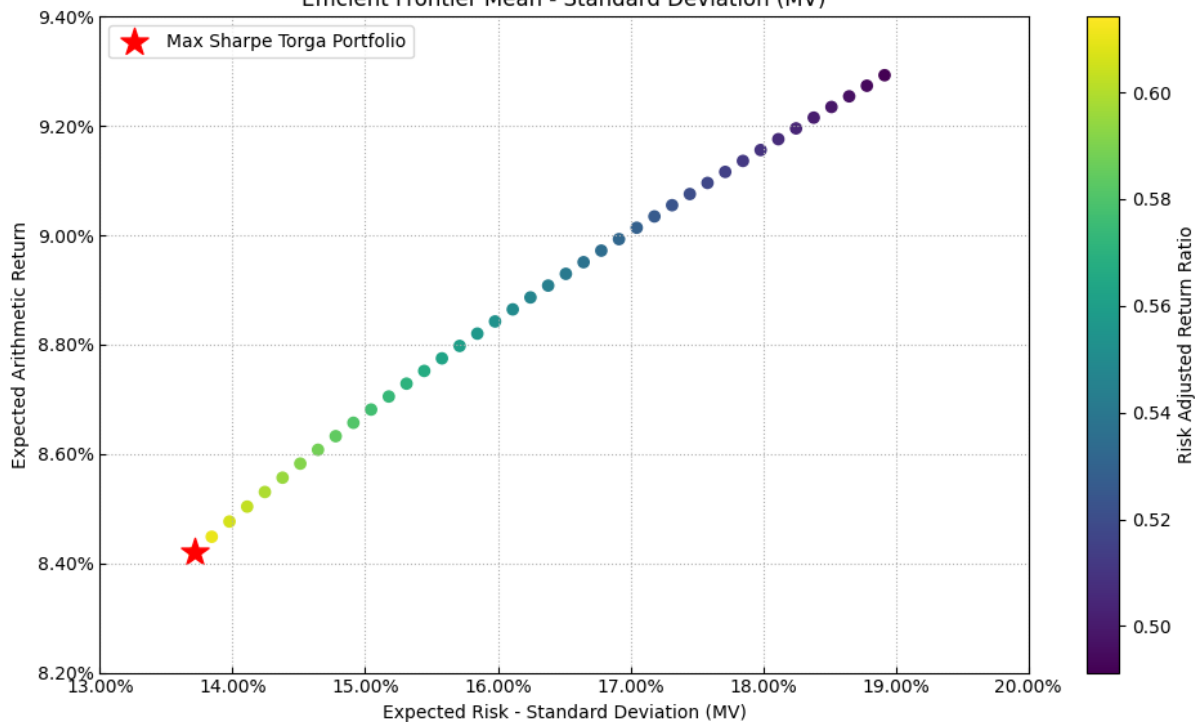
### Anexo 20-Portfolio família Torga

Max Sharpe Torga Portfolio

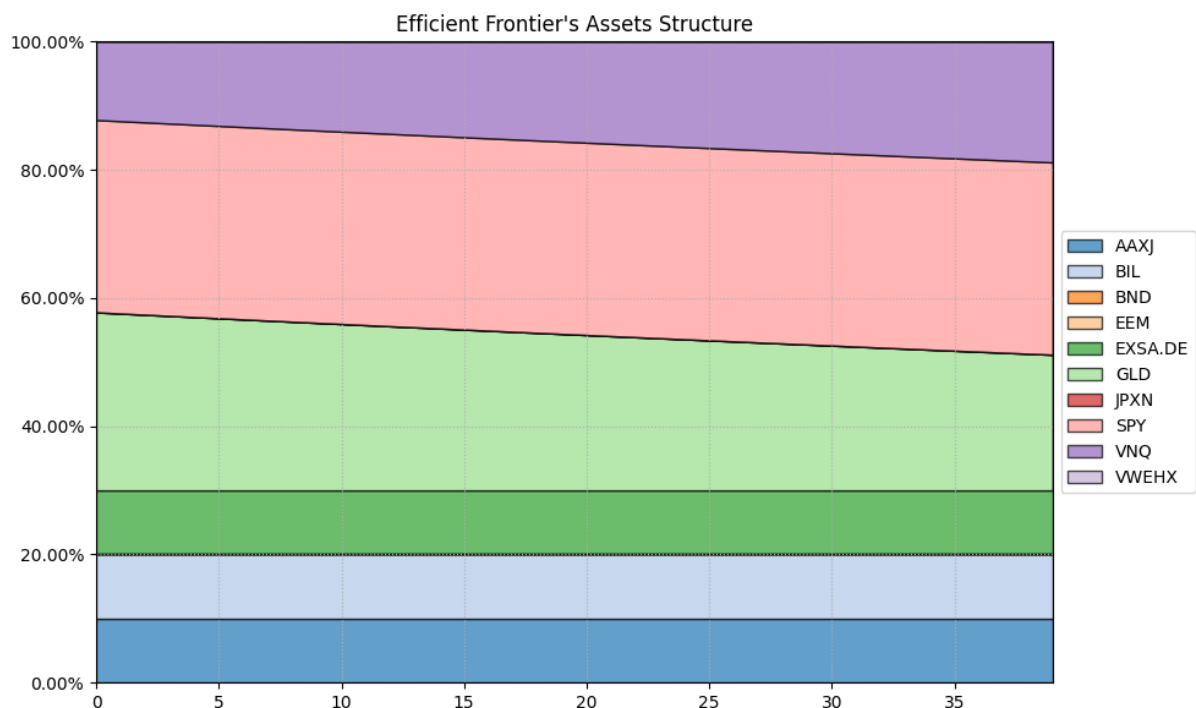


### Anexo 21-Fronteira eficiente portfolio família Torga

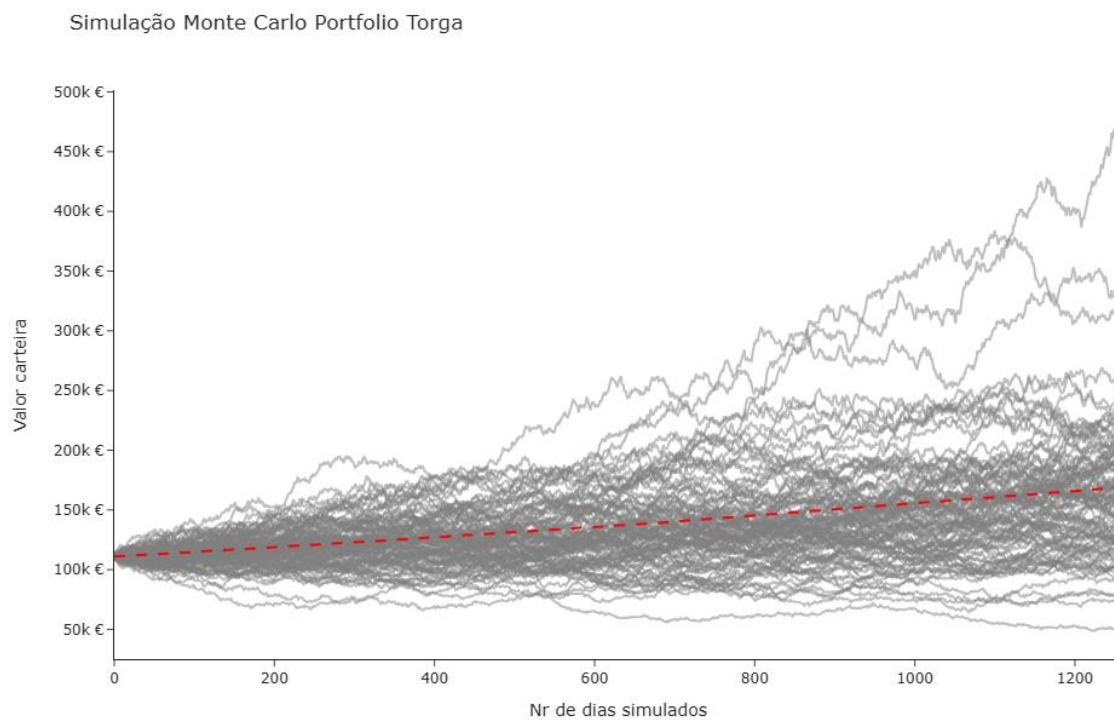
Efficient Frontier Mean - Standard Deviation (MV)



### Anexo 22-Composição fronteira eficiente portfolio família Torga



### Anexo 23-Simulação Monte Carlo



### Anexo 24-Histograma Simulação Monte Carlo

Distribuição dos Valores Finais da Carteira em 5 Anos

