Л. В. Колобашкина

Основы теории игр

МАТЕМАТИКА

издательство
БИНОМ

Л. В. Колобашкина

Основы теории игр

Учебное пособие

Рекомендовано
УМО по образованию в области прикладной математики
и управления качеством в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 231300 –
Прикладная математика

3-е издание, исправленное и дополненное
(электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 519.83(075)
ББК 22.193я7
К60

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физ-мат. наук, проф., зав. кафедрой *А. Л. Калабин*,
доктор техн. наук *Н. Н. Филатова*
(Тверской государственный технический университет,
кафедра «Программное обеспечение
вычислительной техники»),
кандидат техн. наук, доцент кафедры вычислительной
техники МЭИ *И. Н. Андреева*

Колобашкина Л. В.

К60 Основы теории игр [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. В. Колобашкина. — 3-е изд., испр. и доп. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 198 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2365-4

В пособии изложены основные положения и сведения из теории игр, подробно рассмотрены методы выбора оптимальных стратегий поведения в антагонистических и неантагонистических конфликтах. Приведены критерии определения оптимальных стратегий в «играх с природой». Рассмотрены методы принятия решений в антагонистических и неантагонистических позиционных играх с полной и неполной информацией. Рассмотрены принципы оптимальности для кооперативных игр. Все представленные методы сопровождаются подробно рассмотренными примерами. Доступность изложения материала делает знакомство с принципами рационального поведения в конфликтах привлекательным для широкого круга читателей.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Математические методы в экономике».

УДК 519.83(075)
ББК 22.193я7

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Основы теории игр : учебное пособие / Л. В. Колобашкина. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 195 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-2365-4

Оглавление

Светлой памяти моего отца
Колобашкина Виктора Михайловича
посвящается эта книга

ВВЕДЕНИЕ

Издавна люди сталкивались с проблемой принятия решений в тех или иных ситуациях. Недаром считается, что «качество принятых решений определяет качество жизни». Повседневно сталкиваясь с необходимостью выбирать то или иное решение, человек использует при этом имеющиеся в его распоряжении опыт, логические возможности, проводит различные рассуждения, использует ассоциации, вспоминает аналогичные случаи, делает прогнозы, предположения, догадки, прибегает к интуиции. При этом естественно стремление к таким решениям, которые приводят к наилучшим результатам. Такой выбор принято называть *оптимальным*. До поры до времени, в частности если выбор в конкретной ситуации касается интересов одного человека, решения могут приниматься без специального математического анализа. В случае же, когда последствия неправильно принятых решений могут затронуть интересы уже целых коллективов, структурных подразделений, отраслей, а то и городов, приводится в действие сложная система математических расчетов. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска правильного решения «наощупь».

Чем сложнее организуемое мероприятие, чем больше вкладывается в него материальных средств, чем шире спектр его возможных последствий, тем менее допустимы так называемые «волевые» решения, не опирающиеся на научный расчет, и тем большее значение получает совокупность научных методов, позволяющих заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать те, которые представляются наиболее удачными [1].

Математическими расчетами, облегчающими принятие правильных решений, занимается раздел прикладной математики — исследование операций.

Исследование операций — это теория математических моделей принятия оптимальных решений и практика их использования. Согласно шутливому определению Т. Л. Саати, исследование операций — это искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами [2]. Это говорит о том, что практические ситуации, в которых приходится принимать решение, часто бывают настолько сложными и важными, что даже незначительная помощь со стороны математических методов оказывается весьма существенной.

Особенно сложные управленческие проблемы возникают в сфере социально-экономических отношений. Обычно развитие социально-экономического явления зависит от действий многих лиц, каждое из которых лишь частично контролирует ситуацию. Лица, принимающие решения, имеют свои интересы, часто не полностью выявленные и представленные с некоторой долей неопределенности. Эти интересы могут совпадать (возможно, частично), что ведет к сотрудничеству и кооперации. Но они могут и противоречить друг другу (возможно, частично), что ведёт к соперничеству и конфликту [3].

При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две и более враждующие стороны, преследующие различные цели. Причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации называются *конфликтными ситуациями*.

Исследованием операций в условиях конфликта занимается *теория игр*.

Теория игр — математическая теория конфликтных ситуаций. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, необходимо построить упрощенную схематизированную модель ситуации, которую будем называть игрой. Заметим, что понятия *игра* и *конфликт* — синонимы.

В игре могут сталкиваться интересы двух и более сторон. *Целью* каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтов и их формальным решением, что позволяет:

- смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;
- по результатам моделирования будущей игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Другими словами, теория игр дает математический *прогноз* конфликта.

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения.

Классификация игр осуществляется по целому ряду направлений [4].

- **По количеству игроков:** парные игры и игры *n* игроков. Наибольшие успехи достигнуты при изучении парных игр. Трудности решения игровых задач с увеличением количества игроков повышаются.
- **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные. Если каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то игра называется *конечной*. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной*.
- **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные, кооперативные. В *бескоалиционных* играх игроки не имеют права образовывать коалиции в отличие от *коалиционных* игр. В *кооперативной* игре коалиции определены заранее.
- **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (или антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические). В *играх с нулевой суммой* сумма выигрышей игроков в каждой партии равна нулю, цели игроков в ней прямо противоположны: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого. В *играх с ненулевой суммой* критерии для игроков различны, сумма выигрышей нулю не равна.
- **По количеству ходов**: одношаговые и многошаговые. В *одношаговых* играх каждый игрок делает только один ход, а далее идет распределение выигрышей. *Многошаговые* игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные. В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры. Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, такая игра называется *стохастической*. Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и действия игроков описываются дифференциальными уравнениями, такая игра называется *дифференциальной*.

- **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией. Если на каждом шаге игры каждому игроку известно, какие выборы сделаны игроками ранее, то это игра *с полной информацией*. Если игроку не все известно о предыдущих выборах, то речь идет об игре *с неполной информацией*.
- **По виду функций выигрыша:** матричные, биматричные, непрерывные. *Матричная* игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши первого игрока равны проигрышам второго и наоборот; задается в виде одной матрицы. *Биматричная* игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока сосредоточены в матрице игры данного игрока; данный вид игр задается двумя матрицами. *Непрерывной* считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий.

Данное учебное пособие состоит из четырех глав.

Глава 1 посвящена методам принятия решений в антагонистических конфликтах. В этой главе вводятся основные понятия теории матричных игр, рассматриваются вопросы составления модели игры, уменьшения размерности задачи путем применения отношений доминирования, излагаются способы определения равновесных ситуаций в «чистых» стратегиях, приводятся аналитические, итерационные и графические методы определения оптимальных смешанных стратегий в зависимости от размерности задачи, рассматриваются вопросы практического применения полученных результатов.

В ряде задач функция выигрыша зависит от неопределенных факторов, к которым можно отнести погодные условия, состояние рынка, курс валюты, инфляцию, психоэмоциональное состояние лица, принимающего решения, и т. д. Рассчитывая на «худший» вариант, этот неопределенный фактор, который называют «природой», отождествляют со стратегией противника, имеющего противоположные интересы. Методы принятия решений в играх с «природой», являющихся разновидностью антагонистических игр, рассматриваются в главе 2.

В главе 3 приводятся методы поиска оптимальных решений в неантагонистических конфликтных ситуациях, рассматриваются вопросы редуцирования размерности задачи в зависимости от целевого критерия.

Глава 4 посвящена многошаговым процессам принятия решений. В ней описывается структура позиционной игры, рассматриваются вопросы ее нормализации, излагаются методы принятия решений в антагонистических и неантагонистических позиционных играх с полной и неполной информацией, приводятся практические примеры решения организационно-управленческих задач с помощью позиционных игр.

В главе 5 приводятся базовые понятия теории кооперативных игр, дается математическое обоснование для выделения устойчивых коалиций в кооперативных играх на основе взаимных экономических интересов. Рассматриваются варианты распределения выигрыша между игроками коалиции. Излагаются принципы оптимальности для кооперативных игр — С-ядро, HM-решение и вектор Шепли.

В пособии приняты следующие обозначения: новые понятия выделены жирным курсивом; матрицы в общем виде приводятся в круглых скобках, а матрицы с числовыми значениями — в квадратных.

Книга рассчитана, в первую очередь, на практика, впервые знакомящегося с предметом. Доступность изложения материала делает знакомство с принципами рационального поведения в конфликтах привлекательным для широкого круга читателей.

Данное пособие написано на основе курса лекций, читаемого автором в Московском инженерно-физическом институте (НИЯУ МИФИ).

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ КОНФЛИКТАХ

1.1. Матричные игровые задачи. Составление модели игры

Наибольшее практическое значение имеют парные игры, поэтому основное внимание уделим рассмотрению этого класса игр.

Развитие игры во времени представляется состоящим из ряда последовательных «ходов». ***Ходом*** в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные. ***Личным ходом*** называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. ***Случайным ходом*** называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой — назовем ее ***природой***. Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов [1].

Задача теории игр — рекомендовать игрокам определенные «стратегии» при выборе их личных ходов.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока, в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры.

Целью теории игр является определение «оптимальной стратегии» для каждого игрока.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. При выборе этой стратегии считается, что противник делает все, чтобы помешать игроку добиться своей цели.

При постановке игровых задач должны быть определены следующие условия:

- стороны, принимающие решения;
- множество всех возможных действий (стратегий);
- выигрыши сторон для каждой ситуации.

Рассмотрим игру двух игроков, скажем А и В, каждый из которых имеет конечное число стратегий. Предположим, игрок А имеет m стратегий: $A_1, A_2, ..., A_m$, а игрок В — n стратегий: $B_1, B_2, ..., B_n$. Каждой паре стратегий (A_i, B_j) ставится в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока А за счет игрока В (если $a_{ij} > 0$) или проигрыш игрока А игроку В (если $a_{ij} < 0$), когда А применяет свою стратегию A_i, а В — стратегию B_j.

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон являются прямо противоположными, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая — в его уменьшении.

В случае единого критерия данная игра полностью может быть описана матрицей размерности $m \times n$, которая называется *матрицей игры* или *платежной матрицей* (отсюда следует и название данного класса игр — *матричные игры*).

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array}.$$

Рассмотрим пример. Пусть матрица игры имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сторона А имеет две стратегии, а сторона В — три стратегии. Если игрок А применяет свою стратегию A_2, а В — стратегию B_3, то, следовательно, игрок А выигрывает 1 у. е., а игрок В проигрывает игроку А 1 у. е. Если игрок А применяет свою стратегию A_1, а В — стратегию B_2, то, следовательно, игрок А проигрывает 6 у. е. игроку В, а игрок В выигрывает 6 у. е. у игрока А.

В данной игре один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей игроков равна нулю. Поэтому игры данного класса называют *играми с нулевой суммой*.

Ценой игры называется средний выигрыш игрока А.

Рассмотрим несколько примеров построения платежных матриц.

Пример 1.1. Пусть игроки А и В одновременно показывают от одного до трех пальцев. Выигрыш или проигрыш определяется числом показанных пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то А получает от В платеж (в у. е.), равный этой сумме, если сумма пальцев нечетная, то А платит В. Определить оптимальные стратегии поведения сторон.

Очевидно, что у каждого игрока по три стратегии: показывать один, два или три пальца. Элементы платежной матрицы в данной задаче могут быть рассчитаны по формуле

$$a_{ij} = (i + j)(-1)^{i+j},$$

и матрица размерности 3×3 примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.2. Выбор ассортимента товаров [2].

На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума (к примеру, n сортов яблок). В магазин должны быть завезены один или несколько типов данного товара. Если товар j-го типа ($j = 1, \ldots, n$) будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j у. е. Если же этот товар не будет пользоваться спросом, то магазин понесет убытки от его хранения, порчи и т. д., которые составят l_j у. е. (табл.1.1).

Таблица 1.1

Типы товара / Доход/Убыток	1	2	3	4	5
Доход от реализации p_j (у. е.)	32	32	32	32	32
Убыток при хранении l_j (у. е.)	16	8	4	4	2

Требуется выбрать типы товара, которые целесообразно завести в магазин.

В данной задаче в качестве одной из конфликтующих сторон выступает магазин (игрок A), а в качестве другой — покупательский спрос (игрок B). Каждый из игроков имеет по n стратегий. Завоз i-го товара — стратегия A_i игрока A, спрос на j-й товар — стратегия B_j игрока B.

В данном случае платежная матрица игры будет квадратной матрицей размерности $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & 32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 32 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.3. Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков Б$_1$ или Б$_2$, летящих один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность поражения бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 0.8$. На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако на каком — не известно. Цель истребителя — сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0.6$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком Б$_2$ и обстреливает его.

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность поражения бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

В распоряжении стороны А (истребитель) — 2 стратегии:

A_1 — обстреливать первый бомбардировщик;

A_2 — обстреливать второй бомбардировщик.

В распоряжении стороны В (бомбардировщики) также 2 стратегии:

B_1 — поместить бомбу на первый бомбардировщик;

B_2 — поместить бомбу на второй бомбардировщик.

Элементы платежной матрицы — вероятности поражения бомбардировщика с бомбой.

Очевидно, что если истребитель будет стрелять по бомбардировщику без бомбы, соответствующий элемент платежной матрицы будет равен нулю.

В результате платежная матрица примет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1-P_2)P_1 & 0 \\ 0 & (1-P_2)^2 P_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.128 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что цель данного раздела – сосредоточить внимание на построении платежных матриц, а методы решения матричных задач будут приведены ниже.

1.2. Сокращение размерности игровой задачи

Прежде чем приступить к решению игровой задачи, надо проанализировать платежную матрицу на предмет сокращения ее размерности. При анализе игровой матрицы сразу можно выделить стратегии, являющиеся дублирующими или заведомо невыгодными для сторон.

В игре i-я стратегия ***дублирует*** j-ю стратегию, если

$$a_{il} = a_{jl} \text{ для } \forall l \in [1, m] \text{ или } a_{li} = a_{lj} \text{ для } \forall l \in [1, n].$$

Если в матрицу игры входят дублирующие стратегии, то из них оставляется любая одна, а остальные — удаляются.

К примеру, рассмотрим игру со следующей платежной матрицей:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}.$$

Как видно из матрицы, стратегии A_3, A_5 являются дублирующими, и одна из них, скажем A_5, из матрицы $\mathbf{A}$ может быть удалена:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Определение заведомо невыгодных стратегий производится с помощью ***отношений доминирования***, которые заключаются в следующем.

Если каждой из стратегий стороны А поставить в соответствие вектор-строку матрицы $\mathbf{A}$, то стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j при выполнении следующего условия: $a_{il} \geq a_{jl}$ для $\forall l \in [1, n]$. В этом случае стратегия A_j не будет использоваться, и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.

Если каждой из стратегий стороны В поставить в соответствие вектор-столбец матрицы $\mathbf{A}$, то стратегия B_j будет доминировать над стратегией B_i при выполнении следующего условия: $a_{li} \leq a_{lj}$ для $\forall l \in [1, m]$. В этом случае стратегия B_j не будет использоваться, и соответствующий столбец из платежной матрицы удаляется.

Элементы i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ являются выигрышами стороны А при применении ею своей i-й стратегии. Если сравнить стратегию A_1 со стратегией A_3, можно заметить, что независимо от того, какую стратегию применяет сторона В, выигрыш стороны А при применении ею своей третьей стратегии всегда будет больше, чем при использовании первой стратегии. Следовательно, стратегия A_1 невыгодна по сравнению со стратегией A_3, и соответствующая строка может быть удалена из платежной матрицы. Аналогично, если сравнить стратегию A_2 со стратегией A_4, можно заметить, что A_4 невыгодна по сравнению с A_2, и соответствующая строка может быть удалена. Следовательно, мы имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Рассмотрим данную игру с позиции стороны B. Для стороны B элементы j-го столбца платежной матрицы являются проигрышами при применении ею своей стратегии B_j. Естественно, выгодной для B является та стратегия, которая дает ей меньший проигрыш независимо от образа действий стороны A. Если сравнить стратегии B_2 и B_3, то видно, что независимо от того, какую стратегию применит сторона A, проигрыш стороны B будет больше при стратегии B_3, и, следовательно, соответствующий столбец может быть удален из платежной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Таким образом, из платежной матрицы удаляются дублирующие стратегии (кроме одной), доминируемые строки и доминирующие столбцы. Порядок удаления строк и столбцов значения не имеет.

Пример 1.4. Рассмотрим применение отношений доминирования к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

1. Столбец 3 — доминирующий по отношению к столбцу 1, а столбцы 2 и 5 — доминирующие по отношению к столбцу 4.

Преобразованная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

2. Строки 3 и 4 — доминируемые по отношению к строке 1. Преобразованная матрица:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}. \end{array}$$

3. Столбец B_1 — доминирующий по отношению к B_4.

$$\begin{array}{cc} & B_4 \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}. \end{array}$$

4. Строка A_2 — доминируемая по отношению к A_1.

$$\begin{array}{cc} & B_4 \\ \mathbf{A} = & [3]\ A_1. \end{array}$$

Проверьте себя! Упростите следующие матрицы игры:

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. **Ответ:** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 6 \\ 10 & 2 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. **Ответ:** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$.

1.3. Решение игровых задач в «чистых» стратегиях. Принцип минимакса

В некоторых случаях равновесная ситуация может быть определена непосредственно. В матричных играх ситуация является равновесной, если для $\forall i \in [1, m]$ и для $\forall j \in [1, n]$ выполняется соотношение

$$a_{i\,j^*} \le a_{i^*\,j^*} \le a_{i^*\,j},$$

где i^*, j^* — равновесная ситуация.

Прежде всего, это касается случая, когда в результате применения отношений доминирования к матрице игры остается единственный элемент. Номера строки и столбца, где этот элемент находится, и определяют равновесную ситуацию или решение в «чистых» стратегиях, т. е. четко указывают, какие стратегии должны применять обе стороны. В примере, рассмотренном в разделе 1.2, стороне А целесообразно применять свою первую стратегию, а стороне В — четвертую стратегию.

Другой случай наличия решения в «чистых» стратегиях связан с существованием седловой точки.

Определение седловых точек производится по следующей схеме:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \hdashline a_1^{\max} \quad a_2^{\max} \quad \dots \quad a_n^{\max} \end{array} \begin{array}{c} a_1^{\min} \\ a_2^{\min} \\ \dots \\ a_m^{\min} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

$$\Downarrow$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

Поставим задачу: определить наилучшую из стратегий стороны А при условии, что противник (сторона В) будет действовать наихудшим для нее образом.

Элементы i-й строки матрицы **A** являются выигрышами стороны А при применении ею своей стратегии A_i. Сторона А считает, что в ответ на любую ее стратегию A_i сторона В ответит той стратегией, которая наименее выгодна для А, т. е. дает А наименьший выигрыш. Поэтому в каждой строке находим минимальный элемент:

$$a_i^{\min} = \min_j a_{ij}$$

и заносим его в добавочный столбец справа от матрицы **A**.

Выбирая какую-то стратегию A_i, мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы выиграем только $a_i^{\min}$. Естественно, сторона А должна предпочесть другим ту стратегию, при которой она получает наибольший выигрыш из набора гарантированных минимумов. Обозначим это значение через α:

$$\alpha = \max_i a_i^{\min} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α называется ***нижней ценой игры*** либо максиминным выигрышем, либо ***максимином*** [1].

Та стратегия игрока А, которая соответствует максимину α, называется ***максиминной*** стратегией. Если игрок А будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении противника гарантирован выигрыш, не меньший α. Поэтому α — нижняя цена игры.

Рассмотрим теперь игру с позиций стороны В и выберем для нее оптимальную стратегию.

Элементы j-го столбца матрицы **A** являются проигрышами стороны В при применении ею своей стратегии B_j. Сторона В считает, что в ответ на любую ее стратегию B_j сторона А ответит той стратегией, которая наименее выгодна для В, т. е. дает В наибольший проигрыш. Поэтому в каждом столбце находим максимальный элемент:

$$a_j^{\max} = \max_i a_{ij}$$

и заносим его в добавочную строку снизу от матрицы **A**.

Выбирая стратегию B_j, сторона В должна рассчитывать на то, что в результате любых действий противника (стороны А) она проиграет не больше, чем $a_j^{\max}$. Ну а далее в интересах стороны В среди прочих выбрать ту стратегию, при которой она получает наименьший проигрыш из набора ожидаемых максимумов. Обозначим это значение через β:

$$\beta = \min_j a_j^{\max} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β — ***верхняя цена игры*** либо минимаксный выигрыш, либо ***минимакс***. Соответствующая β стратегия стороны В – ее ***минимаксная*** стратегия. Если В будет придерживаться своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, то при любом поведении стороны А стороне В гарантирован проигрыш, не превышающий верхней цены игры β.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), называется ***принципом минимакса***. Он вытекает из предположения о разумности каждого игрока, стремящегося достигнуть цели, противоположной цели противника. Часто максиминную и минимаксную стратегии обозначают общим термином «минимаксные стратегии».

Нижняя цена игры α и ее верхняя цена β всегда связаны между собой неравенством

$$\alpha \le \beta.$$

Пример 1.5. Вернемся к игре «три пальца», описанной в примере 1.1.

Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, находим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\mathbf{3} \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \alpha = -3$$

$$\underbrace{\mathbf{4} \quad \mathbf{4} \quad 6}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = 4$$

Максиминная стратегия игрока А — первая. Применяя ее систематически, игрок А гарантирован, что выиграет не больше –3, т. е. проиграет не больше 3. Минимаксная стратегия игрока В — любая из первых двух: применяя их систематически, игрок В гарантирован, что проиграет не более 4.

Особое место в теории игр занимают игры, для которых нижняя цена равна верхней

$$\alpha = \beta$$

или

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Эти игры называются ***играми с седловой точкой*** [1]. В матрице такой игры существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце; такой элемент называется «седловой точкой» (по аналогии с седловой точкой на поверхности, где достигается минимум по одной координате и максимум по другой).

Общее значение нижней и верхней цены игры

$$\alpha = \beta = \nu$$

называется ***чистой ценой игры***. Соответствующие седловой точке стратегии A_i, B_j называются ***оптимальными***, они образуют ***равновесную ситуацию*** или ***решение игры***.

Решение игры обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Действительно, пока игроки А и В придерживаются своих оптимальных стратегий, выигрыш остается постоянным и равным цене игры ν. Допустим, что игрок В отклонился от своей оптимальной стратегии. Поскольку элемент является минимальным в своей строке, такое отклонение не может быть выгодным для В (это увеличит его проигрыш). Аналогично, для игрока А не может быть выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии, если В придерживается своей оптимальной.

Пример 1.6. Определить решение и цену игры для следующей задачи:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 & \mathbf{6} & 7 \\ -9 & -6 & 16 \\ 14 & 5 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 14 & \mathbf{6} & 16 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \mathbf{6} \\ -9 \\ -3 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = 6$$

В данном случае нижняя цена игры равна верхней $\alpha = \beta = 6$. Следовательно, это игра с седловой точкой, которая и определяет решение, т. е. пару оптимальных стратегий A_1 и B_2, и чистую цену игры $\nu = 6$.

Замечание. В платежной матрице может быть несколько седловых точек, но все они имеют одно и то же значение.

Проверьте себя! Определите наличие седловых точек в следующих матрицах.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Ответ: $\alpha = 1;\ \beta = 4 \Rightarrow \alpha \neq \beta \Rightarrow$ седловая точка отсутствует.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

Ответ: $\alpha = \beta = 2 \Rightarrow$ седловая точка имеется.

1.4. Смешанные стратегии

В тех случаях, когда равновесная ситуация не может быть найдена при помощи исключения доминируемых строк и доминирующих столбцов и нет седловой точки, решение в чистых стратегиях отсутствует. Тогда каждая из сторон может использовать свои стратегии с некоторой вероятностью в предположении, что игра, определяемая платежной матрицей **А**, повторяется достаточное количество раз.

Задача состоит в том, чтобы определить эти вероятности таким образом, чтобы они обеспечивали максимально гарантированный выигрыш при учете действий противоположной стороны.

Введем m-мерный вектор-столбец $\mathbf{x}$, где m — число стратегий стороны А:

$$\mathbf{x}_{[m \times 1]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Элемент этого вектора x_i определяет вероятность применения стороной А своей i-й стратегии.

Кроме того, введем n-мерный вектор-столбец $\mathbf{y}$, где n — число стратегий стороны В:

$$\mathbf{y}_{[n \times 1]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Элемент y_j вектора $\mathbf{y}$ определяет вероятность применения стороной В соответствующей стратегии.

Элементы этих векторов должны удовлетворять условиям

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии: когда все стратегии, кроме данной, имеют вероятности, равные нулю, а данная — единице.

В условиях смешанных стратегий [5] каждая обычная ситуация (в чистых стратегиях) $\{A_i, B_j\}$ является случайным событием и ввиду независимости наборов вероятностей $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ реализуется с вероятностью $x_i y_j$. В ситуации $\{A_i, B_j\}$ игрок А получает выигрыш a_{ij}. Таким образом, математическое ожидание выигрыша игрока А в условиях смешанных стратегий будет определяться следующим образом:

$$h_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Это число принимается за средний выигрыш игрока А при смешанных стратегиях $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ называются ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков А и В соответственно, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j . \qquad (1.4.1)$$

Решением игры называется пара оптимальных стратегий $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей оптимальной.

Проанализируем неравенства (1.4.1).

Левое неравенство означает: отклонение игрока А от оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ при условии, что игрок В придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{y}^*$, приводит к тому, что выигрыш отклонившегося игрока А может только уменьшиться.

Правое неравенство означает: отклонение игрока В от оптимальной стратегии $\mathbf{y}^*$ при условии, что игрок А придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$, приводит к тому, что выигрыш игрока А может только возрасти, а значит, возрастет и проигрыш игрока В.

Выигрыш, соответствующий решению, называется ***ценой игры***; мы будем обозначать ее ν (как и чистую цену):

$$\nu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* .$$

В векторно-матричной форме последнее выражение будет выглядеть следующим образом:

$$\nu = \mathbf{x}^{*\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}^* ,$$

где $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — векторы оптимальных стратегий.

Цена игры всегда лежит между нижней ценой игры и верхней ценой игры:

$$\alpha \le \nu \le \beta.$$

Действительно, α есть минимальный гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок А, применяя только свои чистые стратегии. Применяя смешанные стратегии, игрок А во всяком случае не уменьшит свой выигрыш, т. е. $\nu \ge \alpha$. Для игрока В аналогичные рассуждения приведут к выводу, что $\nu \le \beta$. Поэтому в общем случае $\alpha \le \nu \le \beta$.

Если $\nu \geq 0$, то игра выгодна игроку A; если $\nu \leq 0$ — то игроку B; при $\nu = 0$ игра «честная» или «справедливая», т. е. одинаково выгодная для обоих участников.

Сформулируем **основную теорему теории игр**.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Активными стратегиями игрока называются те стратегии, которые входят в его оптимальную смешанную стратегию с отличными от нуля вероятностями.

Для решения игровых задач существенное значение имеет **теорема об активных стратегиях** [1].

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν***, независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.***

Смысл этой теоремы в том, что если один из игроков начнет последовательно придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии, то противостоящий ему игрок уже не сможет изменить исход игры.

Эта теорема имеет большое **практическое значение**: она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

1.5. Методы решения матричных игр 2×2

1.5.1. Аналитический метод

Наиболее простым случаем конечной игры является игра 2×2, когда у каждого игрока по две стратегии:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}.$$

Предположим, что у платежной матрицы **A** нет седловой точки, следовательно, решение должно быть в смешанных стратегиях. Определим это решение, т. е. найдем пару оптимальных смешанных стратегий: $\mathbf{x}^{*T} = (x_1, x_2)$; $\mathbf{y}^{*T} = (y_1, y_2)$ и цену игры ν [1].

Сначала определим оптимальную смешанную стратегию игрока A: $\mathbf{x}^{*T} = (x_1, x_2)$.

Согласно теореме об активных стратегиях, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, независимо от образа действий противника, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В игре 2×2 обе стратегии противника активные (в противном случае игра имела бы седловую точку). Значит, если игрок А придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$, его противник может, не меняя выигрыша, применить любую из своих чистых стратегий.

Чтобы составить систему уравнений, вспомним, что цена игры — это математическое ожидание выигрыша при оптимальных стратегиях. Будем искать ее как математическое ожидание дискретной случайной величины — выигрыша игрока А. Пусть игрок В применяет свою стратегию B_1, а игрок А — смешанную стратегию $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, x_2)$. С вероятностью x_1 выигрыш игрока А составит a_{11}, а с вероятностью x_2 выигрыш будет a_{21}. Цену игры (или средний выигрыш, соответствующий решению) получим, умножая значение выигрыша на вероятность того, что этот выигрыш будет иметь место, и складывая результаты:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = \nu.$$

Аналогично составляется уравнение для стратегии B_2. Следовательно, имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = \nu, \end{cases}$$

из которой с учетом условия нормировки $x_1 + x_2 = 1$ получим:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ x_2 = 1 - x_1 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

Аналогично находится оптимальная смешанная стратегия игрока В.

Если противник (игрок В) придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{y}^*$, то игрок А может, не меняя выигрыша, применить любую из своих чистых стратегий, следовательно, имеем:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = \nu, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = \nu, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ y_2 = 1 - y_1. \end{cases}$$

Пример 1.7. Найти решение игры, определяемой матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Данная игра седловой точки не имеет: $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Поэтому ищем решение в смешанных стратегиях:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2-5}{1+2-3-5} = \dfrac{3}{5}, \\ x_2 = 1 - x_1 = \dfrac{2}{5}. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{2-3}{1+2-3-5} = \dfrac{1}{5}, \\ y_2 = 1 - y_1 = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\nu = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 5}{1+2-3-5} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{4}{5} \end{bmatrix}$; $\nu = \dfrac{13}{5}$.

1.5.2. Метод, основанный на понятии равновесия по Нэшу

Определение. ***Равновесие по Нэшу есть точка*** $\mathbf{m}^H = (m_1^H, \ldots, m_n^H)$ ***такая, что для всех*** $i = 1, \ldots, n$ ***достигается оптимум***

$$h_i(\mathbf{m}^H) = \max_{m_i} h_i(\mathbf{m}).$$

Точка $\mathbf{m}^H$ определяется из решения системы уравнений

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{m})}{\partial m_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим игру 2×2, не имеющую седловой точки:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Пусть игрок А использует стратегию A_1 с вероятностью x, а стратегию A_2 — с вероятностью $1 - x$.

Пусть игрок B использует стратегию B_1 с вероятностью y, а стратегию B_2 — с вероятностью $1 - y$.

$$\begin{array}{ccc} & y \quad 1-y & \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} \end{array}.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока A будет определяться следующим образом:

$$h_a(x, y) = (x \quad 1-x)\,\mathbf{A}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}. \tag{1.5.1}$$

Заметим, что $h_b(x, y) = -h_a(x, y)$.

Точка Нэша (x^H, y^H) определяется из уравнений [6]

$$\frac{\partial h_a(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_b(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Зная точку Нэша (x^H, y^H), можно легко определить оптимальные стратегии $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x^H \quad 1 - x^H)$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y^H \quad 1 - y^H)$ и цену игры ν.

Пример 1.8. Найти решение игры 2×2 с использованием понятия равновесия по Нэшу:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Определим по формуле (1.5.1) математическое ожидание выигрыша игрока A:

$$h_a(x, y) = (x \quad 1-x)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= xy + 5(1-x)y + 3(1-y)x + 2(1-x)(1-y) =$$

$$= -5xy + 3y + x + 2.$$

Определим точку Нэша:

$$\frac{\partial h_a(x, y)}{\partial x} = -5y + 1 = 0; \quad y^H = \frac{1}{5};$$

$$\frac{\partial h_b(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial h_a(x, y)}{\partial y} = 5x - 3 = 0; \quad x^H = \frac{3}{5},$$

(x^H, y^H) — координаты точки равновесия по Нэшу.

Таким образом, оптимальные стратегии в данной игре следующие:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x^H \quad 1 - x^H) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y^H \quad 1 - y^H) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Цена игры в точке Нэша:

$$\nu = \mathbf{x}^{*\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; $\nu = \frac{13}{5}$.

Как можно заметить, решение совпадает с результатами, полученными аналитическим методом.

1.5.3. Графическая интерпретация игры 2×2

Решению игры 2×2 можно дать удобную геометрическую интерпретацию [1]. Пусть имеется игра 2×2 с платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix}.$$

Решение в чистых стратегиях отсутствует. Предположим, игрок А выбрал смешанную стратегию (x_1, x_2), а игрок В — свою чистую стратегию B_i. В этом случае средний выигрыш игрока А определяется по формуле математического ожидания

$$\nu_{B_i} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 = a_{1i} + (a_{2i} - a_{1i})x_2, \quad i = 1, 2, \tag{1.5.2}$$

поскольку $x_1 + x_2 = 1$. Каждому значению i, согласно ν_{B_i}, соответствует прямая линия в прямоугольной системе координат. Изобразим эти прямые на плоскости.

В системе координат XOY на оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2 единичной длины. Левый конец отрезка (точка с абсциссой $x = 0$) соответствует стратегии A_1, а правый конец отрезка ($x = 1$) — стратегии A_2. Все промежуточные точки S_A — смешанные стратегии игрока А, причем вероятность x_1 стратегии A_1 находится как расстояние от точки S_A до правого конца отрезка (точки A_2), а вероятность x_2 стратегии A_2 — как расстояние до левого конца (точки A_1). Через точки A_1 и A_2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I и ось II. На оси I будем откладывать выигрыш при стратегии A_1, а на оси II — выигрыш при стратегии A_2.

Пусть противник применяет стратегию B_1; тогда

$$\nu = a_{11} + (a_{21} - a_{11})x_2.$$

При A_1 выигрыш равен a_{11}, а при A_2 выигрыш равен a_{21}. Отложим эти точки соответственно на осях I и II и обозначим их B_1, что соответствует одноименной стратегии игрока В. Проведем через эти точки прямую B_1B_1 и будем условно называть ее «стратегией B_1». Очевидно, средний выигрыш игрока А, соответствующий смешанной стратегии $S_A = (x_1, x_2)$, определяется по формуле математического ожидания (1.5.2) и равен ординате точки M, которая лежит на отрезке B_1B_1 и соответствует точке S_A на оси абсцисс, делящей отрезок A_1A_2 в соотношении $x_2 : x_1$.

Аналогичным способом строим стратегию B_2. Геометрическая иллюстрация игры 2×2 представлена на рис. 1.1.

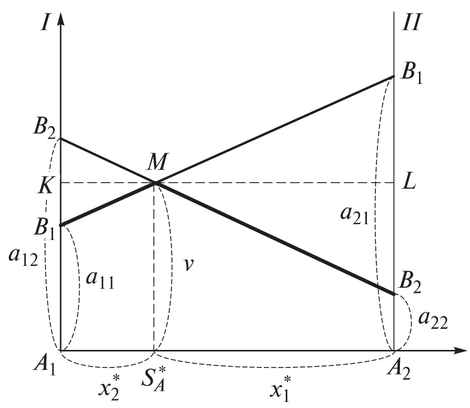


Рис. 1.1

Необходимо найти оптимальную стратегию S_A^*, то есть такую стратегию, при которой, согласно принципу максимина, минимальный выигрыш игрока А (при наихудшем для него поведении В) обращался бы в максимум. Поскольку цель игрока В — минимизировать выигрыш игрока А за счет выбора своих стратегий, построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1, B_2 (ломаная B_1MB_2 отмечена на рисунке жирной линией). На этой границе будет лежать минимальный выигрыш игрока А при любой его смешанной стратегии. Поскольку цель игрока А — максимизировать свой выигрыш за счет выбора соотношения $x_2 : x_1$, ищем верхнюю точку нижней границы выигрыша. Точка M, в которой этот выигрыш достигает своего максимального значения, определяет решение и цену игры. Ордината точки M — цена игры ν, ее абсцисса равна x_2^*, а расстояние до правого конца участка — x_1^*, т. е. расстояния от точки S_A^* до концов отрезка равны вероятностям x_2^* и x_1^* стратегий A_2 и A_1 в оптимальной смешанной стратегии игрока А.

В рассмотренном примере решение игры определялось точкой пересечения стратегий B_1, B_2, но так бывает не всегда; решение определяется именно верхней точкой нижней границы, а эта точка не всегда совпадает с точкой пересечения стратегий.

Рассмотрим два примера. На рис. 1.2 представлен случай, когда оптимальной стратегией игрока А является чистая стратегия A_2, т. е. $S_A^* = [0 \quad 1]$. Здесь стратегия A_2 явно выгоднее стратегии A_1, независимо от поведения противника.

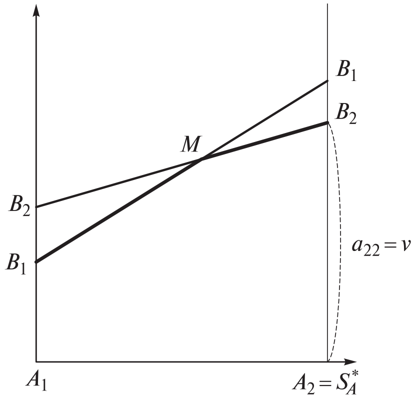


Рис. 1.2

На рис. 1.3 представлен случай, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника. Для этого случая $S_A^* = [1 \quad 0]$.

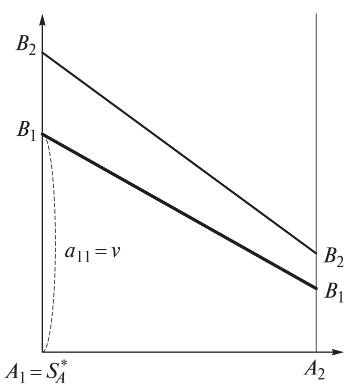


Рис. 1.3

Рассмотрим теперь, как определяется оптимальная смешанная стратегия $S_B^* = (y_1^*, y_2^*)$ игрока B. Через верхнюю точку нижней границы (точка M на рис. 1.1) проведем прямую, параллельную оси абсцисс (прямая KL). Доля y_1 стратегии B_1 в оптимальной смешанной стратегии S_B^* равна отношению длины отрезка KB_2 к сумме длин отрезков KB_2 и KB_1 на оси I:

$$y_1^* = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1}$$

или, что то же самое:

$$y_1^* = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}$$

на оси II.

$$y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{KB_1}{KB_2 + KB_1} = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

Оптимальную стратегию $S_B^* = (y_1^*, y_2^*)$ можно найти также, если поменять местами игроков A и B, а вместо максимума нижней границы выигрыша рассматривать, согласно принципу минимакса, минимум верхней границы.

Следует заметить, что графический метод дает приближенное решение. В случае если требуется точное решение, целесообразно воспользоваться аналитическим методом или методом, основанным на понятии равновесия по Нэшу.

Пример 1.9. Найти решение следующей игровой задачи графическим способом:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Графическая интерпретация данной задачи представлена на рис. 1.4.

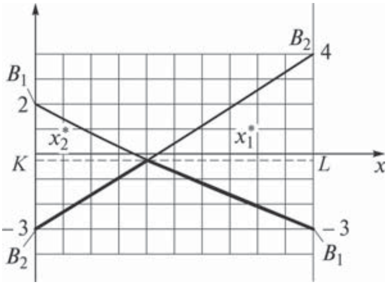


Рис. 1.4

$$\nu \approx -0.1;$$
$$x_2^* \approx 0.42; \quad x_1^* = 1 - x_2^* \approx 0.58;$$
$$y_1^* = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1} = \frac{4.1}{7} \approx 0.58; \quad y_2^* = 1 - y_1^* \approx 0.42.$$

Как видно, полученные результаты практически совпадают с результатами, полученными для той же задачи аналитическим методом и методом, основанным на понятии равновесия по Нэшу.

Ответ: $\nu \approx -0.1$; $S_A^* = [0.58 \quad 0.42]$; $S_B^* = [0.58 \quad 0.42]$.

1.6. Игры 2×*n* и *m*×2

Для решения матричных игровых задач, в которых число стратегий хотя бы одного из игроков равно двум, эффективным является графический способ, аналогичный способу решения задач 2×2 [1, 5].

1.6.1. Игра 2×*n*

Рассмотрим сначала игру 2×*n*. Пусть A — платежная матрица игры 2×*n*.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array}$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

У игрока A — 2 стратегии, у игрока B — *n* стратегий. Дадим задаче геометрическую интерпретацию: изобразим *n* стратегий игрока B в виде *n* прямых, подобно тому как мы это делали в игре 2×2 (рис. 1.5).

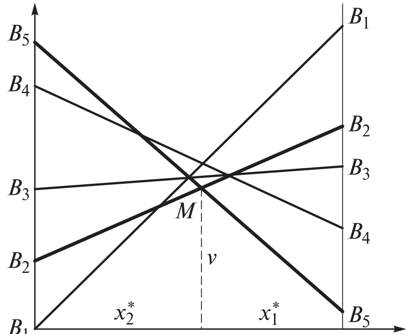


Рис. 1.5

Решение задачи находится согласно следующему алгоритму.

1. Определяем нижнюю границу выигрыша.
2. Находим верхнюю точку нижней границы — точку M. Ордината этой точки и будет ценой игры ν, абсцисса точки M будет равна вероятности x_2^* стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока А — $S_A^* = (x_1^*, x_2^*)$, $x_1^* = 1 - x_2^*$.
3. Определяем, в результате пересечения каких стратегий была получена верхняя точка нижней границы, — эти стратегии являются активными, остальные стратегии — пассивные (т. е. их вероятности равны нулю). На рис. 1.5 активными являются стратегии B_2 и B_5 (выделены).
4. Далее решаем задачу 2×2 (со стратегиями B_2 и B_5) по ранее предложенной схеме, забыв про пассивные стратегии до тех пор, пока не записываем ответ.

Ответ для примера, представленного на рис.1.5, записывается в виде:

$$S_A^* = (x_1^* \;\; x_2^*),\; S_B^* = (0 \;\; y_2^* \;\; 0 \;\; 0 \;\; y_5^*).$$

Остановимся поподробнее на некоторых крайних случаях, которые могут иметь место при определении оптимальных стратегий.

