Случайные графы. Лекция 23.09. Предельные теоремы для числа малых подграфов

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

23.09.2025

Пуассоновская предельная теорема

На прошлой лекции мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$, например при $np^{m(H)} \to c > 0$? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение $X_n(H)$ является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

Пуассоновская предельная теорема

На прошлой лекции мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$, например при $np^{m(H)} \to c > 0$? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение $X_n(H)$ является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

Теорема (2.6)

Пусть H — строго сбалансированный граф и $np^{m(H)} \to c > 0$ при $n \to \infty$. Тогда $X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$.

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$.

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$. Чему равно $\mathsf{E}Y^k$?

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$. Чему равно $\mathsf{E}Y^k$? Выражение для него довольно громоздко, но зато у пуассоновского распределения хорошо выглядят факториальные моменты:

$$\mathsf{E}(Y)_k = \mathsf{E}Y(Y-1)\dots(Y-k+1) = \lambda^k.$$

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$. Чему равно $\mathsf{E}Y^k$? Выражение для него довольно громоздко, но зато у пуассоновского распределения хорошо выглядят факториальные моменты:

$$\mathsf{E}(Y)_k = \mathsf{E}Y(Y-1)\dots(Y-k+1) = \lambda^k.$$

В связи с этим нам достаточно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}(X_n(H))_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$. Чему равно $\mathsf{E}Y^k$? Выражение для него довольно громоздко, но зато у пуассоновского распределения хорошо выглядят факториальные моменты:

$$\mathsf{E}(Y)_k = \mathsf{E}Y(Y-1)\dots(Y-k+1) = \lambda^k.$$

В связи с этим нам достаточно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}(X_n(H))_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Пусть $H_1, \dots, H_{f(n,H)}$ — копии H в K_n. Тогда, конечно,

$$X_n(H) = \sum_{i=1}^{f(n,H)} \mathrm{I}\{H_i \subset G(n,p)\} = \sum_{i=1}^{f(n,H)} I_{H_i}.$$

Доказательство теоремы 2.6

Для доказательства будем использовать метод моментов, т.е. будем доказывать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}X_n^k(H) \to \mathsf{E}Y^k$, где $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}$. Чему равно $\mathsf{E}Y^k$? Выражение для него довольно громоздко, но зато у пуассоновского распределения хорошо выглядят факториальные моменты:

$$\mathsf{E}(Y)_k = \mathsf{E}Y(Y-1)\dots(Y-k+1) = \lambda^k.$$

В связи с этим нам достаточно показать, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}(X_n(H))_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Пусть $H_1, \dots, H_{f(n,H)}$ — копии H в K_n. Тогда, конечно,

$$X_n(H) = \sum_{i=1}^{f(n,H)} \mathrm{I}\{H_i \subset G(n,p)\} = \sum_{i=1}^{f(n,H)} I_{H_i}.$$

Далее, воспользуемся следующим простым фактом.

$$\mathsf{E}(X_n(H))_k = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,f(n,H)\} \\ i_j \neq i_m}} \mathsf{E}(I_{H_{i_1}} \cdot \ldots \cdot I_{H_{i_k}}).$$

Доказательство теоремы 2.6

Разобьем сумму в правой части на две, в зависимости от того, имеют ли копии H_i общие вершины.

$$\mathsf{E}(X_n(H))_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,f(n,H)\} \\ i_j \neq i_m}} \mathsf{E} I_{H_{i_1}} \ldots I_{H_{i_k}} = \mathsf{E}'_k + \mathsf{E}''_k,$$

где E'_k — сумма с условием, что $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ не пересекаются по вершинам, а E''_k — оставшаяся сумма. Оценим по-очереди обе эти суммы.

Доказательство теоремы 2.6

Разобьем сумму в правой части на две, в зависимости от того, имеют ли копии H_i общие вершины.

$$\mathsf{E}(X_n(H))_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,f(n,H)\}\\ i_j\neq i_m}} \mathsf{E}I_{H_{i_1}}\ldots I_{H_{i_k}} = \mathsf{E}'_k + \mathsf{E}''_k,$$

где E'_k — сумма с условием, что $H_{i_1},\ldots,H_{i_k}$ не пересекаются по вершинам, а E''_k — оставшаяся сумма. Оценим по-очереди обе эти суммы.

1) С выражением для E'_k все просто. Раз $H_{i_1},\ldots,H_{i_k}$ не имеют общих вершин, то индикаторы $I_{H_1},\ldots,I_{H_k}$ независимы.

Доказательство теоремы 2.6

Разобьем сумму в правой части на две, в зависимости от того, имеют ли копии H_i общие вершины.

$$\mathsf{E}(X_n(H))_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,f(n,H)\} \\ i_j \neq i_m}} \mathsf{E} I_{H_{i_1}} \ldots I_{H_{i_k}} = \mathsf{E}'_k + \mathsf{E}''_k,$$

где E'_k — сумма с условием, что $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ не пересекаются по вершинам, а E''_k — оставшаяся сумма. Оценим по-очереди обе эти суммы.

1) С выражением для E'_k все просто. Раз $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ не имеют общих вершин, то индикаторы $I_{H_1}, \ldots, I_{H_k}$ независимы. Отсюда получаем

$$\mathsf{E}'_k = (p^{e_H})^k \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)} \ldots \binom{n - v_H(k-1)}{v_H} \frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)} \sim$$

Доказательство теоремы 2.6

Разобьем сумму в правой части на две, в зависимости от того, имеют ли копии H_i общие вершины.

$$\mathsf{E}(X_n(H))_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,f(n,H)\}\\ i_j\neq i_m}} \mathsf{E} I_{H_{i_1}}\ldots I_{H_{i_k}} = \mathsf{E}'_k + \mathsf{E}''_k,$$

где E'_k — сумма с условием, что $H_{i_1},\ldots,H_{i_k}$ не пересекаются по вершинам, а E''_k — оставшаяся сумма. Оценим по-очереди обе эти суммы.

1) С выражением для E'_k все просто. Раз $H_{i_1},\ldots,H_{i_k}$ не имеют общих вершин, то индикаторы $I_{H_1},\ldots,I_{H_k}$ независимы. Отсюда получаем

$$\mathsf{E}'_k = (p^{e_H})^k \binom{n}{v_H}\frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)}\cdots\binom{n-v_H(k-1)}{v_H}\frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)} \sim$$

$$\sim (p^{e_H})^k \frac{(n^{v_H})^k}{(\mathrm{aut(H)})^k} = \left((p^{m(H)}n)^{v_H}\right)^k \frac{1}{(\mathrm{aut(H)})^k} \longrightarrow \left(\frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(H)}\right)^k = \lambda^k.$$

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}_k'' = o(1)$.

