Случайные графы. Лекция 10.09
Пороговые вероятности

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

09.09.2025

Асимптотическая эквивалентность моделей

Начнем с продолжения обсуждения асимптотической эквивалентности равномерной и биномиальной моделей случайных подмножеств.

Асимптотическая эквивалентность моделей

Начнем с продолжения обсуждения асимптотической эквивалентности равномерной и биномиальной моделей случайных подмножеств.

Докажем утверждение об эквивалентности сходимости предельных вероятностей к нулю или единице, потому что, по большей части, именно такая сходимость нас будет интересовать в дальнейшем.

Асимптотическая эквивалентность моделей

Начнем с продолжения обсуждения асимптотической эквивалентности равномерной и биномиальной моделей случайных подмножеств.

Докажем утверждение об эквивалентности сходимости предельных вероятностей к нулю или единице, потому что, по большей части, именно такая сходимость нас будет интересовать в дальнейшем.

Лемма (1.4)

Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, задана функция $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$, $m = m(n) \to \infty$ и $N - m \to +\infty$. Тогда если

$$\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, \frac{m}{N}\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство леммы 1.4

1) Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство. Тогда из доказательства леммы 1.2 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \models \mathcal{Q}\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, k) \models \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| = k\right) \leqslant$$

Доказательство леммы 1.4

1) Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство. Тогда из доказательства леммы 1.2 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \vDash \mathcal{Q}\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,k) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| = k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,k) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| = k\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| > m\right) \leqslant$$

Доказательство леммы 1.4

1) Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство. Тогда из доказательства леммы 1.2 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \models \mathcal{Q}\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,k) \models \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| = k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,k) \models \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| = k\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| > m\right) \leqslant$$

(используем возрастание $\mathcal{Q}$)

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| \leqslant m\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| > m\right).$$

Доказательство леммы 1.4

1) Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство. Тогда из доказательства леммы 1.2 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m/N)\models\mathcal{Q}\right)=\sum_{k=0}^{N}\mathsf{P}\left(\Gamma(n,k)\models\mathcal{Q}\right)\cdot\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,m/N)|=k\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m}\mathsf{P}\left(\Gamma(n,k)\models\mathcal{Q}\right)\cdot\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,m/N)|=k\right)+\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,m/N)|>m\right)\leqslant$$

(используем возрастание $\mathcal{Q}$)

$$\leqslant\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m)\models\mathcal{Q}\right)\cdot\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,m/N)|\leqslant m\right)+\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,m/N)|>m\right).$$

Случайная величина $X_n=|\Gamma(n,m/N)|$ имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}(N,m/N)$, поэтому в силу нормальной аппроксимации

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(X_n\leqslant m\right)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(X_n>m\right)=\frac{1}{2}.$$

Доказательство леммы 1.4

Берем предел обеих частей неравенства при $n \to \infty$. Получаем:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \models \mathcal{Q}\right) \leqslant \frac{1}{2} \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) + \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \geqslant 1$ и, значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) = 1.$$

Доказательство леммы 1.4

Берем предел обеих частей неравенства при $n \to \infty$. Получаем:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \frac{1}{2} \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \vDash \mathcal{Q}\right) + \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant 1$ и, значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \vDash \mathcal{Q}\right) = 1.$$

2) Случай убывающего свойства полностью аналогичен. Действительно,

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m/N) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| \geqslant m\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, m/N)| < m\right).$$

Далее, повторяем рассуждения предыдущего пункта. □

Следствия

Следствие (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— монотонное свойство подмножеств* $\Gamma(n)$, *задана функция* $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$, $m = m(n) \to \infty$ *и* $N - m \to +\infty$. *Тогда если*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, \frac{m}{N}\right) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следствия

Следствие (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— монотонное свойство подмножеств* $\Gamma(n)$, *задана функция* $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$, $m = m(n) \to \infty$ *и* $N - m \to +\infty$. *Тогда если*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, \frac{m}{N}\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Получается из леммы 1.4 заменой $\mathcal{Q}$ на его дополнение. □

Следствия

Следствие (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— монотонное свойство подмножеств* $\Gamma(n)$, *задана функция* $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$, $m = m(n) \to \infty$ *и* $N - m \to +\infty$. *Тогда если*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, \frac{m}{N}\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Получается из леммы 1.4 заменой $\mathcal{Q}$ на его дополнение. □

Упражнение

Докажите лемму 1.4 без условий $m \to +\infty$ и $N - m \to +\infty$.

Следствия

Следующее важнейшее следствие из лемм 1.2 и 1.4 проясняет асимптотическую эквивалентность равномерных и биномиальных моделей для случая обладания монотонными свойствами.

Следствия

Следующее важнейшее следствие из лемм 1.2 и 1.4 проясняет асимптотическую эквивалентность равномерных и биномиальных моделей для случая обладания монотонными свойствами.