а) *Верхняя точка нижней границы выигрыша имеет координаты* (0, ν) (рис. 1.6, *а*).

В этом случае оптимальной стратегией игрока А является чистая стратегия A_1, поскольку $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$. Игроку В выгодно применять чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку (0, ν) и имеющей наибольший отрицательный наклон. Цена игры — ν.

б) *Верхняя точка нижней границы выигрыша имеет координаты* (1, ν) (рис. 1.6, *б*).

В этом случае оптимальной стратегией игрока А является чистая стратегия A_2, поскольку $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$. Игроку В выгодно применять чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку (1, ν) и имеющей наименьший положительный наклон. Цена игры ν.

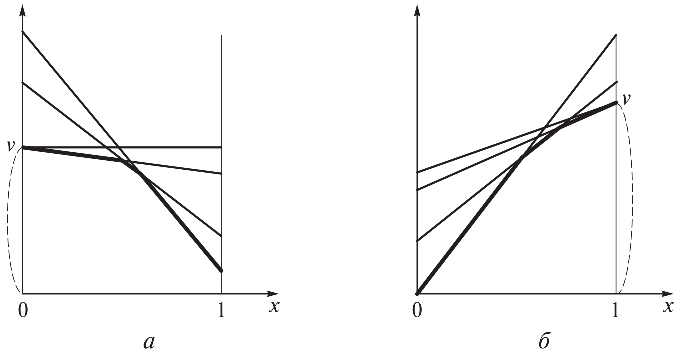
в) *Нижняя граница выигрыша имеет горизонтальный участок* (рис. 1.6, *в*).

В этом случае максимум нижней границы будет не в одной точке, а на участке MM', ордината которого равна цене игры ν. Решение для игрока А при этом будет неоднозначным: он может применять любую из своих смешанных стратегий, соответствующих точкам оси абсцисс от N до N'. Таким образом, у игрока А существует несчетное множество оптимальных стратегий

$$S_A^* = (x_1^* \;\; x_2^*), \text{ где } x_2^* \in [x_2', x_2''],\;\; x_1^* = 1 - x_2^*.$$

Решение для игрока B определяем с помощью граничных точек участка MM' по тем же правилам, как и в играх 2×2. Так, в точке M' пересекаются стратегии B_1 и B_2. Следовательно, учитывая, что точки L и B_2 совпадают, т. е. отрезок LB_2 равен нулю, имеем:

$$y_1^* = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1} = 0, \quad y_2^* = 1 - y_1^* = 1.$$



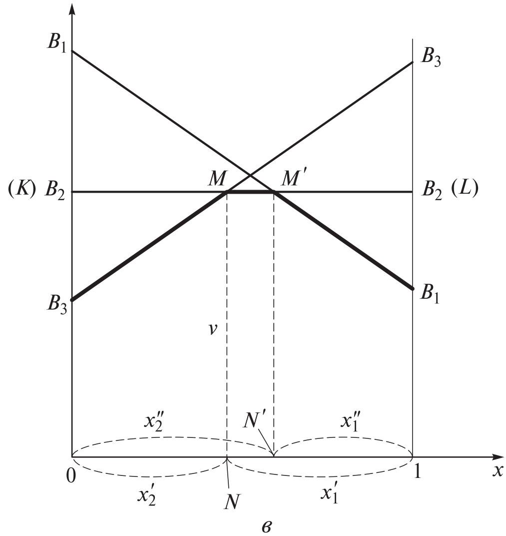


Рис. 1.6

В точке M пересекаются стратегии B_3 и B_2. Следовательно, учитывая, что отрезок LB_2 равен нулю, имеем:

$$y_3^* = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_3} = 0, \quad y_2^* = 1 - y_3^* = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что стратегия игрока B, которой соответствует горизонтальный участок, является его чистой оптимальной стратегией.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.10. Определить графическим способом решение игровой задачи 2×n:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Графическая интерпретация данной задачи представлена на рис. 1.7.

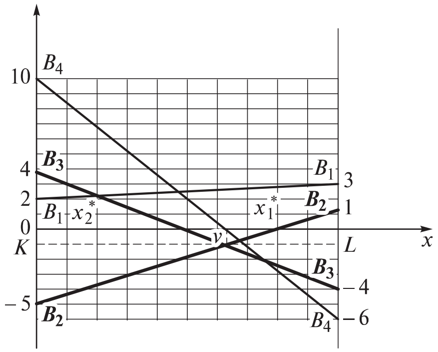


Рис. 1.7

$\nu \approx -1.2$;

$x_2^* \approx 0.65; \quad x_1^* = 1 - x_2^* = 0.35;$

$$y_2^* = \frac{LB_3}{LB_3 + LB_2} = \frac{2.8}{5} = 0.56; \quad y_3^* = 1 - y_2^* = 0.44.$$

Ответ: $\nu \approx -1.2$; $S_A^* = [0.35 \quad 0.65]$; $S_B^* = [0 \quad 0.56 \quad 0.44 \quad 0]$.

Пример 1.11. Найти решение графическим способом игровой задачи $2\times n$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.7 & 1\\ 1 & 0.7 & 0.5\end{bmatrix}.$$

Решение. Графическая интерпретация данной задачи приведена на рис. 1.8.

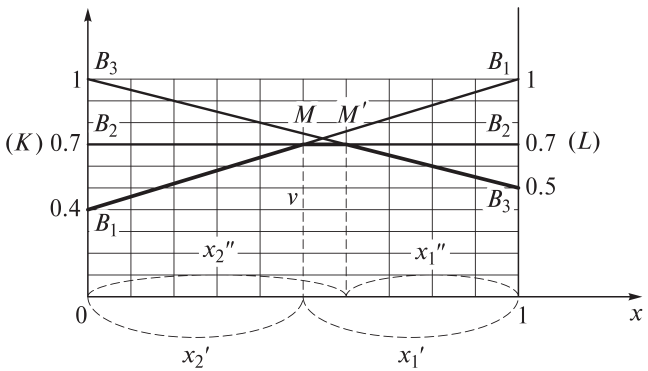


Рис. 1.8

Цена игры $\nu = 0.7$.

При определении оптимальной стратегии игрока А находим интервал значений x_2^* и исходя из этого определяем x_1^*:

$$0.5 \le x_2^* \le 0.6, \quad x_1^* = 1 - x_2^*.$$

При наличии горизонтального участка оптимальной чистой стратегией игрока В будет стратегия, соответствующая этому горизонтальному участку (в данном случае B_2).

$$y_2^* = 1,\ y_1^* = y_3^* = 0.$$

Ответ: $\nu = 0.7$; $S_A^* = (x_1^* \quad x_2^*)$, $x_2^* \in [0.5, 0.6]$, $x_1^* = 1 - x_2^*$;

$S_B^* = [0 \quad 1 \quad 0]$.

1.6.2. Игра $m\times 2$

Пусть теперь в матричной игре игрок В имеет две стратегии, а игрок А — m стратегий. Платежная матрица такой игры выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array}.$$

Анализ этой игры во многом напоминает рассуждения, описанные для игры 2×n.

Изобразим m стратегий игрока А в виде m прямых, подобно тому как мы это делали в игре 2×n для игрока В (рис.1.9).

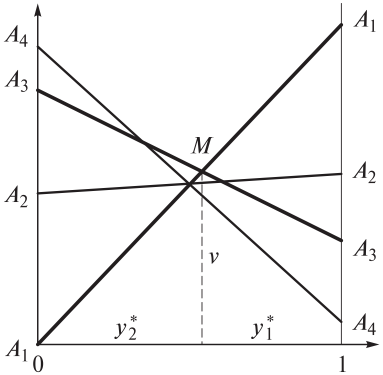


Рис. 1.9

Далее находим решение задачи согласно следующему алгоритму.

1. Определяем верхнюю границу выигрыша.
2. Находим нижнюю точку верхней границы — точку M. Ордината этой точки и будет ценой игры ν, абсцисса точки M будет равна вероятности y_2^* стратегии B_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока В — $S_B^* = (y_1^*, y_2^*)$; $y_1^* = 1 - y_2^*$.
3. Определяем, в результате пересечения каких стратегий была получена нижняя точка верхней границы — эти стратегии являются активными, остальные стратегии — пассивные (т. е. их вероятности равны нулю). На рис. 1.9 активными являются стратегии A_1 и A_3 (выделены).
4. Далее решаем задачу 2×2 (с активными стратегиями A_1 и A_3), забыв про пассивные стратегии до тех пор, пока не записываем ответ.

Ответ для примера, представленного на рис. 1.9, записывается в следующем виде:

$$S_A^* = (x_1^* \;\; 0 \;\; x_3^* \;\; 0 \;\; 0), \;\; S_B^* = (y_1^* \;\; y_2^*).$$

В крайних случаях определение оптимальной стратегии игрока А производится аналогично тому, как в игре $2\times n$ определяется оптимальная стратегия игрока В.

Рассмотрим пример.

Пример 1.12. Решить графическим способом игровую задачу $m\times 2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Графическая интерпретация данной задачи приведена на рис. 1.10.

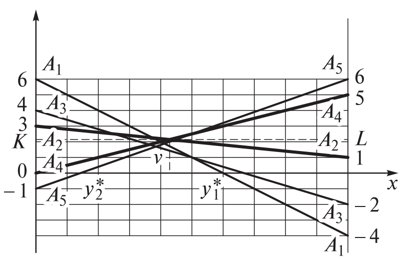


Рис. 1.10

$$\nu \approx 2.1; \quad y_2^* = 0.42; \quad y_1^* = 1 - y_2^* = 0.58;$$

$$x_2^* = \frac{A_4L}{A_4L + A_2L} = \frac{2.9}{2.9 + 1.1} \approx 0.73; \quad x_4^* = 1 - x_2^* \approx 0.27.$$

Ответ:

$$\nu = 2.1; \;\; S_A^* = [0 \;\; 0.73 \;\; 0 \;\; 0.27 \;\; 0]; \;\; S_B^* = [0.58 \;\; 0.42].$$

Проверьте себя! Решите следующие задачи графическим способом.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0 \;\; 0.44 \;\; 0.56 \;\; 0]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.45 \;\; 0.55]$; $\nu = -0.75$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0.47 \;\; 0.53]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.47 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0.53]$; $\nu = -1.26$.

1.7. Методы решения матричных игр $n \times n$

1.7.1. Решение игр размерности $n \times n$ методом Лагранжа

Рассмотрим, каким образом можно определить оптимальные стратегии в игровых задачах размерности $n \times n$ методом Лагранжа.

Пусть игра, не имеющая седловой точки и заведомо невыгодных стратегий, описывается квадратной матрицей A размерности $n \times n$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array}.$$

Игрок A использует свои стратегии с вероятностями $x_1, \ldots, x_n$, а игрок B — с вероятностями $y_1, \ldots, y_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$

Математическое ожидание выигрыша игрока A равно

$$\nu = \mathbf{x}^{*\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}^{*}, \qquad (1.7.1)$$

где $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$ — оптимальные стратегии игроков A и B соответственно.

Следовательно, выигрыш игрока B будет равен $(-\nu)$.

Используем элементы вариационного исчисления и решим задачу каждого из игроков методом Лагранжа [6], составив вспомогательные функции

$$h_a(x^*, y^*) = \nu + \lambda_a \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\Big),$$

$$h_b(x^*, y^*) = -\nu + \lambda_b \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j - 1\Big),$$

где λ_a, λ_b — неопределенные множители Лагранжа.

Системы уравнений для определения точки Нэша имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial \lambda_b}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial x_j}=0,\ j=1,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial \lambda_a}=0. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

Если подставить значения оптимальных стратегий, полученных из соотношений (1.7.2), в выражение для цены игры, получим значение платежа, который игрок А должен получить от игрока В.

Пример 1.13. Найти с помощью метода Лагранжа решение игры 3×3:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}.$$

Решение. Определим по формуле (1.7.1) математическое ожидание выигрыша игрока А:

$$\nu=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=$$

$$=y_1(x_1+2x_2+2x_3)+y_2(3x_1+2x_2+x_3)+y_3(4x_1+x_2+6x_3).$$

Составим вспомогательные функции $h_a(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ и $h_b(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$.

$$h_a(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)=\nu+\lambda_a(x_1+x_2+x_3-1);$$

$$h_b(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)=-\nu+\lambda_b(y_1+y_2+y_3-1).$$

Запишем системы уравнений для определения точки Нэша:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial x_1}=y_1+3y_2+4y_3+\lambda_a=0; \\ \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial x_2}=2y_1+2y_2+y_3+\lambda_a=0; \\ \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial x_3}=2y_1+y_2+6y_3+\lambda_a=0; \\ \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)}{\partial \lambda_b}=y_1+y_2+y_3-1=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)}{\partial y_1} = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + \lambda_b = 0; \\ \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)}{\partial y_2} = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda_b = 0; \\ \dfrac{\partial h_b(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)}{\partial y_3} = -4x_1 - x_2 - 6x_3 + \lambda_b = 0; \\ \dfrac{\partial h_a(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)}{\partial \lambda_a} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

В каждой из систем по 4 уравнения и 4 неизвестных:

$$y_1, y_2, y_3, \lambda_a \quad \text{и} \quad x_1, x_2, x_3, \lambda_b.$$

Решаем первую систему методом алгебраического сложения. Если вычесть из второго уравнения первое, а затем из второго третье, то получим:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 3y_3 = 0; & 2^{\underline{\text{ое}}} \text{ минус } 1^{\underline{\text{ое}}}; \\ y_2 - 5y_3 = 0; & 2^{\underline{\text{ое}}} \text{ минус } 3^{\underline{\text{е}}}; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Решаем данную систему и получаем вероятности применения стратегий игрока В:

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{14} & \dfrac{5}{14} & \dfrac{1}{14} \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока А из второй системы. Если вычесть из первого уравнения второе, а затем из второго третье, то получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0; & 1^{\underline{\text{ое}}} \text{ минус } 2^{\underline{\text{ое}}}; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; & 2^{\underline{\text{ое}}} \text{ минус } 3^{\underline{\text{е}}}; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В результате решения данной системы получаем вероятности применения стратегий игрока А:

$$x_1 = \frac{1}{14}; \quad x_2 = \frac{11}{14}; \quad x_3 = \frac{2}{14}.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока А следующая:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{14} & \dfrac{11}{14} & \dfrac{2}{14} \end{bmatrix}.$$

Подставив данные стратегии в выражение для ν, получим значение цены игры

$$\nu = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{y}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \frac{27}{14};$$

Ответ. $\mathbf{x}^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{8}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$, $\nu = \frac{27}{14}$.

1.7.2. Решение игр размерности $n\times n$ методом Крамера

Пусть матрица игры, не имеющая седловой точки и заведомо невыгодных стратегий, имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array}. \end{array}$$

Требуется определить оптимальные стратегии игроков

$$\mathbf{x}^{*T} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\mathbf{y}^{*T} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

и цену игры ν.

Сначала определим оптимальную стратегию $\mathbf{x}^*$ игрока A в предположении, что A применяет свою оптимальную смешанную стратегию, а B — свои чистые стратегии.

Согласно **теореме об активных стратегиях**, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры , независимо от образа действий противника, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. Значит, если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$, его противник может, не меняя выигрыша, применить любую из своих чистых стратегий.

При составлении системы уравнений необходимо вспомнить, что цена игры — это математическое ожидание выигрыша игрока A. Будем искать ее как математическое ожидание дискретной случайной величины — выигрыша игрока A, аналогично тому, как это было сделано в п. 1.5.1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = \nu; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = \nu; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \nu; \end{cases} \tag{1.7.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ — условие нормировки.}$$

Далее для нахождения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ применяем метод Крамера, учитывая, что общий для всех элементов столбца множитель можно выносить за знак определителя:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \nu & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ \nu & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ \nu & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu\begin{vmatrix} 1 & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ 1 & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ 1 & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta a} = \dfrac{\nu\Delta a_1}{\Delta a}; \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \nu & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & \nu & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & \nu & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & 1 & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & 1 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta a} = \dfrac{\nu\Delta a_2}{\Delta a}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & \nu \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & \nu \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & \nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 1 \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 1 \end{vmatrix}}{\Delta a} = \dfrac{\nu\Delta a_n}{\Delta a}. \end{cases}$$

Применив соотношение нормировки, получаем:

$$\frac{\nu(\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n)}{\Delta a} = 1 .$$

Откуда

$$\nu = \frac{\Delta a}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n} . \qquad (1.7.4)$$

Подставляем выражение для цены игры ν в формулы для расчета x_1, x_2 и x_n. В результате получаем

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta a_1}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \\ x_2 = \dfrac{\Delta a_2}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta a_n}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}. \end{cases} \qquad (1.7.5)$$

Таким образом, определена оптимальная стратегия игрока А — $\mathbf{x}^{*T} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Аналогично определяем оптимальную стратегию $\mathbf{y}^{*T}$ игрока В, считая, что В применяет оптимальную смешанную стратегию, а А — свои чистые стратегии.

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = \nu; \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n = \nu; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n = \nu; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \text{ — условие нормировки.}$$

Откуда находим по правилу Крамера $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

$$
\begin{cases}
y_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \nu & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \nu & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \nu & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta\tilde{a}} = \dfrac{\nu\Delta\tilde{a}_1}{\Delta\tilde{a}}; \\
y_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \nu & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \nu & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & \nu & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta\tilde{a}} = \dfrac{\nu\Delta\tilde{a}_2}{\Delta\tilde{a}}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \nu \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \nu \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \dfrac{\nu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 1 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}}{\Delta\tilde{a}} = \dfrac{\nu\Delta\tilde{a}_n}{\Delta\tilde{a}}.
\end{cases}
$$

Используя соотношение нормировки $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$, получаем

$$
\nu = \frac{\Delta\tilde{a}}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \dots + \Delta\tilde{a}_n}. \tag{1.7.6}
$$

Подставляем выражение (1.7.6) в формулы для расчета y_1, y_2 и y_n, в результате получаем вероятности применения стратегий игрока B:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\Delta\tilde{a}_1}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \ldots + \Delta\tilde{a}_n}; \\ y_2 = \dfrac{\Delta\tilde{a}_2}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \ldots + \Delta\tilde{a}_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \dfrac{\Delta\tilde{a}_n}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \ldots + \Delta\tilde{a}_n}. \end{cases} \qquad (1.7.7)$$

Таким образом, цена игры рассчитывается по формулам (1.7.4) или (1.7.6), а оптимальные стратегии игроков A и B — с помощью соотношений (1.7.5) и (1.7.7) соответственно.

Замечание. Поскольку данный метод опирается на теорему об активных стратегиях, перед началом решения задачи необходимо убедиться в том, что все стратегии являются активными, т.е. отсутствуют седловая точка и заведомо невыгодные стратегии.

Рассмотрим пример.

Пример 1.14. Определить оптимальные стратегии сторон $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и цену игры ν для игровой задачи

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}.$$

Решение. Цену игры ν и оптимальную стратегию $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3)$ игрока A определяем с помощью выражений (1.7.4) и (1.7.5).

Для этого рассчитаем определители:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -27;$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta a_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно,

$$\nu = \frac{\Delta a}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3} = \frac{-27}{(-1)+(-11)+(-2)} = \frac{27}{14};$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta a_1}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3} = \dfrac{-1}{(-1)+(-11)+(-2)} = \dfrac{1}{14}; \\ x_2 = \dfrac{\Delta a_2}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3} = \dfrac{-11}{(-1)+(-11)+(-2)} = \dfrac{11}{14}; \\ x_3 = \dfrac{\Delta a_3}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3} = \dfrac{-2}{(-1)+(-11)+(-2)} = \dfrac{2}{14}. \end{cases}$$

Оптимальную стратегию $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, y_2, y_3)$ игрока B определяем с помощью выражений (1.7.7). Для начала рассчитаем определители:

$$\Delta \tilde{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta \tilde{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\Delta \tilde{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

С помощью определителей рассчитываем вероятности применения стратегий игрока B:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\Delta \tilde{a}_1}{\Delta \tilde{a}_1 + \Delta \tilde{a}_2 + \Delta \tilde{a}_3} = \dfrac{-8}{(-8)+(-5)+(-1)} = \dfrac{8}{14}; \\ y_2 = \dfrac{\Delta \tilde{a}_2}{\Delta \tilde{a}_1 + \Delta \tilde{a}_2 + \Delta \tilde{a}_3} = \dfrac{-5}{(-8)+(-5)+(-1)} = \dfrac{5}{14}; \\ y_3 = \dfrac{\Delta \tilde{a}_3}{\Delta \tilde{a}_1 + \Delta \tilde{a}_2 + \Delta \tilde{a}_3} = \dfrac{-1}{(-8)+(-5)+(-1)} = \dfrac{1}{14}. \end{cases}$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{8}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$; $\nu = \frac{27}{14}$.

1.7.3. Метод обратной матрицы

Данный метод позволяет находить решение игровых задач размерности $n \times n$, содержащих только активные стратегии. Поэтому перед началом решения необходимо убедиться в отсутствии седловой точки и исключить заведомо невыгодные стратегии. Модель игры в данном случае будет идентична модели, рассмотренной в п. 1.7.2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array}. \end{array}$$

Определим оптимальные стратегии игроков

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

и цену игры ν.

Для определения оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ игрока А составим систему уравнений в предположении, что А применяет свою оптимальную смешанную стратегию, а В — свои чистые стратегии, аналогично тому, как это было сделано в п. 1.7.2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = \nu; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n = \nu; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \nu; \end{cases} \quad (1.7.8)$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ — условие нормировки.

Запишем систему (1.7.8) в векторно-матричной форме [7]:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A} = \nu \cdot (\mathbf{1})_{1\times n}, \quad (1.7.9)$$

где $(\mathbf{1})_{1\times n}$ — вектор размерности $1\times n$, состоящий из одних единиц.

Умножим обе части равенства (1.7.9) справа на $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \nu \cdot (\mathbf{1})_{1\times n}\mathbf{A}^{-1}.$$

Откуда следует

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \nu \cdot (\mathbf{1})_{1\times n}\mathbf{A}^{-1}.$$

Рассмотрим новый вектор

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*\mathrm{T}} = \frac{\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}}{\nu} = (\mathbf{1})_{1\times n}\mathbf{A}^{-1}.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}. \qquad (1.7.10)$$

С помощью соотношения (1.7.10) определяем цену игры :

$$\nu = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i} \qquad (1.7.11)$$

и вероятности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ применения стратегий стороной А:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \nu\,\tilde{\mathbf{x}}^{*\mathrm{T}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^{*\mathrm{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i}. \qquad (1.7.12)$$

Далее определим оптимальную стратегию $\mathbf{y}^*$ игрока В. Для этого составим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = \nu; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = \nu; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = \nu; \end{cases} \qquad (1.7.13)$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$ — условие нормировки.

Запишем систему (1.7.13) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \nu \cdot (\mathbf{1})_{n\times 1}, \qquad (1.7.14)$$

где $(\mathbf{1})_{n\times 1}$ — вектор размерности $n\times 1$, состоящий из одних единиц.

Умножим обе части уравнения (1.7.14) слева на $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \nu \cdot (1)_{n\times 1},$$

откуда получим

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \ \nu \cdot (1)_{n\times 1}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{\mathbf{y}}^* = \frac{\mathbf{y}^*}{\nu} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (1)_{n\times 1}. \tag{1.7.15}$$

Из соотношения (1.7.15) имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{\nu} = \frac{1}{\nu}, \tag{1.7.16}$$

поскольку $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Из условий (1.7.15)–(1.7.16) определяем значение цены игры, которое, естественно, должно совпасть со значением, рассчитанным по формуле (1.7.11):

$$\nu = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}. \tag{1.7.17}$$

А также вероятности ($y_1, y_2, ..., y_n$) применения стратегий стороны В:

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \nu \tilde{\mathbf{y}}^{*\mathrm{T}} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^{*\mathrm{T}}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}, \tag{1.7.18}$$

Пример 1.15. Вычислить решение игры, заданной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Определяем матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Для этого рассчитываем определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -27$$

и матрицу алгебраических дополнений:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\2&6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&4\\1&6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&4\\2&6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&4\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-10&-2\\-14&-2&5\\-5&7&-4\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}=-\frac{1}{27}\begin{bmatrix}11&-14&-5\\-10&-2&7\\-2&5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{27}&\frac{14}{27}&\frac{5}{27}\\ \frac{10}{27}&\frac{2}{27}&-\frac{7}{27}\\ \frac{2}{27}&-\frac{5}{27}&\frac{4}{27}\end{bmatrix}.$$

Далее определяем вектор

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*\mathrm{T}}=(\mathbf{1})_{1\times n}\mathbf{A}^{-1}=[1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}-\frac{11}{27}&\frac{14}{27}&\frac{5}{27}\\ \frac{10}{27}&\frac{2}{27}&-\frac{7}{27}\\ \frac{2}{27}&-\frac{5}{27}&\frac{4}{27}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{27}&\frac{11}{27}&\frac{2}{27}\end{bmatrix}.$$

Отнормировав полученное распределение по формуле (1.7.12), получим искомые вероятности (x_1, x_2, x_3) применения стратегий стороны А, составляющие ее оптимальную смешанную стратегию:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{14}&\frac{11}{14}&\frac{2}{14}\end{bmatrix}.$$

Рассчитываем значение цены игры по формуле (1.7.11):

$$\nu=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}=\left[\frac{1}{27}+\frac{11}{27}+\frac{2}{27}\right]^{-1}=\frac{27}{14}.$$

Для определения оптимальной смешанной стратегии стороны B найдем по формуле (1.7.15) вектор $\tilde{\mathbf{y}}^*$:

$$\tilde{\mathbf{y}}^*=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{1})_{n\times 1}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{27}&\frac{14}{27}&\frac{5}{27}\\ \frac{10}{27}&\frac{2}{27}&-\frac{7}{27}\\ \frac{2}{27}&-\frac{5}{27}&\frac{4}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{27}\\ \frac{5}{27}\\ \frac{1}{27}\end{bmatrix}.$$

Отнормировав полученный вектор согласно соотношению (1.7.18), получим вероятности (y_1, y_2, y_3) применения стратегий стороны В, входящие в ее оптимальную смешанную стратегию:

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{8}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{8}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$, $\nu = \frac{27}{14}$.

Проверьте себя! Решите следующие задачи размерности 3 × 3.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{10}{17} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & \frac{2}{17} & \frac{6}{17} \end{bmatrix}$, $\nu = \frac{14}{17}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{13}{18} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$, $\nu = \frac{23}{9}$.

1.8. Методы решения матричных игр $m \times n$

1.8.1. Решение игр размерности $m \times n$ методами линейного программирования

Решение любой матричной игры размерности $m \times n$ сводится к задаче линейного программирования [1, 5].

Рассмотрим игру $m \times n$ с m стратегиями $A_1, A_2, \ldots, A_m$ игрока А и n стратегиями $B_1, B_2, \ldots, B_n$ игрока В, которая задается матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array}. \end{array}$$

Требуется найти решение игры, т. е. оптимальные смешанные стратегии игроков А и В — $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$ и цену игры ν.

Сначала найдем оптимальную стратегию $(x_1, \ldots, x_m)$ игрока А. Эта стратегия должна обеспечить выигрыш, не меньший цены игры, при любом поведении второго игрока и выигрыш, равный цене игры, при его оптимальном поведении. Цена игры нам неизвестна, поэтому зададим ее в виде некоторого положительного числа ν. Для того чтобы выполнялось условие $\nu > 0$, достаточно, чтобы все элементы матрицы были неотрицательные. Этого всегда можно добиться, если воспользоваться аффинным правилом, определяющим допустимые преобразования матрицы игры и ее цену.

Аффинное правило. ***Оптимальные стратегии у матричных игр, элементы матриц* A *и* C *которых связаны равенством***

$$c_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu, \quad i = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, n,$$

где $\lambda > 0$, ***а*** μ ***— произвольно, имеют одинаковые равновесные ситуации (либо в чистых, либо в смешанных стратегиях), а их цены удовлетворяют условию***

$$\nu_C = \lambda \nu_A + \mu.$$

Согласно вышеприведенному аффинному правилу, если прибавить ко всем элементам матрицы одно и то же число, цена игры увеличится на это число, а решение не изменится.

Таким образом, будем считать $\nu > 0$. Пусть игрок А применяет свою оптимальную стратегию $(x_1, \ldots, x_m)$, а игрок B — только чистые стратегии. Поскольку оптимальная стратегия игрока А такова, что при любом поведении противника обеспечивает выигрыш, не меньший, чем цена игры, можем записать следующие условия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq \nu; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq \nu; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Разделим каждое из соотношений системы (1.8.1) на положительную величину ν и введем новые обозначения:

$$\frac{x_i}{\nu} = z_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{1.8.2}$$

Тогда условия (1.8.1) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m \geq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m \geq 1; \\ z_1 + \ldots + z_m = \dfrac{1}{\nu}. \end{cases} \tag{1.8.3}$$

Игрок А хочет сделать свой выигрыш (ν) максимально возможным; а значит, величину $\frac{1}{\nu}$ — минимальной, то есть задача сводится к минимизации правой части последнего соотношения системы .

Таким образом, задача определения оптимальной смешанной стратегии игрока А свелась к следующей математической задаче.

Определить неотрицательные значения переменных $z_1, z_2, ..., z_m$ *так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям вида*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i \geq 1, \quad k = 1, ..., n, \tag{1.8.4}$$

и при этом их линейная функция L обращалась бы в минимум:

$$L = \sum_{i=1}^{m} z_i \to \min. \tag{1.8.5}$$

Отсюда видно, что задача определения оптимальной стратегии $\mathbf{x}^{*T} = (x_1, ..., x_m)$ свелась к типичной задаче линейного программирования.

Оптимальная смешанная стратегия $(y_1,..., y_n)$ игрока В определяется аналогично оптимальной стратегии игрока А. Однако при этом необходимо учесть, что цена игры ν для В есть проигрыш, и, следовательно, он стремится ее минимизировать, а значит, максимизировать величину $1/\nu$.

Оптимальная стратегия игрока В должна обеспечить проигрыш, не больший цены игры ν, при любом поведении игрока А и проигрыш, равный цене игры ν, при его оптимальном поведении.

Линейные ограничения в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \leq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \ldots + a_{mn}w_n \leq 1, \end{cases} \tag{1.8.6}$$

где $w_j = \frac{y_j}{\nu}$; w_j — неотрицательные переменные, удовлетворяющие условию

$$w_1 + \ldots + w_n = \frac{1}{\nu}, \tag{1.8.7}$$

которое вытекает из условия нормировки для y_j, $j = 1, ..., n$.

Поскольку для игрока В цена игры ν – это проигрыш, следовательно, задача сводится к максимизации правой части условия (1.8.7).

Таким образом, задача определения оптимальной смешанной стратегии игрока В свелась к следующей математической задаче.

Требуется определить неотрицательные значения переменных $w_1, \ldots, w_n$ *так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям вида*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} w_k \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.8.8}$$

и обращали бы в максимум линейную функцию L':

$$L' = \sum_{k=1}^{n} w_k \to \max. \tag{1.8.9}$$

В данном случае мы опять имеем дело с задачей линейного программирования.

Таким образом, приходим к выводу, что решение любой матричной игры $m \times n$ сводится к решению двойственных задач линейного программирования.

Рассмотрим алгоритм решения игровой задачи $m \times n$ на конкретном примере.

Пример 1.16. Определить с помощью линейного программирования решение игровой задачи вида

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

I. Если среди элементов исходной матрицы имеются отрицательные, необходимо ко всем ее элементам прибавить одно и то же положительное число γ, такое, чтобы все элементы новой матрицы были неотрицательными.

Прибавляем ко всем элементам матрицы **C** число $\gamma = 1$, в результате получим

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

II. Определяем оптимальную смешанную стратегию $\mathbf{x}^{*T} = (x_1, ..., x_m)$ игрока А.

1. Для этого составляем задачу линейного программирования вида (1.8.4)–(1.8.5).

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i \geq 1, \qquad z_i \geq 0, \quad k = 1, ..., n; \quad i = 1, ..., m.$$

$$L = z_1 + z_2 + z_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_3 \geq 1; \\ 2z_1 + z_3 \geq 1; \\ z_2 \geq 1. \end{cases} \tag{1'}$$

2. Запишем целевую функцию в виде

$$\min(L) = \max(-L) = \max[0 - (\sum_{i=1}^{m} z_i)].$$

Введем в систему неравенств (1′) дополнительные переменные и перейдем к системе уравнений

$$\min(L) = \max(-L) = \max[0 - (z_1 + z_2 + z_3)];$$
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_3 - z_4 = 1; \\ 2z_1 + z_3 - z_5 = 1; \\ z_2 - z_6 = 1. \end{cases} \tag{2'}$$

3. Выделяем в системе (2′) базис z_4, z_5, z_6. Коэффициенты при базисных переменных должны быть равны единице. Для этого уравнения системы (2′) нужно умножить на (–1):

$$\max(-L) = \max[0 - (z_1 + z_2 + z_3)];$$
$$\begin{cases} -z_1 - z_2 - 2z_3 + z_4 = -1; \\ -2z_1 - z_3 + z_5 = -1; \\ -z_2 + z_6 = -1. \end{cases} \tag{3'}$$

Составляем симплекс-таблицу (табл.1.2):

Таблица 1.2

Базис	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	Свободные члены
z_4	–1	–1	–2	1	0	0	–1
z_5	–2	0	–1	0	1	0	–1
z_6	0	**–1**	0	0	0	1	–1
$-L$	1	1	1	0	0	0	0

Среди свободных членов есть отрицательные, следовательно, используем *двойственный симплекс-метод*.

Выводимая из базиса переменная определяется минимальным отрицательным элементом в столбце свободных членов (выделен в таблице пунктирным овалом).

Разрешающий элемент определяется максимальным отношением небазисных элементов в строке целевой функции к соответствующим коэффициентам выводимой из базиса переменной. При этом не учитываются элементы $a_{ij} \geq 0$. Разрешающий элемент (выделен в табл. 1.2 сплошным овалом) находится в столбце, соответствующем переменной, *вводимой в базис*.

4. Далее выполняются симплекс-преобразования:

а) строка разрешающего элемента делится на разрешающий элемент;

б) из всех остальных строк таблицы вычитается полученная строка, умноженная на такие множители, чтобы во всех клетках столбца с разрешающим элементом получились нули.

Критерий оптимальности решения — положительность столбца свободных членов (кроме $(-L)$) (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Базис	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	Свободные члены
z_4	–1	0	–2	1	0	–1	0
z_5	**–2**	0	–1	0	1	0	–1
z_2	0	1	0	0	0	–1	1
$-L$	1	0	1	0	0	1	–1

Таблица 1.4

Базис	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	Свободные члены
z_4	0	0	–1.5	1	–0.5	–1	0.5
z_1	1	0	0.5	0	–0.5	0	0.5
z_2	0	1	0	0	0	–1	1
-L	0	0	0.5	0	0.5	1	-1.5

Значения полученных переменных представлены в столбце свободных членов таблицы 1.4:

$$z_1 = 0.5; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = 0; \quad -L = -1.5.$$

Следовательно, $L = \dfrac{1}{\nu_A} = 1.5$, а $\nu_A = \dfrac{2}{3}$.

5. Возвращаемся к переменным x_i по формулам $x_i = \nu_A z_i$:

$$x_1 = \nu_A z_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \nu_A z_2 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3};$$

$$x_3 = \nu_A z_3 = \frac{2}{3}\cdot 0 = 0.$$

6. Вычисляем значение цены игры для исходной матрицы по формуле

$$\nu_C = \nu_A - \gamma = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

В результате получили:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}; \quad \nu_C = -\frac{1}{3}.$$

III. Определяем оптимальную смешанную стратегию $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$ игрока В.

1. Составляем задачу линейного программирования вида (1.8.8)–(1.8.9):

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \to \max;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} w_k \le 1; \qquad w_k \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, n.$$

$$L' = w_1 + w_2 + w_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 \le 1; \\ w_1 + w_3 \le 1; \\ 2w_1 + w_2 \le 1. \end{cases} \qquad (4')$$

2. Запишем целевую функцию в виде

$$\max(L') = \max[0 - (-\sum_{k=1}^{n} w_i)].$$

Введем в систему неравенств (4′) дополнительные переменные и перейдем к системе уравнений

$$\max(L') = \max[0 - (-w_1 - w_2 - w_3)];$$
$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_4 = 1; \\ w_1 + w_3 + w_5 = 1; \\ 2w_1 + w_2 + w_6 = 1. \end{cases}$$

3. Составляем симплекс-таблицу (табл.1.5).

Таблица 1.5

Базис	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Свободные члены
w_4	1	2	0	1	0	0	1
w_5	1	0	**1**	0	1	0	1
w_6	2	1	0	0	0	1	1
L'	–1	–1	–1	0	0	0	0

Свободные члены положительны, поэтому применяем *прямой симплекс-метод*.

Вводимая в базис переменная определяется минимальным отрицательным элементом в строке целевой функции (выделен в табл. 1.5 пунктирным овалом), знак свободного члена при этом не учитывается.

Разрешающий элемент определяется минимальным из отношений свободных членов к соответствующим коэффициентам при выбранной вводимой в базис переменной (не учитываются элементы $a_{ij} \le 0$). Разрешающий элемент (выделен в таблице сплошным овалом) находится в строке, соответствующей переменной, *выводимой из базиса*.

4. Далее выполняются *симплекс-преобразования* (табл. 1.6–1.7).

Признак оптимальности решения — неотрицательность всех элементов в строке целевой функции.

Таблица 1.6

Базис	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Свободные члены
w_4	1	**2**	0	1	0	0	1
w_3	1	0	1	0	1	0	1
w_6	2	1	0	0	0	1	1
L'	0	–1	0	0	1	0	1

Таблица 1.7

Базис	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Свободные члены
w_2	0.5	1	0	0.5	0	0	0.5
w_3	1	0	1	0	1	0	1
w_6	1.5	0	0	–0.5	0	1	0.5
L'	0.5	0	0	0.5	1	0	1.5

Значения полученных переменных представлены в столбце свободных членов таблицы 1.7:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0.5, \quad w_3 = 1.$$

$$L' = \frac{1}{\nu_A} = 1.5, \text{ следовательно, } \nu_A = \frac{2}{3}.$$

5. Возвращаемся к переменным y_i по формулам $y_i = \nu_A w_i$:

$$y_1 = \nu_A w_1 = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0; \quad y_2 = \nu_A w_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$y_3 = \nu_A w_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

6. Вычисляем цену игры для исходной матрицы:

$$\nu_C = \nu_A - \gamma = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Она должна совпасть со значением, вычисленным в пункте II.7.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; $\nu_C = -\frac{1}{3}$.

Проверьте себя! Решите следующие задачи методом линейного программирования.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$; $\nu_A = \frac{8}{9}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{6}{11} & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{11} & 0 & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$; $\nu_A = \frac{5}{11}$.

1.8.2. Итерационный метод решения игровых задач размерности $m \times n$

Аналитические методы решения матричных игр позволяют находить точное решение игры. Однако на практике необходимость определения точного решения не всегда актуальна, достаточно часто можно ограничиться приближенным решением. В этом случае для решения игр $m \times n$, особенно это касается задач высокой размерности, целесообразно применять численные методы, которые оказываются проще классических методов линейного программирования. Одним из наиболее часто применяемых численных методов решения игровых задач является метод Брауна—Робинсон [8], который основывается на выборе игроком наилучшей стратегии в ответ на накопленный выигрыш противника.

Основная идея итерационного метода Брауна—Робинсон заключается в том, что разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны A и B применяют друг против друга свои стратегии, стремясь выиграть побольше (проиграть поменьше). Эксперимент состоит из ряда «партий» игры. Начинается он с того, что один из игроков, скажем A, выбирает произвольно одну из своих стратегий A_i. Противник (игрок B) на это отвечает той из своих стратегий B_j, которая наименее выгодна для A, то есть обращает выигрыш при стратегии A_i в минимум. На это A отвечает той из своих стратегией A_k, которая дает ей максимальный выигрыш при стратегии противника B_j. Далее снова наступает очередь игрока B. Он отвечает игроку A той своей стратегией B_l, которая является наихудшей не для последней, примененной игроком A стратегии A_k, а для смешанной стратегии, в которой до сих пор примененные стратегии A_i и A_k встречаются с равными вероятностями.

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого той своей стратегией, которая является оптимальной для него относительно смешанной стратегии противника, в которую чистые стратегии входят в пропорциях, определяемых частотой их применения. Вместо того чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться накопленным за предыдущие партии выигрышем и выбирать ту стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален (минимален).

Данный итерационный процесс сходится. Если такую чередующуюся последовательность партий продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры ν, а частоты применения стратегий $A_1, ..., A_m$ и $B_1, ..., B_n$ будут приближаться к их вероятностям $x_1, ..., x_m$ и $y_1, ..., y_n$ в оптимальных смешанных стратегиях $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$.

Недостаток метода Брауна—Робинсон заключается в медленной сходимости.

Преимущество метода Брауна—Робинсон в простоте и универсальности. С его помощью можно найти решение любой матричной игры, его сложность незначительно возрастает с увеличением размерности матрицы игры в отличие от задачи линейного программирования.

Рассмотрим, как работает итерационный метод на конкретном примере.

Пример 1.17. Для игровой задачи «три пальца» с матрицей **C** методом Брауна определить цену игры ν и оптимальные смешанные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ игроков A и B соответственно.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} . \end{array}$$

Решение. Чтобы не иметь дело с отрицательными числами, прибавим ко всем элементам матрицы число 5 (при этом цена игры увеличится на 5, а решение не изменится):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} . \end{array}$$

Для решения данной задачи составим таблицу накопленных выигрышей (см. табл. 1.8).