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}''_k = o(1)$. Для каждого $t \geqslant v_H$ через $e(t)$ мы обозначим минимальное число ребер в объединении копий $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение об оценке $e(t)$.

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}''_k = o(1)$. Для каждого $t \geqslant v_H$ через $e(t)$ мы обозначим минимальное число ребер в объединении копий $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение об оценке $e(t)$.

Утверждение (2.1)

Для $k \geqslant 2$, $v_H \leqslant t < kv_H$ выполнено $e(t) > t \cdot m(H)$.

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}_k'' = o(1)$. Для каждого $t \geqslant v_H$ через $e(t)$ мы обозначим минимальное число ребер в объединении копий $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение об оценке $e(t)$.

Утверждение (2.1)

Для $k \geqslant 2$, $v_H \leqslant t < kv_H$ *выполнено* $e(t) > t \cdot m(H)$.

Доказательство. Пусть F – граф, положим $g_F = m(H)v_F - e_F$.

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}_k'' = o(1)$. Для каждого $t \geqslant v_H$ через $e(t)$ мы обозначим минимальное число ребер в объединении копий $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение об оценке $e(t)$.

Утверждение (2.1)

Для $k \geqslant 2$, $v_H \leqslant t < kv_H$ выполнено $e(t) > t \cdot m(H)$.

Доказательство. Пусть F – граф, положим $g_F = m(H)v_F - e_F$. В силу строгой сбалансированности графа H для любого его собственного подграфа $H' \subset H$ выполнено $g_{H'} > 0$, в то время как $g_H = 0$. Покажем, что если $F = H_1 \cup \ldots \cup H_k$, то $g_F < 0$.

Доказательство теоремы 2.6

2) Осталось проверить, что $\mathsf{E}_k'' = o(1)$. Для каждого $t \geqslant v_H$ через $e(t)$ мы обозначим минимальное число ребер в объединении копий $H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. Ключевую роль в доказательстве играет следующее утверждение об оценке $e(t)$.

Утверждение (2.1)

Для $k \geqslant 2$, $v_H \leqslant t < kv_H$ выполнено $e(t) > t \cdot m(H)$.

Доказательство. Пусть F – граф, положим $g_F = m(H)v_F - e_F$. В силу строгой сбалансированности графа H для любого его собственного подграфа $H' \subset H$ выполнено $g_{H'} > 0$, в то время как $g_H = 0$. Покажем, что если $F = H_1 \cup \ldots \cup H_k$, то $g_F < 0$. Заметим, что при объединении графов функция g ведет себя следующим образом

$$g_{F_1 \cup F_2} = g_{F_1} + g_{F_2} - g_{F_1 \cap F_2}.$$

Доказательство утверждения 2.1

Пусть $F = H_1 \cup H_2$ и $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$.

Доказательство утверждения 2.1

Пусть $F = H_1 \cup H_2$ и $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$. Тогда

$$g_{H_1 \cup H_2} = -g_{H_1 \cap H_2} < 0,$$

т.к. $H_1 \cap H_2$ — собственный подграф H.

Доказательство утверждения 2.1

Пусть $F = H_1 \cup H_2$ и $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$. Тогда

$$g_{H_1 \cup H_2} = -g_{H_1 \cap H_2} < 0,$$

т.к. $H_1 \cap H_2$ — собственный подграф H. Далее рассуждаем по индукции. Для $k = 2$ все доказано. Пусть $F = H_1 \cup \ldots \cup H_k$ и предположим, что $F' = H_1 \cup \ldots \cup H_{k-1}$ таков, что $g_{F'} < 0$. Положим $F = F' \cup H_k$, $F'' = F' \cap H_k$. Это подграф H, значит, $g_{F''} \geqslant 0$.

Доказательство утверждения 2.1

Пусть $F = H_1 \cup H_2$ и $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$. Тогда

$$g_{H_1 \cup H_2} = -g_{H_1 \cap H_2} < 0,$$

т.к. $H_1 \cap H_2$ — собственный подграф H. Далее рассуждаем по индукции. Для $k = 2$ все доказано. Пусть $F = H_1 \cup \ldots \cup H_k$ и предположим, что $F' = H_1 \cup \ldots \cup H_{k-1}$ таков, что $g_{F'} < 0$. Положим $F = F' \cup H_k$, $F'' = F' \cap H_k$. Это подграф H, значит, $g_{F''} \geqslant 0$. Но тогда

$$g_F = g_{F'} + g_{H_k} - g_{F''} = g_{F'} - g_{F''} < 0.$$

Доказательство утверждения 2.1

Пусть $F = H_1 \cup H_2$ и $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$. Тогда

$$g_{H_1 \cup H_2} = -g_{H_1 \cap H_2} < 0,$$

т.к. $H_1 \cap H_2$ — собственный подграф H. Далее рассуждаем по индукции. Для $k = 2$ все доказано. Пусть $F = H_1 \cup \ldots \cup H_k$ и предположим, что $F' = H_1 \cup \ldots \cup H_{k-1}$ таков, что $g_{F'} < 0$. Положим $F = F' \cup H_k$, $F'' = F' \cap H_k$. Это подграф H, значит, $g_{F''} \geqslant 0$. Но тогда

$$g_F = g_{F'} + g_{H_k} - g_{F''} = g_{F'} - g_{F''} < 0.$$

Осталось заметить, что из условия $g_F < 0$ следует, что

$$e_F > m(H) v_F = m(H) t$$

при условии $|V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_k)| = t$. $\square$

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E_k'':

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E_k'':

$$\mathsf{E}_k'' \leqslant \sum_{t=v_H}^{v_H k-1} \binom{n}{t} A(t,k) p^{e(t)},$$

где $A(t,k)$ обозначает число способов разместить k копий H на t вершинах.