Следствие (1.2)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$*, задано функция* $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$*,* $m = m(n) \to \infty$*. Пусть также* $\delta \in (0,1)$ *фиксировано и* $(1+\delta)m/N \leqslant 1$*. Тогда*

1) *если* $\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m/N\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 1,$ *то* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) \to 1$ *при* $n \to \infty$;

2) *если* $\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m/N\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0,$ *то* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

3) *если* $\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 1,$ *то* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,(1+\delta)m/N) \models \mathcal{Q}\right) \to 1$ *при* $n \to \infty$;

4) *если* $\mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0,$ *то* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,(1-\delta)m/N) \models \mathcal{Q}\right) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Следствия

Следующее важнейшее следствие из лемм 1.2 и 1.4 проясняет асимптотическую эквивалентность равномерных и биномиальных моделей для случая обладания монотонными свойствами.

Следствие (1.2)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$*, задано функция* $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$, $m = m(n) \to \infty$*. Пусть также* $\delta \in (0,1)$ *фиксировано и* $(1+\delta)m/N \leqslant 1$*. Тогда*

$$1) \text{ если } \mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m/N\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 1, \text{ то } \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty;$$

$$2) \text{ если } \mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m/N\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0, \text{ то } \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

$$3) \text{ если } \mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 1, \text{ то } \mathsf{P}\left(\Gamma(n,(1+\delta)m/N) \models \mathcal{Q}\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty;$$

$$4) \text{ если } \mathsf{P}\left(\Gamma\left(n, m\right) \models \mathcal{Q}\right) \to 0, \text{ то } \mathsf{P}\left(\Gamma(n,(1-\delta)m/N) \models \mathcal{Q}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание. В случае убывающего свойства в пунктах 3) и 4) надо заменить δ на $-\delta$.

Доказательство следствия 1.2

Пункты 1) и 2) — это утверждения леммы 1.4 и следствия 1.1.

Доказательство следствия 1.2

Пункты 1) и 2) — это утверждения леммы 1.4 и следствия 1.1.

3) Положим $p = (1+\delta)\frac{m}{N}$, тогда по лемме 1.2 достаточно показать, что для любой функции $\tilde{m} = \tilde{m}(n)$ с условием $\tilde{m} = Np + O(\sqrt{Npq})$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,\tilde{m}) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 1.$$

Доказательство следствия 1.2

Пункты 1) и 2) — это утверждения леммы 1.4 и следствия 1.1.

3) Положим $p = (1+\delta)\frac{m}{N}$, тогда по лемме 1.2 достаточно показать, что для любой функции $\tilde{m} = \tilde{m}(n)$ с условием $\tilde{m} = Np + O(\sqrt{Npq})$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,\tilde{m}) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 1.$$

Но $\tilde{m} = (1+\delta)m + O(\sqrt{m})$ и при больших n выполнено $\tilde{m} \geqslant m$. Значит, в силу возрастания $\mathcal{Q}$ получаем искомое

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,\tilde{m}) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 1.$$

Доказательство следствия 1.2

Пункты 1) и 2) — это утверждения леммы 1.4 и следствия 1.1.

3) Положим $p = (1+\delta)\frac{m}{N}$, тогда по лемме 1.2 достаточно показать, что для любой функции $\tilde{m} = \tilde{m}(n)$ с условием $\tilde{m} = Np + O(\sqrt{Npq})$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, \tilde{m}) \models \mathcal{Q}\right) \to 1.$$

Но $\tilde{m} = (1+\delta)m + O(\sqrt{m})$ и при больших n выполнено $\tilde{m} \geqslant m$. Значит, в силу возрастания $\mathcal{Q}$ получаем искомое

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, \tilde{m}) \models \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \to 1.$$

4) Полностью аналогично пункту 3).

$\square$

Выводы

Приведенное следствие крайне полезно, и в дальнейшем, ссылаясь на асимптотическую эквивалентность равномерной и биномиальной моделей случайных подмножеств, мы будем, в первую очередь, иметь ввиду именно его.

Выводы

Приведенное следствие крайне полезно, и в дальнейшем, ссылаясь на асимптотическую эквивалентность равномерной и биномиальной моделей случайных подмножеств, мы будем, в первую очередь, иметь ввиду именно его.

Вывод: во многих случаях асимптотическое поведение вероятностей $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right)$ и $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right)$ одинаково при $m \sim Np$ и, значит, зачастую можно ограничиться рассмотрением только одной из моделей. Особенно ярко это проявляется для монотонных свойств $\mathcal{Q}$.

Пороговые вероятности

В предыдущем разделе мы остановились на том, что было доказано, что сходимость к 1 или 0 вероятностей обладания монотонным свойством $\mathcal{Q}$ в рассматриваемых моделях происходит одновременно. Оказывается, что сходимость к другим значениям происходит в крайне малом промежутке значений параметров, причем происходит так называемый *фазовый переход*.