Обозначения в таблице по столбцам:

1 — номер итерации k;

2 — выбранная в данной партии стратегия A_i игрока А;

3–5 — накопленный выигрыш игрока А за первые k партий соответственно при стратегиях B_1, B_2, B_3 игрока В (получается прибавлением элементов соответствующей строки к тому, что было строкой выше). Из этих накопленных выигрышей подчеркивается минимальный (если их несколько, то подчеркиваются все), он определяет самую выгодную стратегию B_j в данной партии, номер которой проставляется в 6-м столбце таблицы. Если минимумов несколько, то берется любой. Этот определяющий элемент в таблице выделен жирным шрифтом;

6 — выбранная в данной партии стратегия B_j игрока В;

7–9 — приводится накопленный проигрыш игрока В за первые k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока А (получается прибавлением элементов столбца B_j к тому, что было строкой выше). Из этих значений подчеркивается максимальное — оно и определяет выбор стратегии игрока А в следующей партии (в следующей строке таблицы). Данный элемент выделен жирным шрифтом;

10 — нижняя оценка цены игры, равная минимальному накопленному выигрышу, деленному на число партий k;

11 — верхняя оценка цены игры, равная максимальному накопленному проигрышу, деленному на число партий k;

12 — среднее арифметическое нижней и верхней оценок цен игры, которое является приближенным значением цены игры ν.

Остановимся на методике заполнения таблицы.

Первую стратегию игрок А выбирает произвольно, пусть это будет A_3. Заносим в 3–5-й столбцы таблицы элементы третьей строки матрицы А. В ответ игрок В выбирает ту свою стратегию, при которой выигрыш А будет минимальным, т. е. B_2. Заносим проигрыши игрока В при его стратегии B_2 в 7–9-й столбцы таблицы. Поскольку игрок А стремится ухудшить положение игрока В, он выбирает в качестве ответной стратегию A_2, при которой проигрыш В максимален. Далее идет вторая итерация игры. Подсчитываем накопленный выигрыш игрока А при стратегиях A_3 и A_2, т. е. суммируем соответствующие элементы третьей и второй строк матрицы А и заносим их в 3–5-й столбцы таблицы и т. д. Попутно подсчитываются нижняя и верхняя оценки цен игры как усредненные по количеству итераций накопленные выигрыш и проигрыш и заносятся в 10-й и 11-й столбцы таблицы. В 12-й столбец заносится их среднее арифметическое.

Таблица 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k	A_i	B_1	B_2	B_3	B_j	A_1	A_2	A_3	$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν
1	A_3	9	$\underline{\mathbf{0}}$	11	B_2	2	$\underline{\mathbf{9}}$	0	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{9}{1}=9$	4.5
2	A_2	9+2=11	0+9=$\underline{\mathbf{9}}$	11+0=11	B_2	2+2=4	9+9=$\underline{\mathbf{18}}$	0+0=0	$\frac{9}{2}=4{,}5$	$\frac{18}{2}=9$	6.75
3	A_2	11+2=13	9+9=18	11+0=$\underline{\mathbf{11}}$	B_3	4+9=13	18+0=$\underline{\mathbf{18}}$	0+11=11	3.67	6	4.84
4	A_2	13+2=15	18+9=27	11+0=$\underline{\mathbf{11}}$	B_3	13+9=$\underline{\mathbf{22}}$	18+0=18	11+11=$\underline{22}$	2.75	5.5	4.13
5	A_1	15+7=22	27+2=29	11+9=$\underline{\mathbf{20}}$	B_3	22+9=31	18+0=18	22+11=$\underline{\mathbf{33}}$	4	6.6	5.3
6	A_3	22+9=31	29+0=$\underline{\mathbf{29}}$	20+11=31	B_2	31+2=$\underline{33}$	18+9=27	33+0=$\underline{\mathbf{33}}$	4.84	5.5	5.17
7	A_1	31+7=38	29+2=$\underline{\mathbf{31}}$	31+9=40	B_2	33+2=35	27+9=$\underline{\mathbf{36}}$	33+0=33	4.43	5.14	4.79
8	A_2	38+2=$\underline{40}$	31+9=$\underline{\mathbf{40}}$	40+0=$\underline{40}$	B_1	35+7=$\underline{\mathbf{42}}$	36+2=38	33+9=$\underline{42}$	5	5.25	5.12
9	A_1	40+7=47	40+2=$\underline{\mathbf{42}}$	40+9=49	B_2	42+2=44	38+9=$\underline{\mathbf{47}}$	42+0=42	4.67	5.22	4.95
10	A_2	47+2=$\underline{\mathbf{49}}$	42+9=51	49+0=$\underline{49}$	B_1	44+7=$\underline{\mathbf{51}}$	47+2=49	42+9=$\underline{51}$	4.9	5.1	5
11	A_1	49+7=56	51+2=$\underline{\mathbf{53}}$	49+9=58	B_2	51+2=53	49+9=$\underline{\mathbf{58}}$	51+0=51	4.82	5.27	5.05
12	A_2	56+2=$\underline{\mathbf{58}}$	53+9=62	58+0=$\underline{58}$	B_1	53+7=$\underline{\mathbf{60}}$	58+2=$\underline{60}$	51+9=$\underline{60}$	4.83	5	4.92

Далее возникает вопрос: когда же заканчивать процесс вычислений?

Существуют *три критерия* завершения алгоритма расчета.

1. *По количеству итераций*.
2. *По точности*. График зависимости цены игры от числа итераций представляет собой затухающую синусоиду. Когда несколько последовательно взятых значений цены игры отличаются друг от друга меньше, чем на заранее оговоренную величину, расчет можно завершать.
3. *По достижении положения равновесия*, при котором любое поведение противника дает один и тот же выигрыш, равный цене игры ν. Это положение равновесия достигается на тех итерациях, где все значения оказываются подчеркнутыми (на которых при всех стратегиях противника обеспечивается один и тот же выигрыш (проигрыш)).

Последний пункт требует более детального анализа.

Рассмотрим 8-ю итерацию процесса. На этой итерации при всех стратегиях игрока В обеспечивается один и тот же выигрыш, равный 40, т. е. достигнуто положение равновесия. На этой же итерации нижнее значение цены игры совпадает с точным значением цены игры, которое для матрицы **A** равно 5. Чтобы найти значение цены игры для исходной матрицы **C**, надо от полученного значения цены игры отнять число 5, на которое мы в самом начале увеличили все элементы исходной матрицы **C**:

$$\nu_C = \nu_A - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Приближенные значения вероятностей, с которыми применяются стратегии, получим, подсчитывая число случаев применения игроком каждой стратегии и деля его на общее число партий, в данном случае на 8, так как пока мы ограничились рассмотрением 8 партий игры:

$$A_1\colon\ x_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; \qquad B_1\colon\ y_1 = \frac{1}{8}.$$

$$A_2\colon\ x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \qquad B_2\colon\ y_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$A_3\colon\ x_3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; \qquad B_3\colon\ y_3 = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Точное решение для данной задачи, полученное аналитическим методом, следующее:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Как видно из полученных результатов, *если положение равновесия достигается для стороны А, то на данной итерации нижняя оценка цены игры совпадает с точным значением цены игры, для стороны А получается точное решение, а для В — приближенное*.

Рассмотрим теперь процесс, состоящий из 12 итераций.

Как видно из таблицы, на 12-й итерации положение равновесия достигается для стороны В. В этом случае с точным значением цены игры совпадает верхняя оценка цены игры. Рассчитаем теперь значения вероятностей для процесса из 12 итераций:

$$A_1\colon\ x_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \qquad B_1\colon\ y_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$A_2\colon\ x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \qquad B_2\colon\ y_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$A_3\colon\ x_3 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}; \qquad B_3\colon\ y_3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Если сравнить полученное решение с точным, то можно заметить, что в данном случае точное решение получилось для игрока В, а для игрока А — приближенное.

На основании полученных результатов можно сделать следующий вывод: *если положение равновесия достигается для стороны В, то на данной итерации верхняя оценка цены игры совпадает с точным значением цены игры, для стороны В получается точное решение, а для А — приближенное.*

Однако следует заметить, что положение равновесия достигается лишь в достаточно небольшом количестве задач, а в общем случае целесообразно заканчивать расчет по второму критерию, т. е. по точности.

1.9. Практическое применение смешанных стратегий

Рассмотрим вопрос о практическом применении смешанных стратегий на примере конфликтных ситуаций, связанных с боевыми действиями.

Задачи теории игр, связанные с боевыми действиями, можно условно разделить на два класса: «***тактические***» и «***технические***» [1].

В «***тактических***» задачах речь идет о методах боевого применения имеющихся технических средств с заданными параметрами.

В «***технических***» задачах речь идет о выборе рациональных параметров применяемых образцов боевой техники, например о выборе типа вооружения из нескольких возможных вариантов.

Остановимся подробнее на вопросах применения смешанных стратегий в тех и других задачах.

Что касается «***тактических***» задач, здесь смешанные стратегии означают гибкую, подвижную, всегда неожиданную для противника тактику. Целесообразность такой тактики была очевидна всегда; ***игровыми методами можно обосновать пропорции разных тактических приемов***.

В «***технических***» задачах игровые принципы могут применяться в виде так называемой «физической смеси стратегий».

Физической смесью стратегий называется такая их смесь, при которой одновременно (в одной или нескольких операциях) применяются несколько стратегий в определенных пропорциях, например несколько образцов вооружения, обладающих разными свойствами. Если применяемые образцы резко различны по своим характеристикам, то, пользуясь физической смесью стратегий, мы можем заметно увеличить свой выигрыш по сравнению с тем случаем, когда применяется лишь одна стратегия. Пропорции, в которых должны смешиваться разные образцы, могут быть обоснованы исходя из принципов теории игр.

В качестве примеров физической смеси стратегий можно привести:

- расстановку в полосе ПВО зенитных комплексов с различными характеристиками;
- применение в боевых действиях однотипных самолетов-истребителей с различным вооружением и т. д.

Рассмотрим примеры тактической и технической задач.

Пример тактической задачи. В качестве примера тактической задачи рассмотрим задачу, с которой мы уже встречались в примере 1.3, когда речь шла о составлении матрицы игры.

Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков $Б_1$ или $Б_2$, летящих ему навстречу один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность поражения бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 0.8$. На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако на каком — не известно. Цель истребителя — сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0.6$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком Б$_2$ и обстреливает его.

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность поражения бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

Решение. В распоряжении стороны А (истребитель) — две стратегии: A_1 — обстреливать первый бомбардировщик; A_2 — обстреливать второй бомбардировщик.

В распоряжении стороны В (бомбардировщики) также две стратегии: B_1 — поместить бомбу на первый бомбардировщик; B_2 — поместить бомбу на второй бомбардировщик.

Элементы платежной матрицы — вероятности поражения бомбардировщика с бомбой.

Продолжим решение данной задачи с того момента, как была составлена платежная матрица игры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1-P_2)P_1 & 0 \\ 0 & (1-P_2)^2 P_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.128 \end{bmatrix}.$$

Определим теперь аналитическим способом вероятности применения стратегий сторон А и В:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0.128 - 0}{0.32 + 0.128 - 0 - 0} = 0.286;$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 0.714;$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0.128 - 0}{0.32 + 0.128 - 0 - 0} = 0.286;$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 0.714.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии сторон в данной игре будут следующие: для стороны А — $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0.29\ \ 0.71]$; для стороны В — $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.29\ \ 0.71]$.

С точки зрения тактики это означает, что истребителю надо приблизительно в 70% случаев атаковать бомбардировщик Б$_2$ (следует из стратегии $\mathbf{x}^*$); а стороне В приблизительно в 30% случаев бомбу помещать на первый бомбардировщик, а в 70% — на второй (согласно стратегии $\mathbf{y}^*$).

Пример технической задачи. В распоряжении комплекса ПВО имеются четыре разработанных образца зенитных управляемых ракет: A_1, A_2, A_3, A_4, предназначенных для стрельбы по самолетам [1]. Известны типы самолетов противника B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, которые он может применять, однако неизвестно заранее — в какой пропорции. Вероятности поражения самолета противника при применении каждого типа вооружения заданы матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} . \end{array}$$

Требуется, исходя из принципов теории игр, обосновать пропорции, в которых надо заказывать вооружение различных типов.

Решение. Сначала необходимо исключить из рассмотрения заведомо невыгодные и дублирующие стратегии. После применения отношений доминирования матрица игры принимает вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_3 \\ A_4 \end{array} . \end{array}$$

Построим геометрическую интерпретацию этой игры (рис. 1.11).

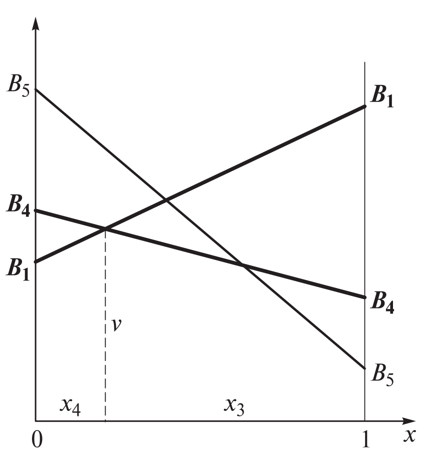


Рис. 1.11

Из графика видно, что активными стратегиями противника являются B_1 и B_4, т. е. игра сводится к игре 2×2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Находим решение игры аналитическим методом:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad x_3 \quad x_4);$$

$$x_3 = \frac{0.2-0.7}{0.4+0.2-0.5-0.7} = \frac{5}{6}, \quad x_4 = 1 - x_3 = \frac{1}{6}.$$

$$\nu = \frac{0.2 \cdot 0.4 - 0.5 \cdot 0.7}{0.4+0.2-0.5-0.7} = 0.45.$$

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1 \quad 0 \quad 0 \quad y_4 \quad 0);$$

$$y_1 = \frac{0.2-0.5}{0.4+0.2-0.5-0.7} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}, \quad y_4 = 1 - y_1 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, исходя из принципов теории игр, принимаем рекомендации: не заказывать вовсе образцов A_1 и A_2, а образцы A_3 и A_4 заказывать в пропорции 5:1. При этом средняя вероятность поражения самолета противника (при массовом применении образцов вооружения) будет максимальна (не ниже 0.45). Что же касается стороны В, то ей целесообразно использовать самолеты типов B_1 и B_4 в пропорции 1:1.

ГЛАВА 2

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИТУАЦИЯХ (ИГРЫ «С ПРИРОДОЙ»)

2.1. Элементы теории статистических решений

Теория статистических решений (ее кратко называют теорией решений) отличается от теории игр тем, что рассматриваемые в ней ситуации не имеют конфликтной окраски — никто никому сознательно не противодействует. В задачах теории статистических решений неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника», а от объективной незаинтересованной действительности, которую в теории статистических решений принято называть «природой», «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не злонамеренно. Например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на определенного вида продукцию, объем перевозок, который придется выполнять железной дороге, положение на рынке FOREX, экономическая и финансовая политика государства, реформы в системе налогообложения, курс валюты, инфляция и т. д. Соответствующие ситуации часто называются «играми с природой» [1].

Отсутствие сознательного противодействия со стороны природы, на первый взгляд, упрощает задачу выбора решения: лицу, принимающему решение (ЛПР), в «игре с природой» легче добиться успеха, ведь ему никто не мешает! Но ему «труднее» обосновать свой выбор. В игре против сознательного противника элемент неопределенности отчасти снимается тем, что противник такой же, как ЛПР, он думает за противника теми же категориями, принимает за него решение на основе одинаковой логики и правил. В игре же «с природой» такая концепция не подходит: никто не знает, какое сопротивление будет оказано принятому решению, каковы, в конечном счете, правила этой игры. Недаром говорят, что природа «слепа».

Отметим, что игры с «природой» являются вырожденным случаем антагонистической игры двух лиц, когда одна сторона (ЛПР) имеет возможность строить осмысленные стратегии поведения, а вторая сторона («природа») лишена такой возможности.

Рассмотрим такого рода ситуацию. Пусть у стороны А есть m возможных стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$; что касается обстановки, то о ней можно сделать n предположений $П_1, П_2, \ldots, П_n$ — рассмотрим их как «стратегии природы». Наш выигрыш a_{ij} при каждой паре стратегий A_i, $П_j$ задан матрицей **А** (табл. 2.1):

Таблица 2.1

A =

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Требуется выбрать такую стратегию игрока А (чистую или смешанную), которая является более предпочтительной (выгодной) по сравнению с другими.

Наиболее простым случаем выбора решения в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока А оказывается доминирующей над всеми остальными, — ее-то и рекомендуется выбрать. Но если в матрице игры такой стратегии не оказывается, прежде чем приступить к решению, необходимо удалить заведомо невыгодные или дублирующие стратегии игрока А (см. п.1.2). Что же касается стратегий «природы», то здесь заведомо невыгодные стратегии удалять нельзя, так как «природа» свои стратегии не выбирает.

В дальнейшем будем полагать, что отношения доминирования к стороне А применены.

В ***теории статистических решений*** (игр «с природой») представляется желательным ввести такие показатели, которые не просто давали бы выигрыш в каждой ситуации, а описывали бы степень удачности применения конкретной стратегии в конкретной ситуации с учетом того, насколько вообще эта ситуация благоприятна для нас. С этой целью в теории статистических решений вводится важное понятие «риска».

Риском r_{ij} игрока при использовании стратегии A_i в условиях Π_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал Π_j, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i.

Выразим риск r_{ij} через элементы матрицы выигрышей a_{ij}. Очевидно, что если бы игрок знал заранее состояние «природы» Π_j, он выбрал бы ту стратегию, которой соответствует максимальный выигрыш в данном столбце (максимум столбца). Обозначим этот максимум β_j. Тогда, согласно определению, риск рассчитывается по следующей формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Матрица рисков $R = \| r_{ij} \|$ дает зачастую более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$.

Чтобы понять значение риска, рассмотрим пример.

Пример 2.1. Планируется операция в заранее неясных условиях, касающихся, например, рыночной конъюнктуры. Относительно этих условий можно сделать различные предположения:

$$П_1, П_2, П_3, П_4.$$

Ожидаемая прибыль при наших стратегиях (A_i) для различных условий ($П_j$) задана матрицей выигрышей $\| a_{ij} \|$ (табл.2.2).

Таблица 2.2

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Построить матрицу рисков $\| r_{ij} \|$.

Решение. Каждый элемент матрицы вычитаем из максимального в данном столбце значения (в первом столбце это 4, в остальных — 8, 6, 9). Получаем матрицу рисков $\| r_{ij} \|$ (табл. 2.3).

Таблица 2.3

R =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

При взгляде на эту матрицу становятся яснее некоторые черты данной игры «с природой». Так, в матрице выигрышей (табл. 2.2) во второй строке первый и последний элементы были равны друг другу: $a_{21} = a_{24} = 3$.

Однако эти выигрыши совсем неравноценны друг другу в смысле того, насколько удачно выбрана стратегия. При состоянии «природы» Π_1 мы могли бы выиграть самое большее 4, т. е. при выборе стратегии A_2 выигрыш составляет 3 по 4-балльной шкале, что очень даже неплохо, т. е. до максимума не добираем 1 балл; а вот при состоянии Π_4 максимально возможный выигрыш составляет 9, т. е., выбирая стратегию A_2, мы выигрываем 3 по 9-балльной шкале и не добираем до максимума 6 баллов, т. е. выбор стратегии A_2 очень плох. Это отражается элементами матрицы рисков (табл. 2.3): $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$.

Рассмотренные вопросы касаются способов представления и обработки исходных данных, а критерии принятия решений будут обсуждаться далее.

2.2. Критерии принятия решений в играх «с природой»

При выборе оптимальной стратегии используется ряд критериев [2].

1. Максиминный критерий Вальда. При максиминном критерии Вальда оптимальной считается та стратегия ЛПР, которая обеспечивает максимум минимального выигрыша:

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Этот критерий отражает принцип гарантированного результата, т. е. ЛПР выбирает такую стратегию, которая максимизировала бы его выигрыш в самой неблагоприятной ситуации.

2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Критерий минимаксного риска Сэвиджа предполагает, что оптимальной является та стратегия, при которой величина риска в наихудшем случае минимальна. Этот критерий также называется критерием минимального риска. Согласно критерию Сэвиджа, ЛПР пытается выбрать действие, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т. е.

$$W = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа, так же как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма.

3. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом.

Критерий Гурвица рекомендует стратегию, которая определяется по формуле:

$$W = \max_{1 \le i \le m} [\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}],$$

где $\alpha \in [0, 1]$ — степень пессимизма.

Если $\alpha = 1$, получим пессимистический критерий Вальда.

Если $\alpha = 0$, то приходим к максимаксному критерию «крайнего оптимизма».

Выбор конкретного значения параметра определяется, скорее всего, субъективными факторами: чем опаснее ситуация, тем больше надо «подстраховываться» и тем ближе к единице выбирается значение α. При отсутствии каких-либо явных предпочтений вполне логично выбрать $\alpha = 0.5$.

4. Критерий Лапласа. При неизвестных вероятностях состояний «природы» можно принять, что все они равновероятны, т. е. $Q_j = 1/n,\ j = 1, \ldots, n,$ и выбор решения определяется критерием Лапласа, при котором ЛПР выбирает такую стратегию A_i, что

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Выбор критерия принятия решений является наиболее сложным и ответственным этапом. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают — тем лучше, можно смело выбирать рекомендуемое ими решение. Если эти рекомендации противоречат друг другу, анализ матрицы игры «с природой» с точки зрения разных критериев часто дает лучшее представление о ситуации, о достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно высокой размерности.

Пример 2.2. Условия игры «с природой» задаются в виде матрицы выигрышей (доходов):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 13 \\ 9 & 6 & 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

Требуется сделать выбор действия по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0.5$, Лапласа.

Решение.

1. Согласно критерию **Вальда**,

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max[3;\ 3;\ \mathbf{4}] = 4.$$

Значит, следует выбрать стратегию A_3.

2. Для применения критерия **Сэвиджа** вычислим матрицу рисков:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $W = \min_i \max_j r_{ij} = \max[8; 6; \mathbf{5}] = 5$. Значит, следует выбирать стратегию A_3.

3. По критерию **Гурвица**

$$W = \max_{1 \le i \le m} [\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}] = \max[6; \mathbf{8}; 7.5] = 8.$$

Значит, следует выбрать стратегию A_2.

4. Согласно критерию **Лапласа** $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 1/4$;

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \max_i M_i;$$

$$M_1 = 6 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 9 \cdot 1/4 + 5 \cdot 1/4 = 23/4;$$

$$M_2 = 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 5 \cdot 1/4 + 13 \cdot 1/4 = 25/4;$$

$$M_3 = 9 \cdot 1/4 + 6 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 11 \cdot 1/4 = \mathbf{30/4}.$$

Так как максимальное значение имеет M_3, то следует выбрать стратегию A_3.

Поскольку рекомендации трех критериев из четырех рассмотренных сводятся к выбору стратегии A_3, целесообразно остановиться на этом решении.

2.3. Планирование эксперимента в условиях неопределенности

При принятии решений в условиях неопределенности существенную помощь может оказать эксперимент, цель которого — уточнить условия в определенной ситуации. Проблема заключается в том, что проведение эксперимента предполагает наличие определенных затрат. Целесообразность эксперимента определяется корреляцией между суммой необходимых затрат на его проведение и величиной ожидаемого выигрыша.

Рассмотрим, имеет ли смысл предпринимать некоторый эксперимент ξ для уточнения условий в некоторой ситуации [1].

2.3.1. Случай «идеального» эксперимента

«***Идеальным***» называется эксперимент, который приводит к точному знанию состояния «природы», которое имеет место в данной ситуации.

Пусть заданы:

- матрица выигрышей $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ $(i = 1, ..., m;\ \ j = 1, ..., n)$;
- вероятности $Q_1, ..., Q_n$ различных состояний «природы» $\Pi_1, ..., \Pi_n$;
- затраты C на проведение эксперимента ξ.

Сравним средний выигрыш без проведения эксперимента ξ и средний выигрыш с проведением этого эксперимента.

Если эксперимент не проводить, то в качестве решения надо выбрать ту стратегию $A^* = A_i$, для которой достигается максимальный средний выигрыш:

$$\tilde{a} = \max_i \tilde{a}_i = \max_i [Q_1 a_{i1} + \ldots + Q_n a_{in}]. \tag{2.3.1}$$

Это и будет наш выигрыш без проведения эксперимента.

Теперь предположим, что эксперимент ξ проведен, и мы выяснили, какое из состояний природы $\Pi_1, ..., \Pi_n$ является действительным. Если это состояние Π_1, то мы должны применять ту стратегию A_i, для которой достигается максимальный выигрыш при Π_1:

$$\max_i a_{i1} = \beta_1.$$

При действительном состоянии «природы» Π_j наш выигрыш будет равен максимальному выигрышу в j-м столбце:

$$\max_i a_{ij} = \beta_j.$$

Но наша задача состоит в том, чтобы определить целесообразность проведения эксперимента ξ. Следовательно, нам не известно заранее, какое из состояний Π_j на самом деле имеет место и каков будет наш выигрыш β_j. Поэтому найдем математическое ожидание выигрыша, умножая значения возможных выигрышей на вероятности Q_j того, что эти выигрыши будут иметь место, и складывая результаты:

$$Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + \ldots + Q_n\beta_n. \tag{2.3.2}$$

Далее из этого значения среднего выигрыша вычтем стоимость эксперимента C и получим средний выигрыш с применением идеального эксперимента.

$$\tilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{ид}} = Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + \ldots + Q_n\beta_n - C. \tag{2.3.3}$$

Эксперимент проводить целесообразно, если

$$\tilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{ид}} > \tilde{a}.$$

Подставим значения $\tilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{ид}}$, $\tilde{a}$ из соотношений (2.3.3), (2.3.1) в это условие:

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} Q_j a_{ij} \right\} < \sum_{j=1}^{n} Q_j \beta_j - C. \tag{2.3.4}$$

Упростим это правило. Перенесем C в левую часть, а выражение с «максимумом» — из левой части в правую, изменив знак перед суммой и заменив «максимум» на «минимум» $(-\max(f) = \min(-f))$.

В результате условие (2.3.4) запишется следующим образом:

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} Q_j (\beta_j - a_{ij}) \right\}. \tag{2.3.5}$$

Выражение в круглых скобках $(\beta_j - a_{ij})$ представляет собой риск r_{ij}, а сумма в правой части — средний ожидаемый риск:

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j r_{ij}. \tag{2.3.6}$$

Таким образом, правило решения о проведении эксперимента приобретает следующий вид.

Эксперимент ξ нужно проводить, если затраты на его осуществление меньше минимального среднего риска $\bar{r}_i$:

$$C < \min_i \bar{r}_i. \tag{2.3.7}$$

В противном случае от эксперимента следует воздержаться и применить ту стратегию A^*, для которой достигается минимум среднего риска.

Рассмотрим пример.

Пример 2.3. Рассмотрим игру с природой, условия которой приведены в табл. 2.4:

Таблица 2.4

A=

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2
Q_j	0.1	0.2	0.5	0.2

В строке под таблицей приведены вероятности Q_j состояний «природы» $П_j$.

Определим, является ли целесообразным «идеальный» эксперимент, стоимость которого (в тех же единицах, в которых выражен выигрыш) $C = 2$.

Решение. Переходим от матрицы выигрышей к матрице рисков (табл. 2.5).

Таблица 2.5

$\mathbf{R} =$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\bar{r}_i$
A_1	3	4	1	0	1.6*
A_2	1	0	2	6	2.3
A_3	0	2	0	7	1.8
Q_j	0.1	0.2	0.5	0.2	

Рассчитываем значения среднего риска по формуле (2.3.6):

$$\bar{r}_1 = 0.1 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 + 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 = 1.6;$$

$$\bar{r}_2 = 0.1 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0 + 0.5 \cdot 2 + 0.2 \cdot 6 = 2.3;$$

$$\bar{r}_3 = 0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot 2 + 0.5 \cdot 0 + 0.2 \cdot 7 = 1.8.$$

Полученные значения проставляем в правом дополнительном столбце таблицы и проверяем условие (2.3.7):

$$\min_i \bar{r}_i = \min(1.6, 2.3, 1.8) = 1.6 < 2.$$

Минимальное из этих значений равно 1.6, следовательно, эксперимент проводить нецелесообразно, и надо применять ту стратегию, для которой достигается минимум среднего риска, т. е. стратегию A_1.

2.3.2. Случай «неидеального» эксперимента

«***Неидеальный***» эксперимент ξ не приводит к выяснению в точности состояния «природы» Π_j, а лишь дает какие-то косвенные сведения в пользу тех или иных состояний.

Мы можем предположить, что эксперимент ξ приводит к появлению одного из k несовместных событий $B_1,..., B_k$. Причем вероятности этих исходов эксперимента зависят от условий, в которых он проводится: $\Pi_1,..., \Pi_n$.

Обозначим условную вероятность появления события B_l в условиях Π_j следующим образом:

$$P(B_l | \Pi_j), \ (j = 1, ..., n; \quad l = 1, ..., k)$$

и будем считать, что все эти условные вероятности известны.

Таким образом, исходными данными для рассматриваемой задачи являются:

- матрица выигрышей $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$;
- «априорные» вероятности $Q_1, ..., Q_n$ различных состояний «природы» $\Pi_1, ..., \Pi_n$;
- матрица $\mathbf{P}$ условных вероятностей исходов B_l в условиях Π_j $(j = 1, ..., n;\quad l = 1, ..., k)$;
- затраты C на проведение эксперимента ξ.

После осуществления эксперимента, давшего исход B_l, необходимо пересмотреть вероятности условий: состояния «природы» $\Pi_1, ..., \Pi_n$ будут характеризоваться не прежними «априорными» вероятностями $Q_1, ..., Q_n$, а новыми «апостериорными» вероятностями $\tilde{Q}_{1l}, \ldots, \tilde{Q}_{nl}$, то есть условными вероятностями состояний $\Pi_1, ..., \Pi_n$ при условии, что эксперимент дал исход B_l. Эти апостериорные вероятности рассчитываются по формуле Байеса:

$$\tilde{Q}_{jl} = \frac{Q_j P(B_l | \Pi_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j P(B_l | \Pi_j)}, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.3.8}$$

Поскольку априорные вероятности состояний «природы» $Q_1, ..., Q_n$ заменяются новыми — апостериорными $\tilde{Q}_{1l}, \ldots, \tilde{Q}_{nl}$, то и оптимальная стратегия A^* в общем случае заменяется новой оптимальной стратегией $\tilde{A}_l^*$, вычисленной с учетом апостериорных вероятностей (при условии события B_l).

Рассмотрим пример.

Пример 2.4. В условиях примера 2.3 (табл.2.4) с приведенными априорными вероятностями: $Q_1 = 0.1$; $Q_2 = 0.2$; $Q_3 = 0.5$; $Q_4 = 0.2$ проводится эксперимент для уточнения обстановки. Этот эксперимент может иметь три различных исхода: B_1, B_2, B_3. Условные вероятности этих исходов $P(B_l | \Pi_j)$ для разных состояний природы Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 приведены в матрице условных вероятностей (табл. 2.6).

Таблица 2.6

$\mathbf{P} =$

B_l \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
B_1	0.2	0.9	0.4	0.3
B_2	0.1	0.1	0.5	0.3
B_3	0.7	0	0.1	0.4

Требуется выработать правило решения, которое указывало бы, при каком исходе эксперимента какую стратегию выбирать. Выяснить, на сколько средний выигрыш при выполнения эксперимента больше среднего выигрыша без выполнения эксперимента, и дать заключение о целесообразности проведения эксперимента.

Решение. Предположим, что в эксперименте ξ имел место исход B_1.

Вычислим новые апостериорные вероятности $\tilde{Q}_{j1}$, $j = 1, \ldots, 4$, состояний «природы» $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ по формуле (2.3.8) при условии исхода B_1:

$$\tilde{Q}_{11} = \frac{Q_1 P(B_1|\Pi_1)}{\sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_1|\Pi_j)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3} = \frac{0.02}{0.46} \approx 0.043;$$

$$\tilde{Q}_{21} = \frac{Q_2 P(B_1|\Pi_2)}{\sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_1|\Pi_j)} =$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3} = \frac{0.18}{0.46} \approx 0.392;$$

$$\tilde{Q}_{31} = \frac{0.2}{0.46} \approx 0.435; \quad \tilde{Q}_{41} = \frac{0.06}{0.46} \approx 0.130.$$

Занесем рассчитанные значения апостериорных вероятностей в дополнительную нижнюю строку табл. 2.4. В результате получим табл. 2.7.

Таблица 2.7

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\bar{a}_i^{(1)}$
A_1	1	4	5	9	4.956
A_2	3	8	4	3	**5.395***
A_3	4	6	6	2	5.394
$\tilde{Q}_{j1}$	0.043	0.392	0.435	0.130	

Воспользуемся полученными значениями апостериорных вероятностей при вычислении средних выигрышей (i =1, 2, 3) по формуле

$$\overline{a}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{4} \widetilde{Q}_{j1} a_{ij}. \tag{2.3.9}$$

$$\overline{a}_1^{(1)} = 0.043 \cdot 1 + 0.392 \cdot 4 + 0.435 \cdot 5 + 0.130 \cdot 9 = 4.956;$$

$$\overline{a}_2^{(1)} = 0.043 \cdot 3 + 0.392 \cdot 8 + 0.435 \cdot 4 + 0.130 \cdot 3 = 5.395^*;$$

$$\overline{a}_3^{(1)} = 0.043 \cdot 4 + 0.392 \cdot 6 + 0.435 \cdot 6 + 0.130 \cdot 2 = 5.394.$$

Полученные значения средних выигрышей поместим в правый дополнительный столбец табл. 2.7.

Таким образом, с учетом результата B_1 эксперимента ξ оптимальной стратегией будет стратегия A_2, при которой средний выигрыш будет максимальным.

Аналогичным образом вычисляем апостериорные вероятности $\widetilde{Q}_{j2}$, $\widetilde{Q}_{j3}$ (j = 1, ..., 4) всех состояний «природы» при условии, что эксперимент дал исходы B_2, B_3 соответственно.

$$\widetilde{Q}_{12} = \frac{Q_1 P(B_2|\Pi_1)}{\sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_2|\Pi_j)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3} = \frac{0.01}{0.34} \approx 0.029;$$

$$\widetilde{Q}_{22} = \frac{0.02}{0.34} \approx 0.059; \quad \widetilde{Q}_{32} = \frac{0.25}{0.34} \approx 0.735; \quad \widetilde{Q}_{42} = \frac{0.06}{0.34} \approx 0.177;$$

$$\widetilde{Q}_{13} = \frac{Q_1 P(B_3|\Pi_1)}{\sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_3|\Pi_j)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.7}{0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4} = \frac{0.07}{0.2} = 0.35;$$

$$\widetilde{Q}_{23} = \frac{0}{0.2} = 0; \quad \widetilde{Q}_{33} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25; \quad \widetilde{Q}_{43} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4.$$

На основе табл. 2.7 составляем расширенную табл. 2.8, куда помещаем рассчитанные значения апостериорных вероятностей при исходах эксперимента B_2, B_3 в две нижние дополнительные строки таблицы соответственно.

Далее рассчитываем для каждого из событий B_2, B_3 средние выигрыши $\overline{a}_i^{(2)}$, $\overline{a}_i^{(3)}$ ($i = 1,2,3$), усредняя их с весами, равными найденным апостериорным вероятностям, аналогично тому, как это было сделано для исхода эксперимента B_1. Результаты помещаем в два дополнительных столбца табл. 2.8.

Таблица 2.8

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\overline{a}_i^{(1)}$	$\overline{a}_i^{(2)}$	$\overline{a}_i^{(3)}$
A_1	1	4	5	9	4.96	**5.533***	**5.2***
A_2	3	8	4	3	**5.395***	4.030	3.25
A_3	4	6	6	2	5.394	5.234	3.7
$\widetilde{Q}_{j1}$	0.043	0.392	0.435	0.130			
$\widetilde{Q}_{j2}$	0.029	0.059	0.735	0.177			
$\widetilde{Q}_{j3}$	0.35	0	0.25	0.4			

Оптимальные значения выигрыша при каждом исходе отмечены звездочками.

Теперь на основании табл. 2.8 мы можем сформулировать правило выбора стратегий.

Если эксперимент ξ *дал результат* B_1, *целесообразно применить стратегию* A_2; *средний выигрыш при этом составит* 5.395. *Если эксперимент дал исход* B_2 *или* B_3, *то предпочтительнее применять стратегию* A_1; *средний выигрыш при исходе* B_2 *составит* 5.533, *а при исходе* B_3 — 5.2.

Теперь можно ответить на вопрос о целесообразности проведения эксперимента исходя из его стоимости.

Рассчитаем среднее значение выигрыша при данном правиле выбора стратегий по формуле:

$$\widetilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{неид}} = \sum_{l=1}^{3} P(B_l) \max_i \overline{a}_i^{(l)},$$

где i — номера стратегий A_i ($i = 1, 2, 3$).

Для этого требуется определить полные вероятности событий B_1, B_2 и B_3.

$$P(B_1) = \sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_1 / П_j) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.46;$$

$$P(B_2) = \sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_2 / П_j) = 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.34;$$

$$P(B_3) = \sum_{j=1}^{4} Q_j P(B_3 / П_j) = 0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.20.$$

Средний выигрыш при применении эксперимента ξ, согласно сформулированному правилу выбора стратегий, равен:

$$\tilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{неид}} = 0.46 \cdot 5.395 + 0.34 \cdot 5.533 + 0.2 \cdot 5.2 = 5.403.$$

Теперь по формуле (2.3.1) найдем средний выигрыш, который мы получим при отсутствии эксперимента. Для этого необходимо найти средние выигрыши при применении каждой из стратегий:

$$\tilde{a}_1 = 0.1 \cdot 1 + 0.2 \cdot 4 + 0.5 \cdot 5 + 0.2 \cdot 9 = 5.2^*;$$

$$\tilde{a}_2 = 0.1 \cdot 3 + 0.2 \cdot 8 + 0.5 \cdot 4 + 0.2 \cdot 3 = 4.5;$$

$$\tilde{a}_3 = 0.1 \cdot 4 + 0.2 \cdot 6 + 0.5 \cdot 6 + 0.2 \cdot 2 = 5.0.$$

Максимальное из этих вычисленных значений и составит средний выигрыш при отсутствии эксперимента:

$$\tilde{a} = \max_i \tilde{a}_i = \max(5.2,\ 4.5,\ 5.0) = 5.2.$$

Таким образом, выполнение эксперимента увеличивает средний выигрыш на величину

$$\tilde{a}_{\text{эксп}}^{\text{неид}} - \tilde{a} = 5.403 - 5.2 = 0.203\,.$$

Откуда следует, что проведение эксперимента целесообразно, если его стоимость меньше 0.203, в противном случае проведение эксперимента нецелесообразно.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ КОНФЛИКТАХ

3.1. Биматричные игровые задачи

Теория антагонистических игр применима лишь в тех случаях, когда можно определить общий критерий эффективности для двух конкурирующих сторон, одна из которых заинтересована в увеличении, а другая в уменьшении значения этого критерия. Однако значительно чаще встречаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными. Например, при встрече боевых единиц двух воюющих сторон (скажем, танков) их обоюдное стремление уничтожить друг друга не выражает антагонистичности конфликта. В антагонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными: стремлению одной стороны уничтожить другую противоположным будет стремление избежать уничтожения. Если для оценки действий каждой стороны необходимо определить отдельный критерий эффективности, игра имеет ненулевую сумму. В случае когда участников конфликта — два, и критерии для конфликтующих сторон различны, ситуация описывается в классе биматричных игровых задач.

Биматричной называется конечная бескоалиционная игра двух лиц.

Биматричная игра описывается матрицами выигрышей конфликтующих сторон.

Пусть у игрока A имеется m стратегий, а у игрока B — n стратегий. Выигрыши игроков задаются матрицами:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{B}=\begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array}.$$

Здесь **A** — это платежная матрица игрока A, а **B** — платежная матрица игрока B. Размерности матриц **A** и **B** обязательно совпадают. Пусть, к примеру, игрок A применяет свою стратегию A_1, а игрок B — стратегию B_n. Тогда выигрыши игроков в данной ситуации будут находиться в соответствующих платежных матрицах на пересечении первой строки и n-го столбца: выигрыш стороны A составит a_{1n}, а выигрыш стороны B — b_{1n}. Элементы матриц, имеющие знак «минус», означают величину проигрыша игрока в соответствующей ситуации.

Рассмотрим пример построения модели биматричной игры.

Пример 3.1. «Студент–Преподаватель» [5].

Рассмотрим следующую ситуацию. Студент (игрок A) готовится к зачету, который будет принимать Преподаватель (игрок B). Можно считать, что у студента две стратегии — подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (–). У Преподавателя также две стратегии — поставить зачет [+] и не поставить зачет [–]. Составить модель биматричной игры.

Решение. В основу значений матриц выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш Студента

	[+]	[–]
(+)	оценка заслужена	очень обидно
(–)	удалось обмануть	оценка заслужена

Выигрыш Преподавателя

	[+]	[–]
(+)	все нормально	был неправ
(–)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это, к примеру, можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [+] & [-] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (+) \\ (-) \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [+] & [-] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (+) \\ (-) \end{array}$$

После построения модели задачи можно перейти к нахождению решения.

Будем считать полный набор вероятностей применения игроком A своих чистых стратегий $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, ..., x_m)$ смешанной стратегией игрока A; соответственно $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, ..., y_n)$ — смешанная стратегия игрока B. Смешанные стратегии игроков должны удовлетворять следующим очевидным условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.1}$$

С помощью смешанных стратегий рассчитываются средние выигрыши H_A, H_B игроков A и B соответственно.

$$H_A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{Ay};$$

$$H_B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{By}.$$

Далее возникает естественный вопрос: всегда ли в биматричной игре существует равновесная ситуация (т. е. такая ситуация, отклонение от которой любого из игроков может лишь привести к уменьшению его выигрыша при условии, что второй игрок сохраняет свой выбор)? Ответ на этот вопрос дает теорема Нэша.

Теорема Нэша (*основная теорема биматричных игр*). ***Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, возможно, в смешанных стратегиях.***

Ситуация равновесия для биматричной игры представляет собой пару таких смешанных стратегий $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \mathbf{Ay}^* \leq (\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} \mathbf{Ay}^*)(\mathbf{1})_{m\times 1} = H_A (\mathbf{1})_{m\times 1}; & (3.1.2) \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^* \leq (\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} \mathbf{By}^*)(\mathbf{1})_{n\times 1} = H_B (\mathbf{1})_{n\times 1}, & (3.1.3) \end{cases}$$

где $(\mathbf{1})_{m\times 1}$, $(\mathbf{1})_{n\times 1}$ — векторы размерности $(m\times 1)$, $(n\times 1)$ соответственно, состоящие из одних единиц.