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E_k'':

$$\mathsf{E}_k'' \leqslant \sum_{t=v_H}^{v_H k-1} \binom{n}{t} A(t,k) p^{e(t)},$$

где $A(t,k)$ обозначает число способов разместить k копий H на t вершинах. Ясно, что $A(t,k) = O(1)$. Отсюда

$$\mathsf{E}_k'' = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{e(t)}\right) = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{tm(H)} p^{e(t)-tm(H)}\right) =$$

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E''_k:

$$\mathsf{E}''_k \leqslant \sum_{t=v_H}^{v_H k-1} \binom{n}{t} A(t,k) p^{e(t)},$$

где $A(t,k)$ обозначает число способов разместить k копий H на t вершинах. Ясно, что $A(t,k) = O(1)$. Отсюда

$$\mathsf{E}''_k = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{e(t)}\right) = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{tm(H)} p^{e(t)-tm(H)}\right) =$$

$$= O\left(\max_{v_H \leqslant t \leqslant v_H k-1} p^{e(t)-tm(H)}\right) = o(1).$$

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E''_k:

$$\mathsf{E}''_k \leqslant \sum_{t=v_H}^{v_H k-1} \binom{n}{t} A(t,k) p^{e(t)},$$

где $A(t,k)$ обозначает число способов разместить k копий H на t вершинах. Ясно, что $A(t,k) = O(1)$. Отсюда

$$\mathsf{E}''_k = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{e(t)}\right) = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{tm(H)} p^{e(t)-tm(H)}\right) =$$

$$= O\left(\max_{v_H \leqslant t \leqslant v_H k-1} p^{e(t)-tm(H)}\right) = o(1).$$

Собирая вместе оценки на суммы E'_k и E''_k, мы получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}(X_n(H))_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Завершение доказательства теоремы 2.6

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения 2.1 вытекает следующая простая оценка суммы E''_k:

$$\mathsf{E}''_k \leqslant \sum_{t=v_H}^{v_H k-1} \binom{n}{t} A(t,k) p^{e(t)},$$

где $A(t,k)$ обозначает число способов разместить k копий H на t вершинах. Ясно, что $A(t,k) = O(1)$. Отсюда

$$\mathsf{E}''_k = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{e(t)}\right) = O\left(\sum_{t=v_H}^{v_H k-1} n^t p^{tm(H)} p^{e(t)-tm(H)}\right) =$$

$$= O\left(\max_{v_H \leqslant t \leqslant v_H k-1} p^{e(t)-tm(H)}\right) = o(1).$$

Собирая вместе оценки на суммы E'_k и E''_k, мы получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{E}(X_n(H))_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$. Согласно методу моментов это означает, что $X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$. $\square$

Многомерный вариант

С помощью многомерного метода моментов можно доказать следующее обобщение теоремы о пуассоновской аппроксимации.

Теорема (2.7)

Пусть $H_1, \ldots, H_\ell$ *— строго сбалансированные различные графы одинаковой плотности* m *и пусть* $np^m \to c > 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда*

$$(X_n(H_1), \ldots, X_n(H_\ell)) \xrightarrow{d} (Z_1, \ldots, Z_\ell),$$

где случайные величины $Z_1, \ldots, Z_\ell$ *независимы и* $Z_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$ *с* $\lambda_i = \frac{c^{v_{H_i}}}{\mathrm{aut}(H_i)}$.

Многомерный вариант

С помощью многомерного метода моментов можно доказать следующее обобщение теоремы о пуассоновской аппроксимации.

Теорема (2.7)

Пусть $H_1, \dots, H_\ell$ — строго сбалансированные различные графы одинаковой плотности m и пусть $np^m \to c > 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$(X_n(H_1), \dots, X_n(H_\ell)) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_\ell),$$

где случайные величины $Z_1, \dots, Z_\ell$ независимы и $Z_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$ с $\lambda_i = \frac{c^{v_{H_i}}}{\mathrm{aut}(H_i)}$.

Рассмотрим несколько применений теоремы 2.7.

Примеры

Всюду в примерах $m(H) = 1$ и $pn \to c > 0$.

Примеры

Всюду в примерах $m(H) = 1$ и $pn \to c > 0$.

1. Пусть $H = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника. Тогда несложно проверить (упражнение!), что $X_n(H) \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$, где $Z \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$. Это означает, в частности, что

$$\mathsf{P}(X_n(H) = 0) \longrightarrow \left(1 + \frac{c^3}{6}\right) e^{-c^3/6}.$$

Примеры

Всюду в примерах $m(H) = 1$ и $pn \to c > 0$.

1. Пусть $H = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника. Тогда несложно проверить (упражнение!), что $X_n(H) \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$, где $Z \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$. Это означает, в частности, что

$$\mathsf{P}(X_n(H) = 0) \longrightarrow \left(1 + \frac{c^3}{6}\right) e^{-c^3/6}.$$

2. Пусть $H = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4. Тогда несложно проверить (упражнение!), что $X_n(H) \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где Z_1 и Z_2 — независимы, $Z_1 \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$, $Z_2 \sim \mathrm{Pois}(c^4/8)$. Отсюда

$$\mathsf{P}(X_n(H) = 0) \longrightarrow 1 - \left(1 - e^{-\frac{c^3}{6}}\right)\left(1 - e^{-\frac{c^4}{8}}\right).$$

Примеры

3. Пусть $H = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной. Тогда можно показать (упражнение!), что

$$X_n(H) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{Z} W_i,$$

где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $\mathrm{Pois}(3c)$ случайные величины, а $Z \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$, также независимая с ними. В частности, это означает, что

$$\mathsf{P}(X_n(H) = 0) \longrightarrow e^{-(1-e^{-3c})c^3/6}.$$

Центральная предельная теорема

Итак, мы узнали, что если $np^{m(H)} \to 0$, то случайная величина $X_n(H)$ сходится по распределению к нулю, $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$.

Центральная предельная теорема

Итак, мы узнали, что если $np^{m(H)} \to 0$, то случайная величина $X_n(H)$ сходится по распределению к нулю, $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$. Если же $np^{m(H)} \to c > 0$ и граф H строго сбалансированный, то $X_n(H)$ имеет асимптотически пуассоновское распределение, $X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(c^{v_H}/\mathrm{aut}(H))$. Что происходит при $np^{m(H)} \to +\infty$?

Центральная предельная теорема

Итак, мы узнали, что если $np^{m(H)} \to 0$, то случайная величина $X_n(H)$ сходится по распределению к нулю, $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$. Если же $np^{m(H)} \to c > 0$ и граф H строго сбалансированный, то $X_n(H)$ имеет асимптотически пуассоновское распределение, $X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(c^{v_H}/\mathrm{aut}(H))$. Что происходит при $np^{m(H)} \to +\infty$?

Мы знаем, что в этом случае случайный граф $G(n, p)$ обязательно содержит копию H. Но сколько таких подграфов он содержит? Оказывается, в этом случае распределение случайной величины $X_n(H)$ имеет нормальную аппроксимацию.