Пороговые вероятности

В предыдущем разделе мы остановились на том, что было доказано, что сходимость к 1 или 0 вероятностей обладания монотонным свойством $\mathcal{Q}$ в рассматриваемых моделях происходит одновременно. Оказывается, что сходимость к другим значениям происходит в крайне малом промежутке значений параметров, причем происходит так называемый *фазовый переход*.

Как и ранее, для каждого n у нас задано множество $\Gamma(n)$ растущей мощности $N = N(n)$.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\widehat{p} = \widehat{p}(n)$ называется пороговой вероятностью для свойства $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\widehat{p}), \\ 1, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}). \end{cases}$$

Пороговые вероятности

Для убывающего свойства пороговая вероятность совпадает с пороговой вероятностью его дополнения. Таким образом, для него пределы будут обратными:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = o(\widehat{p}), \\ 0, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}). \end{cases}$$

Пороговые вероятности

Для убывающего свойства пороговая вероятность совпадает с пороговой вероятностью его дополнения. Таким образом, для него пределы будут обратными:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = o(\widehat{p}), \\ 0, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}). \end{cases}$$

Для равномерной модели аналогично вводится понятие пороговой функции, а не вероятности.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\widehat{m} = \widehat{m}(n)$ называется пороговой функцией для свойства $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \textit{если } m = o(\widehat{m}), \\ 1, & \textit{если } m = \omega(\widehat{m}). \end{cases}$$

Примеры

Примеры

1. Пусть $\Gamma(n) = [n] = \{1, \ldots, n\}$, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что подмножество содержит арифметическую прогрессию длины 3. Тогда $\widehat{p} = n^{-2/3}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n^{1/3}$ — пороговой функцией.

Примеры

1. Пусть $\Gamma(n) = [n] = \{1, \ldots, n\}$, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что подмножество содержит арифметическую прогрессию длины 3. Тогда $\widehat{p} = n^{-2/3}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n^{1/3}$ — пороговой функцией.
2. Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер графа K_n, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что граф содержит треугольник. Тогда $\widehat{p} = 1/n$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n$ — пороговой функцией.

Примеры

1. Пусть $\Gamma(n) = [n] = \{1, \ldots, n\}$, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что подмножество содержит арифметическую прогрессию длины 3. Тогда $\widehat{p} = n^{-2/3}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n^{1/3}$ — пороговой функцией.
2. Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер графа K_n, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что граф содержит треугольник. Тогда $\widehat{p} = 1/n$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n$ — пороговой функцией.
3. Пусть $\Gamma(n)$ — множество k-дизъюнкций из множества литералов $\{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$, $k \geqslant 3$, свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, булева функция, составленная из конъюнкции выбранных дизъюнкций, выполнима. Тогда $\widehat{p} = n^{1-k}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n$ — пороговой функцией.

Примеры

1. Пусть $\Gamma(n) = [n] = \{1, \ldots, n\}$, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что подмножество содержит арифметическую прогрессию длины 3. Тогда $\widehat{p} = n^{-2/3}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n^{1/3}$ — пороговой функцией.
2. Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер графа K_n, а свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, что граф содержит треугольник. Тогда $\widehat{p} = 1/n$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n$ — пороговой функцией.
3. Пусть $\Gamma(n)$ — множество k-дизъюнкций из множества литералов $\{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$, $k \geqslant 3$, свойство $\mathcal{Q}$ заключается в том, булева функция, составленная из конъюнкции выбранных дизъюнкций, выполнима. Тогда $\widehat{p} = n^{1-k}$ является пороговой вероятностью для такого $\mathcal{Q}$, а $\widehat{m} = n$ — пороговой функцией.
4. Пороговая вероятность может быть и у свойства, которое не является монотонным! Например, в случайном графе $\widehat{p} = 1/n$ является точной пороговой вероятностью для свойства $\{$*максимальная по размеру компонента графа является деревом*$\}$.

Замечание

Замечание

Заметим, что пороговые вероятности и функции определены с точностью до умножения на константу, что в сочетании со следствием 1.2 означает, что

$$\widehat{p} \text{ — пороговая вероятность для } Q \text{ в модели } \Gamma(n,p) \Leftrightarrow$$

$$\widehat{m} = N\widehat{p} \text{ — пороговая функция для } Q \text{ в модели } \Gamma(n,m).$$

Замечание

Замечание

Заметим, что пороговые вероятности и функции определены с точностью до умножения на константу, что в сочетании со следствием 1.2 означает, что

$$\widehat{p} \text{ — пороговая вероятность для } \mathcal{Q} \text{ в модели } \Gamma(n,p) \Leftrightarrow$$

$$\widehat{m} = N\widehat{p} \text{ — пороговая функция для } \mathcal{Q} \text{ в модели } \Gamma(n,m).$$

Вывод: достаточно искать пороговую функцию лишь в одной из моделей.