Для определения ситуации равновесия необходимо решить систему неравенств (3.1.2), (3.1.3) относительно $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$ при условиях нормировки (3.1.1).

3.2. Отношения доминирования в биматричных играх

Прежде чем приступить к определению ситуации равновесия в биматричной игровой задаче, необходимо по возможности сократить размерность задачи. Для этого заведомо невыгодные стратегии удаляют, применяя отношения доминирования.

Отношения доминирования в биматричной игре отличаются от отношений доминирования в антагонистической игре и базируются на исходных данных задачи (какие матрицы предлагаются для решения — выигрышей или проигрышей) и на критериях задачи.

Среди наиболее часто встречающихся критериев можно выделить следующие.

1. Заданы матрицы выигрышей сторон А и В. Применить отношения доминирования, если:
   а) сторона А хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны В;
   б) сторона В хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны А;
   в) каждая из сторон хочет максимизировать свой выигрыш;
   г) каждая из сторон хочет минимизировать выигрыш противника.
2. Заданы матрицы проигрышей сторон А и В. Применить отношения доминирования, если:
   а) сторона А хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш стороны В;
   б) сторона В хочет минимизировать свой проигрыш и максимизировать проигрыш стороны А;
   в) каждая из сторон хочет минимизировать свой проигрыш;
   г) каждая из сторон хочет максимизировать проигрыш противника.

Рассмотрим алгоритмы упрощения некоторых игровых задач с использованием приведенных критериев.

Алгоритм упрощения задачи 1.а

Сначала рассмотрим первый критерий задачи 1.а по редуцированию (уменьшению) размерности — сторона А хочет максимизировать свой выигрыш.

1. Определяем, с какой матрицей будем работать. Поскольку речь идет о выигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. **матрицу А**.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются **по строкам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона А хочет максимизировать свой выигрыш, те свои стратегии, которые содержат меньший выигрыш, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **А** подлежат **доминируемые** строки согласно условию: если $a_{ik} \le a_{jk}$ для

$\forall k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **A**.

4. Поскольку сторона A отказалась от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **B**, независимо от ее элементов.

Теперь перейдем ко второму критерию задачи 1.а — сторона A хочет минимизировать выигрыш стороны B.

1. Поскольку речь идет о выигрышах стороны B, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. **матрицу B**.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона A, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются **по строкам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. В связи с тем что сторона A хочет минимизировать выигрыш стороны B, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **B** подлежат **доминирующие** строки согласно условию: если $b_{ik} \geq b_{jk}$ для $\forall k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **B**.

4. Поскольку сторона A отказалась от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **A**, независимо от ее элементов.

Пример 3.2 (упрощение задачи 1.а). Заданы матрицы выигрышей сторон A и B:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}.$$

Требуется редуцировать размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что сторона A хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш стороны B.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи — сторона A хочет максимизировать свой выигрыш.

По этому критерию из матрицы **A** удаляются доминируемые строки. При сравнении выигрышей при стратегиях A_2 и A_4 видно, что все элементы 4-й строки больше соответствующих элементов 2-й строки, следовательно, из матрицы **A** удаляется 2-я строка. Автоматически удаляется 2-я строка и из матрицы **B**.

Таким образом, после применения первого критерия матрицы выигрышей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}.$$

Рассмотрим второй критерий — сторона A хочет минимизировать выигрыш стороны B.

По данному критерию из матрицы **B** удаляются доминирующие строки. Строка, соответствующая стратегии A_3, является доминирующей по отношению к строке, соответствующей стратегии A_1, и удаляется из матрицы **B**.

Соответственно из матрицы **A** также удаляется строка, соответствующая стратегии A_3.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы выигрышей принимают следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_4 \end{matrix} \end{array}.$$

Алгоритм упрощения задачи 1.г

Сначала рассмотрим первый критерий задачи 1.г — сторона A хочет минимизировать выигрыш стороны B.

1. Поскольку речь идет о выигрышах стороны B, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. **матрицу B**.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона A, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются **по строкам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона A хочет минимизировать выигрыш стороны B, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **B** подлежат **доминирующие** строки согласно условию: если $b_{ik} \geq b_{jk}$ для $\forall k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая строка удаляется из матрицы **B**.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **A**, независимо от ее элементов.

Теперь перейдем ко второму критерию задачи — сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А.

1. Так как речь идет о выигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные выигрыши, т. е. **матрицу A**.

2. Активной в данном критерии является сторона В. Следовательно, управлять она может только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются **по столбцам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих столбцов.

3. Поскольку сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А, те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **A** подлежат **доминирующие** столбцы согласно условию: если $a_{jk} \geq a_{jl}$ для $\forall j = 1, \ldots, m$, стратегия B_k не используется и соответствующий ей столбец удаляется из матрицы **A**.

4. В связи с тем что сторона В отказалась от использования своей стратегии B_k, соответствующий ей столбец автоматически удаляется также и из матрицы **B**, независимо от ее элементов.

Пример 3.3 (упрощение задачи 1.г.). Заданы матрицы выигрышей сторон А и В:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет минимизировать выигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи – сторона А хочет минимизировать выигрыш стороны В.

По этому критерию из матрицы **B** удаляются доминирующие строки. При сравнении выигрышей при стратегиях A_1 и A_3 видно, что все элементы 3-й строки больше соответствующих элементов 1-й строки, следовательно, из матрицы **B** удаляется 3-я строка. Автоматически удаляется 3-я строка и из матрицы **A**.

Таким образом, после применения первого критерия матрицы выигрышей выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Перейдем ко второму критерию — сторона В хочет минимизировать выигрыш стороны А.

По данному критерию из матрицы **А** удаляются доминирующие столбцы. Столбец B_1 является доминирующим по отношению к столбцу B_3 и удаляется из матрицы. Соответственно, из матрицы **В** также удаляется первый столбец.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы выигрышей принимают следующий вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Алгоритм упрощения задачи 2.г

Рассмотрим первый критерий задачи 2.г — сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В.

1. Поскольку речь идет о проигрышах стороны В, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные проигрыши, т. е. **матрицу В**.

2. Активной (или действующей) в данном критерии является сторона А, следовательно, управлять она может только своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются **по строкам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих строк.

3. Так как сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В, те свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **В** подлежат **доминируемые** строки согласно условию: если $b_{ik} \le b_{jk}$ для $\forall k = 1, \dots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **В**.

4. Поскольку сторона А отказалась от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **А**, независимо от ее элементов.

Рассмотрим второй критерий задачи — сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А.

1. Так как речь идет о проигрышах стороны А, выбираем для сокращения ту матрицу, которая содержит данные проигрыши, т. е. **матрицу А**.

2. Активной в данном критерии является сторона В. Следовательно, управлять она может только своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются **по столбцам**. Следовательно, сравнивать между собой мы будем элементы соответствующих столбцов.

3. Поскольку сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А, те свои стратегии, которые содержат меньший проигрыш для противника, она применять не будет. Таким образом, удалению из матрицы **А** подлежат **доминируемые** столбцы согласно условию: если $a_{jl} \geq a_{jk}$ для $\forall j = 1, \ldots, m$, стратегия B_k не используется и соответствующий столбец удаляется из матрицы **А**.

4. В связи с тем что сторона В отказалась от использования своей стратегии B_k, соответствующий ей столбец автоматически удаляется также и из матрицы **В**, независимо от ее элементов.

5. Поскольку алгоритмы определения оптимальных стратегий в качестве исходных данных предполагают наличие матриц выигрыша, переходим к матрицам выигрыша, полагая, что проигрыш противника есть наш выигрыш. Другими словами, меняем матрицы местами.

Пример 3.4 (упрощение задачи 2.г). Заданы матрицы проигрышей сторон А и В:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}.$$

Требуется сократить размерность задачи за счет исключения заведомо невыгодных стратегий с помощью отношений доминирования при условии, что каждая из сторон хочет максимизировать проигрыш противника.

Решение. Рассмотрим первый критерий задачи — сторона А хочет максимизировать проигрыш стороны В.

По этому критерию из матрицы **В** удаляются доминируемые строки. При сравнении проигрышей при стратегиях A_1 и A_3 видно, что все элементы 1-й строки меньше соответствующих элементов 3-й строки, следовательно, из матрицы **В** удаляется 1-я строка. Автоматически удаляется 1-я строка и из матрицы **А**.

Таким образом, после применения первого критерия матрицы проигрышей выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Перейдем к рассмотрению второго критерия — сторона В хочет максимизировать проигрыш стороны А.

По данному критерию из матрицы **А** удаляются доминируемые столбцы. Столбец B_2 является доминируемым по отношению к столбцу B_3 и удаляется из матрицы. Соответственно, из матрицы **В** также удаляется второй столбец.

Таким образом, после применения отношений доминирования матрицы проигрышей принимают следующий вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

Далее переходим к матрицам выигрыша: матрицей **А** становится матрица **В**, а матрицей **В** становится матрица **А**.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array}.$$

При выборе других критериев рассуждения проводятся аналогичным образом.

3.3. Графический способ решения биматричных задач 2×2

Предположим, что заведомо невыгодные стратегии из матриц игры удалены, следовательно, можно приступить к определению ситуации равновесия [4].

Пусть каждый игрок имеет по две стратегии. В этом случае матрицы **А** и **В** будут следующие:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков в игре 2×2 имеют вид

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x \quad 1-x); \quad \mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (y \quad 1-y), \quad 0 \le x \le 1; \; 0 \le y \le 1.$$

Средние выигрыши игроков рассчитываются следующим образом:

$$H_A = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} = (x \quad 1-x) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) xy + (a_{12} - a_{22}) x + (a_{21} - a_{22}) y + a_{22}; \quad (3.3.1)$$

$$H_B = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \mathbf{y} = (x \quad 1-x) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}) xy + (b_{12} - b_{22}) x + (b_{21} - b_{22}) y + b_{22}. \quad (3.3.2)$$

Запишем условия равновесия (3.1.2), (3.1.3) для данной задачи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le H_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} \le H_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11} y + a_{12}(1-y) \le H_A; \\ a_{21} y + a_{22}(1-y) \le H_A. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{cases} b_{11} x + b_{21}(1-x) \le H_B; \\ b_{12} x + b_{22}(1-x) \le H_B. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Подставляя цену игры H_A из соотношения (3.3.1) в условие (3.3.3), получим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1-x) y + (a_{12} - a_{22})(1-x) \le 0; \\ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) xy + (a_{12} - a_{22}) x \ge 0. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = a_1; \\ a_{22} - a_{12} = a_2. \end{cases}$$

Тогда система (3.3.5) примет вид

$$\begin{cases} a_1 (1-x) y - a_2 (1-x) \le 0; & (3.3.6) \\ a_1 xy - a_2 x \ge 0. & (3.3.7) \end{cases}$$

Таким образом, множество всех приемлемых стратегий для игрока А удовлетворяет условиям (3.3.6) и (3.3.7). Чтобы найти x, рассмотрим 3 случая:

1) если $x = 0$, условие (3.3.7) справедливо для всех y, а условие (3.3.6) принимает вид

$$a_1 y - a_2 \le 0; \tag{3.3.8}$$

2) если $x = 1$, условие (3.3.6) выполняется для всех y, а условие (3.3.7) имеет вид

$$a_1 y - a_2 \ge 0; \tag{3.3.9}$$

3) если $0 < x < 1$, разделим правую и левую части неравенства (3.3.6) на $(1 - x)$, а правую и левую части неравенства (3.3.7) на x, в результате получим

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \le 0 \\ a_1 y - a_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 y - a_2 = 0. \tag{3.3.10}$$

Таким образом, множество решений системы, содержащей условия (3.3.6) и (3.3.7), — обозначим его K — состоит из всех ситуаций вида:

1) $(0, y)$, если $a_1 y - a_2 \le 0$; $0 \le y \le 1$;
2) (x, y), если $a_1 y - a_2 = 0$; $0 \le y \le 1$, $0 < x < 1$;
3) $(1, y)$, если $a_1 y - a_2 \ge 0$; $0 \le y \le 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, решением будет являться весь единичный квадрат $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, так как условия (3.3.8)– (3.3.10) удовлетворяются при всех значениях x и y.

Если $a_1 = 0$, $a_2 \ne 0$, то выполняется либо условие (3.3.8), либо (3.3.9), поэтому решением является либо $x = 0$, либо $x = 1$.

Если $a_1 > 0$, то получаем следующие решения:

а) из соотношения (3.3.8) $\Rightarrow x = 0,\ y \le \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

б) из соотношения (3.3.9) $\Rightarrow x = 1,\ y \ge \alpha$;

в) из соотношения (3.3.10) $\Rightarrow 0 < x < 1,\ y = \alpha$.

Если $a_1 < 0$, решения будут следующими:

а) из соотношения (3.3.8) $\Rightarrow x = 0,\ y \ge \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

б) из соотношения (3.3.9) $\Rightarrow x = 1,\ y \le \alpha$;

в) из соотношения (3.3.10) $\Rightarrow 0 < x < 1,\ y = \alpha$.

Графическая интерпретация множества решений K игрока A показана на рис. 3.1: *а* — при $a_1 > 0$, *б* — при $a_1 < 0$.

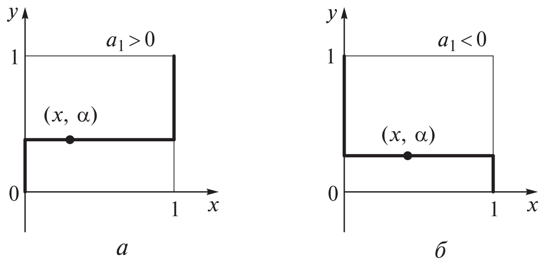


Рис. 3.1

Для игрока В исследования будут аналогичны.

Подставим в условие (3.3.4) выражение (3.3.2) для среднего выигрыша H_B и введем следующие обозначения:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22};$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21}.$$

Тогда множество L приемлемых для игрока В решений состоит из всех ситуаций вида:

1) $(x, 0)$, если $b_1 y - b_2 \le 0;\ 0 \le x \le 1;$

2) (x, y), если $b_1 y - b_2 = 0;\ 0 \le x \le 1,\ 0 < y < 1;$

3) $(x, 1)$, если $b_1 y - b_2 \ge 0;\ 0 \le x \le 1.$

Если $b_1 = b_2 = 0$, решением является весь единичный квадрат: $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.

Если $b_1 = 0,\ b_2 \ne 0$, то решением будет либо $y = 0$, либо $y = 1$.

Если $b_1 > 0$, то решение будет следующее:

$$y = 0, \qquad x \le \frac{b_2}{b_1} = \beta;$$

$$y = 1, \qquad x \ge \beta;$$

$$0 < y < 1, \quad x = \beta.$$

Если $b_1 < 0$, то получаем решение:

$$y = 0, \qquad x \ge \beta;$$

$$y = 1, \qquad x \le \beta;$$

$$0 < y < 1, \quad x = \beta.$$

Графическая интерпретация множества решений L игрока В показана на рис. 3.2: *а* — при $b_1 > 0$, *б* — при $b_1 < 0$.

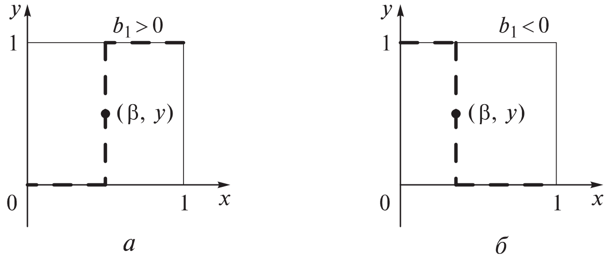


Рис. 3.2

Решением игры является пересечение множеств K и L, т. е. те значения x и y, которые являются общими для этих множеств. Графическая интерпретация решения биматричной игры представлена на рис. 3.3.

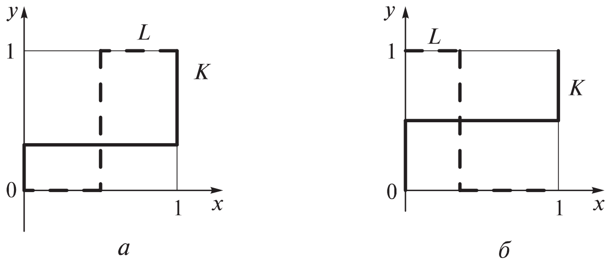


Рис. 3.3

При этом зигзаги K и L могут быть как противоположной (рис. 3.3, *а*), так и одинаковой направленности (рис. 3.3, *б*). В первом случае зигзаги имеют три точки пересечения, а во втором — одну. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (3.3.1), (3.3.2), если в них подставить полученные значения x и y. Очевидно, что величина α входит в смешанную стратегию игрока В, хотя зависит только от выигрышей игрока А; величина β входит в смешанную стратегию игрока А, хотя зависит только от выигрышей игрока В.

Рассмотрим пример.

Пример 3.5. Министерство желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложения министерства или отказать. Министерство — игрок А — имеет две стратегии: строить объект 1, строить объект 2. Город — игрок В — также имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(например: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство решает строить объект 1 , а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн у. е., а министерство теряет 10 млн у. е. и т. д.).

Решение. Определим множество решений *K* игрока А. Для этого сначала рассчитаем значение α:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14 < 0;$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3;$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-14} = \frac{3}{14}.$$

Так как $a_1 < 0$, то множество решений *K* имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (0; y) \ \text{при} \ \dfrac{3}{14} \le y \le 1; \\ \left(x; \dfrac{3}{14}\right) \ \text{при} \ 0 \le x \le 1; \\ (1; y) \ \text{при} \ 0 \le y \le \dfrac{3}{14}. \end{cases}$$

Получим множество решений *L* игрока В. Для этого рассчитаем значение β:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9 > 0;$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2;$$

$$\beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{9}.$$

Так как $b_1 > 0$, множество решений *L* имеет вид

$$\begin{cases} (x; 0) \ \text{при} \ 0 \le x \le \dfrac{2}{9}; \\ \left(\dfrac{2}{9}; y\right) \ \text{при} \ 0 \le y \le 1; \\ (x; 1) \ \text{при} \ \dfrac{2}{9} \le x \le 1. \end{cases}$$

Пересечение множеств L и K — это точка C с координатами $\left(x=\frac{2}{9}; y=\frac{3}{14}\right)$, которые и определяют оптимальные стратегии соответственно министерства и города. Графическая интерпретация решения данной игры представлена на рис. 3.4.

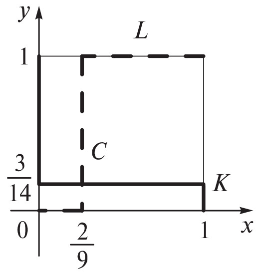


Рис. 3.4

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{11}{14}\end{bmatrix}.$$

При этом выигрыши сторон соответственно равны:

$$H_A=(x \quad 1-x)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=-\frac{4}{7};$$

$$H_B=(x \quad 1-x)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=\frac{1}{3};$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{11}{14}\end{bmatrix}$; $H_A=-\frac{4}{7}$; $H_B=\frac{1}{3}$.

3.4. Аналитический метод решения биматричных игровых задач $m\times n$. Алгоритм Лемке–Хоусона

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы выигрышей соответственно игроков А и В размерности $(m\times n)$; m — число чистых стратегий игрока А; n — число чистых стратегий игрока В; $\mathbf{x}^*$ — вектор смешанных стратегий стороны А размерности $(m\times 1)$; $\mathbf{y}^*$ — вектор смешанных стратегий стороны В размерности $(n\times 1)$. Запись $\mathbf{A}>0$ означает, что все элементы матрицы $\mathbf{A}$ положительны; запись $\mathbf{x}\geq 0$ означает, что все компоненты вектора $\mathbf{x}$ неотрицательны. Через $(\mathbf{1})_{m\times 1}$, $(\mathbf{1})_{n\times 1}$ обозначим векторы размерности $(m\times 1)$ и $(n\times 1)$ соответственно, состоящие из одних единиц; через **E** обозначим матрицу размерности ($m \times n$), все элементы которой равны единице: $e_{ij} = 1, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$.

Проведем вычисление ситуаций равновесия по Нэшу для матриц выигрышей **A** и **B** на основе условий (3.1.1)–(3.1.3) [9].

Если ввести в рассмотрение величину

$$d = \max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1, \quad i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n,$$

и перейти от первоначальных матриц **A** и **B** к матрицам

$$\mathbf{A}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{A} > 0;$$

$$\mathbf{B}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{B} > 0;$$

можно получить систему неравенств и уравнений, эквивалентную условиям (3.1.1)–(3.1.3), но более удобную для решения:

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} \geq (\mathbf{1})_{n \times 1}; \tag{3.4.1}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} \geq 0; \tag{3.4.2}$$

$$(\tilde{\mathbf{y}}, (\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{1})_{n \times 1})) = 0; \tag{3.4.3}$$

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{y}} \geq (\mathbf{1})_{m \times 1}; \tag{3.4.4}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} \geq 0; \tag{3.4.5}$$

$$(\tilde{\mathbf{x}}, (\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{1})_{m \times 1})) = 0; \tag{3.4.6}$$

Соотношение (3.4.1) может быть приведено к виду

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} \leq (d \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i - 1)(\mathbf{1})_{n \times 1} \tag{3.4.7}$$

и после нормировки

$$\mathbf{x}^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}$$

станет эквивалентно условию (3.1.3):

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^* \leq \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} \right) (\mathbf{1})_{n \times 1}.$$

Если к условию (3.4.1) добавить соотношение

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y}^{*}=d-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{x}_i},$$

определяющее цену игры и эквивалентное условию

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}d\mathbf{E}\tilde{\mathbf{y}}-(\mathbf{1})_{n\times 1}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}$$

или

$$(\tilde{\mathbf{y}},(\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}-(\mathbf{1})_{n\times 1}))=0,$$

то получим, что соотношение (3.1.3) будет выполняться при выполнении условий (3.4.1)–(3.4.3).

Аналогично, соотношение (3.1.2) будет выполняться при выполнении условий (3.4.4)–(3.4.6).

После определения пары равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, а также цены игры H_A, H_B определяются из соотношений

$$\mathbf{x}^*=\frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{x}_i},\qquad \mathbf{y}^*=\frac{\tilde{\mathbf{y}}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{y}_j};\tag{3.4.8}$$

$$H_A=d-\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{y}_j};\; H_B=d-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{x}_i}.\tag{3.4.9}$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (3.4.1)–(3.4.6).

Описание алгоритма Лемке–Хоусона

I. ***Вычисление матриц*** $\mathbf{A}_1$ ***и*** $\mathbf{B}_1$.

1. Определяем число d в соответствии с выражением

$$d=\max_{i,j}(a_{ij},b_{ij})+1,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$$

2. Выполняем преобразования:

$$\mathbf{A}_1=d\mathbf{E}-\mathbf{A};$$

$$\mathbf{B}_1=d\mathbf{E}-\mathbf{B};$$

$$e_{ij}=1,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$$

где $\mathbf{E}$ — матрица, состоящая из одних единиц, той же размерности, что и матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

II. ***Определение начальных значений векторов стратегий*** $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$.

3. Формируем таблицу $\mathbf{A}_0^*$ в следующем виде:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1^1 & \dots & \mathbf{a}_m^1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} a_{11}^1 & \dots & a_{m1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12}^1 & \dots & a_{m2}^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^1 & \dots & a_{mn}^1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Таблица $\mathbf{A}_0^*$ состоит из матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$ и единичной матрицы $\mathbf{I}_{n\times n}$ размерности $n\times n$, которая соответствует начальному базису ($\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$).

4. Выбираем начальное значение $\mathbf{y}^0$:

$$\mathbf{y}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{a} \quad 0 \quad \dots \quad 0\right),$$

где $a = \min\limits_i a_{i1}^1$, $i = 1, \dots, m$ — минимальный элемент первого столбца матрицы $\mathbf{A}_1$ (или первой строки $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$, входящей в таблицу $\mathbf{A}_0^*$). Данный элемент будет разрешающим для данной таблицы при последующем симплекс-преобразовании. Обозначим через i^* то значение индекса i, для которого достигается данный минимум.

5. Формируем таблицу $\mathbf{B}_0^*$ в виде

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{b}_1^1 & \dots & \mathbf{b}_n^1 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} b_{11}^1 & \dots & b_{1n}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}^1 & \dots & b_{2n}^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}^1 & \dots & b_{mn}^1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Таблица $\mathbf{B}_0^*$ состоит из матрицы $\mathbf{B}_1$ и единичной матрицы $\mathbf{I}_{m\times m}$ размерности $m\times m$, которая соответствует начальному базису ($\mathbf{f}_1$, ..., $\mathbf{f}_m$).

6. Выбираем начальное значение $\mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{x}_{1\times m}^{0\mathrm{T}} = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{1}{b} \quad 0 \quad \dots \quad 0\right),$$

где $b = \min\limits_j b_{i^* j}^1$, $j = 1, \dots, n$ (b — минимальный элемент i^*-й строки матрицы $\mathbf{B}_1$). Этот элемент будет разрешающим для данной таблицы при последующем симплекс-преобразовании. Обозначим через j^* то значение индекса j, для которого достигается данный минимум. При этом i^*-й элемент вектора $\mathbf{x}_0$ равен $\frac{1}{b}$, остальные равны нулю.

III. ***Проверка условий равновесия.***

7. Выполнение условий равновесия можно проверить одним из двух способов.

Способ А. Проверяем выполнение соотношений

$$(\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{x}^0 - 1) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(\mathbf{f}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^0)(\mathbf{a}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{y}^0 - 1) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{a}_i^1$, $\mathbf{e}_j$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$; а $\mathbf{b}_j^1$, $\mathbf{f}_i$ — столбцы таблицы $\mathbf{B}_0^*$.

Если хотя бы одно из этих соотношений не выполняется, то переходим к пункту 8 алгоритма. Если все условия выполняются, то переходим к пункту 15.

Способ В. Определяем множества $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y})$.

В множество $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ входят те элементы $\mathbf{f}_i$, для которых выполняется соотношение $\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = 0$, и те элементы $\mathbf{b}_j^1$, для которых выполняется условие $\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{x} - 1 = 0$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}_i, \mathbf{b}_j^1 \mid \mathbf{f}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = 0,\ \mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{x} - 1 = 0\}.$$

Аналогично находится множество $\mathbf{q}(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_i^1 \mid \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{y} = 0,\ \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}} \mathbf{y} - 1 = 0\}.$$

Можно показать, что множества $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ имеют вид

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{i^*-1}, \mathbf{b}_{j^*}, \mathbf{f}_{i^*+1}, \ldots, \mathbf{f}_m\};$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}^0) = \{\mathbf{a}_{i^*}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}.$$

Проверка условий равновесия производится с использованием множества $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{e}_r, \mathbf{f}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{e}_r \in M(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ если } \mathbf{e}_r \in \mathbf{q}(\mathbf{y}) \text{ или } \mathbf{b}_r^1 \in \mathbf{p}(x) \\ \mathbf{f}_s \in M(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ если } \mathbf{f}_s \in \mathbf{p}(\mathbf{x}) \text{ или } \mathbf{a}_s^1 \in \mathbf{q}(\mathbf{y}) \end{array} \right\}.$$

Если $M(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$, то $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ — ситуация равновесия. Если условия равновесия выполняются, то переходим к пункту 15, иначе к пункту 8.

IV. ***Замена базисов.***

8. Заменяя базисы $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ на $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ и $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ на $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$, составляем с помощью симплекс-преобразования новые таблицы $\mathbf{A}_1^*$ и $\mathbf{B}_1^*$.

Номер строки, в которой находится разрешающий элемент, совпадает с номером столбца $\mathbf{e}$ или $\mathbf{f}$, который из базиса выводится.

Тот столбец, в котором находится разрешающий элемент, в базис вводится.

Чтобы составить таблицу $\mathbf{A}_1^*$, надо исключить из базиса вектор $\mathbf{e}_1$ и ввести вместо него вектор $\mathbf{a}_{i^*}$. Это выполняется, как в симплекс-методе: строка, содержащая разрешающий элемент (на первой итерации — это первая строка), делится на этот разрешающий элемент; из всех остальных строк таблицы $\mathbf{A}_0^*$ вычитается строка с разрешающим элементом, умноженная на коэффициенты, подобранные так, чтобы i^*-й элемент во всех строках, кроме строки с разрешающим элементом, обратился в ноль.

В результате получаем такую таблицу:

$$\mathbf{A}_1^* = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{i^*-1,1} & 1 & \alpha_{i^*+1,1} & \dots & \alpha_{m1} & q^{11} & \dots & q^{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{i^*-1,2} & 0 & \alpha_{i^*+1,2} & \dots & \alpha_{m2} & q^{21} & \dots & q^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{i^*-1,n} & 0 & \alpha_{i^*+1,n} & \dots & \alpha_{mn} & q^{n1} & \dots & q^{nn} \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccccccc} \xi_1-1 & \xi_2-1 & \dots & \xi_{i^*-1}-1 & \xi_{i^*}-1 & \xi_{i^*+1}-1 & \dots & \xi_m-1 & y_1^0 & \dots & y_n^0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \\ \end{array}$$

Здесь

$$\alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^1}{a_{i^*1}^1}, \quad \alpha_{ij} = a_{ij}^1 - \alpha_{i1} a_{i^*j}^1 \quad \text{для } j \neq 1.$$

9. Записываем в строке под таблицей $\mathbf{A}_1^*$ под первоначальным базисом $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ вектор $\mathbf{y}^{0\mathrm{T}} = (y_1^0 \;\; y_2^0 \;\; \dots \;\; y_n^0)$, как это сделано выше.

Вычисляем значения $\xi_i = \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}} \mathbf{y}^0$ при $i = 1, \dots, m$, где $\mathbf{a}_i^1$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$. Вносим значения $\xi_i - 1$ в строку под таблицей $\mathbf{A}_1^*$, как это показано выше.

10. Для j-й строки полученной таблицы вычисляем значения λ_j^* и λ_j^{**} по следующим формулам:

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{ -\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}} \right\}; \qquad \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{ -\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}} \right\}.$$

Либо число λ_j^*, либо число λ_j^{**} будет равно нулю.

Введем в столбец $\boldsymbol{\lambda}$, который находится справа от матрицы $\mathbf{A}_1^*$, в качестве λ_j то из чисел λ_j^* или λ_j^{**}, которое отлично от нуля. Если $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$, то вводим ноль. Справа от λ_j укажем, за счет какого столбца было получено соответствующее число.

11. Аналогично формируется таблица $\mathbf{B}_1^*$, только вместо чисел λ_j получим числа μ_i, где $i=1, \ldots, m$, вместо значений $\xi_i - 1$ в нижней строке будут фигурировать $\eta_j - 1$, вместо q^{ji} получим p^{ij}.

V. ***Определение оптимальных стратегий и цен игры.***

12. Определяем возможные значения стратегий $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^{0\mathrm{T}} + \mu_i \mathbf{p}^i, \ i = 1, \ldots, m, \\ \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{0\mathrm{T}} + \lambda_j \mathbf{q}^j, \ j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\mathbf{p}^i$, $\mathbf{q}^j$ — строки матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, входящих в преобразованные таблицы $\mathbf{B}_1^*$ и $\mathbf{A}_1^*$.

13. Находим множества $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ для $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$. Для значения λ_j соответствующий минимум (при $\lambda_j = \lambda_j^*$) или максимум (при $\lambda_j = \lambda_j^{**}$) достигается для одного из отношений

$$-\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}} \text{ или } -\frac{y_r^0}{q^{jr}}.$$

Пусть это будет, к примеру, $\left(-\dfrac{\xi_m - 1}{\alpha_{mj}}\right)$, тогда

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_j) = \{\mathbf{q}(\mathbf{y}^0) \cup \mathbf{a}_m\} \setminus \{\mathbf{e}_j\}.$$

Аналогично находим $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) \cup \mathbf{b}_m\} \setminus \{\mathbf{f}_i\}.$$

14. Для каждой пары $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ определяем множество $M(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ и проверяем условия равновесия, как в пункте 7. Если условия равновесия выполняются, то переходим к пункту 15. Если условия равновесия не выполняются ни для одной пары, то переходим к пункту 4 алгоритма и производим поиск минимального элемента во второй строке матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$, входящей в таблицу $\mathbf{A}_0^*$. Начальное значение $\mathbf{y}^0$ будет следующего вида:

$$\mathbf{y}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выполняются все последующие этапы алгоритма, вплоть до проверки условий равновесия. В случае если условия равновесия не выполняются и на второй итерации алгоритма, переходим к третьей итерации путем поиска минимального элемента уже в третьей строке матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$ и составления соответствующего вектора $\mathbf{y}^0$, где элемент $\frac{1}{a}$ будет уже на третьем месте, и т. д.

15. Если известно равновесное решение $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, то оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ и цены игры H_A, H_B находятся исходя из соотношений (3.4.8), (3.4.9):

$$\mathbf{x}^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}; \qquad \mathbf{y}^* = \frac{\tilde{y}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j};$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}; \qquad H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}.$$

Пример 3.6. Найти решение следующей игровой задачи с помощью алгоритма Лемке–Хоусона:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

I. ***Вычисление матриц*** $\mathbf{A}_1$ ***и*** $\mathbf{B}_1$:

1. $d = \max\limits_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1 = 9 + 1 = 10.$

2. $$\mathbf{A}_1 = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1 = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

II. ***Определение начальных значений векторов стратегий*** $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$.

3. Формируем таблицу $\mathbf{A}_0^*$ в виде блочной матрицы $\mathbf{A}_0^* = (\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{I}_{n \times n})$:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1^1 & \mathbf{a}_2^1 & \mathbf{a}_3^1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

4. Выбираем начальное значение $\mathbf{y}^0$:

$a = \min\limits_i a_{i1}^1 = 2, \quad i = 1, \ldots, m;$

$$\mathbf{y}_{1 \times n}^{0\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фиксируем номер столбца, для которого достигается данный минимум: $i^* = 3$.

5. Формируем таблицу $\mathbf{B}_0^*$ в виде следующей блочной матрицы $\mathbf{B}_0^* = (\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \mathbf{I}_{m\times m})$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_3^1 & \mathbf{b}_4^1 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{array} \\ \mathbf{B}_0^* = & \left[\begin{array}{cccc:ccc} 8 & 3 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

6. Выбираем начальное значение $\mathbf{x}^0$:

$$b = \min_j b_{i^* j}^1 = 2, \quad j = 1, \ldots, n$$

(b — минимальный элемент i^*-й строки матрицы $\mathbf{B}_1$);

$$\mathbf{x}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Фиксируем номер столбца, для которого достигается данный минимум: $j^* = 2$.

III. ***Проверка условий равновесия.***

7. **Способ А.** Проверяем выполнение первой группы условий:

$$(\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{x}^0 - 1) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для $j = 1$

$$(\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_1^{1\mathrm{T}} \mathbf{x}^0 - 1) =$$

$$= \left([1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left([8 \quad 1 \quad 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 1 \right) = \frac{1}{2}(3-1) = 1 \neq 0.$$

Как видно, уже первое соотношение не выполняется, следовательно, остальные соотношения можно не проверять — на данный момент стратегии $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ не являются равновесными.

Способ В. Определяем множества $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y})$.

Производим замену базисов, используя следующее правило.

Номер строки, в которой находится разрешающий элемент, совпадает с номером столбца **e** *или* **f***, который из базиса выводится. Тот столбец, в котором находится разрешающий элемент, в базис вводится.*

Перейдем от исходного базиса ($\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$) к базису $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$.

В таблице $\mathbf{A}_0^*$ разрешающий элемент находится в первой строке, следовательно, из базиса выводится столбец $\mathbf{e}_1$, а на его место вводится столбец $\mathbf{a}_3$, содержащий разрешающий элемент:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \to \mathbf{q}(\mathbf{y}^0) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).$$

В таблице $\mathbf{B}_0^*$ разрешающий элемент находится в третьей строке и во втором столбце. Следовательно,

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \to \mathbf{p}(\mathbf{x}^0) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{b}_2).$$

Стратегии ($\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$) *будут равновесными, если в базисах* $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ *и* $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$ *индексы при* ($\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$) *пробегают все значения от* 1 *до* m, *а индексы при* ($\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$) *пробегают все значения от* 1 *до* n (*в любых комбинациях*).

Проверим пару ($\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$). Индексы при ($\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$) в базисах $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ пробегают все значения от 1 до $m = 3$: ($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{a}_3$). А вот индексы при ($\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$) не пробегают все значения от 1 до $n = 4$: ($\mathbf{b}_2$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$). Два раза встречается индекс 2 и ни разу — 1. Следовательно, стратегии $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ не являются равновесными.

IV. ***Замена базисов.***

8. Составляем таблицу $\mathbf{A}_1^*$, переходя с помощью симплекс-преобразования от базиса ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$) к базису $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \mathbf{A}_0^* = & \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

9. Вычисляем значения $\xi_i = \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}} \mathbf{y}^0$ при $i = 1, \ldots, m$, где $\mathbf{a}_i^1$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$.

$$\xi_1 = [4 \quad 7 \quad 8 \quad 2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2; \quad \xi_2 = [6 \quad 1 \quad 3 \quad 8] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3;$$

$$\xi_3 = [2 \quad 8 \quad 7 \quad 4] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Составляем строку под таблицей в виде $(\boldsymbol{\xi} - 1 \mid \mathbf{y}^{0\mathrm{T}})$, где $\boldsymbol{\xi} - 1 =$ $=[\xi_1 - 1 \quad \xi_2 - 1 \quad \xi_3 - 1]$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \mathbf{A}_0^* = & \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline \end{array}\right]. \\ & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

10. Для j-й строки полученной таблицы вычислим значения λ_j^* и λ_j^{**} по формулам

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{ -\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}} \right\}; \qquad \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{ -\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}} \right\}.$$

Все отличные от нуля числа j-й строки таблицы $\mathbf{A}_1^*$ разбиваем на два множества: множество отрицательных чисел (для них работает формула для λ_j^*) и множество положительных чисел (для них работает формула для λ_j^{**}).

Поскольку все числа первой строки положительны, то в данном случае пользуемся только формулой для λ_j^{**}:

$$\lambda_1^{**} = \max\left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{0}{1}; -\frac{1/2}{1/2} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2^* = \min\left\{ -\frac{1}{-9}; -\frac{2}{-23};\ -\frac{1/2}{-4} \right\} = \frac{2}{23};\quad \lambda_2^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{23};$$

$$\lambda_3^* = \min\left\{ -\frac{1}{-6}; -\frac{2}{-18};\ -\frac{1/2}{-7/2} \right\} = \frac{1}{9};\quad \lambda_3^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{9};$$

$$\lambda_4^* = \min\left\{ -\frac{1}{-6}; -\frac{2}{-4};\ -\frac{1/2}{-2} \right\} = \frac{1}{6};\qquad \lambda_4^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{6}.$$

Введем в столбец $\boldsymbol{\lambda}$, который находится справа от матрицы $\mathbf{A}_1^*$, в качестве λ_j то из чисел λ_j^* или λ_j^{**}, которое отлично от нуля. Если $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$, то вводим ноль. Справа от λ_j укажем, за счет какого столбца было получено соответствующее число:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \quad \boldsymbol{\lambda} \\
\mathbf{A}_1^* = & \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 0 \\ 2/23(\mathbf{a}_2) \\ 1/9\,(\mathbf{a}_2) \\ 1/6\,(\mathbf{a}_1) \\ \end{array}.
\end{array}$$

11. Аналогично формируется таблица $\mathbf{B}_1^*$:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc:ccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{array} \quad \boldsymbol{\mu} \\
\mathbf{B}_1^* = & \left[\begin{array}{cccc:ccc} -1 & 0 & -17/2 & 3/2 & 1 & 0 & -3/2 \\ -23 & 0 & -22 & -14 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 7/2 & 5/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hdashline 2 & 0 & 5/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 5/17\,(\mathbf{b}_3) \\ 2/23(\mathbf{b}_1) \\ 0 \\ \end{array}.
\end{array}$$

V. ***Определение оптимальных стратегий и цен игры.***

12. Определяются возможные значения векторов стратегий $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right] + \frac{5}{17}\left[1 \quad 0 \quad -\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{5}{17} \quad 0 \quad \frac{1}{17}\right];$$

$$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right] + \frac{2}{23}[0 \quad 1 \quad -4] = \left[0 \quad \frac{2}{23} \quad \frac{7}{46}\right];$$

$$\mathbf{x}_3^{\mathrm{T}} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right] + 0\left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right] = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right];$$

$$\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] + 0\left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right];$$

$$\mathbf{y}_2^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] + \frac{2}{23}[-4 \quad 1 \quad 0 \quad 0] = \left[\frac{7}{46} \quad \frac{2}{23} \quad 0 \quad 0\right];$$

$$\mathbf{y}_3^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] + \frac{1}{9}\left[-\frac{7}{2} \quad 0 \quad 1 \quad 0\right] = \left[\frac{1}{9} \quad 0 \quad \frac{1}{9} \quad 0\right];$$

$$\mathbf{y}_4^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] + \frac{1}{6}[-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = \left[\frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{6}\right].$$

13. Находим множества $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$ для $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Определим, к примеру, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)$. Полагаем $i = 1$ в формуле для $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) = \{\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) \cup \mathbf{b}_m\} \setminus \{\mathbf{f}_1\}.$$

Данная запись означает, что из базиса $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ надо удалить столбец $\mathbf{f}_1$, а вместо него ввести столбец $\mathbf{b}_m$, для которого достигается соответствующее значение максимума (минимума) (его номер указан в правом столбце таблицы $\mathbf{A}_1^*$); в первой строке это $\mathbf{b}_3$. Таким образом, имеем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{x});$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{y}).$$

14. Для каждой пары $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ определяем множество $M(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ и проверяем условия равновесия, как в пункте 7. В данном случае равновесная ситуация возникает при $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$. Индексы при $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ в базисах $\mathbf{p}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}_2)$ пробегают все значения от 1 до $m = 3$ — $(\mathbf{f}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Индексы при $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ пробегают все значения от 1 до $n = 4$ — $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Таким образом, множество $M(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Следовательно, $(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2)$ — ситуация равновесия.