Центральная предельная теорема

Итак, мы узнали, что если $np^{m(H)} \to 0$, то случайная величина $X_n(H)$ сходится по распределению к нулю, $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$. Если же $np^{m(H)} \to c > 0$ и граф H строго сбалансированный, то $X_n(H)$ имеет асимптотически пуассоновское распределение, $X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(c^{v_H}/\mathrm{aut}(H))$. Что происходит при $np^{m(H)} \to +\infty$?
Мы знаем, что в этом случае случайный граф $G(n,p)$ обязательно содержит копию H. Но сколько таких подграфов он содержит? Оказывается, в этом случае распределение случайной величины $X_n(H)$ имеет нормальную аппроксимацию.

Теорема (2.8)

Пусть H — фиксированный граф с условием $e_H > 0$. Пусть $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство теоремы 2.8

Для доказательства снова воспользуемся методом моментов. Нам достаточно показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}}\right)^k \longrightarrow \mathsf{E}Y^k,$$

где $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство теоремы 2.8

Для доказательства снова воспользуемся методом моментов. Нам достаточно показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}}\right)^k \longrightarrow \mathsf{E}Y^k,$$

где $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Напомним, что

$$\mathsf{E}Y^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно;} \\ (k-1)!!, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.8

Пусть, как и раньше, $H_1, \ldots, H_{f(n,H)}$ — все копии графа H в полном графе K_n, $f(n,H) = \binom{n}{v_H}\frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)}$ а $I_{H_i} = \mathrm{I}\{H_i \subset G(n,p)\}$.

Доказательство теоремы 2.8

Пусть, как и раньше, $H_1, \ldots, H_{f(n,H)}$ — все копии графа H в полном графе K_n, $f(n,H) = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)}$ а $I_{H_i} = \mathrm{I}\{H_i \subset G(n,p)\}$. Тогда

$$X_n(H) = \sum_{i=1}^{f(n,H)} I_{H_i}$$

и, стало быть,

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{f(n,H)} \mathsf{E}\left[(I_{H_{i_1}} - \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot (I_{H_{i_k}} - \mathsf{E}I_{H_{i_k}})\right]. \quad (1)$$

Доказательство теоремы 2.8

Пусть, как и раньше, $H_1, \ldots, H_{f(n,H)}$ — все копии графа H в полном графе K_n, $f(n,H) = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{\mathrm{aut}(H)}$ а $I_{H_i} = \mathrm{I}\{H_i \subset G(n,p)\}$. Тогда

$$X_n(H) = \sum_{i=1}^{f(n,H)} I_{H_i}$$

и, стало быть,

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{f(n,H)} \mathsf{E}\left[(I_{H_{i_1}} - \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot (I_{H_{i_k}} - \mathsf{E}I_{H_{i_k}})\right]. \quad (1)$$

Для удобства введем обозначение

$$T(i_1, \ldots, i_k) = \mathsf{E}\left[(I_{H_{i_1}} - \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot (I_{H_{i_k}} - \mathsf{E}I_{H_{i_k}})\right]$$

для фиксированного набора копий $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$.

Доказательство теоремы 2.8

Также для такого набора определим граф $L(i_1, \ldots, i_k)$ с множеством вершин $\{1, \ldots, k\}$ следующим образом:

$$(j, \ell) \text{ образуют ребро } \iff H_{i_j} \text{ и } H_{i_\ell} \text{ имеют общее ребро.}$$

Доказательство теоремы 2.8

Также для такого набора определим граф $L(i_1, \ldots, i_k)$ с множеством вершин $\{1, \ldots, k\}$ следующим образом:

$$(j, \ell) \text{ образуют ребро } \iff H_{i_j} \text{ и } H_{i_\ell} \text{ имеют общее ребро.}$$

Тогда сумму в правой части (1) можно переписать следующим образом:

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k: \\ L(i_1, \ldots, i_k) = L}} T(i_1, \ldots, i_k). \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим возможные значения внутренней суммы в зависимости от структуры графа L.

Доказательство теоремы 2.8

Также для такого набора определим граф $L(i_1, \dots, i_k)$ с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$ следующим образом:

$$(j, \ell) \text{ образуют ребро} \iff H_{i_j} \text{ и } H_{i_\ell} \text{ имеют общее ребро.}$$

Тогда сумму в правой части (1) можно переписать следующим образом:

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k: \\ L(i_1,\dots,i_k)=L}} T(i_1, \dots, i_k). \tag{2}$$

Теперь рассмотрим возможные значения внутренней суммы в зависимости от структуры графа L.

1) Пусть сначала L — совершенное паросочетание, т.е. k четно и L состоит из $\frac{k}{2}$ непересекающихся ребер. Таких графов в K_k ровно $(k-1)!!$. Зафиксируем подобное паросочетание с ребрами, для удобства, $\{(1,2). \dots, (k-1,k)\}$.

Доказательство теоремы 2.8

Напомним выражение для дисперсии величины $X_n(H)$ (см. лемму 2.2):

$$\mathsf{D}X_n(H) = \sum_{F \subset H : e_F > 0} \binom{n}{v_F}\binom{n-v_F}{v_H-v_F}\binom{n-v_H}{v_H-v_F} q(H,F)(p^{2e_H-e_F} - p^{2e_H}) =$$

$$= d(n,p),$$

где $q(H,F)$ — число способов разместить упорядоченную пару копий H с пересечением, изоморфным F, на конкретных $2v_H - v_F$ вершинах.

Доказательство теоремы 2.8

Напомним выражение для дисперсии величины $X_n(H)$ (см. лемму 2.2):

$$\mathsf{D}X_n(H) = \sum_{F \subset H : e_F > 0} \binom{n}{v_F} \binom{n - v_F}{v_H - v_F} \binom{n - v_H}{v_H - v_F} q(H,F)(p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) =$$

$$= d(n,p),$$

где $q(H,F)$ — число способов разместить упорядоченную пару копий H с пересечением, изоморфным F, на конкретных $2v_H - v_F$ вершинах.

Тогда в силу положительности коваріаций получаем:

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k: \\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} T(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k: \\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} \prod_{j=1}^{k/2} \mathsf{cov}(I_{H_{i_{2j-1}}}, I_{H_{i_{2j}}}) \leqslant$$

Доказательство теоремы 2.8

Напомним выражение для дисперсии величины $X_n(H)$ (см. лемму 2.2):

$$\mathsf{D}X_n(H) = \sum_{F\subset H: e_F>0} \binom{n}{v_F}\binom{n-v_F}{v_H-v_F}\binom{n-v_H}{v_H-v_F} q(H,F)(p^{2e_H-e_F} - p^{2e_H}) =$$

$$= d(n,p),$$

где $q(H,F)$ — число способов разместить упорядоченную пару копий H с пересечением, изоморфным F, на конкретных $2v_H - v_F$ вершинах.