Существование пороговых вероятностей

Дальнейшая наша цель будет состоять в том, чтобы установить существование пороговой вероятности для любого монотонного свойства. В качестве начального шага докажем следующее простое утверждение.

Существование пороговых вероятностей

Дальнейшая наша цель будет состоять в том, чтобы установить существование пороговой вероятности для любого монотонного свойства. В качестве начального шага докажем следующее простое утверждение.

Утверждение (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— нетривиальное возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$*. Тогда* $f_n(p) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right)$ *— это непрерывная строго возрастающая функция,* $f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1.$

Существование пороговых вероятностей

Дальнейшая наша цель будет состоять в том, чтобы установить существование пороговой вероятности для любого монотонного свойства. В качестве начального шага докажем следующее простое утверждение.

Утверждение (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— нетривиальное возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$*. Тогда* $f_n(p) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right)$ *— это непрерывная строго возрастающая функция,* $f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1.$

Нетривиальное означает, что $\Gamma(n)$ обладает свойством $\mathcal{Q}$, а пустое подмножество — нет.

Доказательство утверждения 1.1

Возрастание сразу следует из леммы 1.1. Кроме того, заметим, что

$$f_n(p) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) = \sum_{F \in \mathcal{Q}} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) = F\right) =$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{Q}} p^{|F|}(1-p)^{N-|F|}$$

Доказательство утверждения 1.1

Возрастание сразу следует из леммы 1.1. Кроме того, заметим, что

$$f_n(p) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \sum_{F \in \mathcal{Q}} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) = F\right) =$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{Q}} p^{|F|}(1-p)^{N-|F|}$$

является многочленом от p, а потому — это аналитическая возрастающая функция. Следовательно, она непрерывна и строго возрастающая. $\square$

Существование пороговых вероятностей

Определение

Для возрастающего свойства $\mathcal{Q}$ *подмножеств* $\Gamma(n)$ *и* $a \in (0,1)$ *положим* $p(a;n) = f_n^{-1}(a)$, *т.е.* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n, p(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) = a$. *В равномерной модели определим*

$$m(a;n) = \min\{m : \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a\}.$$

Существование пороговых вероятностей

Определение

Для возрастающего свойства $\mathcal{Q}$ *подмножеств* $\Gamma(n)$ *и* $a \in (0,1)$ *положим* $p(a;n) = f_n^{-1}(a)$, *т.е.* $\mathsf{P}\left(\Gamma(n, p(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) = a$. *В равномерной модели определим*

$$m(a;n) = \min\{m : \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a\}.$$

Следующая лемма дает критерий того, когда функция является пороговой вероятностью.

Лемма (1.5)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$. *Тогда* $\widehat{p}(n)$ *является пороговой вероятностью для* $\mathcal{Q}$ *в модели* $\Gamma(n,p) \Leftrightarrow$ *для любого* $a \in (0,1)$ *выполнено* $p(a;n) \asymp \widehat{p}(n)$ *при* $n \to \infty$.

Существование пороговых вероятностей

Определение

Для возрастающего свойства $\mathcal{Q}$ подмножеств $\Gamma(n)$ и $a \in (0,1)$ положим $p(a;n) = f_n^{-1}(a)$, т.е. $\mathsf{P}\left(\Gamma(n, p(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) = a$. В равномерной модели определим

$$m(a;n) = \min\{m : \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a\}.$$

Следующая лемма дает критерий того, когда функция является пороговой вероятностью.

Лемма (1.5)

Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Тогда $\widehat{p}(n)$ является пороговой вероятностью для $\mathcal{Q}$ в модели $\Gamma(n,p)$ $\Leftrightarrow$ для любого $a \in (0,1)$ выполнено $p(a;n) \asymp \widehat{p}(n)$ при $n \to \infty$.
Аналогично, $\widehat{m}(n)$ является пороговой функцией для $\mathcal{Q}$ в модели $\Gamma(n,m)$ $\Leftrightarrow$ для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m(a;n) \asymp \widehat{m}(n)$ при $n \to \infty$.

Доказательство леммы 1.5

Докажем только для равномерной модели, для биномиальной — все аналогично. Заметим, что в силу определения $m(a;n)$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n) - 1) \vDash \mathcal{Q}\right) < a \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Доказательство леммы 1.5

Докажем только для равномерной модели, для биномиальной — все аналогично. Заметим, что в силу определения $m(a;n)$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)-1) \models \mathcal{Q}\right) < a \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)) \models \mathcal{Q}\right).$$

($\Rightarrow$) Пусть $\widehat{m}(n)$ — пороговая функция для $\mathcal{Q}$, и для некоторого $a \in (0,1)$ функция $m(a;n)$ не имеет порядок $\Theta(\widehat{m}(n))$.