15. На основе известного равновесного решения $(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2)$ определяем оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ и цены игры:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{23} & \frac{7}{46} \end{bmatrix}}{0 + \frac{2}{23} + \frac{7}{46}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{7}{46} & \frac{2}{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\frac{7}{46} + \frac{2}{23} + 0 + 0} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} = 10 - \frac{46}{11} = 5\frac{9}{11}; \quad H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j} = 10 - \frac{46}{11} = 5\frac{9}{11}.$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$H_B = 5\frac{9}{11}$; $H_A = 5\frac{9}{11}$.

Проверьте себя! Решите биматричные задачи.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ**:** $\mathbf{x}^{*T} = [0.75 \quad 0.25]$; $\mathbf{y}^{*T} = [0.17 \quad 0.83]$; $H_A = 3.5$; $H_B = 4.25$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Ответ**:** $\mathbf{x}^{*T} = [0.33 \quad 0.67]$; $\mathbf{y}^{*T} = [0.714 \quad 0.286]$; $H_A = 5.14$; $H_B = 5.76$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ**:** $\mathbf{x}^{*T} = [0.375 \quad 0 \quad 0.625]$; $\mathbf{y}^{*T} = [0.2 \quad 0 \quad 0.8]$; $H_A = 5.6$; $H_B = 3.88$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 & 3 \\ 10 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 7 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 11 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 11 & 12 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Ответ**:** $\mathbf{x}^{*T} = [0 \quad 0.333 \quad 0.667 \quad 0]$; $\mathbf{y}^{*T} = [0.385 \quad 0 \quad 0 \quad 0.615]$;
$H_A = 7.54$; $H_B = 6.33$.

ГЛАВА 4

МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Во многих практически важных конфликтных ситуациях стороны-участницы, располагая той или иной информацией о прошлом развитии конфликта, совершают свой выбор не раз и навсегда, а последовательно во времени, шаг за шагом. Тем самым они используют стратегии, отражающие как динамику конфликта, так и степень собственной информированности о фактически складывающейся обстановке в развитии этого конфликта.

4.1. Позиционные игры

Одним из классов игр, описывающих конфликты, динамика которых оказывает влияние на поведение участников, являются так называемые позиционные игры [5].

Позиционная игра — это бескоалиционная игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях меняющейся во времени и, вообще говоря, неполной информации.

Процесс самой игры состоит в последовательных переходах от одного состояния игры к другому, которые осуществляются либо путем выбора игроками одного из возможных действий в соответствии с правилами игры, либо случайным образом (***случайный ход***).

В качестве примеров позиционных игр можно привести крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и др. Интересно, что право выбора первого хода в этих играх часто определяется случайным образом.

Состояния игры принято называть ***узлами*** или ***позициями*** (отсюда и название — позиционные игры), а возможные выборы в каждой позиции — ***альтернативами***. Окончательные позиции называются ***вершинами***.

Характерной особенностью позиционной игры является возможность представления множества позиций в виде древовидного упорядоченного множества, которое называется деревом игры (рис. 4.1).

Замечание. Символы O, A или B в кружке указывают, кто из игроков (O, A или B) делает очередной ход в данной позиции. При

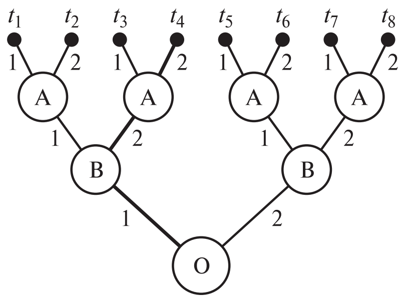


Рис. 4.1

этом символом О обычно обозначается ход в игре, осуществляемый не игроком, а каким-нибудь случайным механизмом (иногда его называют ***природой***).

Описание конечной игры двух лиц с помощью дерева, узлы (точки ветвления) которого соответствуют ситуациям, в которых стороны осуществляют свои выборы (ходы), а вершины — ситуациям завершения операции (с указанием достигаемых сторонами значений полезностей), является ***моделью игры в позиционной или развернутой форме***.

Термин «развернутая форма» отражает то обстоятельство, что рассматриваемая модель характеризует процесс выбора решений как развертывающийся во времени.

Для определенности мы будем рассматривать позиционные игры, в каждой позиции которых, за исключением окончательных, ровно две альтернативы — первая и вторая.

По графическому описанию игры в виде дерева можно заметить, что процесс игры состоит в переходе от начальной позиции к вершине через непосредственно следующие одна за другой промежуточные позиции.

Каждая вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другом звеньев), связывающую начальную позицию с данной вершиной (см. рис. 4.1). Такая цепь называется ***партией***. На рис. 4.1 одна из партий выделена жирными линиями. Число различных партий равно числу вершин. В каждой вершине t_i задан числовой выигрыш игрока А.

Различают позиционные игры с неполной и полной информацией.

В позиционных играх ***с неполной информацией*** (например, домино) игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется ***информационным множеством***. Позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству, объединяются пунктирными линиями. Предполагается, что понятие дерева игры включает и группирование узлов этого дерева в информационные множества, отражающие осведомленность игроков обо всех выборах, предшествующих текущему ходу.

Игра в развернутой форме, в которой все информационные множества содержат ровно по одному узлу, называется ***игрой с полной информацией***. В позиционных играх с полной информацией (например, шашки, шахматы) каждый игрок при своем ходе знает ту позицию дерева игры, в которой он находится.

Замечание. Решение игровых позиционных задач с неполной информацией будем рассматривать на примере антагонистических игр, а затем обобщим полученные результаты на более общий класс игр.

4.2. Нормализация позиционной игры

Игра в позиционной форме предусматривает принятие решений в каждой (реализующейся в ходе конкретной партии) позиции игры. Однако каждая сторона может *заблаговременно* составить свой план ведения игры, предусматривающий, какое решение должно быть выбрано на каждом ходе (если развитие игры приведет в позицию, соответствующую этому ходу). Принятие такого плана сводит многократные выборы решений в ходе игры к *единственному выбору* (т. е. к выбору плана, определяющего решения во всех позициях данной стороны). Будем называть такие планы ***стратегиями*** сторон в позиционной игре. Введенное понятие стратегии допускает следующее формальное определение.

Стратегия игрока в конечной позиционной игре есть функция, определенная на всех информационных множествах этого игрока (на дереве игры). Значением этой функции на каждом таком множестве является один из выборов, имеющихся у игрока в этом множестве.

Заранее определенную последовательность ходов игрока, выбранную им в зависимости от информации о ходах другого игрока и ходах игрока О (природы), будем называть ***чистой стратегией*** этого игрока.

В том случае, если в игре нет случайных ходов (игрок О в игре не участвует), выбор игроками чистых стратегий однозначно определяет исход игры — приводит к окончательной позиции, где игрок А и получает свой выигрыш. Это обстоятельство позволяет сводить позиционную игру к матричной игре.

Процесс сведения позиционной игры к матричной называется ***нормализацией позиционной игры***. Рассмотрим на примерах, как это делается.

Для начала рассмотрим примеры двух игр, состоящих из двух ходов, которые последовательно делают участвующие в ней игроки А и В. Начинает игрок А: он выбирает одну из двух возможных альтернатив — число x, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). На ход игрока А игрок В отвечает своим ходом, выбирая одну из двух возможных альтернатив — число y, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). В результате игрок А получает вознаграждение или вынужден платить штраф.

Пример 4.1 (нормализация двухходовой игры с полной информацией).

1-*й ход*. Игрок А выбирает число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

2-*й ход*. Игрок В выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$, зная, какое число x выбрал игрок А.

Задана функция $W(x, y)$ выплат игроку А за счет игрока В:

$W(1, 1) = 1,\ W(2, 1) = -2,$

$W(1, 2) = -1,\ W(2, 2) = 2.$

Дерево игры и информационные множества для данного случая показаны на рис. 4.2.

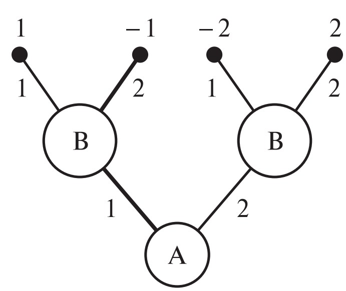


Рис. 4.2

Опишем стратегии игроков.

Стратегию игрока А можно задать одним числом x, показывающим, какую альтернативу, первую или вторую, выбрал игрок. Тем самым, у игрока А две чистых стратегии:

A_1 — «выбрать $x = 1$», A_2 — «выбрать $x = 2$».

Стратегию игрока В (принимая во внимание, что выбор игрока А на 1-м ходе ему известен) удобно описывать упорядоченной парой $[y_1, y_2]$.

Здесь y_1 ($y_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал первую альтернативу, $x = 1$, а y_2 ($y_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что игрок А выбрал вторую альтернативу, $x = 2$.

Например, выбор игроком В стратегии [2, 1] означает, что если на 1-м ходе игрок А выбрал $x = 1$, то игрок В на своем ходе должен выбрать $y = 2$. Если же на 1-м ходе игрок А выбрал $x = 2$, то, согласно этой стратегии, игрок В на своем ходе должен выбрать $y = 1$.

Таким образом, у игрока В четыре чистых стратегии:

B_1 — [1, 1] («$y = 1$ при любом выборе x»);

B_2 — [1, 2] («$y = x$ при любом выборе x»);

B_3 — [2, 1] («$y \neq x$ при любом выборе x»);

B_4 — [2, 2] («$y = 2$ при любом выборе x»).

Рассмотрим теперь, как рассчитываются выигрыши игрока А в зависимости от примененных стратегий.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_1 — (1), а игрок В — стратегию B_2 — [1, 2]. Тогда $x = 1$, а из стратегии [1, 2] вытекает, что $y = 1$. Отсюда

$W(x, y) = W(1, 1) = 1$.

Остальные выигрыши рассчитываются совершенно аналогично.

Результаты расчетов записываются обычно или в виде таблицы выигрышей игрока А:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 1)$	$W(1, 2)$	$W(1, 2)$
A_2	$x = 2$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$

или в виде матрицы игры

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

где, как обычно, строки соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В.

Полученная матрица имеет седловую точку. Оптимальные стратегии игроков: A_1 — (1) и B_3 — [2, 1]. Тем самым, игрок А на 1-м ходе выбирает $x = 1$, а игрок В на 2-м ходе выбирает $y = 2$.

Цена игры $\nu = -1$.

Пример 4.2 (нормализация двухходовой игры с неполной информацией). В случае когда выполнены все условия предыдущего примера, кроме одного — игрок В на втором ходе выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$, не зная выбора числа x игроком А, — информационные множества выглядят так, как показано на рис. 4.3.

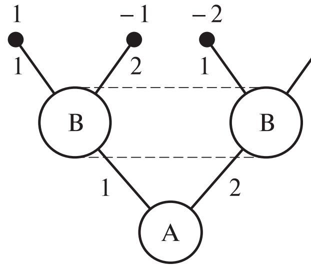


Рис. 4.3

Эта игра с неполной информацией: игрок В при своем ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества — в левой или в правой. Опишем стратегии игроков.

У игрока А они те же, что и в предыдущем примере:

$$A_1 \text{ — «выбрать } x = 1\text{»}, \quad A_2 \text{ — «выбрать } x = 2\text{»}.$$

Поскольку игроку В выбор игрока А неизвестен, то есть игрок В не знает, в какой именно из двух позиций он находится (см. рис. 4.3), то у него те же две стратегии:

$$B_1 \text{ — «выбрать } y = 1\text{»}, \quad B_2 \text{ — «выбрать } y = 2\text{»}.$$

Соответствующие таблица выигрышей игрока А и матрица игры имеют вид:

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	$x = 1$	$W(1, 1)$	$W(1, 2)$
A_2	$x = 2$	$W(2, 1)$	$W(2, 2)$

; $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Полученная матрица седловой точки не имеет.

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, таковы:

$$S_A^* = [2/3 \ 1/3]; \qquad S_B^* = [1/2 \ 1/2].$$

Цена игры $\nu = 0$.

Замечание. На этих двух примерах хорошо видно, что результат сведения позиционной игры к матричной напрямую зависит от степени информированности игроков. В частности, отсутствие у игрока В сведений о выборе, сделанном игроком А, приводит к уменьшению количества его возможных стратегий. Сравнивая ответы, полученные в примерах 4.1 и 4.2, замечаем, что снижение уровня информированности игрока (в данном случае — игрока В) делает для него исход игры менее благоприятным. Заметим, что это легко следует и из общих соображений.

4.3. Решение позиционных игровых задач с неполной информацией

Рассмотрим теперь несколько примеров сведения трехходовых позиционных игр к матричным, сосредоточив основное внимание на одном из наиболее ответственных этапов нормализации — описании стратегий игроков.

Пример 4.3.

1-*й ход* делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел: $\{1, 2\}$.

2-*й ход* делает игрок В: зная выбранное игроком А число x, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

3-*й ход* делает игрок А: не зная о выбранном игроком В числе y на 2-м ходе и забыв выбранное им самим на 1-м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$*.

После этого игрок А получает вознаграждение $W(x, y, z)$ за счет игрока В:

$W(1, 1, 1) = -2, \qquad W(2, 1, 1) = \ \ 3,$

$W(1, 1, 2) = \ \ 4, \qquad W(2, 1, 2) = \ \ 0,$

* Ситуация, когда игрок забывает свой собственный выбор на предыдущих шагах, случается, к примеру, если в процессе переговоров одной из сторон пришлось заменить своего представителя, а новый представитель не в полной мере владеет информацией о достигнутых ранее договоренностях.

$W(1, 2, 1) = \quad 1, \qquad W(2, 2, 1) = -3,$

$W(1, 2, 2) = -4, \qquad W(2, 2, 2) = -5.$

На рис. 4.4 показаны дерево игры и информационные множества. Нормализуем эту игру.

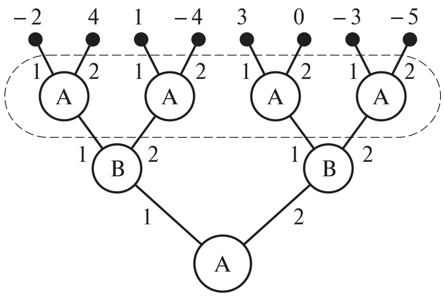


Рис. 4.4

Поскольку игроку В выбор игрока А на 1-м ходе известен, у игрока В те же четыре стратегии $[y_1, y_2]$, что и в примере 4.1:

B_1 — [1, 1] («$y = 1$ при любом выборе x»);

B_2 — [1, 2] («$y = x$ при любом выборе x»);

B_3 — [2, 1] («$y \neq x$ при любом выборе x»);

B_4 — [2, 2] («$y = 2$ при любом выборе x»).

Игрок А на 3-м ходе не знает предыдущих выборов: ни значения x, ни значения y. Поэтому каждая его стратегия состоит просто из пары чисел (x, z), где x ($x \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 1-м ходе, а z ($z \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 3-м ходе.

Например, выбор игроком А стратегии (2, 1) означает, что на 1-м ходе он выбирает $x = 2$, а на 3-м ходе — $z = 1$.

Таким образом, у игрока А четыре стратегии:

A_1 — (1, 1), A_2 — (1, 2), A_3 — (2, 1), A_4 — (2, 2).

Покажем теперь, как рассчитываются выигрыши игрока А в зависимости от стратегий, применяемых игроками в данной игре. Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_2 — (1, 2), а игрок В — стратегию B_3 — [2, 1]. Тогда $x = 1$, откуда вытекает, что $y = 2$ (поскольку значение y_1 будет при условии $x = 1$, а y_2 при условии

$x = 2$). Значение $z = 2$ выбрано игроком А независимо от выбора игрока В. Вычисляя значение функции выигрышей для этого набора, получаем

$W(x, y, z) = W(1, 2, 2) = — 4$.

В результате подобных рассуждений получаются и остальные пятнадцать выигрышей. Это позволяет построить таблицу выигрышей игрока А:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1, 1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_2	(1, 2)	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_3	(2, 1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	(2, 2)	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом:

$S_A^* = [8/11 \quad 3/11 \quad 0 \quad 0]$; $S_B^* = [0 \quad 5/11 \quad 0 \quad 6/11]$.

Цена игры $\nu = — 4/11$.

Пример 4.4.

1-*й ход* делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

2-*й ход* делает игрок В: не зная о выборе игрока А на 1-м ходе, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

3-*й ход* делает игрок А: он выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$, не зная ни значения x, ни значения y.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 4.3.

Графическое представление этой игры показано на рис. 4.5.

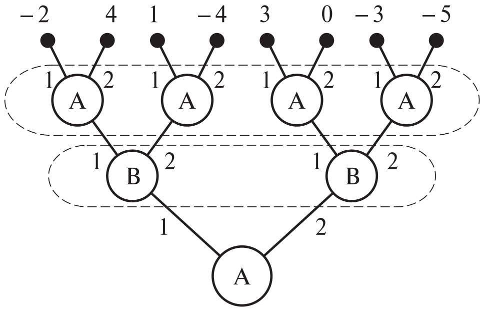


Рис. 4.5

Ясно, что у игрока А те же четыре стратегии, что и в примере 4.3:

A_1 — (1, 1), A_2 — (1, 2), A_3 — (2, 1), A_4 — (2, 2).

У игрока В всего две стратегии:

B_1 — «выбрать $y = 1$», B_2 — «выбрать $y = 2$».

В этом случае (весьма слабой информированности игроков) таблица выигрышей игрока А и соответствующая матрица строятся совсем просто:

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	(1, 1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_2	(1, 2)	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_3	(2, 1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	(2, 2)	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, таковы:

$S_A^* = [2/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0]$; $S_B^* = [4/9 \quad 5/9]$.

Цена игры $\nu = -1/3$.

Замечание. Сравнивая значения выигрышей игрока В, полученные в примерах 4.3 и 4.4, замечаем, что снижение его уровня информированности, как и в случае двухходовых игр, делает для него исход игры менее благоприятным.

Пример 4.5.

1-*й ход* делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел: $\{1, 2\}$.

2-*й ход* делает игрок В: зная выбранное игроком А число x, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

3-*й ход* делает игрок А: зная о выбранном игроком В числе y на 2-м ходе, но забыв выбранное им самим на 1-м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 4.3.

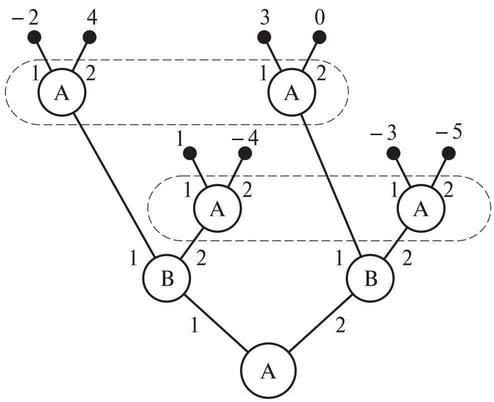


Рис. 4.6

Графическое представление этой игры показано на рис. 4.6.

Поскольку игроку В выбор игрока А на 1-м ходе известен, у игрока В те же четыре стратегии $[y_1, y_2]$, что и в примере 4.3:

B_1 — [1, 1] («$y = 1$ при любом выборе x»);

B_2 — [1, 2] («$y = x$ при любом выборе x»);

B_3 — [2, 1] («$y \neq x$ при любом выборе x»);

B_4 — [2, 2] («$y = 2$ при любом выборе x»).

При описании стратегий игрока А нужно исходить из того, что к 3-му ходу игрок А утратил сведения о собственном выборе на 1-м ходе, но ему известен выбор игрока В на 2-м ходе. Поэтому выбор числа z игроку А следует связать с известным ему к 3-му ходу значением y. Удобнее всего это сделать по аналогии с расчетом стратегий игрока В, т. е. при помощи упорядоченной пары $[z_1, z_2]$. Здесь z_1 ($z_1 \in \{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что игрок В выбрал первую альтернативу, $y = 1$, а z_2 ($z_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что игрок В выбрал вторую альтернативу, $y = 2$.

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно представить как

$$(x, [z_1, z_2]).$$

Здесь x ($x \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А на 1-м ходе, z_1 — альтернатива, выбираемая игроком А на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал первую альтернативу ($y = 1$), и z_2 — альтернатива, которую игрок А выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок В выбрал вторую альтернативу ($y = 2$).

Например, выбор игроком А стратегии (2, [2, 1]) означает, что на 1-м ходе игрок А выбирает $x = 2$, а на 3-м — $z = 2$, если игрок В выбрал $y = 1$, и $z = 1$, если игрок В выбрал $y = 2$.

Таким образом, у игрока А восемь чистых стратегий:

A_1 — (1, [1, 1]), A_2 — (1, [1, 2]), A_3 — (1, [2, 1]), A_4 — (1, [2, 2]),

A_5 — (2, [1, 1]), A_6 — (2, [1, 2]), A_7 — (2, [2, 1]), A_8 — (2, [2, 2]).

Рассмотрим, как определяются элементы таблицы выигрышей игрока А.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_3 — (1, [2, 1]), а игрок В — стратегию B_2 — [1, 2]. Тогда $x = 1$ (первый элемент стратегии A_3), $y = 1$ (первый элемент стратегии B_2, который выбирается на основании выбора значения $x = 1$ на 1-м шаге), $z = 2$ (первый элемент в квадратных скобках стратегии A_3, который выбирается на основании выбора значения $y = 1$ на 2-м шаге).

Отсюда

$$W(x, y, z) = W(1, 1, 2) = 4.$$

По этой же схеме вычисляются и остальные элементы таблицы.

В результате получаем:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1, [1, 1])	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_2	(1, [1, 2])	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_3	(1, [2, 1])	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$
A_4	(1, [2, 2])	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$
A_5	(2, [1, 1])	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_6	(2, [1, 2])	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 2)$
A_7	(2, [2, 1])	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 1)$
A_8	(2, [2, 2])	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

После применения отношений доминирования в матрице игры остается единственный элемент, что говорит о наличии решения в чистых стратегиях. Оптимальные стратегии игроков: A_3 — (1, [2, 1]) и B_4 — [2, 2]. Решение игры будет следующим:

$S_A^* = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$; $S_B^* = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$.

Цена игры $\nu = 1$.

Пример 4.6.

1-*й ход* делает игрок А: он выбирает число x из множества двух чисел: {1, 2}.

2-*й ход* делает игрок В: зная выбранное игроком А число x, он выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}.

3-*й ход* делает игрок А: не зная о выбранном игроком В числе y на 2-м ходе, но помня выбранное им самим на 1-м ходе число x, он выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}.

После этого игроки расплачиваются по правилу, указанному в примере 4.3.

Графическое представление этой игры показано на рис. 4.7.

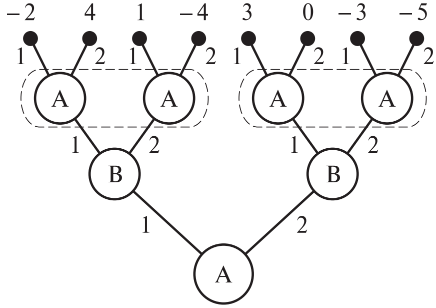


Рис. 4.7

Поскольку игроку B выбор игрока A на 1-м ходе известен, то у игрока B те же четыре стратегии $[y_1,\ y_2]$, что и в примере 4.3:

B_1 — [1, 1] («$y = 1$ при любом выборе x»);

B_2 — [1, 2] («$y = x$ при любом выборе x»);

B_3 — [2, 1] («$y \neq x$ при любом выборе x»);

B_4 — [2, 2] («$y = 2$ при любом выборе x»).

Игрок A на 3-м ходе не знает выбора игрока B на 2-м ходе, т. е. значения y, но помнит свой выбор на 1-м шаге, т. е. значение x.

Поэтому выбор числа z игроку A следует связать с известным ему значением x. Удобнее всего это сделать по аналогии с расчетом стратегий игрока B, т. е. при помощи упорядоченной пары $[z_1, z_2]$. Здесь z_1 ($z_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком A при условии, что им на 1-м ходе была выбрана альтернатива $x = 1$, а z_2 ($z_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком A при условии, что им на 1-м ходе была выбрана альтернатива $x = 2$.

Чистую стратегию игрока A в данной игре можно представить в виде:

$$(x, [z_1, z_2]).$$

Следовательно, у игрока A восемь чистых стратегий:

A_1 — (1, [1, 1]), A_2 — (1, [1, 2]), A_3 — (1, [2, 1]), A_4 — (1, [2, 2]),

A_5 — (2, [1, 1]), A_6 — (2, [1, 2]), A_7 — (2, [2, 1]), A_8 — (2, [2, 2]).

Например, выбор игроком A стратегии A_7 — (2, [2, 1]) означает, что на 1-м ходе игрок A выбирает $x = 2$, а на 3-м — $z = 1$ (поскольку $x = 2$ определяет выбор второго значения в квадратных скобках, т. е. z_2). Но, поскольку значения x однозначно определяют значения z_i ($i = 1, 2$), мы получаем пары стратегий, которые дублируют друг друга, т. е. дают один и тот же результат: A_1–A_2, A_3–A_4, A_5–A_7, A_6–A_8. Таким образом, мы доказали, что количество стратегий игрока A может быть сведено к четырем.

Поэтому каждая его стратегия состоит просто из пары чисел (x, z), где x ($x \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком A на 1-м ходе, а z ($z \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком A на 3-м ходе.

Например, выбор игроком A стратегии (2,1) означает, что на 1-м ходе он выбирает $x = 2$, а на 3-м ходе — $z = 1$.

Таким образом, у игрока A те же четыре стратегии, что и в примере 4.3:

A_1 — (1, 1), A_2 — (1, 2), A_3 — (2, 1), A_4 — (2, 2).

В результате матрица данной игры, а следовательно, и решение, полностью совпадают с матрицей и решением игры из примера 4.3, что говорит о неактуальности знания выбора на 1-м ходе, если нет информации о предыдущем (2-м) ходе.

Рассмотрим теперь примеры позиционных игр со случайными ходами.

Пример 4.7.

1-*й ход* производится случайно: игрок О выбирает число x, равное 1 с вероятностью 0.5, и равное 2 — с такой же вероятностью.

2-*й ход* делает игрок А: он выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, не зная результатов случайного выбора на 1-м ходе.

3-*й ход* делает игрок B: он выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}, зная о том, какое именно число x случайно выбрано игроком О на 1-м ходе и не зная выбора y игрока А на 2-м ходе.

После этого игроки расплачиваются, используя функцию $W(x, y, z)$, ту же, что и в предыдущих примерах.

Графическое представление этой игры показано на рис. 4.8.

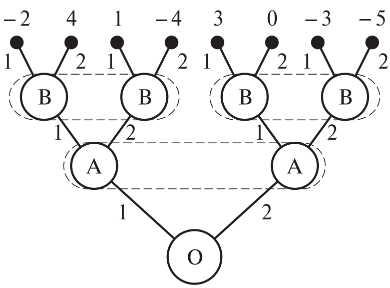


Рис. 4.8

Опишем стратегии игроков.

Поскольку игроку А исход случайного испытания неизвестен, он имеет всего две стратегии:

A_1 — (1), A_2 — (2).

При построении своих стратегий игроку В естественно воспользоваться имеющейся у него информацией о результате 1-го хода. Это позволит ему описать свою стратегию упорядоченной парой $[z_1, z_2]$, где z_1 ($z_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что $x = 1$, а z_2 ($z_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком В при условии, что $x = 2$.

Тем самым, у игрока В четыре стратегии:

B_1 — [1, 1], B_2 — [1, 2], B_3 — [2, 1], B_4 — [2, 2].

Рассмотрим теперь, как определяются элементы таблицы выигрышей игрока А.

Пусть, например, игрок А выбрал стратегию A_1 — (1), а игрок В — стратегию B_3 — [2,1]. Различаются два случая: x =1 и x =2.

Если $x = 1$, то стратегия B_3 указывает игроку B его выбор $z = 2$. А так как $y = 1$, то в результате имеем

$W(x, y, z) = W(1, 1, 2) = 4.$

Если $x = 2$, то стратегия B_3 указывает игроку B его выбор $z = 1$. А так как $y = 1$, то в результате имеем

$W(x, y, z) = W(2, 1, 1) = 3.$

Поскольку первая и вторая альтернативы на 1-м ходе выбираются с вероятностями 0.5 и 0.5, то и вышеуказанные выигрыши появляются с теми же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока A при этих стратегиях определяется так:

$4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 3.5.$

Аналогичным образом рассчитываются и остальные средние выигрыши.

Таким образом, получаем:

при $x = 1$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1)	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 1)$	$W(1, 1, 2)$	$W(1, 1, 1)$
A_2	(2)	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 1)$	$W(1, 2, 2)$	$W(1, 2, 2)$

или

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix};$$

при $x = 2$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1)	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 2)$
A_2	(2)	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3.5 & 2 \\ -1 & -2 & -3.5 & -4.5 \end{pmatrix}.$$

После применения отношений доминирования в матрице игры остается единственный элемент, что говорит о наличии решения в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями игроков являются

A_1 — (1) и B_1 — [1, 1].

Решение игры будет следующим:

$S_A^* = [1 \;\; 0]$; $S_B^* = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$.

Цена игры $\nu = 0.5$.

Пример 4.8.

1-*й ход* производится случайно: игрок О выбирает число x, равное 1, с вероятностью 2/3, и равное 2 — с вероятностью 1/3.

Если $x = 1$, то на 2-*м ходе* игрок А выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, зная результат случайного выбора на 1-м ходе, а на 3-*м ходе* игрок В выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}, зная о том, какое именно число x случайно выбрано игроком О на 1-м ходе, и не зная выбора y игрока А на 2-м ходе.

Если $x = 2$, то на 2-*м ходе* игрок В выбирает число y из множества двух чисел {1, 2}, зная результат случайного выбора на 1-м ходе, а на 3-*м ходе* игрок А выбирает число z из множества двух чисел {1, 2}, зная x, но не зная y. После этого игроки расплачиваются, используя функцию $W(x, y, z)$, ту же, что и в предыдущих примерах.

Графическое представление этой игры показано на рис. 4.9.

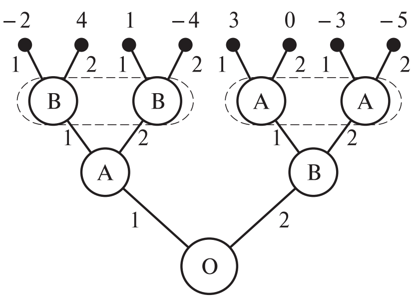


Рис. 4.9

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно описать упорядоченной парой $|y, z|$, где y ($y \in \{1, 2\}$) — выбор игрока А на 2-м ходе, если на 1-м ходе выбрано $x = 1$, а z ($z \in \{1, 2\}$) — выбор игрока А на 3-м ходе, если на 1-м ходе выбрано $x = 2$. К примеру, стратегия $|1, 2|$ означает, что на 2-м ходе игрок А выбирает $y = 1$, а на 3-м ходе — $z = 2$.

Таким образом, у игрока А четыре стратегии:

$A_1 — |1, 1|$, $A_2 — |1, 2|$, $A_3 — |2, 1|$, $A_4 — |2, 2|$.

У игрока B те же четыре стратегии:

$B_1 - |1,\ 1|$, $B_2 - |1,\ 2|$, $B_3 - |2,\ 1|$, $B_4 - |2,\ 2|$.

Рассмотрим, как находятся элементы матрицы выигрышей игрока A.

По условию при $x = 1$ игрок A имеет возможность сделать только 2-й ход (выбрать y), а игрок B — только 3-й (выбрать z).

При $x = 2$ их возможности меняются местами: игроку B предоставлено право 2-го хода (выбрать y), а игроку A — 3-го (выбрать z).

Пусть, к примеру, игрок A применяет стратегию $A_2 - |1,\ 2|$, а игрок B — стратегию $B_3 - |2,\ 1|$. Различаются два случая: $x = 1$ и $x = 2$.

Если $x = 1$, то стратегия A_2 указывает игроку A на 2-м ходе выбрать $y = 1$, а стратегия B_3 указывает игроку B на 3-м ходе выбрать $z = 1$. В результате

$$W(x, y, z) = W(1,\ 1,\ 1) = -2.$$

Если $x = 2$, то стратегия B_3 указывает игроку B на 2-м ходе выбрать $y = 2$, а стратегия A_2 указывает игроку A на 3-м ходе выбрать $z = 2$. В результате

$$W(x, y, z) = W(2,\ 2,\ 2) = -5.$$

Так как первая и вторая альтернативы на 1-м ходе выбираются соответственно с вероятностями 2/3 и 1/3, то и найденные выигрыши появляются с теми же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока A при этих стратегиях определяется так:

$$(-2) \cdot 2/3 + (-5) \cdot 1/3 = -3.$$

Аналогично рассчитываются все остальные средние выигрыши.

Таким образом, получаем:

при $x = 1$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$\|1,\ 1\|$	$\|1,\ 2\|$	$\|2,\ 1\|$	$\|2,\ 2\|$
A_1	$\|1,\ 1\|$	$W(1,\ 1,\ 1)$	$W(1,\ 1,\ 2)$	$W(1,\ 1,\ 1)$	$W(1,\ 1,\ 2)$
A_2	$\|1,\ 2\|$	$W(1,\ 1,\ 1)$	$W(1,\ 1,\ 2)$	$W(1,\ 1,\ 1)$	$W(1,\ 1,\ 2)$
A_3	$\|2,\ 1\|$	$W(1,\ 2,\ 1)$	$W(1,\ 2,\ 2)$	$W(1,\ 2,\ 1)$	$W(1,\ 2,\ 2)$
A_4	$\|2,\ 2\|$	$W(1,\ 2,\ 1)$	$W(1,\ 2,\ 2)$	$W(1,\ 2,\ 1)$	$W(1,\ 2,\ 2)$

или

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

при $x = 2$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$\|1, 1\|$	$\|1, 2\|$	$\|2, 1\|$	$\|2, 2\|$
A_1	$\|1, 1\|$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_2	$\|1, 2\|$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 2)$
A_3	$\|2, 1\|$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 1, 1)$	$W(2, 2, 1)$	$W(2, 2, 1)$
A_4	$\|2, 2\|$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 1, 2)$	$W(2, 2, 2)$	$W(2, 2, 2)$

или

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица игры имеет следующий вид:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 11 & -7 & 5 \\ -4 & 8 & -9 & 3 \\ 5 & -5 & -1 & -11 \\ 2 & -8 & -3 & -13 \end{bmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом, следующие:

$S_A^* = [5/11 \quad 0 \quad 6/11 \quad 0]$; $S_B^* = [0 \quad 0 \quad 8/11 \quad 3/11]$.

Цена игры $\nu = -41/33$.

Рассмотрим теперь процесс исследования позиционной игры на обобщающем примере [4].

Пример 4.9.

Пусть позиционная игра задана с помощью дерева игры, представленного на рис. 4.10.

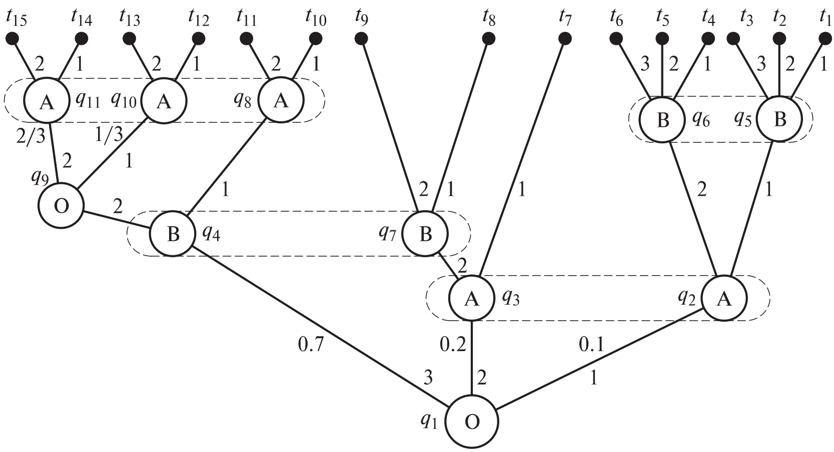


Рис. 4.10

На рис. 4.10 справа от каждого ребра стоит цифра, обозначающая выбор (альтернативу), а слева – вероятность выбора, если выбор делается случайно (при узле О). Узлы пронумерованы в определенной последовательности: q_1, q_2, ..., q_{11}; вершины также пронумерованы справа налево и обозначены t_1, t_2, ..., t_{15}. Каждая партия игры, заканчиваясь в вершине t_k $(k = 1, ..., 15)$, приносит выигрыш игроку А за счет игрока В согласно следующей функции $W(t_k)$:

$$\begin{array}{lll}
W(t_1) = 10, & W(t_2) = -10, & W(t_3) = 10, \\
W(t_4) = 20, & W(t_5) = 30, & W(t_6) = 0, \\
W(t_7) = -10, & W(t_8) = 30, & W(t_9) = 20, \\
W(t_{10}) = -30, & W(t_{11}) = 0, & W(t_{12}) = 30, \\
W(t_{13}) = -30, & W(t_{14}) = 30, & W(t_{15}) = 15.
\end{array}$$

В игре для игрока А имеются два информационных множества: $\{q_2, q_3\}$ и $\{q_8, q_{10}, q_{11}\}$. Для игрока В — также два информационных множества: $\{q_4, q_7\}$ и $\{q_5, q_6\}$.

Структура информационных множеств игрока А показывает, что он знает следующее: выбрано ли на 1-м шаге число 3 или одно из чисел 1 или 2. Следовательно, у него есть сведения о двух возможных выборах на 1-м ходу (1–2 или 3), поэтому стратегию игрока А удобно описывать упорядоченной парой $[x_1, x_2]$.

Если бы было три возможности выбора, то стратегия описывалась бы упорядоченной тройкой элементов и т. д. Далее следует, что А может выбирать альтернативы 1 или 2 на обоих своих информационных множествах. Поэтому в упорядоченной паре $[x_1, x_2]$ элемент x_1, являющийся функцией выбора альтернатив 1-2 на 1-м шаге или функцией первого информационного множества$\{q_2, q_3\}$, определен на множестве двух элементов (двух альтернатив выбора на данном информационном множестве), т. е. $x_1(\{q_2, q_3\}) \in \{1, 2\}$.

Элемент x_2, являющийся функцией выбора альтернативы 3 на 1-м шаге (или функцией второго информационного множества $\{q_8, q_{10}, q_{11}\}$), также определен на множестве двух элементов (двух альтернатив выбора на этом информационном множестве), т. е. $x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) \in \{1,2\}$.

Таким образом, у игрока А имеется 4 стратегии:

A_1 — $[1, 1]$ $(x_1(\{q_2, q_3\}) = 1,\ x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 1)$;

A_2 — $[1, 2]$ $(x_1(\{q_2, q_3\}) = 1,\ x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2)$;

A_3 — $[2, 1]$ $(x_1(\{q_2, q_3\}) = 2,\ x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 1)$;

A_4 — $[2, 2]$ $(x_1(\{q_2, q_3\}) = 2,\ x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2)$.

Из рис. 4.10 видно, что для игрока В положение следующее: он знает, выбрана ли на первом шаге альтернатива 1 или какая-то из альтернатив 2 или 3 (2—3). Следовательно, у него есть сведения о двух возможных выборах на первом ходу (2—3 или 1), поэтому стратегию игрока В удобно описывать упорядоченной парой $[y_1, y_2]$. Далее на информационном множестве $\{q_4, q_7\}$ игрок В может делать выбор 1 или 2.

Следовательно, в упорядоченной паре $[y_1, y_2]$ элемент y_1, являющийся функцией выбора альтернатив 2—3 на 1-м шаге, или функцией первого информационного множества $\{q_4, q_7\}$, определен на множестве двух элементов (двух альтернатив выбора на данном информационном множестве), т. е. $y_1(\{q_4, q_7\}) \in \{1, 2\}$. Элемент y_2, являющийся функцией выбора альтернативы 1 на 1-м шаге (или функцией второго информационного множества $\{q_5, q_6\}$), определен на множестве трех элементов (трех альтернатив выбора на этом информационном множестве), т. е. $y_2(\{q_5, q_6\}) \in \{1, 2, 3\}$.

Таким образом, у игрока В имеется 6 стратегий:

B_1 — $[1,1]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 1,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 1)$;

B_2 — $[1,2]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 1,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 2)$;

B_3 — $[1,3]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 1,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 3)$;

B_4 — $[2,1]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 2,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 1)$;

B_5 — $[2,2]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 2,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 2)$;

B_6 — $[2,3]$ $(y_1(\{q_4, q_7\}) = 2,\ y_2(\{q_5, q_6\}) = 3)$.

В узле q_1 альтернативы 1, 2, 3 выбираются случайным образом (выбор игрока O — природы) соответственно с вероятностями 0.1, 0.2, 0.7.

При случайном выборе альтернативы в узле q_9 альтернатива 1 выбирается с вероятностью 1/3, а альтернатива 2 с вероятностью 2/3.

В общем виде вероятности выбора альтернатив обозначаются через $p(\{A_i, B_j\}, q, a)$, где $\{A_i, B_j\}$ ($i = 1, ..., 4$; $j = 1, ..., 6$) — ситуация, определяемая парой стратегий A_i, B_j, которые применяют игроки; q — точка разветвления; a — альтернатива.

Заметим, что если ситуация $\{A_i, B_j\}$ в некотором узле q указывает, что надо выбрать определенную альтернативу a, то в этом случае $p(\{A_i, B_j\}, q, a) = 1$; если же эта стратегия указывает на невозможность выбора альтернативы a, то $p(\{A_i, B_j\}, q, a) = 0$.

