# Основы модальной логики, лекция 6

Кудинов А.В.

28 октября 2025 г.

# Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики $L$ называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

# Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики $L$ называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L),\ \text{где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется канонической шкалой логики $L$.

# Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики $L$ называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется канонической шкалой логики $L$.

**Теорема (о канонической модели)**

Для модальной логики $L$ и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

# Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.

# Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.

# Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y (x R_L y \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y (x R_L y \ \&\ B \notin y)$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \ \&\ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

# Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \;\&\; \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y).$$

# Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \ \&\ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \ \&\ B \notin y).$$

Будем строить $y$ пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

$\Box$

# Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y (x R_L y \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить $y$ пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть $\Gamma$ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество $\Gamma$:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots (C_n \to (\neg B \to \bot) \ldots) \Leftrightarrow \\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots)).$$

# Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить $y$ пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть $\Gamma$ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество $\Gamma$:

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\ &\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\ &\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\ &L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots). \end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

# Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, $\Gamma$ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует $L$-полное множество $y$ содержащее $\Gamma$. По определению

$$xR_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из леммы о $L$-полных теориях.

# Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, $\Gamma$ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует $L$-полное множество $y$ содержащее $\Gamma$. По определению

$$xR_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из леммы о $L$-полных теориях.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\}$ — $L$-непротиворечиво и существует $L$-полное множество $x$ содержащее $\neg A$, тогда $x$ является точкой в $M_L$ и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

# Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, $\Gamma$ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует $L$-полное множество $y$ содержащее $\Gamma$. По определению

$$xR_L y \;\&\; B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из леммы о $L$-полных теориях.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\}$ — $L$-непротиворечиво и существует $L$-полное множество $x$ содержащее $\neg A$, тогда $x$ является точкой в $M_L$ и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.
Что и требовалось доказать. :-) $\square$

# Канонические логики

### Следствие

Логика $\mathsf{K}$ полна по Крипке.

Действительно, $\mathsf{K} = Log$(все шкалы Крипке).
($\subseteq$) следует из корректности.
($\supseteq$). Пусть $A \notin \mathsf{K}$. По теореме о канонической модели $M_L \not\models A$, следовательно $F_L \not\models A$, а значит $A \notin Log$(все шкалы Крипке).

# Канонические логики

### Следствие

Логика $\mathsf{K}$ полна по Крипке.

Действительно, $\mathsf{K} = Log$(все шкалы Крипке).
($\subseteq$) следует из корректности.
($\supseteq$). Пусть $A \notin \mathsf{K}$. По теореме о канонической модели $M_L \not\models A$, следовательно $F_L \not\models A$, а значит $A \notin Log$(все шкалы Крипке).
Чтобы такое же рассуждение провести для произвольной логики $L$ необходимо, чтобы она была канонической:

Логика $L$ называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула $A$ называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

# Канонические логики

**Следствие**

Логика $\mathsf{K}$ полна по Крипке.

Действительно, $\mathsf{K} = Log$(все шкалы Крипке).
($\subseteq$) следует из корректности.
($\supseteq$). Пусть $A \notin \mathsf{K}$. По теореме о канонической модели $M_L \not\models A$, следовательно $F_L \not\models A$, а значит $A \notin Log$(все шкалы Крипке).
Чтобы такое же рассуждение провести для произвольной логики $L$ необходимо, чтобы она была канонической:

Логика $L$ называется канонической, если $F_L \models L$.

Формула $A$ называется канонической, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

**Теорема**

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

### Лемма

Любая замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) является канонической.

### Доказательство.

Пусть $A$ — замкнутая формула и $L$ — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.

## Лемма

Любая замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) является канонической.

## Доказательство.

Пусть $A$ — замкнутая формула и $L$ — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.
Так как в $A$ нет переменных, то ее истинность не зависит от оценки, значит $F_L \models A$. $\square$

# Канонические логики 2

## Лемма

Любая замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) является канонической.

## Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

# Канонические логики 2

## Лемма

Любая замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) является канонической.

## Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

## Предложение

Все формулы из множества $\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ каноничны.

# Канонические логики 2

**Лемма**

Любая замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) является канонической.

**Следствие**

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

**Предложение**

Все формулы из множества $\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ каноничны.

**Теорема**

Если логика $L$ аксиоматизирована замкнутами формулами или формулами из предыдущего предложения, то $L$ — канонична, а значит полна по Крипке.

# Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$
$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.

# Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$

$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.
Проверим $A4 = \Box p \to \Box\Box p$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

## Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$
$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.
Проверим $A4 = \Box p \to \Box\Box p$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики $L$ и $A4 \in L$. Пусть $xRy$ и $yRz$, докажем, что $xRz$.

# Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$

$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.
Проверим $A4 = \Box p \to \Box\Box p$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики $L$ и $A4 \in L$. Пусть $xRy$ и $yRz$, докажем, что $xRz$.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in t\}$$

# Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$
$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.
Проверим $A4 = \Box p \to \Box\Box p$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики $L$ и $A4 \in L$. Пусть $xRy$ и $yRz$, докажем, что $xRz$.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in t\}$$

По определению $R$
$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \;\&\; \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

## Док-во предложения о каноничности

Проверим $AT = \Box p \to p$.

$$xRx \iff \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)$$
$$\Box p \to p \in L \Rightarrow \Box A \to A \in L \subseteq x$$

Пусть $\Box A \in x$. Т.к. любая $L$-полная теория замкнута относительно MP, то $A \in x$.
Проверим $A4 = \Box p \to \Box\Box p$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики $L$ и $A4 \in L$. Пусть $xRy$ и $yRz$, докажем, что $xRz$.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in t\}$$

По определению $R$
$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \;\&\; \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Пусть $A \in \Gamma_x$, тогда $\Box A \in x$, но по Лемме о полной теории п.2, все формулы логики $L$ тоже содержатся в $x$, в том числе формула $\Box A \to \Box\Box A$, как результат применения правила (Sub) к $A4$. В то же время, т.к. $x$ — полная теория, то она

# Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.

# Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ $xRy$ и $xRz$.

# Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ $xRy$ и $xRz$.
Надо найти $t$, такую что $yRt$ и $zRt$. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво. Т.к. тогда найдется полная теория $t$, достижимая и из $y$ и из $z$.

# Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ $xRy$ и $xRz$.
Надо найти $t$, такую что $yRt$ и $zRt$. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво. Т.к. тогда найдется полная теория $t$, достижимая и из $y$ и из $z$.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box\left(\bigwedge B_i\right) \to \Box\left(\neg \bigwedge C_j\right).$$

# Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ $xRy$ и $xRz$.
Надо найти $t$, такую что $yRt$ и $zRt$. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво. Т.к. тогда найдется полная теория $t$, достижимая и из $y$ и из $z$.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box\left(\bigwedge B_i\right) \to \Box\left(\neg \bigwedge C_j\right).$$

Заметим, что $\Box \bigwedge B_i \in y$ и, значит (по MP), $\Box\neg \bigwedge C_j \in y$. Аналогично, $\Box \bigwedge C_i \in z$.
Из этого следует, что

$$x \models \Diamond\Box \bigwedge C_j \ \&\ x \models \Diamond\Box\neg \bigwedge C_j \Rightarrow x \models \Diamond\Box \bigwedge C_j \wedge \Diamond\Box\neg \bigwedge C_j.$$

$\square$

Таким образом в $x$ истинен постановочный вариант отрицания формулы $A2$. Пришли к противоречию, значит $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечива и существует требуемая точка $t$. $\square$

# Полнота канонических логик

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$

Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, & \quad & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, & & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, & & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT, \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB, & & & &
\end{array}
$$

# Полнота канонических логик

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$
Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\
\mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\
\mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT,
\end{array}
$$

Но не все логики каноничны.