Тогда в силу положительности ковариаций получаем:

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} T(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} \prod_{j=1}^{k/2} \mathsf{cov}(I_{H_{i_{2j-1}}}, I_{H_{i_{2j}}}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{H_1,H_2:\, e_{H_1\cap H_2}>0} \mathsf{cov}(I_{H_1}, I_{H_2}) \right)^{k/2} = (\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы 2.8

С другой стороны, если оставить в сумме только непересекающиеся по вершинам пары и учесть возрастание $d(n,p)$ по n, мы получим

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} T(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} \prod_{j=1}^{k/2} \mathrm{cov}(I_{H_{i_{2j-1}}}, I_{H_{i_{2j}}}) \geqslant$$

Доказательство теоремы 2.8

С другой стороны, если оставить в сумме только непересекающиеся по вершинам пары и учесть возрастание $d(n,p)$ по n, мы получим

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} T(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k:\\ L(i_1,\ldots,i_k)=L}} \prod_{j=1}^{k/2} \mathrm{cov}(I_{H_{i_{2j-1}}}, I_{H_{i_{2j}}}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{H_1,H_2:\, e_{H_1\cap H_2}>0} \mathrm{cov}(I_{H_1}, I_{H_2}) \cdot \sum_{\substack{H_3,H_4:\, e_{H_3\cap H_4}>0\\ \text{и не имеют общих}\\ \text{вершин с } H_1 \text{ и } H_2}} \mathrm{cov}(I_{H_3}, I_{H_4}) \ldots \geqslant$$

$$\geqslant d(n,p)d(n-2v_H,p)\ldots d(n-(k-2)v_H,p) \sim (\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}.$$

С другой стороны, если оставить в сумме только непересекающиеся по вершинам пары и учесть возрастание $d(n,p)$ по n, мы получим

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k:\\ L(i_1,\dots,i_k)=L}} T(i_1,\dots,i_k) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k:\\ L(i_1,\dots,i_k)=L}} \prod_{j=1}^{k/2} \mathsf{cov}(I_{H_{i_{2j-1}}}, I_{H_{i_{2j}}}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{H_1,H_2:\ e_{H_1\cap H_2}>0} \mathsf{cov}(I_{H_1}, I_{H_2}) \cdot \sum_{\substack{H_3,H_4:\ e_{H_3\cap H_4}>0\\ \text{и не имеют общих}\\ \text{вершин с } H_1 \text{ и } H_2}} \mathsf{cov}(I_{H_3}, I_{H_4}) \ldots \geqslant$$

$$\geqslant d(n,p)d(n-2v_H,p)\ldots d(n-(k-2)v_H,p) \sim (\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}.$$

Собирая вместе эту оценку с (3), мы получаем, что вклад подобных графов в сумму (2) асимптотически ведет себя, как $(k-1)!!(\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}$.

Доказательство теоремы 2.8

2) Пусть теперь граф L имеет изолированную вершину, например j.

Доказательство теоремы 2.8

2) Пусть теперь граф L имеет изолированную вершину, например j. Тогда в выражении для $T(i_1, \dots, i_k)$ случайная величина $I_{H_j} - \mathsf{E} I_{H_j}$ не зависит от других множителей. Следовательно,

$$T(i_1, \dots, i_k) = \mathsf{E}\left[(I_{H_{i_1}} - \mathsf{E} I_{H_{i_1}}) \dots (I_{H_{i_k}} - \mathsf{E} I_{H_{i_k}})\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left(I_{H_j} - \mathsf{E} I_{H_j}\right) \mathsf{E} \prod_{\ell \neq j} (I_{H_{i_\ell}} - \mathsf{E} I_{H_{i_\ell}}) = 0.$$

Доказательство теоремы 2.8

2) Пусть теперь граф L имеет изолированную вершину, например j. Тогда в выражении для $T(i_1, \ldots, i_k)$ случайная величина $I_{H_j} - \mathsf{E} I_{H_j}$ не зависит от других множителей. Следовательно,

$$T(i_1, \ldots, i_k) = \mathsf{E}\left[(I_{H_{i_1}} - \mathsf{E} I_{H_{i_1}}) \ldots (I_{H_{i_k}} - \mathsf{E} I_{H_{i_k}})\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left(I_{H_j} - \mathsf{E} I_{H_j}\right) \mathsf{E} \prod_{\ell \neq j} (I_{H_{i_\ell}} - \mathsf{E} I_{H_{i_\ell}}) = 0.$$

Значит, все подобные графы L в сумму (2) никакого вклада не вносят.

Доказательство теоремы 2.8

3) Осталось разобрать случай, когда все компоненты L имеют не менее двух вершин и есть компонента, содержащаяся не менее трех вершин.

Доказательство теоремы 2.8

3) Осталось разобрать случай, когда все компоненты L имеют не менее двух вершин и есть компонента, содержащаяся не менее трех вершин. Обозначим через $c = c(L)$ число компонент L и пусть для удобства

$$\{1, \ldots, r_1\},\ \{r_1 + 1, \ldots, r_2\},\ \ldots, \{r_{c-1} + 1, \ldots, r_c\}$$

— эти компоненты. Также будем считать, что для любого $j \notin \{1, r_1 + 1, \ldots, r_{c-1} + 1\}$ найдется такое $i < j$, что (i, j) — ребро L.

Доказательство теоремы 2.8

3) Осталось разобрать случай, когда все компоненты L имеют не менее двух вершин и есть компонента, содержащаяся не менее трех вершин. Обозначим через $c = c(L)$ число компонент L и пусть для удобства

$$\{1, \ldots, r_1\},\ \{r_1 + 1, \ldots, r_2\},\ \ldots, \{r_{c-1} + 1, \ldots, r_c\}$$

— эти компоненты. Также будем считать, что для любого $j \notin \{1, r_1 + 1, \ldots, r_{c-1} + 1\}$ найдется такое $i < j$, что (i, j) — ребро L.

Пусть теперь набор $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ таков, что $L(i_1, \ldots, i_k) = L$. Обозначим $H^{(j)} = \bigcup\limits_{m=1}^{j} H_{i_m}$, а через F_j обозначим подграф H, изоморфный пересечению $H^{(j-1)} \cap H_{i_j}$. Заметим, что $e_{F_j} = 0 \iff j \in \{1, r_1 + 1, \ldots, r_{c-1} + 1\}$.