Пусть, например, в данной игре игрок A применит свою стратегию A_2 — [1, 2]:

$$x_1(\{q_2, q_3\}) = 1, \quad x_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2,$$

а игрок B применит свою стратегию B_6 — [2,3]:

$$y_1(\{q_4, q_7\}) = 2, \quad y_2(\{q_5, q_6\}) = 3.$$

Эти две стратегии образуют ситуацию $\{A_2, B_6\}$. Тогда в данной игре получим:

для узла q_1 — $p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) = 0.1$, $p(\{A_2, B_6\}, q_1, 2) = 0.2$, $p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) = 0.7$;

для узла q_2 — $p(\{A_2, B_6\}, q_2, 1) = 1$, $p(\{A_2, B_6\}, q_2, 2) = 0$;

для узла q_3 — $p(\{A_2, B_6\}, q_3, 1) = 1$, $p(\{A_2, B_6\}, q_3, 2) = 0$;

для узла q_4 — $p\{\{A_2, B_6\}, q_4, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_4, 2) = 1$;

для узла q_5 — $p\{\{A_2, B_6\}, q_5, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_5, 2) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_5, 3) = 1$;

для узла q_6 — $p(\{A_2, B_6\}, q_6, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_6, 2) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_6, 3) = 1$;

для узла q_7 — $p(\{A_2, B_6\}, q_7, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_7, 2) = 1$;

для узла q_8 — $p(\{A_2, B_6\}, q_8, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_8, 2) = 1$;

для узла q_9 — $p(\{A_2, B_6\}, q_9, 1) = 1/3$, $p(\{A_2, B_6\}, q_9, 2) = 2/3$;

для узла q_{10} — $p(\{A_2, B_6\}, q_{10}, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_{10}, 2) = 1$;

для узла q_{11} — $p(\{A_2, B_6\}, q_{11}, 1) = 0$, $p(\{A_2, B_6\}, q_{11}, 2) = 1$.

Пусть теперь $\{A_i, B_j\}$ — пара чистых стратегий игроков A и B; t_k — вершина, соответствующая некоторой партии; $q_1,..., q_r$ — узлы, через которые проходит эта партия. Обозначим через $P(\{A_i, B_j\}, t_k)$ вероятность того, что партия закончится в вершине t_k, если игроки применяют множество стратегий $\{A_i, B_j\}$.

Тогда

$$P(\{A_i, B_j\}, t_k) = \prod_{s=1,\ldots,r} p(\{A_i, B_j\}, q_s, a_s(t_k)),$$

здесь q_s — последовательность узлов, через которые проходит данная партия, $a_s(t_k)$ — альтернатива, которую надо выбрать в узле q_s, чтобы достичь вершины t_k .

Например, если игроки применят множество стратегий $\{A_2, B_6\}$, определенное ранее, то

$$P(\{A_2, B_6\}, t_1) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_5, 1) = \\ = 0.1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_2) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_5, 2) = \\ = 0.1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_3) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_5, 3) = \\ = 0.1 \cdot 1 \cdot 1 = 0.1;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_4) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_6, 1) = \\ = 0.1 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_5) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_6, 2) = \\ = 0.1 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_6) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_2, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_6, 3) = \\ = 0.1 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_7) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_3, 1) = 0.2 \cdot 1 = 0.2;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_8) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_3, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_7, 1) = \\ = 0.2 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$P(\{A_2, B_6\}, t_9) = \\ = p(\{A_2, B_6\}, q_1, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_3, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_7, 2) = \\ = 0.2 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{10}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_8, 1) =$
$= 0.7 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{11}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 1) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_8, 2) =$
$= 0.7 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{12}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_9, 1) \times$
$\times p(\{A_2, B_6\}, q_{10}, 1) = 0.7 \cdot 1 \cdot 1/3 \cdot 0 = 0;$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{13}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_9, 1) \times$
$\times p(\{A_2, B_6\}, q_{10}, 2) = 0.7 \cdot 1 \cdot 1/3 \cdot 1 = 7/30;$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{14}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_9, 2) \times$
$\times p(\{A_2, B_6\}, q_{11}, 1) = 0.7 \cdot 1 \cdot 2/3 \cdot 0 = 0;$

$P(\{A_2, B_6\}, t_{15}) =$
$= p(\{A_2, B_6\}, q_1, 3) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_4, 2) \cdot p(\{A_2, B_6\}, q_9, 2) \times$
$\times p(\{A_2, B_6\}, q_{11}, 2) = 0.7 \cdot 1 \cdot 2/3 \cdot 1 = 7/15.$

Несложно подсчитать, что

$$\sum_{k=1}^{15} P(\{A_i, B_j\}, t_k) = 1 .$$

Рассмотрим теперь, как в зависимости от применяемых стратегий определяются элементы таблицы выигрышей игрока А. Пусть $M_{ij}(A_i, B_j)$ — математическое ожидание выигрыша игрока А при чистых стратегиях A_i, B_j. Рассчитывается это значение как математическое ожидание дискретной случайной величины — выигрыша игрока А:

$$M_{ij}(A_i, B_j) = \sum_{k=1}^{15} W(t_k) P(\{A_i, B_j\}, t_k),$$

где $W(t_k)$ — выигрыш игрока А, если партия игры заканчивается в вершине t_k ($k = 1, ..., 15$); $P(\{A_i, B_j\}, t_k)$ — вероятность того, что партия закончится в вершине t_k, если игроки применяют множество стратегий $\{A_i, B_j\}$.

Так, для игрока А и множества стратегий $\{A_2, B_6\}$, получим

$$M_{26}(\{A_2, B_6\}) = \sum_{k=1}^{15} W(t_k) P(\{A_i, B_j\}, t_k) =$$

$$= 10 \cdot 0.1 + (-10) \cdot 0.2 + (-30) \cdot 7/30 + 15 \cdot 7/15 = -1 .$$

Аналогичным образом рассчитываются и остальные элементы таблицы выигрышей:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
		[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]
A_1	[1, 1]	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}
A_2	[1, 2]	M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	M_{25}	M_{26}
A_3	[2, 1]	M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}	M_{35}	M_{36}
A_4	[2, 2]	M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{44}	M_{45}	M_{46}

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
		[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]
A_1	[1, 1]	–22	–24	–22	20	18	20
A_2	[1, 2]	–1	–3	–1	–1	–3	–1
A_3	[2, 1]	–13	–12	–15	27	28	25
A_4	[2, 2]	8	9	6	6	7	4

После заполнения данной таблицы оптимальные стратегии и цена игры определяются обычными методами теории игр.

В результате применения отношений доминирования определяем активные стратегии:

		B_3	B_6
		[1, 3]	[2, 3]
A_3	[2, 1]	–15	25
A_4	[2, 2]	6	4

Оптимальные смешанные стратегии игроков, полученные аналитическим методом:

$$S_A^* = [0 \;\; 0 \;\; 1/21 \;\; 20/21]; \;\; S_B^* = [0 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1/2].$$

Цена игры $\nu = 5$.

Итак, можно сделать следующее заключение. Позиционная игра в общем виде сводится к матричной игре. Для этого необходимо перечислить возможные стратегии игроков и определить значения средних выигрышей M_{ij} для всех пар стратегий $\{A_i, B_j\}$.

Рассматриваются два вида функций выигрышей:

- $W(t_k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$, определенные на множестве вершин дерева игры $\{t_k\}$ и указывающие величину выигрыша в зависимости от достигнутой вершины (партии);
- M_{ij} $(i = 1, 2, ..., l;\; j = 1, 2, ..., m)$, определенные на множестве упорядоченных чистых стратегий $\{A_i, B_j\}$ и указывающие средний выигрыш (проигрыш) каждого игрока при условии, что игроки применяют свои чистые стратегии.

Для различия будем называть $W(t_k)$ функциями выигрышей партии, M_{ij} — функциями выигрышей стратегий.

Замечание. Мы рассматривали позиционные игры с неполной информацией на примерах антагонистических игровых задач. Неантагонистические задачи решаются точно так же, лишь с тем отличием, что в вершинах графов задаются функции выигрышей обоих игроков (W_A, W_B) и, соответственно, формируются две игровые матрицы. Подобные задачи решаются методами теории биматричных игр.

4.4. Решение позиционных игровых задач с полной информацией

Позиционная игра называется ***игрой с полной информацией***, если в любой точке любой ее партии игрок, делающий ход, точно знает, в какой позиции он находится и какие выборы были сделаны ранее, а следовательно, из-за древовидности графа игры может восстановить и все предыдущие позиции. В графическом исполнении каждый узел такой игры будет представлять собой отдельное информационное множество, и поэтому в такой игре информационные множества пунктиром не отмечаются.

Примерами игр с полной информацией могут служить шашки, шахматы, крестики и нолики. Большинство карточных игр не является играми с полной информацией, поскольку игроки не знают, какие карты были выданы другим игрокам.

Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема. ***В любой конечно-шаговой игре с полной информацией на конечном древовидном графе существует ситуация абсолютного равновесия по Нэшу.***

Рассмотрим, как определяется ситуация равновесия в позиционных играх с полной информацией.

Каждый ход игрока однозначно определяет последующую позицию дерева игры. В результате последовательного выбора позиций игроков однозначно реализуется некоторая последовательность узлов, определяющая путь в древовидном графе, исходящий из начальной позиции и достигающий одной из конечных вершин. Такой путь называется ***партией*** игры.

Разобьем все множество позиций дерева игры на три подмножества:

- {Аi} (i = 1, ..., n) — множество очередности игрока А, т. е. множество позиций игрока А, в которых ему предоставлено право выбора очередной альтернативы. Для наглядности будем изображать на дереве игры эти позиции кружками;
- {Вj} (j = 1, ..., m) — множество очередности игрока В, т. е. множество позиций игрока В, в которых ему предоставлено право выбора очередной альтернативы. Для наглядности будем изображать на дереве игры эти позиции квадратами;
- $\{t_k\}$ (k = 1, ..., l) — множество конечных вершин, в которых задаются функции выигрышей игроков в виде: $(W_{\text{A}}; W_{\text{B}})$ (на первом месте стоит выигрыш игрока А в партии игры, определяемой данной вершиной, на втором — выигрыш игрока В). Для наглядности будем изображать на дереве игры конечные вершины овалами, в которых проставлены выигрыши игроков. Чтобы не загромождать граф неактуальной информацией, номера вершин проставлять не будем.

Ребра, выходящие из каждого узла, определяют альтернативы выбора на данном этапе. Поскольку выбор альтернативы в узле дерева игры эквивалентен выбору следующей позиции, будем считать, что стратегии указывают в каждой позиции номер ребра, по которому следует двигаться далее. Например, стратегия $A_i = [2\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 1]$ игрока А предписывает ему выбор ребра 2 в позиции А1, ребра 1 — в позиции А2, ребра 2 — в позиции А3 и т. д.

Рассмотрим механизм определения оптимальных стратегий игроков на конкретном примере. Пусть игра происходит на графе, изображенном на рис. 4.11 [10].

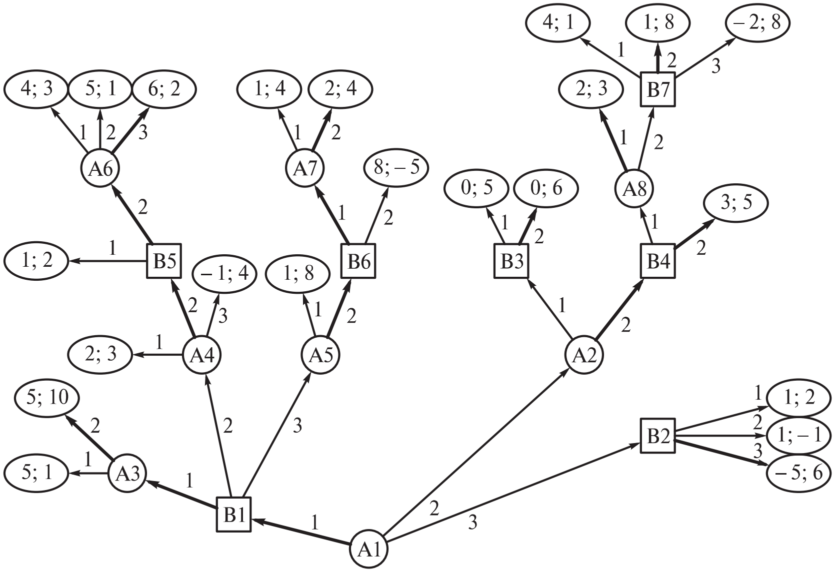


Рис. 4.11

Поскольку множество очередности игрока А состоит из восьми вершин, его стратегия представляет собой восьмимерный вектор. Аналогично любая стратегия игрока В представляет собой семимерный вектор.

Определение оптимальных стратегий игроков будем проводить, используя метод динамического программирования. Как известно, при решении задач методом динамического программирования весь многошаговый процесс проходится дважды: сначала от конца к началу, в результате чего формируются последовательности условных оптимальных управлений — альтернатив (определяющих оптимальные пути при условии попадания в конкретную позицию) и условные выигрыши, а затем — от начала к концу, в результате чего формируется оптимальная партия игры. Во время первого прохода, когда компоненты стратегий задаются в порядке, обратном выборам игроков, во всех позициях дерева игры определяем значение функции Беллмана (функции выигрыша).

Определение функции Беллмана начнем с крайних позиций. Рассмотрим позицию А6 игрока А. Если в этой позиции игрок А выбирает 1-ю альтернативу, он получает выигрыш, равный 4 (первое значение в конечной вершине, к которой ведет ребро 1). При выборе альтернативы 2 выигрыш игрока А составит 5, а при выборе альтернативы 3 он выиграет 6. Поскольку игрок А заинтересован в максимальном выигрыше, он выбирает 3-ю альтернативу, которая на графе выделяется жирной линией. Таким образом, функция Беллмана для игрока А в данной позиции равна:

$$F_A(A6) = \max\{W_A(1);\ W_A(2);\ W_A(3)\} = \max\{4(1);\ 5(2);\ 6(3)\} = 6(3)^*.$$

Функция Беллмана для игрока В в позиции А6 автоматически определяется выбором 3-й альтернативы игроком А (выигрыш В при 3-й альтернативе):

$$F_B(A6) = W_B(3) = 2(3).$$

Движемся дальше вглубь дерева. Позиция следующего уровня — В5. В этой позиции выбор делает игрок В. У него два выбора: если он выбирает альтернативу 1 , то получает выигрыш 2 (второе значение в конечной вершине, к которой ведет ребро 1 из позиции В5), если выбирает альтернативу 2, то попадает в позицию А6, значение выигрыша для которой определяется функцией Беллмана $F_B(A6) = 2$. Таким образом, игроку В безразлично, какую альтернативу выбирать — выигрыши одинаковы и тут, и там. В то же время его выбор существенен для игрока А, поскольку при выборе игроком В первой альтернативы игрок А получает 1, а при выборе игроком В второй альтернативы А получает 6. Следовательно, необходимо определить отношение игроков друг к другу: «доброжелательное» или «недоброжелательное». Предположим, что отношение «доброжелательное», т. е. игрок может «помочь» другому игроку, если это не затрагивает его интересов. Таким образом, игрок В выбирает альтернативу 2 (на графе ребро 2 выделяется жирной линией). Тогда функция Беллмана в позиции В5 для игрока В будет:

$$F_B(B5) = \max\{W_B(1);\ F_B(A6)(2)\} = \max\{2(1);\ 2(2)\} = 2(2).$$

Функция Беллмана для игрока А в позиции В5 автоматически определяется выбором 2-й альтернативы игроком В (выигрыш А в позиции А6):

$$F_A(B5) = F_A(A6)(2) = 6(2).$$

Переходим еще на один уровень вглубь дерева и делаем выбор в позиции А4. Тут выбор за игроком А. Функция Беллмана в позиции А4 определяется аналогично тому, как это было сделано ранее:

$$F_A(A4) = \max\{W_A(1);\ F_A(B5)(2);\ W_A(3)\} =$$
$$= \max\{2(1);\ 6(2);\ -1(3)\} = 6(2).$$

---

* В скобках около значений выигрышей стоят номера альтернатив, приводящих к данным выигрышам.

Следовательно, на графе закрашивается ребро 2, ведущее в узел B5.

Значение функции Беллмана для игрока B в позиции A4 равно

$F_B(A4) = F_B(B5)(2) = 2(2)$.

Проводить выбор в позиции B1 мы пока не можем, поскольку не рассчитаны значения функций Беллмана в позициях A3 и A5.

Выберем альтернативу в узле A3:

$F_A(A3) = \max\{5(1); 5(2)\}=5(2)$

— при учете доброжелательного отношения к игроку B.

Выделяем жирной линией ребро 2. Соответственно,

$F_B(A3) = 10(2)$.

Проведем выбор в позиции A7:

$F_A(A7) = \max\{1(1); 2(2)\}=2(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2;

$F_B(A7) = 4(2)$.

Далее анализируем позицию B6:

$F_B(B6) = \max\{F_B(A7)(1); W_B(2)\} = \max\{4(1); -5(2)\} = 4(1) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 1;

$F_A(B6) = F_A(A7)(1) = 2(1)$.

Переходим к позиции A5:

$F_A(A5) = \max\{ W_A(1); F_A(B6)(2)\}= \max\{1(1); 2(2)\}=2(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2;

$F_B(A5) = F_B(B6)(2) = 4(2)$.

Зная результаты расчетов в узлах A3, A4, A5, можем определить функцию Беллмана в позиции B1:

$$F_B(B1) = \max\{F_B(A3)(1); F_B(A4)(2); F_B(A5)(3)\}=$$
$$= \max\{10(1); 2(2); 4(3)\}= 10(1).$$

Следовательно, выделяем ребро 1, ведущее к позиции A3:

$F_A(B1) = F_A(A3)(1) = 5(1)$.

Переходим к анализу правых ветвей дерева. Рассчитаем функцию Беллмана в узле B7:

$F_B(B7) = \max\{1(1); 8(2); 8(3)\} = 8(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2, учитывая доброжелательное отношение к игроку B;

$F_A(B7) = 1(2)$.

Рассмотрим позицию A8:

$F_A(A8) = \max\{W_A(1); F_A(B7)(2)\}= \max\{2(1); 1(2)\}=2(1) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 1;

$F_B(A8) = 3(1)$.

Определим функцию Беллмана в позиции B4:

$F_B(B4) = \max\{F_B(A8)(1);\ W_B(2)\} = \max\{3(1);\ 5(2)\} = 5(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2;

$F_A(B4) = 3(2)$.

Выберем альтернативу в узле B3:

$F_B(B3) = \max\{5(1);\ 6(2)\} = 6(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2;

$F_A(B3) = 0(2)$.

Зная функции Беллмана в позициях B3, B4, можем произвести выбор в узле A2:

$F_A(A2) = \max\{F_A(B3)(1);\ F_A(B4)(2)\} = \max\{0(1);\ 3(2)\} = 3(2) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 2;

$F_B(A2) = 5(2)$.

Рассмотрим позицию B2:

$F_B(B2) = \max\{2(1);\ -1(2);\ 6(3)\} = 6(3) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 3;

$F_A(B2) = -5(3)$.

И наконец-то наступил долгожданный момент — мы можем произвести выбор альтернативы в начальной позиции A1!

$F_A(A1) = \max\{F_A(B1)(1);\ F_A(A2)(2);\ F_A(B2)(3)\} =$
$= \max\{5(1);\ 3(2);\ -5(3)\} = 5(1) \Rightarrow$ закрашиваем ребро 1;

$F_B(A1) = F_B(B1)(1) = 10(1)$.

Теперь можем сделать проход от начала к концу и определить оптимальный путь развития данной игры: в позиции A1 следует выбрать 1-ю альтернативу (на что указывает выделенное ребро с номером 1) и перейти в позицию B1, в B1 выбирается также 1-я альтернатива, которая приводит в узел A3, где рекомендуется выбрать альтернативу 2.

В результате решения данной игры мы получаем ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу (A^*, B^*), однозначно определяющую выбор альтернативы в каждой позиции:

$$A^* = [1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1],\ B^* = [1\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2].$$

Как было показано выше, ситуация (A^*, B^*) предписывает следующий путь развития игры: A1, B1, A3.

Данная ситуация равновесия получена при условии доброжелательного отношения игроков друг к другу, которое предполагает делать выбор альтернативы в пользу противника без ущемления своих интересов. Выигрыши игроков (цены игры) в данных условиях будут следующими:

$\nu_A = F_A^* = 5;\ \ \nu_B = F_B^* = 10.$

Если заменить условие «доброжелательности» игроков противоположным условием «недоброжелательности», ситуация равновесия и, соответственно, выигрыши игроков изменятся. Проведя процедуру построения абсолютного равновесия при недоброжелательном отношении игроков аналогично тому, как это было сделано при доброжелательном отношении, получим новую ситуацию равновесия по Нэшу $(\overline{A}^*, \overline{B}^*)$:

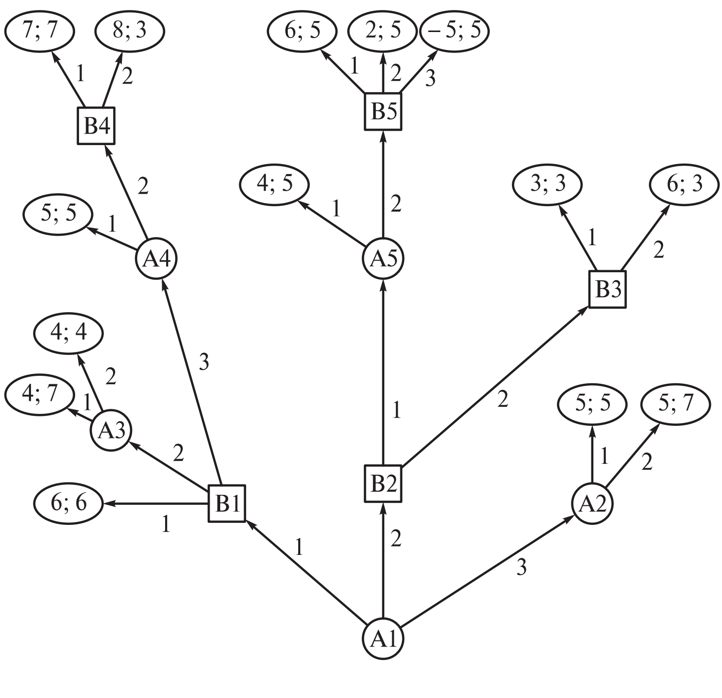
$$\overline{A}^* = [2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1],\ \overline{B}^* = [3 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 3].$$

В ситуации $(\overline{A}^*, \overline{B}^*)$ игра развивается по пути: A1, A2, B4. Выигрыши обоих игроков в ситуации $(\overline{A}^*, \overline{B}^*)$ меньше таковых в ситуации (A^*, B^*) и составляют: $\overline{v}_A = 3$; $\overline{v}_B = 5$.

Замечание. Позиционная игра с полной информацией рассмотрена на примере неантагонистической игровой задачи. Антагонистические задачи решаются аналогично, только сумма выигрышей игроков в конечных вершинах должна равняться нулю, например: 5; –5 или –3; 3.

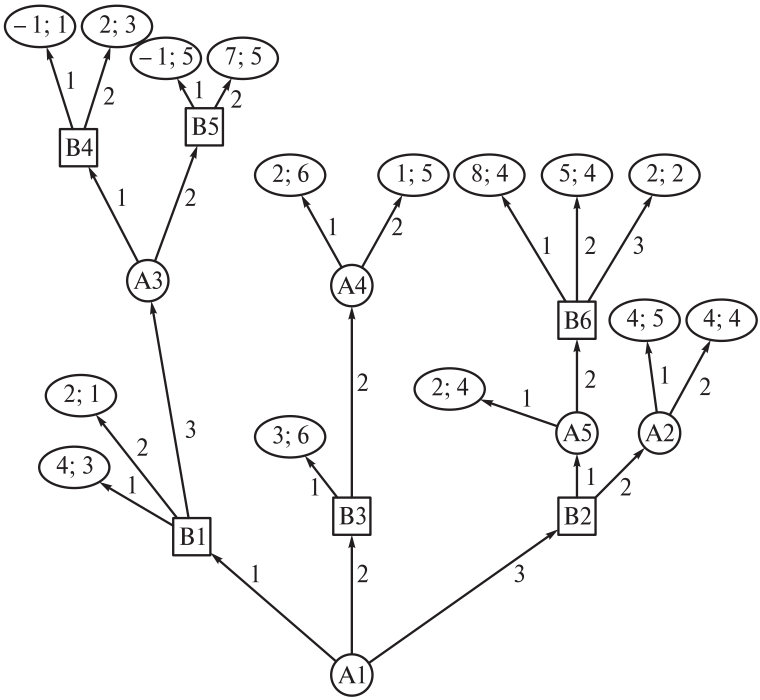
Проверьте себя! Определите равновесные ситуации и цены игры при условии доброжелательного и недоброжелательного отношения игроков в следующих задачах.

1.



Ответ**.**
Доброжелательное отношение.
$A^* = [1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 2]$; $\nu_A = 7$; $B^* = [3\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1]$; $\nu_B = 7$.
Недоброжелательное отношение.
$\overline{A}^* = [1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$; $\overline{\nu}_A = 7$; $\overline{B}^* = [3\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 3]$; $\overline{\nu}_B = 7$.

2.



Ответ**.**
Доброжелательное отношение.
$A^* = [1\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2]$; $\nu_A = 7$; $B^* = [3\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$; $\nu_B = 5$.
Недоброжелательное отношение.
$\overline{A}^* = [3\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2]$; $\overline{\nu}_A = 4$; $\overline{B}^* = [3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2]$; $\overline{\nu}_B = 4$.

Рассмотрим ряд задач, которые можно формализовать в виде позиционных игр.

4.5. Принятие организационно-управленческих решений с помощью позиционных игр

4.5.1. «Планирование производства»

Предприятие планирует осуществлять строительство дачных домиков [11]. Возможные действия фирмы в данной ситуации:

- осуществить крупные инвестиции и развернуть крупное производство;
- осуществить пробный выход на рынок с небольшой партией продукции.

С целью повышения эффективности предстоящих инвестиций, предприятие может произвести предварительно изучение рынка. При этом возможны два варианта решения этой проблемы:

- изучение конъюнктуры рынка собственными силами;
- заказать исследование рыночной ситуации у специализированной фирмы.

Таким образом, рассмотренная ситуация адекватно описывается моделью позиционной трехходовой игры с неизвестной информацией. В качестве игрока А выступает лицо, принимающее решение, а игрок В — условия внешней конкурентной среды. Перейдем к численному анализу возможных последствий каждого из вариантов.

По прогнозам специалистов фирмы при благоприятной конъюнктуре рынка возможно получить прибыль в размере 200 тыс. руб., если развернуть крупное производство; если же ограничиться пробными сериями продукции, то прибыль составит 100 тыс. руб. Если же ситуация на рынке сложится для предприятия неблагоприятно, то при крупном производстве это приводит к убыткам в размере 180 тыс. руб., а при пробных объемах убытки составят 40 тыс. рублей. Проведение собственных маркетинговых исследований приводит к дополнительным затратам в сумме 20 тыс. руб., а заказ специализированной фирме обойдется в 50 тыс. руб.

Следовательно, в конце третьего хода игрок А оказывается в одной из следующих ситуаций:

- проведенные сторонней организацией маркетинговые исследования побудили руководство фирмы принять решение о развертывании крупного производства, рыночная ситуация оказалась благоприятной, что привело к получению общей прибыли в размере 150 тыс. руб.;
- данные маркетинговых исследований, проведенные сторонней фирмой, привели к принятию решения о развертывании крупного производства, но ситуация на рынке сложилась неблагоприятная: предприятие понесло убытки в размере 230 тыс. руб.;

- заказанные исследования позволили принять решение о пробном производстве и рыночная ситуация оказалась благоприятной: прибыль составила 50 тыс. руб.;
- решение о пробном производстве, принятое на основе проведенных специализированной фирмой исследований рыночной конъюнктуры, привело к убыткам в размере 90 тыс. руб.;
- на основе проведенных самостоятельно маркетинговых исследований развернуто крупное производство и рыночная ситуация оказалась благоприятной, получена прибыль 180 тыс. руб.;
- самостоятельные исследования рыночной конъюнктуры способствовали принятию ошибочного решения о крупном производстве, что привело к убыткам в размере 200 тыс. руб.;
- было принято решение об организации пробного производства на базе данных о рынке, полученных самостоятельно, ситуация оказалась благоприятной: получена прибыль 80 тыс. руб.;
- решение о пробном производстве, принятое на основе самостоятельно проведенных исследованиях рынка, оказалось неудачным: убытки составили 60 тыс. руб.

Составим информационные множества. Так как ситуация на рынке складывается независимо от игрока A, то на третьем ходе игры игрок A не знает свое позиционное положение, то есть ему неизвестно, будет ли рыночная ситуации благоприятной или же нет, он знает лишь о своем решении на первом шаге: заказать исследования рыночной конъюнктуры (альтернатива 1) или выполнить эти исследования своими силами (альтернатива 2).

Для внешних условий (рынка, т. е. игрока B) выбор игрока A на первом шаге об исследованиях рыночной конъюнктуры совершенно безразличен. Поэтому считаем, что игрок B (внешние условия) не знает о выборе игрока A.

На рис. 4.12, *а* приведена модель, а на рис. 4.12, *б* — граф данной позиционной игры с неполной информацией.

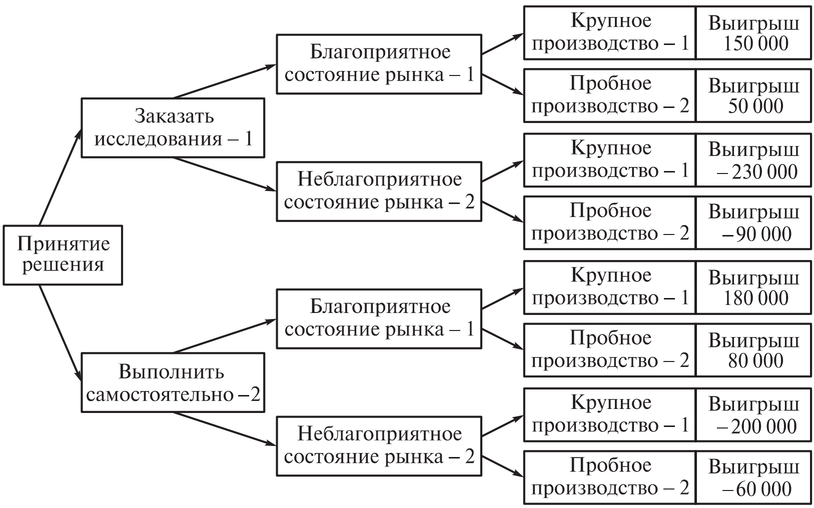
Выигрыши в вершинах графа проставлены в тыс. рублей.

Опишем возможные стратегии игрока B. Как видно из рисунка, их две, поскольку на этом шаге выбор игрока A для B неизвестен, так как для внешних воздействий совершенно безразличен.

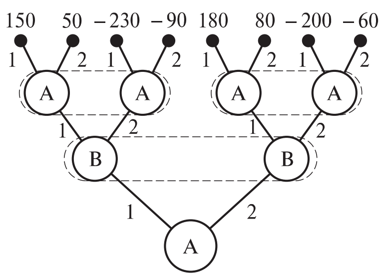
B_1 — 1 ($y = 1$ — благоприятное состояние рынка);

B_2 — 2 ($y = 2$ — неблагоприятное состояние рынка).

Игрок A на 3-м ходе не знает выбора игрока B на ходе 2, но помнит свой выбор на ходе 1, т. е. значение $x \in \{1, 2\}$ ($x = 1$ — заказать исследования рыночной конъюнктуры; $x = 2$ — выполнить эти исследования своими силами). Поэтому выбор альтернативы на



а



б

Рис. 4.12

ходе 3 ($z = 1$ — развернуть крупное производство; $z = 2$ — осуществить пробное производство) игроку А следует связать с известным ему значением x. Удобнее всего это сделать при помощи упорядоченной пары $[z_1, z_2]$. Здесь z_1 ($z_1 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что им на ходе 1 была выбрана альтернатива $x = 1$, а z_2 ($z_2 \in \{1, 2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком А при условии, что им на ходе 1 была выбрана альтернатива $x = 2$.

Чистую стратегию игрока А в данной игре можно представить в виде

$$(x, [z_1, z_2]).$$

Таким образом, у игрока А восемь чистых стратегий:

A_1 — (1, [1, 1]), A_2 — (1, [1, 2]), A_3 — (1, [2, 1]), A_4 — (1, [2, 2]),

A_5 — (2, [1, 1]), A_6 — (2, [1, 2]), A_7 — (2, [2, 1]), A_8 — (2, [2, 2]).

Например, выбор игроком А стратегии A_7 — (2, [2, 1]) означает, что на ходе 1 игрок А выбирает $x = 2$, а на ходе 3 — $z = 1$.

Рассмотрим, как определяется значение выигрыша игрока А в зависимости от стратегий, применяемых игроками в данной игре. Пусть, к примеру, игрок А выбрал свою стратегию A_3 — (1, [2, 1]), а игрок В — стратегию B_2. Тогда $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$ (из пары в квадратных скобках выбирается значение z_1, поскольку эта альтернатива выбирается при условии $x = 1$). Функция выигрыша при этих стратегиях составляет

$$W(x, y, z) = W(1,2,2) = -90$$

(значения функций выигрыша в каждой партии игры указаны на графе).

Остальные значения функций выигрыша рассчитываются аналогично. Полученные данные могут быть отражены в виде платежной матрицы, представленной в табл. 4.1.

Таблица 4.1

		B_1	B_2
		1	2
A_1	(1, [1, 1])	150	–230
A_2	(1, [1, 2])	150	–230
A_3	(1, [2, 1])	50	–90
A_4	(1, [2, 2])	50	–90
A_5	(2, [1, 1])	180	–200
A_6	(2, [1, 2])	80	–60
A_7	(2, [2, 1])	180	–200
A_8	(2, [2, 2])	80	–60

После применения отношений доминирования для стороны А матрица игры приводится к виду:

		B_1	B_2
		1	2
A_5	(2, [1, 1])	180	–200
A_6	(2, [1, 2])	80	–60

Поскольку данная игра относится к классу игр «с природой», стратегии игрока В (природы), мы сокращать не можем, поскольку «природа» свои стратегии не выбирает.

Согласно критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица и Лапласа, предпочтение следует оказать стратегии A_6 (или дублирующей её стратегии A_8), т. е. проводить изучение конъюнктуры рынка собственными силами и осуществить пробный выход на рынок с небольшой партией продукции.

Данное решение имеет важное приложение, если рассмотреть поведение игрока В, то есть внешние условия. Как уже говорилось, здесь имеются две чистых стратегии: рынок благоприятен и рынок неблагоприятен. Предположим, что вероятность того, что положение на рынке будет благоприятным, составляет q, соответственно вероятность неблагоприятного положения на рынке составит $(1 - q)$ (как вероятность противоположного события). Тогда средний выигрыш при стратегии A_6 будет определяться соотношением

$$W_6 = 80q - 60(1 - q) = 140q - 60,$$

откуда можно найти вероятность того, что средний выигрыш W_6 будет равен 0, решив уравнение

$$140q - 60 = 0.$$

Искомая вероятность составляет $q = 3/7$. Эти данные можно интерпретировать следующим образом: если предсказуемость рынка при данных условиях будет не больше 42% (≈300/7), то принимаемое в этих условиях управленческое решение, скорее всего, приведет к убыткам.

Таким образом, рассмотренный пример показывает, как определить допустимый уровень оценки прогноза рынка сбыта при проведении маркетинговых исследований.

4.5.2. «Погоня за конкурентом»

Пусть торговая фирма А обеспечивает населенные пункты П2, П4 и П5 некоторым потребляемым продуктом с ограниченным сроком хранения (например, свежей рыбой, перевозимой в цистернах с водой) [12]. При этом товар (от достаточно удаленного поставщика) поступает в пункт П4, который является исходной точкой двух маршрутов, используемых фирмой А. Первый маршрут включает последовательные переезды из П4 в П2 и затем из П2 в П5 с последующим возвращением из П5 в П4. Будем обозначать этот маршрут символом М2. Второй (более короткий) маршрут предполагает переезд из П4 в П5 с возвращением в П4. Обозначим его М5. Указанные населенные пункты и связывающие их маршруты изображены на схеме, представленной на рис. 4.13 (варианты путей, возможных для фирмы А, отмечены на рисунке жирными линиями).

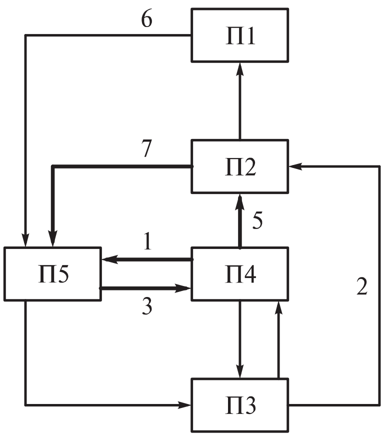


Рис. 4.13

Примем теперь, что некоторая другая фирма В, создающая свою собственную производственную базу (например, на прудах) в малонаселенном пункте П3 и еще не имеющая значительных объемов производства, планирует подготовку потребителей к положительному восприятию своего продукта. Планируемая акция состоит в проведении продаж ограниченного объема, нацеленных на демонстрацию исключительно высокого качества предлагаемого товара (при прочих равных условиях). Заметим, что в случае торговли свежей рыбой указанное преимущество может определяться близостью источника поставки, создаваемого фирмой В, и удаленностью такого источника у фирмы А.

Фирма В ставит задачу продавать малые партии своего товара *одновременно и одноместно* с продажами, которые осуществляет давно действующая на рынке фирма А. Ожидается, что такой подход усилит рекламный эффект за счет непосредственной демонстрации уже упомянутого превосходства качества. Для этой цели фирма В может воспользоваться следующими двумя маршрутами, отмеченными тонкими линиями на рис. 4.13. Первый маршрут включает последовательные переезды из П3 в П2, затем из П2 в П1 и далее из П1 в П5. Маршрут завершается возвращением в П3. Обозначим его М1. Второй маршрут предполагает доставку и продажу товара в П4 с возвращением в П3. Обозначим его М4. Заметим, что конфигурация возможных маршрутов может быть следствием характера транспортной сети.

Будем полагать, что большой объем партии товара, получаемой фирмой А, допускает неоднократное возвращение в пункт П4 с последующим выбором маршрута продолжения продаж. При этом ограниченный объем каждой пробной партии товара, реализуемой фирмой В, позволяет ей осуществить описанную рекламную акцию лишь на одном из маршрутов.

Следующее важное обстоятельство касается того, информирована ли фирма В в момент выбора своего маршрута о том маршруте, по которому товар фирмы А покинет пункт П4. В этой связи мы будем рассматривать два случая. В первом считается, что каждый раз, когда фирма А покидает пункт П4, фирма В информирована о маршруте, выбранном А (до принятия своего решения). Во втором случае мы будем полагать такую информацию отсутствующей.

Время перемещения продаж из одного населенного пункта, лежащего на маршруте, в другой населенный пункт (лежащий на том же маршруте) примем за единицу. Будем считать его одинаковым для обеих фирм. Примем также, что время самих продаж в населенном пункте тоже составляет единицу. Дополним это предположение условием, что фирма В начинает реализацию выбранного маршрута из пункта П3 в момент, когда товар фирмы А покинул П4 и появился в другом пункте. При принятых допущениях можно считать, что фирмы А и В совершают переходы между пунктами по очереди. Схема на рис. 4.13 иллюстрирует одну из возможных последовательностей таких переходов, соответствующую случаю, когда фирма А сначала реализует маршрут М5, а затем (после возвращения в П4) маршрут М2. Целые числа, нанесенные около дуг маршрутов А и В, соединяющих населенные пункты, — это порядковые номера периодов времени, в которые совершались соответствующие переходы.

Как следует из диаграммы, в первый единичный период фирма А перевозит свой товар из П4 в П5. Затем (пока А осуществляет продажи в П5) фирма В перевозит свой товар из П3 в П2 (второй единичный период). В третьем периоде А возвращается в П4 (в это время В торгует в П2). В четвертом периоде В перемещается из П2 в П1. Далее А переходит из П4 в П2 (пятый период). В шестом периоде В переходит в пункт П5, куда (в седьмом периоде) прибывает и товар фирмы А. Будем интерпретировать этот случай как *окончание погони*, поскольку при этом В имеет возможность торговать одновременно и одноместно с А.

Случай, когда сторона В возвращается в пункт П3, распродав свой товар и не столкнувшись (одновременно и одноместно) с товаром другой стороны ни в одном из населенных пунктов на своем маршруте, будем также интерпретировать как *окончание погони*.

Примем, что интересы В требуют реализовать одновременную и одноместную с А продажу (как и вообще все свои продажи) как можно раньше. При этом в большей степени сохраняется свежесть товара (предлагаемого В), определяющая его конкурентные преимущества. Интересы стороны А полагаются *противоположными* интересам стороны В. Будем оценивать полезность, которую обеспечивает себе сторона А в любой реализации рассматриваемого конфликта, как число периодов времени, которые прошли до окончания погони. Требуется определить оптимальные стратегии и цену игры.

Условия рассмотренной операции допускают следующее наглядное (графическое) описание.

Ситуации в развитии операции, в которых одна из сторон осуществляет свой выбор (т. е. принимает решение), будем называть *позициями* (и обозначать q_i, $1 \le i \le L$). Множество всех позиций обозначим Q, т. е. $Q = \{q_1, ..., q_i, ..., q_L\}$.

Ситуации, завершающие какую-либо реализацию операции, будем называть *исходами* и обозначать t_k, $1 \le k \le K$. Множество всех исходов обозначим $T = \{ t_1, ..., t_k, ..., t_K\}$.

