Основы модальной логики, лекция 5

Кудинов А.В.

13 октября 2025 г.

Модальная логика

Нормальной модальной логикой называется подмножество формул $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{ML}$, если

1. L содержит все классические тавтологии;
2. L замкнуто относительно правил

$$\frac{A \to B,\ A}{B} \quad (MP) \qquad \text{Modus Ponens;}$$

$$\frac{A}{\Box A} \quad (\to \Box) \qquad \text{правило обобщения;}$$

$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub) \qquad \text{правило подстановки;}$$

3. L содержит модальные аксиомы нормальности:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \quad (AK)$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

3) Пусть V — оценка, определим $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$ тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

3) Пусть V — оценка, определим $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$ тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

Из этого следует, что если $F \not\models A$, то $F \not\models [B/p]A$. □

Следствие

Пусть $\mathcal{C}$ — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Следствие

Пусть $\mathcal{C}$ — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Логика L называется полной (по Крипке), если существует класс шкал $\mathcal{C}$, т.ч. $\mathsf{L} = Log(\mathcal{C})$.

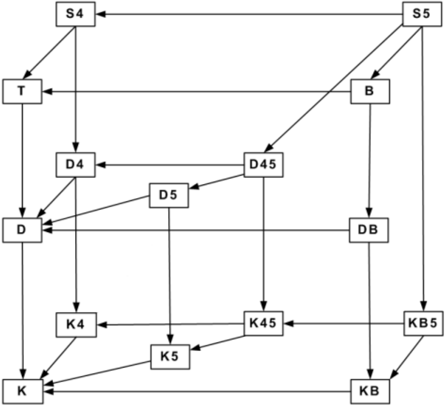
Примеры логик

Определим несколько логик:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4 \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4 \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB & \mathsf{L5} & \rightleftharpoons & \mathsf{L} + A5
\end{array}$$

Предложение

Все включения на следующем рисунке верны и строги



Наша дальнейшая цель доказать теорему о канонической модели, из которой будет следовать полнота.

Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L.

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A:
$S \rhd_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L, либо принадлежит S, либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.
Т. е. правила $(\to \Box)$ и (Sub) исключаются.

Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L.

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A:
$S \rhd_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L, либо принадлежит S, либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.
Т. е. правила $(\to \Box)$ и (Sub) исключаются.

Т.к. мы ограничили себя только правилом MP, то можно доказать:

Лемма (о дедукции)

$S \cup \{A\} \rhd_L B \iff S \rhd_L A \to B.$

Заметим, что для модального $\vdash$ лемма о дедукции не верна.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

1. $\Leftrightarrow$ 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

1. $\Leftrightarrow$ 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.
2. $\Leftrightarrow$ 3.

$$S_0 \rhd_L A \Leftrightarrow \rhd_L \bigwedge S_0 \to A \Leftrightarrow L \vdash \bigwedge S_0 \to A.$$

$\square$

L-полная теория

Теорией мы будем называть множество формул. Теория S называется L-противоречивой, если $S \rhd_L \bot$. Или, эквивалентно, если существует конечное подмножество формул $S_0 \subseteq S$ $L \vdash \neg \bigwedge S_0$.
Соответственно, теория S называется L-непротиворечивой, если $S \not\rhd_L \bot$. И, эквивалентно, если для любого конечного подмножества формул $S_0 \subseteq S$ $L \nvdash \neg \bigwedge S_0$.
S — L-полное теория, если S — максимальная непротиворечивая теория.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.
5. $(A \vee B) \in S \Leftrightarrow (A \in S$ или $B \in S)$.
6. $(A \wedge B) \in S \Leftrightarrow (A \in S$ и $B \in S)$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\perp \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...
Пункт 3. $\neg A = A \to \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...
Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...
Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.
(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.
$\neg A \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...
Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.
(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.
$\neg A \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$.
(iii) Пусть $B \in S$, $B \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$. $\square$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n.

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n.
S' — максимально,

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n.
S' — максимально, а значит полно. □

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$
\begin{array}{rcl}
M_L & = & (W_L, R_L, V_L),\ \text{где} \\
W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\
xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\
V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \,|\, p_i \in x\}\,.
\end{array}
$$

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L),\ \text{где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется канонической шкалой логики L.

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \,|\, p_i \in x\}. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L.

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \ \&\ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \;\&\; \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

$\Box$

Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y (x R_L y \ \&\ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.}\\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow\\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots (C_n \to (\neg B \to \bot) \ldots) \Leftrightarrow\\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots)).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \,|\, \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.}\\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow\\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow\\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\dots(\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_L y \ \&\ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.7.

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_L y \;\&\; B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.7.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\dots(\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.7.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.
Что и требовалось доказать. :-) $\Box$