Доказательство леммы 1.5

Докажем только для равномерной модели, для биномиальной — все аналогично. Заметим, что в силу определения $m(a;n)$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)-1) \models \mathcal{Q}\right) < a \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)) \models \mathcal{Q}\right).$$

($\Rightarrow$) Пусть $\widehat{m}(n)$ — пороговая функция для $\mathcal{Q}$, и для некоторого $a \in (0,1)$ функция $m(a;n)$ не имеет порядок $\Theta(\widehat{m}(n))$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{n_k, k \in \mathbb{N}\}$, что либо $m(a;n_k)/\widehat{m}(n_k) \to 0$, либо $m(a;n_k)/\widehat{m}(n_k) \to \infty$.

Доказательство леммы 1.5

Докажем только для равномерной модели, для биномиальной — все аналогично. Заметим, что в силу определения $m(a;n)$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)-1) \vDash \mathcal{Q}\right) < a \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\widehat{m}(n)$ — пороговая функция для $\mathcal{Q}$, и для некоторого $a \in (0,1)$ функция $m(a;n)$ не имеет порядок $\Theta(\widehat{m}(n))$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{n_k, k \in \mathbb{N}\}$, что либо $m(a;n_k)/\widehat{m}(n_k) \to 0$, либо $m(a;n_k)/\widehat{m}(n_k) \to \infty$. Отсюда из определения пороговой функции мы получаем, что либо

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n_k, m(a;n_k)) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 0 \quad k \to +\infty,$$

что противоречит тому, что эта вероятность должна быть не меньше a, либо

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n_k, m(a;n_k)-1) \vDash \mathcal{Q}\right) \to 1 \quad k \to +\infty,$$

что противоречит тому, что эти вероятности должны быть меньше a.

Доказательство леммы 1.5

($\Leftarrow$) Пусть функция $\widehat{m}(n)$ удовлетворяет условию леммы. Если $m = m(n) = \omega(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = \omega(m(a;n))$.

Доказательство леммы 1.5

($\Leftarrow$) Пусть функция $\widehat{m}(n)$ удовлетворяет условию леммы. Если $m = m(n) = \omega(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = \omega(m(a;n))$. Значит, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a.$$

Доказательство леммы 1.5

($\Leftarrow$) Пусть функция $\widehat{m}(n)$ удовлетворяет условию леммы. Если $m = m(n) = \omega(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = \omega(m(a;n))$. Значит, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a.$$

Отсюда, получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) = 1$.

Доказательство леммы 1.5

$(\Leftarrow)$ Пусть функция $\widehat{m}(n)$ удовлетворяет условию леммы. Если $m = m(n) = \omega(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = \omega(m(a;n))$. Значит, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a.$$

Отсюда, получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) = 1$.

Если же $m = m(n) = o(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = o(m(a;n))$, и, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)-1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant a.$$

Доказательство леммы 1.5

$(\Leftarrow)$ Пусть функция $\widehat{m}(n)$ удовлетворяет условию леммы. Если $m = m(n) = \omega(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = \omega(m(a;n))$. Значит, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a.$$

Отсюда, получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) = 1$.

Если же $m = m(n) = o(\widehat{m})$, то для любого $a \in (0,1)$ выполнено $m = o(m(a;n))$, и, в силу возрастания свойства $\mathcal{Q}$, для любого $a \in (0,1)$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m(a;n)-1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant a.$$

Отсюда получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) = 0$, и, следовательно, $\widehat{m}$ — это пороговая функция. □

Существование пороговых вероятностей

Наконец, мы готовы к тому, чтобы доказать теорему о существовании пороговой вероятности.

Теорема (1.1)

Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность в биномиальной модели случайных подмножеств.

Существование пороговых вероятностей

Наконец, мы готовы к тому, чтобы доказать теорему о существовании пороговой вероятности.

Теорема (1.1)

Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность в биномиальной модели случайных подмножеств.

Следствие (1.3)

Каждое монотонное свойство имеет пороговую функцию в равномерной модели случайных подмножеств.

Существование пороговых вероятностей

Наконец, мы готовы к тому, чтобы доказать теорему о существовании пороговой вероятности.

Теорема (1.1)

Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность в биномиальной модели случайных подмножеств.

Следствие (1.3)

Каждое монотонное свойство имеет пороговую функцию в равномерной модели случайных подмножеств.

Доказательство. Вытекает из теоремы 1.1 и асимптотической эквивалентности моделей (следствие 1.2). □

Доказательство теоремы 1.1

Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$.