Конкретный выбор, осуществляемый той или иной стороной в позиции $q_i \in Q$, будем называть *ходом* этой стороны. Поскольку каждый такой выбор переводит развитие операции либо в некоторую ситуацию $q_j \in Q$, в которой осуществляет свой ход другая сторона, либо в некоторую ситуацию $t_k \in T$ завершения операции, то каждый возможный ход может быть охарактеризован либо парой вида (q_i, q_j), либо парой вида (q_i, t_k). Множества Q, T и множества всех возможных в данной операции пар вида (q_i, q_j) и (q_i, t_k) допускают наглядное графическое изображение (на плоскости). Элементы множеств Q и T изображаются точками. Образы элементов первого множества называются *узлами*, а второго — *вершинами*. Пары вида (q_i, q_j) и (q_i, t_k) изображаются отрезками прямых линий, соединяющих соответствующие точки. Эти отрезки будем называть дугами или ребрами. Около каждого узла указывается, какая фирма осуществляет свой выбор в данной позиции. Будем выполнять графическое построение таким образом, чтобы узлы последующих позиций (порядок следования определяется переходами по ребрам из одних позиций в другие) лежали на графике выше, чем узлы предшествующих позиций. Точки вершин также должны изображаться выше, чем точки предшествующих им узлов. Результирующий рисунок представляет собой *плоский граф* типа *дерева*. Исходная точка ветвления такого дерева (нижний узел) называется *корнем дерева*.

На рис. 4.14 построено дерево игры задачи «Погоня за конкурентом» для случая с полной информацией.

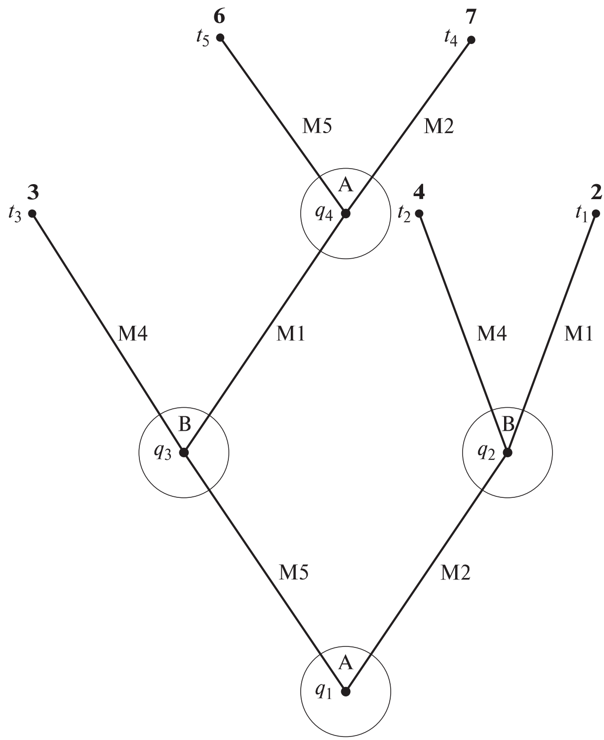


Рис. 4.14

В исходной позиции (см. корневой узел на рис. 4.14) сторона А выбирает маршрут (М2 или М5), на котором она будет осуществлять продажи своего товара. Двум возможным вариантам выбора соответствуют два ребра графа, начинающихся в корневом узле q_1 (символы вариантов нанесены справа от соответствующих ребер).

Концевые узлы (q_2 и q_3) указанных ребер соответствуют двум возможным ситуациям, в которых свой выбор делает сторона В. В позиции q_2 фирма В выбирает свой маршрут в условиях, когда первая фирма реализует маршрут М2. Вторая позиция (образом которой является узел q_3) отвечает условиям, когда А реализует маршрут М5. Обе эти ситуации существуют независимо от того, знает ли сторона В маршрут, реализуемый стороной А. Различия, определяемые наличием или отсутствием этого знания, будут рассмотрены ниже.

Рассмотрим последствия выбора, осуществляемого стороной В в позиции q_2 (т. е. выбора в условиях, когда сторона А реализует маршрут М2). В случае если В выбирает маршрут М1, погоня оканчивается в пункте П2 спустя два периода времени. Такому исходу отвечает правая вершина t_1 на рис. 4.14. Две единицы времени, составляющие полезность этого исхода для стороны А, отмечены (жирным шрифтом) над точкой этой вершины. Варианты перемещения сторон между населенными пунктами приведены на схемах рис. 4.15. Левая верхняя схема на рис. 4.15 иллюстрирует перемещения сторон между пунктами, результатом которых является исход t_1. Целые числа, нанесенные на этом рисунке около дуг маршрутов, указывают номера периодов времени, в которые проходятся соответствующие дуги (такие обозначения уже использовались на рис. 4.13). Прямоугольник, соответствующий пункту П2, в котором стороны одновременно и одноместно осуществляют продажу своего товара, выделен на рис. 4.15 жирными линиями.

Выбор стороной В (в позиции q_2) маршрута М4 переводит операцию в исход t_2. Этому случаю соответствует средняя верхняя схема на рис. 4.15, согласно которой погоня завершается в связи с возвращением В в исходный пункт П3 через 4 периода времени. Это как раз тот случай *окончания погони*, когда сторона В возвращается в пункт П3, распродав свой товар и не столкнувшись (одновременно и одноместно) с товаром другой стороны ни в одном из населенных пунктов на своем маршруте. Соответствующая вершина дерева, в которую ведет ребро (q_2, t_2), отмечена точкой t_2 на рис. 4.14 (4 единицы полезности, которые получает в этом исходе сторона А, нанесены жирным шрифтом над вершиной).

Перейдем к рассмотрению последствий выбора в позиции q_3. Выбор стороной В маршрута М4 (напомним, что в этом случае сторона А реализует маршрут М5) ведет в исход t_3 (за 3 периода времени). Соответствующие переходы иллюстрируются правой верхней схемой на рис. 4.15. Контур прямоугольника, обозначающего пункт П4 на этой схеме (в котором завершается погоня), выделен жирными линиями.

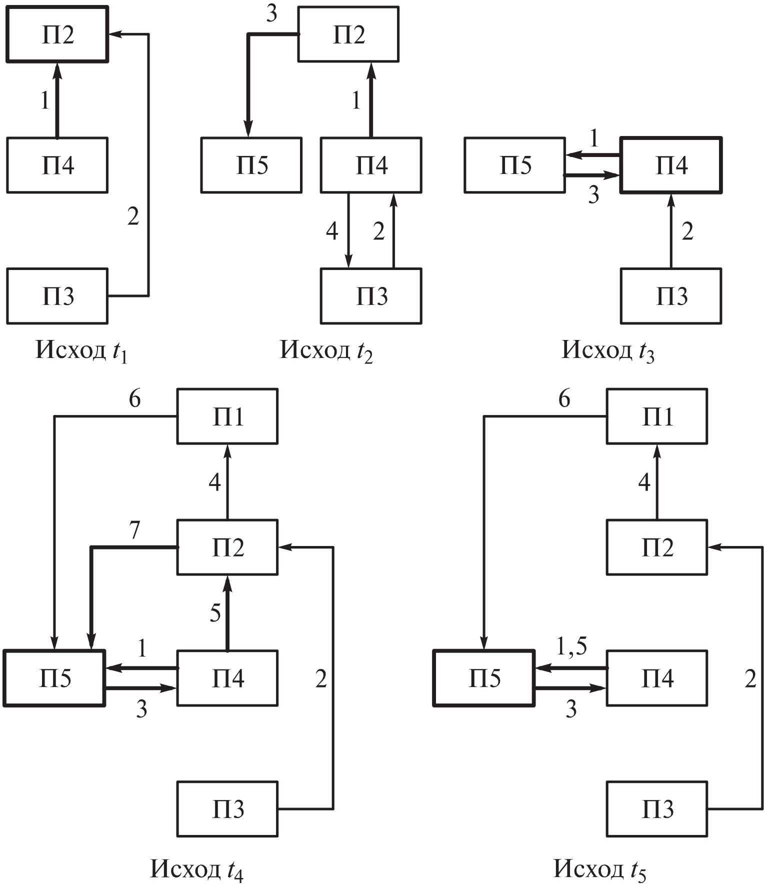


Рис. 4.15

Выбор в позиции q_3 маршрута М2 переводит операцию в позицию q_4, где выбор вновь осуществляет сторона А. Возможные варианты развития операции в зависимости от конкретного выбора иллюстрируются двумя нижними схемами на рис. 4.15. Выбор маршрута М2 (левая схема) ведет в исход t_4 за 7 периодов времени (при этом погоня завершается в пункте П5). Этот случай уже был рассмотрен ранее. Альтернативный выбор (маршрут М5) имеет результатом исход t_5. Соответствующие переходы, занимающие 6 периодов времени, изображены на правой нижней схеме на рис. 4.15. Дуги маршрутов стороны А изображены более жирными линиями, чем дуги маршрутов, проходимых стороной В.

Построенное дерево (см. рис. 4.14), называемое также ***деревом игры***, описывает последовательность выборов, осуществляемых сторонами, и достигаемые ими (в исходах) значения полезностей. В рассмотренном примере (в силу предположения о противоположности интересов сторон) достаточно указать значения полезностей лишь для стороны А. В общем случае следует сопоставить вершинам дерева (исходам операции) значения полезностей для каждой из сторон.

Теперь введем средства описания информированности сторон. Путь из корня дерева игры, проходимый по ребрам дерева и ведущий в какую-либо вершину, соответствует некоторой возможной реализации операции (т. е. соответствует некоторой партии игры).

Нетрудно заметить, что если на каждом своем ходе каждая сторона точно знает, в какой позиции дерева она осуществляет свой выбор, то ей известна вся предыстория игры, ибо в каждый узел дерева ведет единственная последовательность ребер, начинающаяся в корне. В случае когда информация о предыстории не является полной, игрок может установить лишь некоторое множество позиций, к которому принадлежит ситуация текущего хода. Такое множество называется ***информационным множеством*** игрока, осуществляющего ход в одной из позиций, составляющих это множество. При этом предполагается, что каждой позиции, входящей в такое множество, соответствует один и тот же набор вариантов выбора.

Рассматриваемый пример, как уже отмечалось, включает две частных задачи. В одной из них (позиционная игрой с полной информацией, граф которой изображен на рис. 4.14) предполагается, что фирма В, осуществляя выбор маршрута, информирована о выборе, реализуемом другой фирмой. В этом случае В, несомненно, различает позиции q_2 и q_3 и, следовательно, в дереве игры существуют два информационных множества стороны В: $\{q_2\}$ и $\{q_3\}$.

Что касается стороны А, то она также различает позицию q_1, в которой осуществляет свой первый выбор, и позицию q_4, в которой имеет место второй (более поздний) выбор. Поэтому информированность А также характеризуется двумя информационными множествами: $\{q_1\}$ и $\{q_4\}$. Все эти информационные множества отмечены на рис. 4.14 с помощью окружностей, охватывающих соответствующие узлы дерева.

Определим стратегии сторон в примере «погони за конкурентом». Если принять, что информационные множества каждой стороны занумерованы, то можно характеризовать стратегии с помощью кортежей, число компонент которых соответствует числу информационных множеств (в дереве игры) для данного игрока. При этом кортеж составляется из вариантов, определяющих выбор в соответствующем множестве. Т. е. первый элемент кортежа соответствует выбору в первом информационном множестве, второй элемент — во втором множестве, и т. д.

Начнем со случая, когда сторона B заблаговременно информирована о первом выборе, осуществленном стороной A. Дерево игры, соответствующее этому случаю (см. рис. 4.14), содержит два информационных множества ($\{q_1\}$ и $\{q_4\}$) стороны A, поэтому стратегию игрока A удобно описывать упорядоченной парой $[s_1, s_2]$. Каждому из этих множеств соответствует один и тот же набор альтернатив выбора (M2, M5). Следовательно, возможны четыре стратегии стороны A, представляемые следующими функциями:

A_1 — [M2, M2] $(s_1(\{q_1\}) = \text{M2}, s_2(\{q_4\}) = \text{M2})$;

A_2 — [M2, M5] $(s_1(\{q_1\}) = \text{M2}, s_2(\{q_4\}) = \text{M5})$;

A_3 — [M5, M2] $(s_1(\{q_1\}) = \text{M5}, s_2(\{q_4\}) = \text{M2})$;

A_4 — [M5, M5] $(s_1(\{q_1\}) = \text{M5}, s_2(\{q_4\}) = \text{M5})$.

Замечание (о дублировании стратегий). Фактически введенные выше стратегии A_1 и A_2 описывают одно и то же поведение стороны A, ибо после выбора в позиции маршрута M2 последующее развитие операции не может привести в позицию q_4. Поэтому различие рекомендаций, касающихся выбора альтернативы во множестве $\{q_4\}$ (а именно этим и отличаются стратегии A_1 и A_2), не может влиять на развитие операции. Однако мы не будем исключать возникающую избыточность описания, чтобы сохранить простое определение стратегии, введенное в разделе 4.2.

Аналогично можно перечислить все стратегии стороны B, которой сопоставлены два информационных множества ($\{q_2\}$ и $\{q_3\}$), — поэтому стратегию игрока B удобно описывать упорядоченной парой вида $[g_1, g_2]$. Каждое из этих множеств характеризуется одним и тем же набором вариантов решений (M1, M4) (см. дерево игры на рис. 4.14). Таким образом, множество стратегий стороны B составляют четыре функции:

B_1 — [M1, M1] $(g_1(\{q_2\}) = \text{M1}, g_2(\{q_3\}) = \text{M1})$;

B_2 — [M1, M4] $(g_1(\{q_2\}) = \text{M1}, g_2(\{q_3\}) = \text{M4})$;

B_3 — [M4, M1] $(g_1(\{q_2\}) = \text{M4}, g_2(\{q_3\}) = \text{M1})$;

B_4 — [M4, M4] $(g_1(\{q_2\}) = \text{M4}, g_2(\{q_3\}) = \text{M4})$.

Пусть стороны A и B соответственно выбрали стратегии A_i и B_j. Прослеживая путь в дереве игры, определяемый теми выборами, которые предписывают стратегии $\{A_i, B_j\}$ (в последовательно проходимых позициях), можно определить конкретный исход игры и уровни полезности, достигаемые сторонами в этом исходе. Тем самым определяются значения платежных функций $W_А(A_i, B_j)$, $W_В(A_i, B_j)$. Например, в случае, когда А выбирает стратегию A_4, а В — стратегию B_3, игра заканчивается в исходе t_5 и

$$W_А(A_4, B_3) = -W_В(A_4, B_3) = 6.$$

Этой реализованной партии игры соответствует путь, содержащий точки q_1, q_3, q_4, t_5. Действительно, согласно выбранным стратегиям A_4 и B_3:

- выбор стороны А (в исходной позиции q_1) есть М5 и этот выбор переводит игру в позицию q_3;
- выбор стороны В в позиции q_3 есть М1 и, в результате, следующей позицией становится q_4;
- выбор А в позиции q_4 есть М5, что переводит игру в исход t_5 (см. дерево игры на рис. 4.14).

Остальные значения платежных функций рассчитываются совершенно аналогично.

Описанный способ определения значений для платежных функций сторон по заданным стратегиям и дереву игры позволяет привести позиционную игру к нормальной форме. Соответствующие значения критерия $W_А(A_i, B_j)$ сведем в табл.4.2.

Таблица 4.2

Платежная матрица игры «Погоня за конкурентом» (при полной информации)		B_1	B_2	B_3	B_4
		[М1, М1]	[М1, М4]	[М4, М1]	[М4, М4]
A_1	[М2, М2]	2	2	4	4
A_2	[М2, М5]	2	2	4	4
A_3	[М5, М2]	7	3	7	3
A_4	[М5, М5]	6	3	6	3

Из таблицы видно, что существуют два устойчивых (и эффективных) решения, определяемых парами стратегий (A_3, B_2) и (A_4, B_2). Цена этой антагонистической игры (т. е. седловое значение матрицы) $\nu = 3$. Заметим, что решение не изменится, если решать задачу методом динамического программирования, как это показано в разделе 4.4.

Вторая частная задача связана с предположением, что в момент выбора маршрута сторона B не имеет сведений о маршруте, реализуемом стороной A. Этот вариант развития событий является позиционной игрой с неполной информацией, граф которой представлен на рис. 4.16. В этом случае позиции q_2 и q_3 неразличимы для стороны B. В результате в дереве игры существует лишь одно информационное множество стороны B: $\{q_2, q_3\}$. Это множество отмечено на рис. 4.16 с помощью овала, охватывающего узлы q_2 и q_3.

Следовательно, в этой частной задаче сторона B имеет лишь две стратегии:

B_1 — M1 $\quad (g(\{q_2, q_3\}) = \text{M1});$

B_2 — M4 $\quad (g(\{q_2, q_3\}) = \text{M4})$.

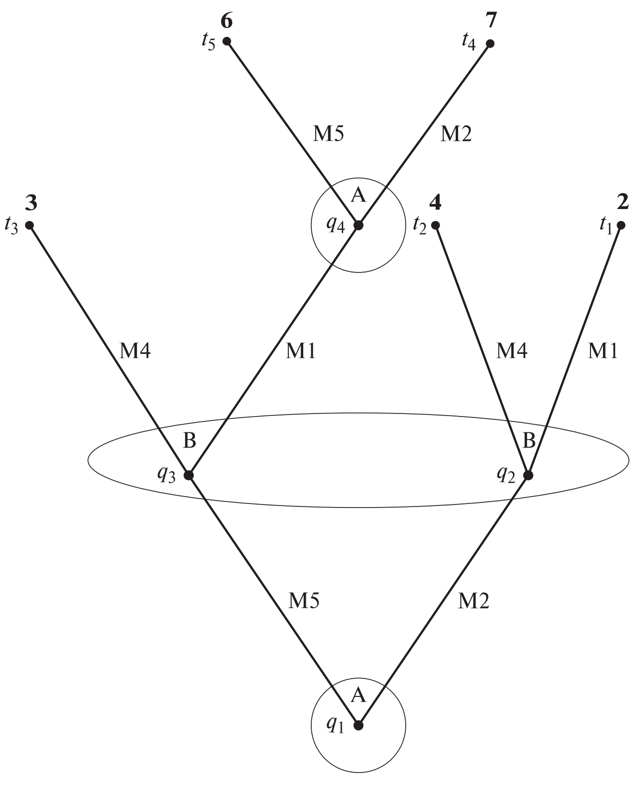


Рис. 4.16

Стратегии же стороны А остаются прежними. Матрица игры, соответствующая этому последнему случаю, представлена в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Платежная матрица игры «Погоня за конкурентом» (при неполной информации)		B_1	B_2
		М1	М4
A_1	[М2, М2]	2	4
A_2	[М2, М5]	2	4
A_3	[М5, М2]	7	3
A_4	[М5, М5]	6	3

Полученная матрица игры не содержит седловых точек и, следовательно, не имеет решений в чистых стратегиях. Найдем решение данной игры в смешанных стратегиях аналитическим методом:

$S_A^* = [2/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0]$ или $S_A^* = [0 \quad 2/3 \quad 1/3 \quad 0]$;

$S_B^* = [1/6 \quad 5/6]$. Цена игры $\nu = 11/3$.

Таким образом, в двух случаях из трех стороне А надо выбирать на первом шаге маршрут М2, а в одном случае из трех стратегию A_3.

Замечание. Сравнивая значения выигрышей игрока В, полученные для вариантов с полной и неполной информацией, замечаем, что снижение его уровня информированности делает для него исход игры менее благоприятным. Поэтому в тех случаях, когда обе стороны заинтересованы в существовании устойчивых форм взаимодействия, они могут вводить механизмы взаимных проверок, гарантирующих полную информированность.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

5.1. Принципы кооперации

Причиной возникновения кооперативной игры является стремление игроков к улучшению своих индивидуальных выигрышей, обычно связанное с обменом информацией между участниками. Это означает, что игроки могут образовывать коалиции из компаньонов. Объединение игроков в коалицию превращает их в «единого игрока», стратегиями которого являются все возможные комбинации стратегий игроков коалиции, а выигрышем — выигрыш коалиции [7, 13].

Коалицией K_j ***игры*** $|N|$ ***лиц*** ($|N| = n$) ***называется любое непустое множество, построенное на*** N (***включая*** N ***и все его одноэлементные подмножества***).

Заметим, что количество возможных вариантов коалиции K_j для игры из n участников — $(2^n - 1)$.

Компаньоны коалиции могут нарушать соглашения о кооперации. Для предотвращения нарушения соглашения — выхода из коалиции — последняя должна быть экономически устойчивой (или стабильной). Таким образом, теория кооперативных игр наряду с понятием устойчивости решения рассматривает критерии устойчивости коалиции и способы ее поддержания, к примеру, путем улучшения индивидуальных выигрышей игроков (экономической стабильности)*.

---

* Примером кооперативного поведения является семья. Каждому человеку можно поставить в соответствие его «индивидуальную полезность». Если человек считает свою «индивидуальную полезность» вполне достаточной для комфортного проживания, его семейная жизнь может и не состояться. Объединяясь в семью (т. е. образовывая коалицию), каждый из супругов (членов коалиции) надеется улучшить свою «индивидуальную полезность», под которой понимается не только финансовое положение, но и любовь, внимание, забота супруга, рождение и воспитание детей, семейный уют и т. д. Если же семейная жизнь не приводит к улучшению индивидуального выигрыша того или иного супруга, то со временем могут возникнуть проблемы в семье и такая «семейная» коалиция может распасться.

В данном разделе приводится математическое обоснование целесообразности образования устойчивых коалиций среди игроков, позволяющих увеличить их выигрыши.

Каждой кооперативной игре можно поставить в соответствие игру «двух» игроков, причем:

— «одним игроком» является коалиция $K_j \in N$ игроков множества N;

— «другим игроком» являются остальные игроки из множества N, не вошедшие в коалицию K_j: $N \backslash K_j \in N$.

Мерами выигрышей игроков K_j и $N \backslash K_j$ являются их характеристические функции $v(\{K_j\})$ и $v(\{N \setminus K_j\})$.

Характеристической функцией игры $|N| = n$ лиц называется вещественная функция $v(\{K_j\})$, удовлетворяющая условиям:

1. $v(\{0\}) = 0$ — ***коалиция без игроков ничего не может выиграть.***
2. $v(F_i) + v(F_j) \le v(\{F_i \cup F_j\})$, — ***игроки в коалиции не могут выиграть меньше, чем индивидуально, иначе коалиция будет экономически неустойчивой.***

Здесь $v(\{F_i \cup F_j\})$ — выигрыш коалиции игроков F_i, F_j, а $v(F_i)$, $v(F_j)$ — их индивидуальные выигрыши в некооперативной игре.

Теперь можно сформулировать определение кооперативной игры:

Кооперативной игрой называется игра, задаваемая парой (N, v), где N — множество (обычно конечное), элементы которого называются игроками, а подмножества $K_j \subset N$ — коалициями, а $v(\{K_j\})$ — вещественная функция, определенная на множестве коалиций и называемая характеристической функцией игры.

Характеристическая функция $v_{K_j}(\{N\})$ кооперативной игры с коалицией K_j определяется на основе решения биматричной игры:

$$v_{K_j}(\{N\}) = v(\{K_j\}) + v(\{N \setminus K_j\}),$$

что в случае игры игрока F_k против всех остальных $N \setminus F_k$ принимает вид:

$$v_{F_k}(\{N\}) = v(\{F_k\}) + v(\{N \setminus F_k\}),$$

где $k = 1, ..., n$.

Для антагонистической коалиционной игры

$$v(\{N\}) = 0.$$

Коалиции в кооперативной игре могут быть разрешены правилами игры, но поддерживаются лишь своей полезностью.

Кооперативная игра (N, v), в которой задана коалиция K_j, называется существенной (или полезной), если выполняется *условие групповой рациональности* (*групповой существенности*) коалиции всех игроков:

$$v(N) = \sum_{k=1}^{n} v(F_k) < v_{K_j}(\{N\}),$$

где $v(N) = \sum_{k=1}^{n} v(F_k)$ — сумма индивидуальных выигрышей игроков в некооперативной игре, $v_{K_j}(\{N\})$ — характеристическая функция кооперативной игры (суммарный выигрыш игроков в кооперативной игре).

В несущественной игре коалиции экономически неустойчивы, поскольку объединение в них не способствует увеличению индивидуальных выигрышей одного или нескольких игроков.

В существенной игре игрокам выгодно объединяться в коалиции, поскольку в коалиции K_j вследствие формирования множества комбинаций стратегий участников выигрыш $v_{K_j}(\{F_k\})$ игрока F_k возрастает по сравнению с его индивидуальным выигрышем $v(F_k)$ в некооперативной игре, т. е. выполняется *условие индивидуальной рациональности или индивидуальной существенности:*

$$v_{K_j}(\{F_k\}) \geq v(F_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

что подтверждает рациональность коллективного творчества.

Таким образом, для начала кооперативной игры должны удовлетворяться условия:

— групповой существенности (игра существенна);
— индивидуальной существенности (на основе дележа, который будет рассмотрен далее).

Кроме этого, коалиции должны обладать устойчивостью.

Коалиция $K_j \in N$ является *устойчивой*, если не существует других коалиций, которые смогут обеспечить больший выигрыш для недовольных беглецов коалиции K_j.

Однако более сильным является понятие *устойчивой конфигурации* кооперативной игры.

Конфигурация кооперативной игры (т. е. разбиение N игроков по коалициям) с учетом выигрыша каждой коалиции разбиения является *устойчивой*, если характеристическая функция коалиции всех игроков принимает максимальное значение по сравнению с характеристическими функциями всех возможных конфигураций этой игры, для которых выполняется условие групповой рациональности.

5.2. Дележ

Прежде чем формировать коалиции и начинать процесс игры, игрокам следует договориться о принципах дележа выигрыша с целью проверки условия индивидуальной рациональности [7].

Дележом кооперативной игры (N, v) с заданной коалицией K_j называется вектор $\mu = \{\mu_k = \mu(\{F_k\})\}$, $k = 1, \ldots, n$, для которого одновременно выполняются два условия:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(\{F_k\}) = v_{K_j}(\{N\})$;
2) $\mu(\{F_k\}) \geq v(F_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Итак, необходимым и достаточным условием наличия любой существенной игры является условие индивидуальной рациональности дележа для всех игроков:

$$\mu(\{F_k\}) = v(F_k) + \Delta v_{K_j}(\{F_k\}), \quad \Delta v_{K_j}(\{F_k\}) > 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

причем величина $\Delta v_{K_j}(\{F_k\})$ называется предпосылкой для участия игрока F_k в кооперативной игре с коалицией K_j. В случае, когда $\Delta v_{K_j}(\{F_k\}) = 0$, у игрока F_k отсутствуют экономические предпосылки для участия в кооперативной игре, речь может идти только о каких-то моральных аспектах. По сути, дележ — это индивидуальный выигрыш игрока по завершению кооперативной игры.

Дележ внутри коалиции чаще всего производится двумя способами:

1) с учетом индивидуальных вкладов игроков в выигрыш коалиции (в случае, когда решение биматричной игры может быть найдено исключительно с помощью применения отношений доминирования (см. п.3.2));
2) с учетом индивидуальных выигрышей игроков в некооперативной игре $v(F_k)$ (это более общий способ дележа).

В случае 2 дележ производится следующим образом:

$$\mu(\{F_k\}) = v(F_k)\frac{v(\{K_j\})}{\sum\limits_{F_k \in K_j} v_{K_j}(F_k)}.$$

Здесь $v(F_k), \mu(\{F_k\})$ — индивидуальные выигрыши игрока F_k соответственно в некооперативной и кооперативной играх, $v(\{K_j\})$ — суммарный выигрыш игроков коалиции K_j, $\sum\limits_{F_k \in K_j} v_{K_j}(F_k)$ — сумма индивидуальных выигрышей в некооперативной игре игроков, составляющих коалицию K_j.

Одним игрокам предпочтителен один дележ, другим — другой, поэтому договариваться о принципах дележа необходимо заранее.

Дележи одной существенной игры находятся между собой в определенном соотношении, что позволяет ввести понятие *доминирования дележей* [4, 15].

Определение. ***Пусть имеются два дележа*** $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ ***и*** $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, ***где*** $\mu_k = \boldsymbol{\mu}(\{F_k\}), \eta_k = \boldsymbol{\eta}(\{F_k\}), k = 1, \ldots, n$, ***в кооперативной игре*** (N, v) ***и*** $K_j \subset N$ ***— некоторая коалиция. Тогда дележ*** $\boldsymbol{\mu}$ ***доминирует дележ*** $\boldsymbol{\eta}$ ***по коалиции*** K_j, ***если:***

1) $\sum\limits_{i \in K_j} \mu_i \le v(\{K_j\})$ ***(условие достижимости);***

2) $\mu_i > \eta_i$ ***для всех*** $i \in K_j$ ***(условие предпочтительности).***

Условие достижимости означает, что коалиция K_j, действуя независимо от остальных игроков, в нее не входящих, может обеспечить всем своим членам выигрыши не меньшие, чем реализуемые при дележе $\boldsymbol{\mu}$.

Условие предпочтительности отражает необходимость «единодушия» в предпочтении со стороны коалиции: если хотя бы одно из неравенств $\mu_i > \eta_i$ будет нарушено, т. е. если хотя бы для одного из членов коалиции K_j выигрыш в условиях дележ $\boldsymbol{\eta}$ будет не меньшим, чем в условиях дележа $\boldsymbol{\mu}$, то можно будет говорить о предпочтении дележа $\boldsymbol{\mu}$ дележу $\boldsymbol{\eta}$ не всеми членами коалиции K_j, а только теми, для которых соответствующее неравенство $\mu_i > \eta_i$ выполняется.

Соотношение доминирования дележа $\boldsymbol{\mu}$ над дележом $\boldsymbol{\eta}$ по коалиции K_j обозначается следующим образом:

$$\boldsymbol{\mu} \underset{K_j}{>} \boldsymbol{\eta}$$

Соотношение доминирования возможно не по всякой коалиции. Так, невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков. По сути, определение доминирования дележа устанавливает дележ (решение игры), который реален и является наилучшим для всех членов коалиции K_j.

Пример 5.1. Пусть в игре трех лиц $v(\{K_j\})=1$, если коалиция K_j состоит из двух или трех игроков, и $v(\{K_j\})=0$ в остальных случаях. Тогда дележ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ доминирует дележ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ по коалиции {I, II}, а дележ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ доминирует дележ $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ по коалиции {I,III}. Но дележ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ не доминирует дележ $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. Следовательно, отношение доминирования, вообще говоря, не транзитивно.

5.3. Алгоритм выделения экономически устойчивых коалиций в кооперативной игре

1. Решаются попарно некооперативные игры для всех N игроков методами теории биматричных игр: методом, основанным на исключении заведомо невыгодных стратегий путем применения отношений доминирования (см. п.3.2) и/или методом Лемке–Хоусона, базирующимся на поиске решения, равновесного по Нэшу (см. п.3.4). Например, если $n = 3$, решаются игры: первый против второго (I – II); первый против третьего (I – III) и второй против третьего (II – III). Определяются индивидуальные выигрыши игроков в некооперативной игре $v(F_k)$ как средние арифметические на одну партию. Подсчитывается характеристическая функция некооперативной игры $v(N)$ как сумма индивидуальных выигрышей всех игроков:

$$v(N)=\sum_{k=1}^{n} v(F_k).$$

2. Составляются всевозможные конфигурации коалиций для данной игры, определяются матрицы выигрышей для данных коалиций с учетом того, что стратегии коалиции являются комбинациями всех возможных стратегий игроков, входящих в данную коалицию.

Решаются биматричные игровые задачи для составленных кооперативных игр, рассчитываются для них характеристические функции выигрыша $v_{K_j}(\{N\})$. На основе условия групповой рациональности (существенности)

$$v_{K_j}(\{N\}) > v(N)$$

выделяются существенные игры, представляющие интерес для дальнейшего рассмотрения.

3. Из выделенных существенных игр выбирается игра с устойчивой конфигурацией, т.е. обеспечивающая максимальный выигрыш в кооперативной игре $v^*_{K_j}(\{N\})$ из всех возможных конфигураций.

4. Производится дележ внутри коалиций в выбранной игре на основе индивидуальных вкладов игроков в выигрыш коалиции или на основе индивидуальных выигрышей в некооперативной игре.

Проверяется условие индивидуальной рациональности (существенности):

$$\mu(\{F_k\}) > v(F_k), \quad k = 1, ..., n.$$

При выполнении этого условия конфигурация игры является экономически устойчивой. Если условие индивидуальной рациональности не выполняется, рассматривается существенная игра с меньшим значением характеристической функции.

Рассмотрим алгоритм выделения экономически устойчивых коалиций на конкретном примере.

Пример 5.2. Пусть задана игра трех лиц ($n = 3$) в биматричной форме.

I-й против II-го (I – II):

$$\mathbf{A_I} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -2.25 & -2.75 \\ -2.5 & -3 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}; \qquad \mathbf{A_{II}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -3.75 & -4 \\ -8.75 & -9 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array};$$

I-й против III-го (I – III):

$$\mathbf{A_I} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 0.25 & -0.75 \\ 0 & -1 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}; \qquad \mathbf{A_{III}} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -1 & -0.75 \\ -2.25 & -2 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array};$$

II-й против III-го (II – III):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = & \begin{bmatrix} -2.5 & -3.75 \\ -2.75 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}; \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = & \begin{bmatrix} 1.75 & 2 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array};$$

Здесь (x_1, x_2) — стратегии I-го игрока; (y_1, y_2) — стратегии II-го игрока; (z_1, z_2) — стратегии III-го игрока.

Найти решение данной игры в устойчивых коалициях.

Решение.

1. Решаем три биматричные игры, заданные в условии задачи, с целью определения «индивидуальных» выигрышей игроков. В данном примере рассматривается наиболее простой случай, когда решение биматричных игровых задач может быть найдено с помощью применения отношений доминирования исходя из условия, что каждый игрок хочет максимизировать свой выигрыш (см. п.3.2). В общем случае для решения биматричных игровых задач используется алгоритм Лемке–Хоусона, приведенный в разделе 3.4. Итак, выигрыши игроков в соответствующих биматричных играх будут такими:

$$\text{I} - \text{II}: \quad H_{\text{I}}^{\text{I-II}} = -2.25; \quad H_{\text{II}}^{\text{I-II}} = -3.75.$$

$$\text{I} - \text{III}: \quad H_{\text{I}}^{\text{I-III}} = -0.75; \quad H_{\text{III}}^{\text{I-III}} = -0.75.$$

$$\text{II} - \text{III}: \quad H_{\text{II}}^{\text{II-III}} = -3.75; \quad H_{\text{III}}^{\text{II-III}} = 2.$$

Здесь нижний индекс является номером игрока, а верхний показывает, биматричная игра каких игроков рассматривается. Так, к примеру, $H_{\text{I}}^{\text{I-II}}$ — выигрыш первого игрока в игре между первым и вторым игроками.

Решение трех биматричных игр позволяет вычислить «индивидуальный» выигрыш каждого из игроков:

$$v(\text{I}) = (H_{\text{I}}^{\text{I-II}} + H_{\text{I}}^{\text{I-III}})/2 = ((-2.25) + (-0.75))/2 = -1.5;$$

$$v(\text{II}) = (H_{\text{II}}^{\text{I-II}} + H_{\text{II}}^{\text{II-III}})/2 = ((-3.75) + (-3.75))/2 = -3.75;$$

$$v(\text{III}) = (H_{\text{III}}^{\text{I-III}} + H_{\text{III}}^{\text{II-III}})/2 = ((-0.75) + (2))/2 = 0.625.$$

Следовательно, характеристическая функция некооперативной игры $v(N)$ (или суммарный выигрыш трех игроков в этой игре) равен:

$$v(N) = v(\text{I}, \text{II}, \text{III}) = v(\text{I}) + v(\text{II}) + v(\text{III}) = -1.5 - 3.75 + 0.625 = -4.625.$$

2. Рассмотрим всевозможные конфигурации коалиций для данной игры; матрицы выигрышей для данных коалиций определяются с учетом того, что стратегии коалиции являются комбинациями всех возможных стратегий игроков, входящих в эту коалицию. Выигрыши при комбинированных стратегиях складываются.

a. Игра $\{\mathrm{I,II}\}$ против III.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{I,II}} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -2.25 & -4.5 \\ -2.5 & -4.75 \\ -2.5 & -4.75 \\ -2.75 & -5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{array}; \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 0.75 & 1.25 \\ -0.25 & 0.25 \\ -0.5 & 0 \\ -1.5 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{array};$$

$$v(\{\mathrm{I,II}\}) = -4.5; \qquad v(\{\mathrm{III}\}) = 1.25.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной кооперативной игры $v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой существенности (рациональности) $v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\}) > v(N)$:

$$v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\}) = v(\{\mathrm{I,II}\}) + v(\{\mathrm{III}\}) = -4.5 + 1.25 = -3.25 > -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности выполняется, следовательно, данная игра является существенной и участвует в дальнейшем рассмотрении.

b. Игра $\{\mathrm{I,III}\}$ против II.

Сначала преобразуем игру «II против III» в игру «III против II» путем транспонирования матриц.

$$\mathrm{III}-\mathrm{II}: \quad \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 1.75 & 0.75 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ z_1 \\ z_2 \end{array}; \quad \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -2.5 & -2.75 \\ -3.75 & -4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ z_1 \\ z_2 \end{array}.$$

После этого можно составить матрицы коалиционной игры $(\mathrm{I,III})$ против II.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{I,III}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -0.5 & -2 \\ -0.25 & -1.75 \\ -0.75 & -2.25 \\ -0.5 & -2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1z_1 \\ x_1z_2 \\ x_2z_1 \\ x_2z_2 \end{array}; \quad \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -6.25 & -6.75 \\ -7.5 & -8 \\ -11.25 & -11.75 \\ -12.5 & -13 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1z_1 \\ x_1z_2 \\ x_2z_1 \\ x_2z_2 \end{array};$$

$$v(\{\mathrm{I,III}\}) = -0.25; \qquad v(\{\mathrm{II}\}) = -7.5.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной игры $v_{\mathrm{I,III-II}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой рациональности:

$$v_{\mathrm{I,III\text{-}II}}(\{N\}) = v(\{\mathrm{I,III}\}) + v(\{\mathrm{II}\}) = -0.25 - 7.5 = -7.75 < -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности не выполняется, следовательно, данная игра является несущественной и в дальнейшем рассмотрении не участвует.

с. Игра I против $\{\mathrm{II,III}\}$.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{I}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1z_1 & y_1z_2 & y_2z_1 & y_2z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2.5 & -3.5 \\ -2.5 & -3.5 & -3 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1; \\ x_2 \end{array} \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{II,III}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1z_1 & y_1z_2 & y_2z_1 & y_2z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -4.75 & -4.5 & -5 & -4.75 \\ -11 & -10.75 & -11.25 & -11 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1; \\ x_2 \end{array}$$

$$v(\{\mathrm{I}\}) = -3; \qquad v(\{\mathrm{II,III}\}) = -4.5.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной игры $v_{\mathrm{I\text{-}II,III}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой рациональности:

$$v_{\mathrm{I\text{-}II,III}}(\{N\}) = v(\{\mathrm{I}\}) + v(\{\mathrm{II,III}\}) = -3 - 4.5 = -7.5 < -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности не выполняется, следовательно, данная игра является несущественной и в дальнейшем рассмотрении не участвует.

3. Далее из всех выделенных существенных игр выбирается игра с устойчивой конфигурацией, т. е. имеющая наибольшую характеристическую функцию выигрыша $v_K^*(\{N\})$. В нашем случае существенной является только игра $\{\mathrm{I,II}\}$ против III, поэтому далее будем рассматривать именно ее.

4. На последнем этапе производится дележ внутри коалиции $\{\mathrm{I,II}\}$ и проверка условий индивидуальной рациональности.

Рассмотрим два вида дележа.

а. Дележ с учетом индивидуальных вкладов I-го и II-го игрока в выигрыш коалиции

$$v(\{\mathrm{I,II}\}) = -0.75 - 3.75 = -4.5.$$

Здесь

$$\mu(\{\mathrm{I}\}) = -0.75 > -1.5 = v(\mathrm{I}); \qquad \mu(\{\mathrm{II}\}) = -3.75 = v(\mathrm{II});$$

$$\mu(\{\mathrm{III}\}) = v(\{\mathrm{III}\}) = 1.25 > 0.625 = v(\mathrm{III}).$$

Выигрыш $\mu(\{\mathrm{III}\})$ определен из решения соответствующей кооперативной игры. Таким образом, при таком способе дележа выигрыш получают I-й и III-й игроки, для II-го же игрока экономические предпосылки для организации кооперативной игры отсутствуют, поэтому рассмотрим другой способ дележа.

b. Дележ с учетом индивидуальных выигрышей игроков в некооперативной игре:

$$v(\mathrm{I}) = -1.5; \qquad v(\mathrm{II}) = -3.75; \qquad v(\mathrm{III}) = 0.625;$$

$$v(N) = v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II}) + v(\mathrm{III}) = -4.625;$$

$$\frac{v(\{\mathrm{I},\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II})} = \frac{\mu(\{\mathrm{I}\})}{v(\mathrm{I})}; \qquad \frac{v(\{\mathrm{I},\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II})} = \frac{\mu(\{\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{II})};$$

$$\frac{-4.5}{-1.5 - 3.75} = \frac{\mu(\{\mathrm{I}\})}{-1.5}; \qquad \frac{-4.5}{-1.5 - 3.75} = \frac{\mu(\{\mathrm{II}\})}{-3.75}.$$

Здесь

$$\mu(\{\mathrm{I}\}) = -\frac{9}{7} > -1.5 = v(\mathrm{I}); \qquad \mu(\{\mathrm{II}\}) = -\frac{45}{14} > -3.75 = v(\mathrm{II});$$

$$\mu(\{\mathrm{III}\}) = v(\{\mathrm{III}\}) = 1.25 > 0.625 = v(\mathrm{III}).$$

Рассмотрим, какие предпосылки у игроков для организации кооперативной игры.

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{I}\}) = \mu(\{\mathrm{I}\}) - v(\mathrm{I}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{I}\}) = -\frac{9}{7} - (-1.5) = \frac{3}{14} = \frac{12}{56};$$

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{II}\}) = \mu(\{\mathrm{II}\}) - v(\mathrm{II}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{II}\}) = -\frac{45}{14} - (-3.75) = \frac{15}{28} = \frac{30}{56};$$

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{III}\}) = \mu(\{\mathrm{III}\}) - v(\mathrm{III}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{III}\}) = 1.25 - 0.625 = 0.625 = \frac{5}{8} = \frac{35}{56}.$$

Таким образом, условия индивидуальной рациональности выполняются для всех игроков, следовательно, данная конфигурация коалиций является экономически устойчивой при рассмотренном способе дележа, причем игрок III имеет наиболее сильную предпосылку для организации существенной игры.