Доказательство теоремы 2.8

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то оценим $T(i_1, \dots, i_k)$ следующим образом:

$$|T(i_1, \dots, i_k)| \leqslant \mathsf{E}(I_{H_{i_1}} + \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \dots (I_{H_{i_k}} + \mathsf{E}I_{H_{i_k}}). \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2.8

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то оценим $T(i_1, \ldots, i_k)$ следующим образом:

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant \mathsf{E}(I_{H_{i_1}} + \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \ldots (I_{H_{i_k}} + \mathsf{E}I_{H_{i_k}}). \quad (4)$$

Далее, заметим, что для любых подграфов F_1, F_2 случайные величины I_{F_1} и I_{F_2} положительно коррелированы. Действительно,

$$\mathsf{E}I_{F_1}I_{F_2} = p^{e_{F_1 \cup F_2}} \geqslant p^{e_{F_1}} p^{e_{F_2}} = \mathsf{E}I_{F_1}\mathsf{E}I_{F_2}.$$

Доказательство теоремы 2.8

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то оценим $T(i_1, \ldots, i_k)$ следующим образом:

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant \mathsf{E}(I_{H_{i_1}} + \mathsf{E}I_{H_{i_1}}) \ldots (I_{H_{i_k}} + \mathsf{E}I_{H_{i_k}}). \tag{4}$$

Далее, заметим, что для любых подграфов F_1, F_2 случайные величины I_{F_1} и I_{F_2} положительно коррелированы. Действительно,

$$\mathsf{E}I_{F_1} I_{F_2} = p^{e_{F_1 \cup F_2}} \geqslant p^{e_{F_1}} p^{e_{F_2}} = \mathsf{E}I_{F_1} \mathsf{E}I_{F_2}.$$

Это означает, что при раскрытии скобок в правой части (4) максимальное математическое ожидание будет у произведения индикаторов $I_{H_{i_1}} \ldots I_{H_{i_k}}$. Отсюда получаем, что

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant 2^k \mathsf{E}\left[I_{H_{i_1}} \cdot \ldots \cdot I_{H_{i_k}}\right] = 2^k p^{e_{H^{(k)}}}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2.8

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим ровно по одному множителю из каждой компоненты:

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant \mathsf{E} \prod_{j=1}^{c} \left| I_{H_{r_j}} - \mathsf{E} I_{H_{r_j}} \right|.$$

Доказательство теоремы 2.8

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим ровно по одному множителю из каждой компоненты:

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant \mathsf{E} \prod_{j=1}^{c} \left| I_{H_{r_j}} - \mathsf{E} I_{H_{r_j}} \right|.$$

Множители независимы, причем каждый из них равен

$$\mathsf{E}|I_{H_1} - \mathsf{E}I_{H_1}| = p^{e_H}(1 - p^{e_H}) + (1 - p^{e_H})p^{e_H} = 2p^{e_H}(1 - p^{e_H}) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1 - p^{e_H}) \leqslant 2e_H(1 - p).$$

Доказательство теоремы 2.8

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим ровно по одному множителю из каждой компоненты:

$$|T(i_1, \dots, i_k)| \leqslant \mathsf{E} \prod_{j=1}^{c} \left| I_{H_{r_j}} - \mathsf{E} I_{H_{r_j}} \right|.$$

Множители независимы, причем каждый из них равен

$$\mathsf{E}|I_{H_1} - \mathsf{E} I_{H_1}| = p^{e_H}(1 - p^{e_H}) + (1 - p^{e_H})p^{e_H} = 2p^{e_H}(1 - p^{e_H}) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1 - p^{e_H}) \leqslant 2e_H(1 - p).$$

Следовательно,

$$|T(i_1, \dots, i_k)| \leqslant (2e_H(1 - p))^c. \qquad (6)$$

Доказательство теоремы 2.8

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим ровно по одному множителю из каждой компоненты:

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant \mathsf{E} \prod_{j=1}^{c} \left| I_{H_{r_j}} - \mathsf{E} I_{H_{r_j}} \right|.$$

Множители независимы, причем каждый из них равен

$$\mathsf{E}|I_{H_1} - \mathsf{E} I_{H_1}| = p^{e_H}(1 - p^{e_H}) + (1 - p^{e_H})p^{e_H} = 2p^{e_H}(1 - p^{e_H}) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1 - p^{e_H}) \leqslant 2e_H(1 - p).$$

Следовательно,

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| \leqslant (2e_H(1 - p))^c. \tag{6}$$

Собирая вместе оценки (5) и (6), получаем, что

$$|T(i_1, \ldots, i_k)| = O\left((1 - p)^c p^{e_{H^{(k)}}}\right).$$

Доказательство теоремы 2.8

Легко видеть, что

$$e_{H^{(k)}} = ke_H - \sum_{i=1}^{k} e_{F_i}, \quad v_{H^{(k)}} = kv_H - \sum_{i=1}^{k} v_{F_i}.$$

Доказательство теоремы 2.8

Легко видеть, что

$$e_{H^{(k)}} = ke_H - \sum_{i=1}^{k} e_{F_i}, \;\; v_{H^{(k)}} = kv_H - \sum_{i=1}^{k} v_{F_i}.$$

Тогда для подобного графа L существует $O(n^{kv_H - \sum_{i=1}^{k} v_{F_i}})$ выборов графов $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ таких, что $L(i_1, \ldots, i_k) = L$ и $F_j \cong H^{(j-1)} \cap H_{i_j}$. В итоге, при фиксированных $L, F_1, \ldots, F_k$ мы получаем следующую оценку искомой суммы

$$\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k: \\ L, F_1, \ldots, F_k \text{ фикс.}}} T(i_1, \ldots, i_k) = O\left(n^{kv_H - \sum\limits_{i=1}^{k} v_{F_i}} (1-p)^c p^{ke_H - \sum\limits_{i=1}^{k} e_{F_i}} \right).$$

Доказательство теоремы 2.8

Ровно c из графов F_i имеют нуль ребер, для них $n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} = n^{v_{F_i}} \geqslant 1$.
Остальные же $k - c$ графов F_i имеют не менее одного ребра. Значит, для них

$$n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} \geqslant \mathsf{E} X_n(F_i) \geqslant \Phi_H.$$

Доказательство теоремы 2.8

Ровно c из графов F_i имеют нуль ребер, для них $n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} = n^{v_{F_i}} \geqslant 1$. Остальные же $k - c$ графов F_i имеют не менее одного ребра. Значит, для них

$$n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} \geqslant \mathsf{E} X_n(F_i) \geqslant \Phi_H.$$