Доказательство теоремы 1.1

Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0,1)$ и возьмем $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(1-\varepsilon)^s \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \ldots, \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$ — независимые одинаково распределенные случайные подмножества $\Gamma(n)$, где $p(\varepsilon, n)$ было определено в лемме 1.5.

Доказательство теоремы 1.1

Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0,1)$ и возьмем $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(1-\varepsilon)^s \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \ldots, \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$ — независимые одинаково распределенные случайные подмножества $\Gamma(n)$, где $p(\varepsilon, n)$ было определено в лемме 1.5. Тогда

$$\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \overset{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^s \leqslant sp(\varepsilon, n)$.

Доказательство теоремы 1.1

Без ограничения общности считаем, что $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0,1)$ и возьмем $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(1-\varepsilon)^s \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \ldots, \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$ — независимые одинаково распределенные случайные подмножества $\Gamma(n)$, где $p(\varepsilon, n)$ было определено в лемме 1.5. Тогда

$$\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \stackrel{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^s \leqslant sp(\varepsilon, n)$. Отсюда, по лемме 1.1

$$\mathsf{P}\left(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \vDash \mathcal{Q}\right) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n, p') \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n, sp(\varepsilon, n)) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Доказательство теоремы 1.1

С другой стороны, из возрастания $\mathcal{Q}$ следует, что если хотя бы одно из $\Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n))$ обладает свойством $\mathcal{Q}$, то им обладает и объединение $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$.

Доказательство теоремы 1.1

С другой стороны, из возрастания $\mathcal{Q}$ следует, что если хотя бы одно из $\Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n))$ обладает свойством $\mathcal{Q}$, то им обладает и объединение $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$. Тогда из независимости подмножеств получаем

$$\mathsf{P}\left(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\forall i : \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) =$$

Доказательство теоремы 1.1

С другой стороны, из возрастания $\mathcal{Q}$ следует, что если хотя бы одно из $\Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n))$ обладает свойством $\mathcal{Q}$, то им обладает и объединение $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$. Тогда из независимости подмножеств получаем

$$\mathsf{P}\left(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\forall i : \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) =$$

$$= \left(1 - \mathsf{P}\left(\Gamma(n, p(\varepsilon, n)) \models \mathcal{Q}\right)\right)^s = (1 - \varepsilon)^s \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1.1

С другой стороны, из возрастания $\mathcal{Q}$ следует, что если хотя бы одно из $\Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n))$ обладает свойством $\mathcal{Q}$, то им обладает и объединение $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n))$. Тогда из независимости подмножеств получаем

$$\mathsf{P}\left(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\forall i : \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models \mathcal{Q}\right) =$$

$$= \left(1 - \mathsf{P}\left(\Gamma(n, p(\varepsilon, n)) \models \mathcal{Q}\right)\right)^s = (1 - \varepsilon)^s \leqslant \varepsilon.$$

Значит,

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, sp(\varepsilon, n)) \models \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(s)}(n, p(\varepsilon, n)) \models \mathcal{Q}\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1.1

Тем самым мы показали, что $sp(\varepsilon, n) \geqslant p(1-\varepsilon, n)$.

Доказательство теоремы 1.1

Тем самым мы показали, что $sp(\varepsilon, n) \geqslant p(1-\varepsilon, n)$. Значит, для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{s} \cdot p(1-\varepsilon, n) \leqslant p(\varepsilon, n) \leqslant p(1/2, n) \leqslant p(1-\varepsilon, n) \leqslant sp(\varepsilon, n).$$

Доказательство теоремы 1.1

Тем самым мы показали, что $sp(\varepsilon, n) \geqslant p(1-\varepsilon, n)$. Значит, для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{s} \cdot p(1-\varepsilon, n) \leqslant p(\varepsilon, n) \leqslant p(1/2, n) \leqslant p(1-\varepsilon, n) \leqslant sp(\varepsilon, n).$$

Заметим, что s зависит только от ε. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1/2)$ выполнено

$$p(\varepsilon, n) \asymp p(1/2, n) \asymp p(1-\varepsilon, n),$$

что по лемме 1.5 означает, что функция $p(1/2, n)$ является пороговой вероятностью. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Пороговые вероятности для выпуклых свойств

Обсудим теперь вопрос о пороговых вероятностях для выпуклых, но не монотонных свойств. В этом случае у свойства будет две пороговые вероятности, переходя через которые асимптотическая вероятность будет меняться с 0 на 1 и обратно.