5.4. Анализ полезности формирования коалиций с помощью нормализованной формы игры

Для систематизации исследований кооперативных игр введем понятие стратегически эквивалентных игр [4, 7].

Определение. ***Игра (N, v), где N — множество игроков, а v — характеристическая функция, стратегически эквивалентна игре (N, v^*), если для всех коалиций $K_j \subset N$ выполняется следующее условие:***

$$v^*(\{K_j\}) = \gamma\, v(\{K_j\}) + \sum_{F_k \in K_j} \beta_k,$$

где $\gamma > 0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ для всех игроков F_k коалиции K_j.

Содержательная интерпретация эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что характеристические функции стратегически эквивалентных кооперативных игр отличаются лишь масштабом измерения выигрышей γ и начальными капиталами β_k. Часто вместо стратегической эквивалентности кооперативных игр говорят о стратегической эквивалентности их характеристических функций.

Определение. ***Кооперативная игра с характеристической функцией v имеет (0,1)-нормализованную (редуцированную) форму, если одновременно выполняются следующие соотношения:***

$$v(F_k) = 0, \qquad \forall F_k \in N,$$
$$v(\{N\}) = 1.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. ***Любая существенная кооперативная (N, v)-игра стратегически эквивалентна одной и только одной игре в (0,1)-нормализованной форме.***

Доказательство.

Пусть v — характеристическая функция произвольной существенной игры N игроков. Построим для нее такую стратегически эквивалентную характеристическую функцию, что

$$v^*(F_k) = \gamma v(F_k) + \beta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.1}$$

$$v^*(\{N\}) = \gamma v(\{N\}) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1. \tag{5.2}$$

Если просуммировать по k соотношения (5.1), получим:

$$\gamma\sum_{k=1}^{n} v(F_k)+\sum_{k=1}^{n}\beta_k=0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k=-\gamma\sum_{k=1}^{n} v(F_k). \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.2), получим:

$$\gamma v(\{N\})-\gamma\sum_{k=1}^{n} v(F_k)=1. \tag{5.4}$$

Поскольку игра существенная,

$$v(\{N\})-\sum_{k=1}^{n} v(F_k)>0$$

и из соотношения (5.4) получаем

$$\gamma=\frac{1}{v(\{N\})-\sum_{k=1}^{n} v(F_k)}>0. \tag{5.5}$$

Из формулы (5.1) следует

$$\beta_k=-\gamma v(F_k)=-\frac{v(F_k)}{v(\{N\})-\sum_{k=1}^{n} v(F_k)}. \tag{5.6}$$

Значения γ и β_k, определяемые по формулам (5.5) и (5.6) и полученные в результате решения системы уравнений (5.1) и (5.2), являются единственным решением этой системы, поэтому получена игра в (0,1)-нормализованной форме.

Следовательно, из определения стратегически эквивалентной игры $v(\{K_j\})_{(0,1)}=\gamma\, v(\{K_j\})+\sum_{F_k\in K_j}\beta_k$ следует, что характеристическую функцию в (0,1)-нормализованной форме можно рассчитать по формуле:

$$v(\{K_j\})_{(0,1)}=\frac{v(\{K_j\})-\sum_{F_k\in K_j} v(F_k)}{v(\{N\})-\sum_{F_k\in N} v(F_k)}=\begin{cases}0, & K_j=F_k\in N,\\ 1, & K_j=N.\end{cases} \tag{5.7}$$

Дробь в равенстве (5.7) имеет следующий содержательный смысл: она показывает отношение величины кооперативного эффекта для коалиции K_j (числитель) к величине кооперативного эффекта для коалиции всех N игроков (знаменатель). Кооперативным эффектом называется разность между величиной выигрыша, полученной игроками коалиции в кооперативной игре и суммарной величиной выигрыша тех же игроков в некооперативной игре.

Доказанная теорема показывает, что мы можем выбрать игру в (0,1)-редуцированной форме для представления любого класса эквивалентности игр. Удобство этого выбора состоит в том, что в такой форме значение $v(\{K_j\})_{(0,1)}$ непосредственно демонстрирует нам силу (или полезность) коалиции K_j.

Следствие.

Если $v(\{K_j\})_{(0,1)}=0,$ то это означает, что игроки K_j-й коалиции экономически не заинтересованы в ее организации.

Если $v(\{K_j\})_{(0,1)}=1,$ то это означает, что игроки K_j-й коалиции экономически не заинтересованы в расширении ее состава.

Пример 5.3. Кооперативную игру трех лиц $(\{\text{I},\text{II},\text{III}\},v)$, заданную в характеристической форме:

$$v(\text{I})=2;\quad v(\text{II})=3;\quad v(\text{III})=4;$$
$$v(\{\text{I},\text{II}\})=10;\quad v(\{\text{I},\text{III}\})=9;\quad v(\{\text{II},\text{III}\})=7;\quad v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})=20,$$

записать в (0,1)-нормализованной форме.

Решение.

Вычисления проводим с помощью соотношения (5.7).

$$v(\text{I})_{(0,1)}=\frac{v(\text{I})-v(\text{I})}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=0;$$

$$v(\text{II})_{(0,1)}=\frac{v(\text{II})-v(\text{II})}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=0;$$

$$v(\text{III})_{(0,1)}=\frac{v(\text{III})-v(\text{III})}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=0;$$

$$v(\{\text{I},\text{II}\})_{(0,1)}=\frac{v(\{\text{I},\text{II}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})]}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=\frac{10-(2+3)}{20-(2+3+4)}=\frac{5}{11};$$

$$v(\{\text{I},\text{III}\})_{(0,1)}=\frac{v(\{\text{I},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{III})]}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=\frac{9-(2+4)}{20-(2+3+4)}=\frac{3}{11};$$

$$v(\{\text{II},\text{III}\})_{(0,1)}=\frac{v(\{\text{II},\text{III}\})-[v(\text{II})+v(\text{III})]}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=\frac{7-(3+4)}{20-(2+3+4)}=0;$$

$$v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})_{(0,1)}=\frac{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}{v(\{\text{I},\text{II},\text{III}\})-[v(\text{I})+v(\text{II})+v(\text{III})]}=\frac{20-(2+3+4)}{20-(2+3+4)}=1.$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о наибольшей полезности коалиции {I, II} при сравнении с другими коалициями, а также о том, что игроки коалиции {II, III} экономически не заинтересованы в ее создании.

Пример 5.4. Рынок трех лиц [14].

Рассмотрим классическую модель рынка, в которой участвует один продавец и два покупателя. Предположим, что у продавца имеется неделимый товар (например, компьютер), который он оценивает в p денежных единиц, а первый и второй покупатели оценивают этот товар в q и r денежных единиц соответственно (считаем $q \le r$). Необходимое условие участия всех троих в сделке — выполнение неравенств $p < q$ и $p < r$. Итак, $p < q \le r$.

Проанализируем эту ситуацию как игру, считая продавца игроком I, первого покупателя — игроком II и второго покупателя — игроком III. Характерной особенностью этой игры является возможность совместных действий игроков, то есть возможность образования в ней коалиции (коалиция продавца с покупателем интерпретируется как сделка между ними). Построим характеристическую функцию этой игры, рассматривая $v(\{K_j\})$ как гарантированную прибыль коалиции K_j, при этом прибыль коалиции считается равной сумме прибылей всех ее участников. Очевидно, что прибыль возможна лишь для коалиции, содержащей продавца, поэтому $v(\mathrm{II}) = v(\mathrm{III}) = v(\{\mathrm{II},\mathrm{III}\}) = 0$. Далее, $v(\mathrm{I}) = 0$, так как продавец, действуя в одиночку, не может обеспечить себе никакой прибыли. Найдем теперь $v(\{\mathrm{I},\mathrm{II}\})$. Создание коалиции {I, II} означает, что игроки I и II вступают в сделку, то есть продавец (игрок I) продает товар первому покупателю (игроку II). Сделка устраивает обоих игроков только в том случае, когда цена продажи s заключена между p и q, то есть $p \le s \le q$. В этом случае прибыль продавца равна $(s - p)$ (поскольку он оценивал свой товар в p денежных единиц, а получил s денежных единиц); прибыль первого покупателя равна $(q - \mathrm{s})$ (так как он оценивал товар в q денежных единиц, а потратил на его покупку s денежных единиц).

Общая прибыль коалиции {I,II} равна $(s - p) + (q - s) = q - p$.

Аналогичным образом получаем, что общая прибыль коалиции {I,III} равна $(r - p)$.

Коалиция всех трех игроков {I,II,III} может интерпретироваться здесь как сделка всех троих, осуществляемая следующим образом. Игрок III покупает товар игрока I по цене s', где $p < s' \le r$ и разность $(r - s')$ игроки II и III делят между собой (то есть игрок III отдает часть своей прибыли игроку II за его «неучастие» в покупке, что способствует снижению цены продажи товара). В этом случае общая прибыль коалиции $\{I,II,III\}$ равна $(r-p)$.

Получаем окончательно:

$$v(I)=v(II)=v(III)=v(\{II,III\})=0,$$
$$v(\{I,II\})=q-p,\quad v(\{I,III\})=v(\{I,II,III\})=r-p.$$

Приведем эту игру к (0,1)-редуцированной форме. Имеем:

$$v(I)_{(0,1)}=v(II)_{(0,1)}=v(III)_{(0,1)}=0,\quad v(\{I,II,III\})_{(0,1)}=1,$$
$$v(\{I,II\})_{(0,1)}=\frac{v(\{I,II\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)}=\frac{q-p}{r-p},$$
$$v(\{I,III\})_{(0,1)}=\frac{v(\{I,III\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)}=1,$$
$$v(\{II,III\})_{(0,1)}=\frac{v(\{II,III\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)}=0.$$

Содержательно число $v(\{K_j\})_{(0,1)}$ представляет собой отношение величины кооперативного эффекта для коалиции K_j к величине кооперативного эффекта для коалиции всех игроков — $\{I,II,III\}$.

5.5. Принцип оптимальности в форме *С*-ядра

В основу анализа кооперативной игры целесообразно положить принцип оптимального распределения максимального выигрыша коалиции $v(\{K_j\})$ между ее участниками.

Реализация этого принципа приводит к необходимости введения понятия *С-ядра*, которое базируется на понятии доминирования платежей (см. п. 5.2).

С ростом числа игроков чрезвычайно быстро растет количество дележей в кооперативных играх. В связи с этим возникает необходимость выделения *вполне устойчивых* дележей, т. е. таких дележей, которые не доминируются никакими другими дележами.

Определение. ***Множество вполне устойчивых (недоминируемых) дележей в кооперативной игре называется С-ядром этой игры***.

Из этого определения следует, что любой дележ из *С*-ядра устойчив в том смысле, что нет ни одной коалиции, которая одновременно хотела и могла бы изменить исход игры, поэтому ядро вполне может быть принято в качестве решения кооперативной игры. Структура этого множества описывается следующей теоремой.

Теорема. ***Для того чтобы дележ $\boldsymbol{\mu}$ принадлежал С-ядру кооперативной игры (N, v) с характеристической функцией v, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:***

1) $v(\{K_j\}) \le \sum\limits_{i \in K_j} \mu_i$, ***для любой коалиции K_j,***

2) $\sum\limits_{i \in N} \mu_i = v(\{N\})$.

Первое условие может быть трактовано следующим образом: не существует коалиции K_j, которая бы блокировала дележ $\boldsymbol{\mu}$ как неудовлетворительный по причине наличия другого дележа, гарантирующего членам коалиции выигрыш, не меньший, чем при дележе $\boldsymbol{\mu}$. Второе условие говорит о том, что выигрыш должен быть распределен полностью.

Доказательство.

Необходимость.

Доказательство будем вести от противного. Пусть вектор $\boldsymbol{\mu}$ не удовлетворяет условиям 1 или 2 теоремы. Если он не удовлетворяет условию 2, то это вообще не дележ. Если он не удовлетворяет условию 1, то для некоторой коалиции K_j, состоящей из k членов, выполняется неравенство $\sum\limits_{i \in K_j} \mu_i < v(\{K_j\})$.

Рассмотрим дележ $\boldsymbol{\eta}$, определяемый условиями:

$$\eta_i = \begin{cases} \mu_i + \alpha, \quad \alpha = \dfrac{v(\{K_j\}) - \sum\limits_{i \in K_j} \mu_i}{k}, \quad i \in K_j, \\ \beta, \qquad \beta = \dfrac{v(\{N\}) - v(\{K_j\})}{N - k}, \quad i \notin K_j. \end{cases}$$

Очевидно, что α и β — положительные величины.

Положительная величина $v(\{K_j\}) - \sum\limits_{i \in K_j} \mu_i$ делится игроками коалиции K_j поровну и добавляется к компонентам «старого» дележа $\boldsymbol{\mu}$, в результате чего коалиция K_j имеет в сумме $v(\{K_j\})$; оставшаяся часть $v(\{N\}) - v(\{K_j\})$ делится поровну между игроками, не принадлежащими коалиции K_j.

Тогда

$$\sum_{i \in N} \eta_i = \sum_{i \in K_j} \eta_i + \sum_{i \in N \setminus K_j} \eta_i = \sum_{i \in K_j} (\mu_i + \alpha) + \sum_{i \in N \setminus K_j} \beta =$$
$$= \sum_{i \in K_j} \mu_i + v(\{K_j\}) - \sum_{i \in K_j} \mu_i + v(\{N\}) - v(\{K_j\}) = v(\{N\}).$$

Заметим, что построенный вектор $\boldsymbol{\eta}$ действительно является дележом, поскольку все его компоненты неотрицательны и их сумма равна $v(\{N\})$. Кроме того выполняется условие $\boldsymbol{\eta} \underset{K_j}{>} \boldsymbol{\mu}$, так как $\eta_i > \mu_i$ для всех $i \in K_j$. Следовательно, в этом случае C-ядру принадлежит дележ $\boldsymbol{\eta}$, а дележ $\boldsymbol{\mu}$ C-ядру не принадлежит. Таким образом, чтобы дележ $\boldsymbol{\mu}$ принадлежал C-ядру, должны выполняться условия теоремы 1 и 2. Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть вектор $\boldsymbol{\mu}$ удовлетворяет условиям 1 и 2, т. е. является дележом.

Предположим, существует другой дележ $\boldsymbol{\eta}$, который доминирует дележ $\boldsymbol{\mu}$, т. е. удовлетворяет условиям: $\sum_{i \in K_j} \eta_i \le v(\{K_j\})$ и $\eta_i > \mu_i$, $\forall i \in K_j$.

Но при этом $\sum_{i \in K_j} \eta_i > \sum_{i \in K_j} \mu_i \ge v(\{K_j\})$. Это противоречие говорит о том, что дележа $\boldsymbol{\eta}$ не существует и дележ $\boldsymbol{\mu}$ не доминируем, то есть принадлежит C-ядру.

Теорема доказана.

Пример 5.5. Рассмотрим игру трех игроков в (0,1)-редуцированной форме [4]. Ее характеристические функции имеют вид:

$$v(\mathrm{I})_{(0,1)} = v(\mathrm{II})_{(0,1)} = v(\mathrm{III})_{(0,1)} = 0, \quad v(\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\})_{(0,1)} = 1,$$

$$v(\{\mathrm{I}, \mathrm{II}\})_{(0,1)} = c_3, \quad v(\{\mathrm{I}, \mathrm{III}\})_{(0,1)} = c_2, \quad v(\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\})_{(0,1)} = c_1,$$

где

$$0 \le c_1 \le 1, \quad 0 \le c_2 \le 1, \quad 0 \le c_3 \le 1.$$

На основании теоремы о принадлежности дележа $\boldsymbol{\mu}$ C-ядру необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\mu_1 + \mu_2 \ge c_3, \quad \mu_1 + \mu_3 \ge c_2, \quad \mu_2 + \mu_3 \ge c_1, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Откуда получаем:

$$\mu_3 \le 1 - c_3, \quad \mu_2 \le 1 - c_2, \quad \mu_1 \le 1 - c_1. \tag{5.8}$$

Из неравенств (5.8) путем суммирования получим

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \le 3 - (c_1 + c_2 + c_3)$$

или, учитывая, что $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$,

$$c_1 + c_2 + c_3 \le 2. \tag{5.9}$$

Условие (5.9) является необходимым условием существования непустого C-ядра.

С другой стороны, если выполняется неравенство (5.9), можно взять такие числа $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, чтобы

$$\sum_{i=1}^{3}(c_i + \varepsilon_i) = 2,$$

и положить

$$\mu_i = 1 - c_i - \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Такие значения μ_i удовлетворяют условиям (5.8), то есть такой дележ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ принадлежит C-ядру.

К недостаткам C-ядра следует отнести то, что оно может содержать как большое количество альтернатив, так и быть пустым.

Пример 5.6. Оптимальное распределение прибыли [14].

Имеются три предприятия, специализирующихся на выпуске комплектующих деталей вида A или вида B одинаковой стоимости, причем изделие собирается из одной детали вида A и одной детали вида B. Возможности предприятий по выпуску этих деталей указаны в таблице 5.1.

Таблица 5.1

	A	B
I	900	0
II	600	0
III	0	1000

Так как ни одно из предприятий не в состоянии самостоятельно производить данное изделие, они заключают между собой договор с последующим распределением прибыли. Какое распределение прибыли между этими тремя предприятиями будет оптимальным?

Решение. Рассмотрим описанную ситуацию как игру трех предприятий {I,II,III}. Составим характеристические функции этой игры, значения которых интерпретируются как число изделий, которое в состоянии произвести соответствующая коалиция. Так как ни одно из предприятий в отдельности, а также коалиция предприятий I и II не в состоянии производить изделие, то

$$v(\mathrm{I}) = v(\mathrm{II}) = v(\mathrm{III}) = v(\{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}) = 0.$$

Предприятия I и III вместе могут произвести 900 изделий, следовательно $v(\{\mathrm{I},\mathrm{III}\}) = 900$; аналогично $v(\{\mathrm{II},\mathrm{III}\}) = 600$. Коалиция всех трех предприятий обеспечивает выпуск 1000 изделий, откуда $v(\{I,II,III\}) = 1000$.

Перейдем к (0,1)-редуцированной форме игры.

Здесь

$$v(I)_{(0,1)} = v(II)_{(0,1)} = v(III)_{(0,1)} = 0, \quad v(\{I,II,III\})_{(0,1)} = 1,$$

$$v(\{I,II\})_{(0,1)} = \frac{v(\{I,II\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)} = 0,$$

$$v(\{I,III\})_{(0,1)} = \frac{v(\{I,III\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)} = \frac{900}{1000} = 0.9,$$

$$v(\{II,III\})_{(0,1)} = \frac{v(\{II,III\})-(0+0)}{v(\{I,II,III\})-(0+0+0)} = \frac{600}{100} = 0.6.$$

Согласно приведенному выше описанию C-ядра игры трех лиц, получаем, что в нашем случае C-ядро определяется системой неравенств:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \le 1 - v(\{II,III\})_{(0,1)} = 0.4,\\ &\mu_2 \le 1 - v(\{I,III\})_{(0,1)} = 0.1,\\ &\mu_3 \le 1 - v(\{I,II\})_{(0,1)} = 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Итак, оптимальным решением данной задачи, полученным на основе понятия C-ядра, будет любое распределение прибыли, при котором I-е предприятие получает не более 40% общей прибыли, II-е — не более 10% и III-е — все остальное. Всякое такое распределение будет устойчивым: никакая коалиция предприятий не сможет ему эффективно противодействовать. И наоборот, всякое распределение прибыли, не удовлетворяющее условиям (5.10), не будет устойчивым. Возьмем в качестве примера такое распределение прибыли, при котором она делится пропорционально числу деталей, которое предприятие в состоянии произвести. Соответствующий дележ задается вектором $\left(\frac{900}{2500}, \frac{600}{2500}, \frac{1000}{2500}\right) = (0.36, 0.24, 0.4)$, который не принадлежит C-ядру. Если будет предложено указанное распределение прибыли, то предприятия I и III смогут ему эффективно противодействовать с помощью объединения своих возможностей (то есть созданием коалиции $\{I,III\}$). Действительно, так как $v(\{I,III\})_{(0,1)} = 0.9$, то в этом случае коалиция $\{I,III\}$ получает 90% всей прибыли против 76% прибыли, имеющейся при дележе (0.36, 0.24, 0.4).

Используя содержательную терминологию, можно сказать, что решение кооперативной игры, принадлежащее ее *С*-ядру, предохраняет от «экономического сепаратизма», то есть от возникновения коалиции, разрушающей предложенный исход игры.

5.6. *НМ*-решение

Концепция оптимальности решения кооперативной игры, воплощенная в понятии С-ядра, обладает при всей своей естественности рядом недостатков, одним из которых является то, что в некоторых играх С-ядро оказывается пустым. Поэтому целесообразно рассматривать и другие принципы оптимальности исходов кооперативных игр. Остановимся на концепции решения игры, сформулированной Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном [16, 17]. Они предложили потребовать от множества дележей, которое принимается в качестве решения кооперативной игры, следующие два свойства: внутреннюю устойчивость, состоящую в том, чтобы дележи из решений нельзя было противопоставить друг другу, и внешнюю устойчивость, состоящую в возможности каждому отклонению от решения противопоставлять некоторый дележ, принадлежащий решению.

В результате мы приходим к следующему определению.

Определение. ***Подмножество дележей H_M кооперативной игры (N, v) называется НМ-решением, если выполняются следующие условия:***

1) ***внутренняя устойчивость: ни один дележ НМ-решения не доминирует другого, т. е. для любых дележей $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta} \in H_M$, не выполняется неравенство***

$$\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\eta}; \tag{5.11}$$

2) ***внешняя устойчивость: любой дележ, не принадлежащий НМ-решению, доминируется каким-нибудь дележом из НМ-решения, т. е. для $\forall \boldsymbol{\eta} \notin H_M \ \exists \boldsymbol{\mu} \in H_M$ такой, что $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\eta}$.***

НМ-решение представляет собой более слабый принцип оптимальности, чем *С*-ядро, и существует в гораздо большем числе игр.

Теорема. ***НМ-решение содержит С-ядро.***

Доказательство.

Предположим противное, т. е. что $C \not\subset H_M \Rightarrow \exists \boldsymbol{\mu} \in C, \boldsymbol{\mu} \notin H_M$. Тогда $\exists \boldsymbol{\eta} \in H_M$, такой, что $\boldsymbol{\eta} > \boldsymbol{\mu}$. Однако дележ $\boldsymbol{\mu}$ не доминируем, поскольку $\boldsymbol{\mu} \in C$. Пришли к противоречию, что доказывает справедливость теоремы.

Теорема. ***Если для характеристической функции игры (N,v) в $(0,1)$-редуцированной форме ($|N| = n$) выполняются неравенства***

$$v(\{K_j\}) \le \frac{1}{n-k+1}, \qquad \forall K_j \subset N,$$

где k — число игроков в коалиции K_j, то С-ядро этой игры не пустое и является ее НМ-решением.

Замечание. Неравенства представляют собой необходимое условие, но не достаточное, поэтому обратное утверждение неверно.

Пример 5.7. Рассмотрим игру трех лиц в $(0,1)$-редуцированной форме, в которой коалиция, состоящая из двух и трех игроков, выигрывает ($v(\{K\}) = 1$), а коалиция, включающая только одного игрока, проигрывает ($v\{i\} = 0$).

Для этой игры рассмотрим три дележа:

$$H_M: \ \boldsymbol{\mu}_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right); \quad \boldsymbol{\mu}_{13} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); \quad \boldsymbol{\mu}_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

которые являются *НМ*-решением этой игры. Проверим этот факт.

Действительно, для любой пары распределений из H_M и для любой коалиции K_j, содержащей не менее двух игроков, найдется игрок, который в обоих случаях получает выигрыш в $\frac{1}{2}$, а следовательно, строгое неравенство (5.11) не может быть выполнено. Для одноэлементных коалиций в этом случае будет нарушаться условие достижимости распределения, так как $v\{i\} = 0$ для всех i. Следовательно, множество H_M *внутренне устойчиво*.

Внешняя устойчивость множества H_M следует из того, что при любом распределении выигрыша, не принадлежащем H_M, найдутся хотя бы два игрока, получающие меньше $\frac{1}{2}$. Но тогда это распределение будет доминироваться распределением из множества H_M, в котором данные игроки получают по $\frac{1}{2}$.

Однако множество H_M — не единственное *НМ*-решение. Нетрудно проверить, что множество

$$H_{3,c} = \{(a, 1-c-a, c) | 0 \le a \le 1-c\}$$

также является *НМ*-решением для любого $c \in [0, 1/2]$.

Действительно, в это множество входят дележи, при которых игрок III получает постоянную c, а игроки I и II делят остаток во всевозможных пропорциях.

Внутренняя устойчивость следует из того, что для любых дележей $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\eta}$ из этого множества имеем: если $\mu_1 > \eta_1$, то $\mu_2 < \eta_2$. Однако доминирование по коалиции, состоящей из единственного участника, невозможно.

Чтобы доказать внешнюю устойчивость $H_{3,c}$, возьмем какой-либо дележ $\boldsymbol{\eta} \notin H_{3,c}$. При этом либо $\eta_3 > c$, либо $\eta_3 < c$. Пусть, например, $\eta_3 = c + \varepsilon$. Определим дележ $\boldsymbol{\mu}$ следующим образом:

$$\mu_1 = \eta_1 + \varepsilon/2, \quad \mu_2 = \eta_2 + \varepsilon/2, \quad \mu_3 = c.$$

Тогда $\boldsymbol{\mu} \in H_{3,c}$ и $\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\eta}$ по коалиции $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$.

Таким образом, кроме симметричного *НМ*-решения, рассматриваемая игра имеет еще целое семейство решений, при которых игрок III получает фиксированное значение c из отрезка $0 \leq c \leq 1/2$. Эти *НМ*-решения называются ***дискриминирующими***, в таком случае игрок III ***дискриминирован***. В случае множества $H_{3,0}$ говорят, что игрок III ***полностью дискриминирован***, или исключен.

Из соображений симметрии очевидно, что существуют также два семейства *НМ*-решений $H_{1,c}$ и $H_{2,c}$, в которых дискриминируются игроки I и II соответственно.

В случае дискриминации игроки могут обратиться к помощи арбитра и даже отказаться от участия в кооперативной игре.

5.7. Вектор Шепли

В этом разделе рассмотрим еще один принцип оптимальности кооперативных игр, предложенный американским математиком Л. Шепли; он основан на построении так называемого *вектора Шепли* [14, 16].

Концепция оптимальности, предложенная Шепли, базируется на следующем подходе.

Каждой кооперативной игре (N, v) ставится в соответствие n-компонентный вектор $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, i-я компонента которого понимается как справедливый выигрыш, назначаемый игроку i в соответствии с его «вкладом» в игру. Таким образом, вектор Шепли можно рассматривать как «справедливое» распределение общей прибыли, полученной коалицией всех игроков в результате кооперативного эффекта.

Определение. ***Вектором Шепли называется дележ $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ игры (N, v), определяемый следующим образом:***

$$\varphi_i = \sum_{K_i \subset N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}[v(\{K_i\}) - v(\{K_i \setminus i\})], \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (5.12)$$

где суммирование производится по всем коалициям K_i, содержащим i-го игрока, k — число членов коалиции K_i, n — общее число участников кооперативной игры (N, v).

В формуле (5.12) величина $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$ является вероятностью формирования коалиции K_i по всему множеству N, т. е. $\sum_{K_i \subset N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = 1$, $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \geq 0$, а φ_i — усредненный вклад игрока i в игру.

Рассмотрим более подробно интерпретацию компонент вектора Шепли.

В кооперативной игре участвуют n игроков. Образуется коалиция K_i: i-й игрок находится на каком-либо месте в какой-либо перестановке (все перестановки равновероятны). Часть игроков коалиции K_i стоит до игрока i, а часть — за ним. Задать коалицию означает перечислить (определить) ее состав. Определим, в скольких случаях образуется коалиция K_i с игроком i. Вероятность элементарного события $\frac{1}{n!}$. Какое число элементарных событий дает коалиция K_i?

Первый сомножитель выражения (5.12) — вероятность формирования коалиции K_i:

1) $n!$ — общее число перестановок;
2) $(k-1)!$ — число перестановок впереди игрока i;
3) $(n-k)!$ — число перестановок за игроком i;
4) $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$ — частота (вероятность) формирования коалиции K_i.

Второй сомножитель выражения (5.12) — вклад игрока i в коалицию K_i, — формируется следующим образом:

1) $v(\{K_i\})$ — гарантированный выигрыш коалиции K_i с игроком i;

2) $v(\{K_i \setminus i\})$ — гарантированный выигрыш коалиции K_i без игрока i;
3) $v(\{K_i\}) - v(\{K_i \setminus i\})$ — гарантированный выигрыш, который привносит игрок i, т. е. сила игрока, например влияние футболиста на команду. Так как K_i — случайное множество, то $v(\{K_i\}) - v(\{K_i \setminus i\})$ — случайная величина.

Следовательно, при указанном способе формирования коалиции K_i соответствующий элемент вектора Шепли — это математическое ожидание выигрыша игрока i по всем коалициям K_i, в которые он входит:

$$\varphi_i = \sum_{K_i \subset N} p_i \omega_i, \text{ где } p_i = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}; \quad \omega_i = [v(\{K_i\}) - v(\{K_i \setminus i\})].$$

Каждому игроку предлагается выплачивать сумму, определенную соотношением (5.12).

Замечание. В общем случае вектор Шепли может не принадлежать C-ядру.

Пример 5.8. Комитет из трех человек принимает различные решения простым большинством (два «за»), но один его член (председатель) имеет право вето. Определить вектор Шепли для соответствующей игры.

Решение. Составим характеристическую функцию, считая выигрыш коалиции при принятии предлагаемого ею решения равным 1, а при отклонении — 0 (игроку, имеющему право вето, присвоим номер I). Имеем:

$$v(\{\mathrm{I,II}\}) = v(\{\mathrm{I,III}\}) = v(\{\mathrm{I,II,III}\}) = 1;$$
$$v(\{\mathrm{I}\}) = v(\{\mathrm{II}\}) = v(\{\mathrm{III}\}) = v(\{\mathrm{II,III}\}) = 0.$$

Учитывая, что отличными от нуля в данном примере являются слагаемые, в которых коалиция K_i — выигрывающая (получает 1), а коалиция $K_i \setminus i$ — проигрывающая (получает 0), по формуле (5.12) получим

$$\varphi_1 = \frac{1}{3!}[v(\{\mathrm{I,II}\}) - v(\{\mathrm{II}\})] + \frac{1}{3!}[v(\{\mathrm{I,III}\}) - v(\{\mathrm{III}\})] +$$
$$+ \frac{2!0!}{3!}[v(\{\mathrm{I,II,III}\}) - v(\{\mathrm{II,III}\})] = \frac{2}{3};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3!}[v(\{\mathrm{I,II}\}) - v(\{\mathrm{I}\})] = \frac{1}{6};$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{3!}[v(\{\mathrm{I,III}\}) - v(\{\mathrm{I}\})] = \frac{1}{6}.$$

Заметим, что C-ядро в этом примере содержит один дележ $\{(1,0,0)\}$, т. е. вектор Шепли здесь не принадлежит ядру.

Пример 5.9. Рассмотрим игру трех лиц, в которой коалиция из двух или трех игроков является выигрывающей (получает 1), а из одного игрока — проигрывающей (получает 0). Характеристическая функция определяется следующими соотношениями:

$$v(\{I,II\}) = v(\{I,III\}) = v(\{II,III\}) = v(\{I,II,III\}) = 1;$$

$$v(\{I\}) = v(\{II\}) = v(\{III\}) = 0.$$

$$\varphi_1 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[v(\{I\}) - v(\{0\})] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{I,II\}) - v(\{II\})] +$$

$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{I,III\}) - v(\{III\})] + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[v(\{I,II,III\}) -$$

$$-v(\{II,III\})] = 2\,\frac{1!1!}{3!}(1-0) = \frac{1}{3};$$

$$\varphi_2 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[v(\{II\}) - v(\{0\})] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{I,II\}) - v(\{I\})] +$$

$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{II,III\}) - v(\{III\})] + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[v(\{I,II,III\}) -$$

$$-v(\{I,III\})] = 2\,\frac{1!1!}{3!}(1-0) = \frac{1}{3};$$

$$\varphi_3 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[v(\{III\}) - v(\{0\})] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{I,III\}) - v(\{I\})] +$$

$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[v(\{II,III\}) - v(\{II\})] + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[v(\{I,II,III\}) -$$

$$-v(\{I,II\})] = 2\,\frac{1!1!}{3!}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

В этой игре C-ядро, очевидно, пусто; вектор Шепли равен $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Пример 5.10. Рассматривается корпорация из четырех акционеров, имеющих акции соответственно в следующих количествах: $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$.

Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырех игроков, в которой выигрывающими коалициями являются следующие:

$$v(\{II,IV\}) = v(\{III,IV\}) = v(\{I,II,III\}) = v(\{I,II,IV\}) =$$

$$= v(\{II,III,IV\}) = v(\{I,III,IV\}) = v(\{I,II,III,IV\}) = 1.$$

Все остальные коалиции — проигрывающие (их выигрыш равен нулю).

Найдем вектор Шепли для этой игры.

$$\varphi_1 = \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,II,III\})-v(\{II,III\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,II,IV\})-v(\{II,IV\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,III,IV\})-v(\{III,IV\})]+$$
$$+\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}[v(\{I,II,III,IV\})-v(\{II,III,IV\})]=$$
$$=\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-1)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-1)+\frac{3!\cdot 0!}{4!}(1-1)=\frac{1}{12}.$$

$$\varphi_2 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}[v(\{II,IV\})-v(\{IV\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,II,III\})-v(\{I,III\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,II,IV\})-v(\{I,IV\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{II,III,IV\})-v(\{III,IV\})]+$$
$$+\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}[v(\{I,II,III,IV\})-[v(\{I,III,IV\})]=$$
$$=\frac{1!\cdot 2!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-1)+\frac{3!\cdot 0!}{4!}(1-1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$$

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}[v(\{III,IV\})-v(\{IV\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,II,III\})-v(\{I,II\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{II,III,IV\})-v(\{II,IV\})]+$$
$$+\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I,III,IV\})-v(\{I,IV\})]+$$
$$+\frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}[v(\{I,II,III,IV\})-[v(\{I,II,IV\})]=$$
$$=\frac{1!\cdot 2!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-1)+\frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0)+\frac{3!\cdot 0!}{4!}(1-1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$$

$$\varphi_4 = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}[v(\{II, IV\}) - v(\{II\})] +$$
$$+ \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!}[v(\{III, IV\}) - v(\{III\})] +$$
$$+ \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I, II, IV\}) - v(\{I, II\})] +$$
$$+ \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{II, III, IV\}) - v(\{II, III\})] +$$
$$+ \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}[v(\{I, III, IV\}) - [v(\{I, III\})] +$$
$$+ \frac{(4-1)!(4-4)!}{4!}[v(\{I, II, III, IV\}) - [v(\{I, II, III\})] =$$
$$= \frac{1!\cdot 2!}{4!}(1-0) + \frac{1!\cdot 2!}{4!}(1-0) + \frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0) +$$
$$+ \frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0) + \frac{2!\cdot 1!}{4!}(1-0) + \frac{3!\cdot 0!}{4!}(1-1) = \frac{5}{12}.$$

В результате получаем, что вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}\right)$.

Если же считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим вектор голосования $\left(\frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$, который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты II-го и III-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у II-го и III-го игрока одинаковые. Для I-го и IV-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

Рассмотренные принципы оптимальности для кооперативных игр — *C*-ядро, *HM*-решение и вектор Шепли — имеют разные «идейные основания». А именно, оптимальность, заключенная в понятиях *C*-ядра и *HM*-решения, основана на идее устойчивости дележа, а оптимальность в форме вектора Шепли — на идее справедливости дележа. При этом устойчивость дележа определяется внутренним образом — на языке отношения доминирования дележей; справедливость дележа постулируется внешним образом в форме некоторой системы требований.

Проверьте себя!

1. В магазине встречаются три покупателя, первый из которых имеет намерение приобрести товар на сумму 600 \$, второй — на сумму 700 \$ и третий — на сумму 800 \$. В магазине действует правило, согласно которому при покупке на сумму свыше 1000 \$ предоставляется скидка в 10%, а при покупке на сумму свыше 2000 \$ — в 20% от суммы покупки [14]. Считая выигрышем коалиции покупателей величину скидки, которую получит эта коалиция (действующая как единый покупатель), составьте характеристическую функцию этой игры.

Варианты ответов:

	$v(\{I\})$	$v(\{II\})$	$v(\{III\})$	$v(\{I,II\})$	$v(\{I,III\})$	$v(\{II,III\})$	$v(\{I,II,III\})$
(*a*)	0	0	0	110	120	130	360
(*b*)	0	0	0	120	130	140	400
(*c*)	0	0	0	130	140	150	420
(*d*)	0	0	0	140	150	160	450
(*e*)	0	0	0	150	160	190	500

2. Приведите характеристическую функцию игры, описанной в задании 1, к (0,1)-редуцированной форме.

Варианты ответов:

	$v(\{I\})$	$v(\{II\})$	$v(\{III\})$	$v(\{I,II\})$	$v(\{I,III\})$	$v(\{II,III\})$	$v(\{I,II,III\})$
(*a*)	0	0	0	$\frac{12}{42}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{14}{42}$	1
(*b*)	0	0	0	$\frac{13}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{15}{42}$	1
(*c*)	0	0	0	$\frac{14}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{16}{42}$	1
(*d*)	0	0	0	$\frac{15}{42}$	$\frac{16}{42}$	$\frac{17}{42}$	1
(*e*)	0	0	0	$\frac{16}{42}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{18}{42}$	1

3. Для игры, описанной в задании 1, составьте систему условий для дележей, принадлежащих ее C-ядру.

Варианты ответов:

(a)	$\mu_1 \le \frac{25}{42}$	$\mu_2 \le \frac{26}{42}$	$\mu_3 \le \frac{27}{42}$
(b)	$\mu_1 \le \frac{26}{42}$	$\mu_2 \le \frac{27}{42}$	$\mu_3 \le \frac{28}{42}$
(c)	$\mu_1 \le \frac{27}{42}$	$\mu_2 \le \frac{28}{42}$	$\mu_3 \le \frac{29}{42}$
(d)	$\mu_1 \le \frac{28}{42}$	$\mu_2 \le \frac{29}{42}$	$\mu_3 \le \frac{30}{42}$

4. Для игры, описанной в задании 1, найдите ее вектор Шепли. Дайте истолкование в терминах распределения общей прибыли.

Варианты ответов:

	φ
(a)	$\left(\frac{27}{84}, \frac{28}{84}, \frac{29}{84}\right)$
(b)	$\left(\frac{28}{84}, \frac{29}{84}, \frac{30}{84}\right)$
(c)	$\left(\frac{29}{84}, \frac{30}{84}, \frac{31}{84}\right)$
(d)	$\left(\frac{30}{84}, \frac{31}{84}, \frac{32}{84}\right)$

5. Акции некоторой акционерной компании распределены между четырьмя акционерами, причем акционер I обладает 10% всех акций, акционер II — 20%, акционер III — 30% и акционер IV — 40%. На общем собрании акционеров решение принимается квалифицированным большинством, т. е. если за него будет подано не менее 2/3 всех голосов (1 акция = один голос). С помощью вектора Шепли оцените «силу» держателей акций.

Варианты ответов:

	$\boldsymbol{\varphi}$
(a)	$\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$
(b)	$\left(\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}\right)$
(c)	$\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{7}{12}\right)$
(d)	$\left(\frac{2}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right)$

Литература

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.
2. Фомина Т. П. Элементы исследования операций и теории игр. — М.: SPSL — “Русская панорама”, 2006.
3. Матвеев В. А. Конечные бескоалиционные игры и равновесия. — Псков: Издательство ПГПИ им. С. М. Кирова, 2005.
4. Крушевский А. В. Теория игр. — Киев: Издательское объединение Вища школа, 1977.
5. Шикин Е. В. От игр к играм. Математическое введение. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
6. Партыка Т. Л., Попов И. И. Математические методы. — М.: Форум — Инфра-М, 2007.
7. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций. — М.: Гелиос АРВ, 2006.
8. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Дрофа, 2004.
9. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. — М.: Мир, 1974.
10. http://www.ras.ru/ph/0006/764SQSDU.pdf
11. Баркалов С. А., Курочка П. Н., Половинкина А. И. Модель формирования организационно-управленческих решений с помощью позиционных игр // Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем», (17–19 ноября 2003 г., Москва, Россия / Общ. ред. В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. Том 1. — М.: ИПУ РАН, 2003.
12. Стронгин Р. Г. Исследование операций: модели экономического поведения. — Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 2002.
13. Колобашкина Л.В., Алюшин М.В., Алюшин В.М. Выделение экономически устойчивых коалиций в кооперативных играх на основе теоретико-игровых методов // Естественные и технические науки. 2010. № 6.

14. Розен В.В., Бессонов Л.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие, 2008. nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/__17007.pdf
15. www.ccas.ru/depart/ereshko/semestr8/lect05.doc
16. Григорьева К.В. Теория игр. Часть 2. Кооперативные игры и игры в позиционной форме: учеб. пособие. — СПб. гос. архит.-строит. ун-т. — СПб., 2009.
17. Колесник Г.В. Теория игр. — 2-е изд. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для операционных систем Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Колобашкина Любовь Викторовна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР
Учебное пособие

Ведущие редакторы *М. С. Стригунова, И. А. Маховая*. Редактор *Н. А. Шихова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко, С. А. Янковая*

Подписано к использованию 09.10.14.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Любовь Викторовна Колобашкина, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика и процессы управления» Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. Вся ее трудовая деятельность неразрывно связана с МИФИ, где она прошла путь от ассистента до доцента. Педагогический стаж – 30 лет. Автор более 70 научных трудов.

Область научных интересов: оптимальное управление, теория игр, теория случайных процессов.