Применяя эти оценки, получаем

$$n^{k v_H - \sum\limits_{i=1}^{k} v_{F_i}} (1-p)^c p^{k e_H - \sum\limits_{i=1}^{k} e_{F_i}} = (1-p)^c (n^{v_H} p^{e_H})^k \prod_{i=1}^{k} (n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}})^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant (1-p)^c (n^{v_H} p^{e_H})^k \Phi_H^{c-k} \asymp |\text{ лемма 2.2}| \asymp$$

$$\asymp (\mathsf{D} X_n(H))^{k/2} ((1-p)\Phi_H)^{c-k/2}. \qquad (7)$$

Доказательство теоремы 2.8

Ровно c из графов F_i имеют нуль ребер, для них $n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} = n^{v_{F_i}} \geqslant 1$.
Остальные же $k - c$ графов F_i имеют не менее одного ребра. Значит, для них

$$n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}} \geqslant \mathsf{E} X_n(F_i) \geqslant \Phi_H.$$

Применяя эти оценки, получаем

$$n^{k v_H - \sum_{i=1}^{k} v_{F_i}} (1-p)^c p^{k e_H - \sum_{i=1}^{k} e_{F_i}} = (1-p)^c (n^{v_H} p^{e_H})^k \prod_{i=1}^{k} (n^{v_{F_i}} p^{e_{F_i}})^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant (1-p)^c (n^{v_H} p^{e_H})^k \Phi_H^{c-k} \asymp | \text{ лемма 2.2} | \asymp$$
$$\asymp (\mathsf{D} X_n(H))^{k/2} ((1-p)\Phi_H)^{c-k/2}. \qquad (7)$$

Покажем, что в условиях теоремы правая часть (7) есть $o\left((\mathsf{D} X_n(H))^{k/2}\right)$.
Для этого достаточно проверить, что $((1-p)\Phi_H)^{c-k/2} \to 0$.

Доказательство теоремы 2.8

По условию $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$. Но из определения функции Φ_H следует, что в этом случае $\Phi_H \to +\infty$.

Доказательство теоремы 2.8

По условию $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$. Но из определения функции Φ_H следует, что в этом случае $\Phi_H \to +\infty$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то $\Phi_H(1-p) = O(\Phi_H)$. Если же $p > \frac{1}{2}$, то

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F} \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} \asymp n^2.$$

Доказательство теоремы 2.8

По условию $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$. Но из определения функции Φ_H следует, что в этом случае $\Phi_H \to +\infty$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то $\Phi_H(1-p) = O(\Phi_H)$. Если же $p > \frac{1}{2}$, то

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F\subset H,\\ e_F>0}} n^{v_F}p^{e_F} \asymp \min_{\substack{F\subset H,\\ e_F>0}} n^{v_F} \asymp n^2.$$

Наконец, в силу того, что $c < k/2$, мы получаем, что

$$((1-p)\Phi_H)^{c-k/2} = O\left((\Phi_H + n^2(1-p))^{c-k/2}\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство теоремы 2.8

По условию $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$. Но из определения функции Φ_H следует, что в этом случае $\Phi_H \to +\infty$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то $\Phi_H(1-p) = O(\Phi_H)$. Если же $p > \frac{1}{2}$, то

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H,\\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F} \asymp \min_{\substack{F \subset H,\\ e_F > 0}} n^{v_F} \asymp n^2.$$

Наконец, в силу того, что $c < k/2$, мы получаем, что

$$((1-p)\Phi_H)^{c-k/2} = O\left((\Phi_H + n^2(1-p))^{c-k/2}\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Суммируя по всем $L, F_1, \ldots, F_k$ мы получаем, что для графов L из третьего случая общий вклад величины $T(i_1, \ldots, i_k)$ в общую сумму (2) имеет порядок $o((\mathsf{D}X_n(H))^{k/2})$.

Доказательство теоремы 2.8

Подведем итоги. Мы показали, что

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k \sim (k-1)!!(\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}$$

при четном $k \geqslant 2$ и

$$\mathsf{E}(X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H))^k = o\left((\mathsf{D}X_n(H))^{k/2}\right)$$

при нечетном $k \geqslant 1$. Согласно методу моментов это означает, что

$$\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

$\square$

Итоги

Подведем итоги нашего изучения распределения случайной величины $X_n(H)$, равной числу копий графа H в случайном графе $G(n, p)$.

Итоги

Подведем итоги нашего изучения распределения случайной величины $X_n(H)$, равной числу копий графа H в случайном графе $G(n,p)$.

1. Если $np^{m(H)} \to 0$, то $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$.

Итоги

Подведем итоги нашего изучения распределения случайной величины $X_n(H)$, равной числу копий графа H в случайном графе $G(n,p)$.

1. Если $np^{m(H)} \to 0$, то $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$.
2. Если $np^{m(H)} \to c > 0$ и H — строго сбалансированный граф, то

$$X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(G)}.$$

Итоги

Подведем итоги нашего изучения распределения случайной величины $X_n(H)$, равной числу копий графа H в случайном графе $G(n,p)$.

1. Если $np^{m(H)} \to 0$, то $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$.
2. Если $np^{m(H)} \to c > 0$ и H — строго сбалансированный граф, то
$$X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(G)}.$$
3. Если $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$, то
$$\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Итоги

Подведем итоги нашего изучения распределения случайной величины $X_n(H)$, равной числу копий графа H в случайном графе $G(n, p)$.

1. Если $np^{m(H)} \to 0$, то $X_n(H) \xrightarrow{d} 0$.
2. Если $np^{m(H)} \to c > 0$ и H — строго сбалансированный граф, то

$$X_n(H) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda = \frac{c^{v_H}}{\mathrm{aut}(G)}.$$

3. Если $np^{m(H)} \to +\infty$ и $n^2(1-p) \to +\infty$, то

$$\frac{X_n(H) - \mathsf{E}X_n(H)}{\sqrt{\mathsf{D}X_n(H)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

4. Если $n^2(1-p) \to 0$, то $\mathsf{P}\left(X_n(H) = f(n, H)\right) \to 1$.

Замечание о методе моментов

В пограничных случаях происходит “плавный переход” от пуассоновского к нормальному распределению. Это можно проиллюстрировать следующим утверждением.

Замечание о методе моментов

В пограничных случаях происходит “плавный переход” от пуассоновского к нормальному распределению. Это можно проиллюстрировать следующим утверждением.