Пороговые вероятности для выпуклых свойств

Обсудим теперь вопрос о пороговых вероятностях для выпуклых, но не монотонных свойств. В этом случае у свойства будет две пороговые вероятности, переходя через которые асимптотическая вероятность будет меняться с 0 на 1 и обратно.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ — выпуклое, но не монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функции $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_1(n)$ и $\widehat{p}_2 = \widehat{p}_2(n)$ называются пороговыми вероятностями для свойства $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\widehat{p}_1); \\ 1, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}_1) \text{ и } p = o(\widehat{p}_2); \\ 0, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}_2). \end{cases}$$

Пороговые вероятности для выпуклых свойств

Обсудим теперь вопрос о пороговых вероятностях для выпуклых, но не монотонных свойств. В этом случае у свойства будет две пороговые вероятности, переходя через которые асимптотическая вероятность будет меняться с 0 на 1 и обратно.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ — выпуклое, но не монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функции $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_1(n)$ и $\widehat{p}_2 = \widehat{p}_2(n)$ называются пороговыми вероятностями для свойства $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \textit{если } p = o(\widehat{p}_1); \\ 1, & \textit{если } p = \omega(\widehat{p}_1) \textit{ и } p = o(\widehat{p}_2); \\ 0, & \textit{если } p = \omega(\widehat{p}_2). \end{cases}$$

Теорема 1.1 и упражнение из домашнего задания говорят, что такие функции обязательно существуют. При этом, $\widehat{p}_1$ и $\widehat{p}_2$ могут как совпадать, так и не совпадать.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер полного графа K_n на n вершинах.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер полного графа K_n на n вершинах.

1. Пусть $Q = \{$обхват графа равен четырем$\}$. В этом случае $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2 = 1/n$.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер полного графа K_n на n вершинах.

1. Пусть $\mathcal{Q} = \{$обхват графа равен четырем$\}$. В этом случае $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2 = 1/n$.
2. Пусть $\mathcal{Q} = \{$кликовое число графа равно четырем$\}$. В этом случае $\widehat{p}_1 = n^{-2/3}$, а $\widehat{p}_2 = n^{-1/2}$.

Точные пороговые вероятности

Кроме того, в некоторых случаях для монотонных свойств существуют, так называемые, *точные пороговые вероятности*.

Точные пороговые вероятности

Кроме того, в некоторых случаях для монотонных свойств существуют, так называемые, *точные пороговые вероятности*.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$. *Функция* $\widehat{p} = \widehat{p}(n)$ *называется точной пороговой вероятностью для свойства* $\mathcal{Q}$, *если для любого* $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leqslant (1-\varepsilon)\widehat{p}, \\ 1, & \text{если } p \geqslant (1+\varepsilon)\widehat{p}. \end{cases}$$

Точные пороговые вероятности

Кроме того, в некоторых случаях для монотонных свойств существуют, так называемые, *точные пороговые вероятности*.

Определение

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* $\Gamma(n)$*. Функция* $\widehat{p} = \widehat{p}(n)$ *называется точной пороговой вероятностью для свойства* $\mathcal{Q}$*, если для любого* $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leqslant (1-\varepsilon)\widehat{p}, \\ 1, & \text{если } p \geqslant (1+\varepsilon)\widehat{p}. \end{cases}$$

Точные пороговые функции для равномерной модели определяются аналогично. При этом из следствия 1.2 следует, что $\widehat{p}$ — точная пороговая вероятность для $\mathcal{Q}$ в модели $\Gamma(n,p)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{m}$ — точная пороговая функция для $\mathcal{Q}$ в модели $\Gamma(n,m)$.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер K_n.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер K_n.

1. Свойство связности обладает точной пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{\ln n}{n}$.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер K_n.

1. Свойство связности обладает точной пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{\ln n}{n}$.
2. Свойство содержать треугольник обладает пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{1}{n}$, но это не точная пороговая вероятность. Все дело в том, что при $p = c/n$ вероятность содержать треугольник сходится к некоторому пределу $\alpha(c) \in (0, 1)$.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер K_n.

1. Свойство связности обладает точной пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{\ln n}{n}$.
2. Свойство содержать треугольник обладает пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{1}{n}$, но это не точная пороговая вероятность. Все дело в том, что при $p = c/n$ вероятность содержать треугольник сходится к некоторому пределу $\alpha(c) \in (0, 1)$.
3. Иногда точной пороговой вероятности нет, но пороговая вероятность "неточна" только с одной стороны. Яркий пример — свойство ацикличности графа.

Примеры

Пусть $\Gamma(n)$ — множество ребер K_n.

1. Свойство связности обладает точной пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{\ln n}{n}$.
2. Свойство содержать треугольник обладает пороговой вероятностью $\widehat{p} = \frac{1}{n}$, но это не точная пороговая вероятность. Все дело в том, что при $p = c/n$ вероятность содержать треугольник сходится к некоторому пределу $\alpha(c) \in (0,1)$.
3. Иногда точной пороговой вероятности нет, но пороговая вероятность "неточна" только с одной стороны. Яркий пример — свойство ацикличности графа.

Замечание

Зачастую удается доказать, что пороговая вероятность для некоторого свойства является точной, но само ее нахождение, как правило, — очень трудоемкая задача.

Теоремы о точных пороговых вероятностях

Пусть в модели случайных графов $G(n, p)$ все-таки точная пороговая вероятность у монотонного свойства отсутствует. Тогда оказывается, грубо говоря, что пороговая вероятность может иметь только вид $n^{-\alpha}$ с рациональным α. Точную формулировку дает следующая теорема Э. Фридгута.

Теоремы о точных пороговых вероятностях

Пусть в модели случайных графов $G(n, p)$ все-таки точная пороговая вероятность у монотонного свойства отсутствует. Тогда оказывается, грубо говоря, что пороговая вероятность может иметь только вид $n^{-\alpha}$ с рациональным α. Точную формулировку дает следующая теорема Э. Фридгута.

Теорема (Э. Фридгут, 1999)

Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство графов с пороговой вероятностью $p(n)$, не обладающее точной пороговой вероятностью. Тогда существует такое конечное разбиение $\mathbb{N}_j$, $j = 1, \ldots, k$, множества натуральных чисел и такие рациональные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что для любого $n \in \mathbb{N}_j$ $p(n) \asymp n^{-\alpha_j}$, $j = 1, \ldots, k$.

Теоремы о точных пороговых вероятностях

Другие теоремы утверждают, что все “большие” пороговые вероятности являются точными.

Теорема (Э. Фридгут, Г. Калаи, 1996)

Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство графов с пороговой вероятностью $p(n)$ в модели $G(n,p)$, причем $p(n) = \omega(\frac{1}{\ln n})$. Тогда $\mathcal{Q}$ имеет точную пороговую вероятность.

Теоремы о точных пороговых вероятностях

Отличный пример целого класса свойств, имеющих точные пороговые вероятности, — это свойства, связанные с наличием гомоморфизмов.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ *и* $F = (V', E')$ *— два графа. Отображение* $\varphi : V \to V'$ *называется гомоморфизмом из графа* G *в граф* F*, если для любого ребра* $(u, v) \in E$ *графа* G *выполнено, что*

$$(\varphi(v), \varphi(u)) \in E'.$$

Теоремы о точных пороговых вероятностях

Отличный пример целого класса свойств, имеющих точные пороговые вероятности, — это свойства, связанные с наличием гомоморфизмов.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ *и* $F = (V', E')$ *— два графа. Отображение* $\varphi : V \to V'$ *называется гомоморфизмом из графа* G *в граф* F*, если для любого ребра* $(u, v) \in E$ *графа* G *выполнено, что*

$$(\varphi(v), \varphi(u)) \in E'.$$

Теорема (Х. Хатами, М. Моллой, 2008)

Пусть F *— фиксированный связный граф, содержащий треугольник. Пусть* Q *— это свойство графов, состоящее в том, что существует гомоморфизм в граф* F*. Тогда свойство* Q *имеет точную пороговую вероятность в модели* $G(n, p)$*.*

Заключение

1. Пример свойства с гомоморфизмом — это свойство раскрашиваемости. Для графа G существует правильная раскраска в q цветов $\Longleftrightarrow$ существует гомоморфизм из G в K_q.

Заключение

1. Пример свойства с гомоморфизмом — это свойство раскрашиваемости. Для графа G существует правильная раскраска в q цветов $\Longleftrightarrow$ существует гомоморфизм из G в K_q.
2. Целый пласт задач теории случайных графов посвящен поиску точных (и не только) пороговых вероятностей для различных свойств графов (не всегда монотонных!).

Заключение

1. Пример свойства с гомоморфизмом — это свойство раскрашиваемости. Для графа G существует правильная раскраска в q цветов $\Longleftrightarrow$ существует гомоморфизм из G в K_q.
2. Целый пласт задач теории случайных графов посвящен поиску точных (и не только) пороговых вероятностей для различных свойств графов (не всегда монотонных!).
3. В рамках курса мы обсудим как находятся или оцениваются точные пороговые вероятности для ряда классических свойств:
   - связности,
   - наличия совершенного паросочетания,
   - гамильтоновости,
   - правильной q-раскрашиваемости.

Заключение

1. Пример свойства с гомоморфизмом — это свойство раскрашиваемости. Для графа G существует правильная раскраска в q цветов $\Longleftrightarrow$ существует гомоморфизм из G в K_q.
2. Целый пласт задач теории случайных графов посвящен поиску точных (и не только) пороговых вероятностей для различных свойств графов (не всегда монотонных!).
3. В рамках курса мы обсудим как находятся или оцениваются точные пороговые вероятности для ряда классических свойств:
   - связности,
   - наличия совершенного паросочетания,
   - гамильтоновости,
   - правильной q-раскрашиваемости.
4. Феномен пороговых вероятностей близок к феномену законов 0 или 1, когда предельные вероятности наличия свойств (из некоторого класса) равны 0 или 1.