Теорема (2.9)

Пусть дана последовательность случайных величин $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *и числовая последовательность* $\lambda_n \to +\infty$. *Если любых натуральных* $k \geqslant 1$ *и* $s \geqslant k$ *выполнено, что*

$$\mathsf{E}(X_n)_k = \lambda_n^k + o\left(\lambda_n^{-s}\right),$$

то

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{при } n \to +\infty.$$

Доказательство теоремы 2.9

Будем использовать метод моментов. Обозначим через $\{m_k, k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность моментов стандартного нормального распределения и будем пытаться доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k \longrightarrow m_k.$$

Доказательство теоремы 2.9

Будем использовать метод моментов. Обозначим через $\{m_k, k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность моментов стандартного нормального распределения и будем пытаться доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k \longrightarrow m_k.$$

Рассмотрим более детально выражение:

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k = \lambda_n^{-k/2} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (\mathsf{E}\, X_n^r)(-1)^{k-r} \lambda_n^{k-r} =$$

Доказательство теоремы 2.9

Будем использовать метод моментов. Обозначим через $\{m_k, k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность моментов стандартного нормального распределения и будем пытаться доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k \longrightarrow m_k.$$

Рассмотрим более детально выражение:

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k = \lambda_n^{-k/2} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (\mathsf{E}\, X_n^r)(-1)^{k-r} \lambda_n^{k-r} =$$

$$= \lambda_n^{-k/2} \sum_{r=0}^{k} \sum_{t=0}^{k} c_{r,t,k}\, \mathsf{E}(X_n)_r \cdot \lambda_n^t,$$

где коэффициенты $c_{r,t,k}$ зависят только от r, t, k.

Доказательство теоремы 2.9

Теперь рассмотрим случайные величины $Z_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$. Тогда имеют место следующие два простых упражнения.

Упражнение (1)

Выполнено

$$\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Доказательство теоремы 2.9

Теперь рассмотрим случайные величины $Z_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$. Тогда имеют место следующие два простых упражнения.

Упражнение (1)

Выполнено
$$\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Проверяется методом характеристических функций.

Доказательство теоремы 2.9

Теперь рассмотрим случайные величины $Z_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$. Тогда имеют место следующие два простых упражнения.

Упражнение (1)

Выполнено

$$\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Проверяется методом характеристических функций.

Упражнение (2)

Для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность случайных величин $\left(\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k$ является равномерной интегрируемой.

Доказательство теоремы 2.9

Теперь рассмотрим случайные величины $Z_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$. Тогда имеют место следующие два простых упражнения.

Упражнение (1)

Выполнено
$$\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Проверяется методом характеристических функций.

Упражнение (2)

Для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность случайных величин $\left(\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k$ является равномерной интегрируемой.

Из теоремы о равномерной интегрируемости следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено
$$\mathsf{E}\left(\frac{Z_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k \longrightarrow m_k.$$

Доказательство теоремы 2.9

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\left(\frac{Z_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k=\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t,$$

где коэффициенты $c_{r,t,k}$ абсолютно те же самые.

Доказательство теоремы 2.9

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\left(\frac{Z_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k=\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t,$$

где коэффициенты $c_{r,t,k}$ абсолютно те же самые. Мы знаем, что эта сумма стремится к m_k и $\mathsf{E}(Z_n)_r=\lambda_n^r$.

Доказательство теоремы 2.9

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\left(\frac{Z_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k=\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t,$$

где коэффициенты $c_{r,t,k}$ абсолютно те же самые. Мы знаем, что эта сумма стремится к m_k и $\mathsf{E}(Z_n)_r=\lambda_n^r$.

Но тогда, подставляя $\mathsf{E}(X_n)_r=\lambda_n^r+o\left(\lambda_n^{-s}\right)$ для любого $s\geqslant r$, получаем, что

$$\left|\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(X_n)_r\cdot\lambda_n^t-\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t\right|\longrightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 2.9

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\left(\frac{Z_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k = \lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k} c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t,$$

где коэффициенты $c_{r,t,k}$ абсолютно те же самые. Мы знаем, что эта сумма стремится к m_k и $\mathsf{E}(Z_n)_r=\lambda_n^r$.

Но тогда, подставляя $\mathsf{E}(X_n)_r=\lambda_n^r+o\left(\lambda_n^{-s}\right)$ для любого $s\geqslant r$, получаем, что

$$\left|\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k} c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(X_n)_r\cdot\lambda_n^t-\lambda_n^{-k/2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k} c_{r,t,k}\,\mathsf{E}(Z_n)_r\cdot\lambda_n^t\right|\longrightarrow 0.$$

В итоге, доказано, что

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^k\longrightarrow m_k.$$

ЦПТ при слабо растущем $\mathrm{E}X_n(H)$

Теорему 2.9 можно применить для случайных величин $X_n(H)$ для строго сбалансированных графов H, фактически объединив результаты пуассоновской и центральной предельных теорем.

ЦПТ при слабо растущем $\mathsf{E}X_n(H)$

Теорему 2.9 можно применить для случайных величин $X_n(H)$ для строго сбалансированных графов H, фактически объединив результаты пуассоновской и центральной предельных теорем.

Теорема (2.10)

Пусть H — строго сбалансированный граф. Если $p = p(n)$ такова, что $np^{m(H)} \to +\infty$, но для любого $\varepsilon > 0$ выполнено, что

$$n^{1-\varepsilon} p^{m(H)} \longrightarrow 0,$$

то

$$\frac{X_n(H) - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty,$$

где $\lambda_n = \frac{(n)_{v_H} p^{e_H}}{\mathrm{aut}(H)}$.

ЦПТ при слабо растущем $\mathsf{E}X_n(H)$

Теорему 2.9 можно применить для случайных величин $X_n(H)$ для строго сбалансированных графов H, фактически объединив результаты пуассоновской и центральной предельных теорем.

Теорема (2.10)

Пусть H — строго сбалансированный граф. Если $p = p(n)$ такова, что $np^{m(H)} \to +\infty$, но для любого $\varepsilon > 0$ выполнено, что

$$n^{1-\varepsilon} p^{m(H)} \longrightarrow 0,$$

то

$$\frac{X_n(H) - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при } n \to +\infty,$$

где $\lambda_n = \frac{(n)_{v_H} p^{e_H}}{\mathrm{aut}(H)}$.

Здесь достаточно либо провести более точные оценки сумм E'_k и E''_k в доказательстве теоремы 2.6, а затем применить теорему 2.9, либо проверить, что $\mathsf{D}X_n(H) \sim \lambda_n$ и применить теорему 2.8.