УДК 519.171.1

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ В ПРОСТОМ ГРАФЕ

М. С. Астахов
Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия

Аннотация **– Рассматривается задача подсчета количества простых циклов в сильно регулярных графах. Для сильно регулярных графов количество простых циклов может быть выражено через параметры сильно регулярных графов при длине цикла менее 8. Задача поиска циклов заданной длины в сильно регулярных графах является полиномиальной при длине цикла менее 8. В работе вычисляется вклад отдельных слагаемых универсальной формулы в значение количества циклов в рассматриваемом графе, при условии, что длина цикла более 8. После вычислений делается вывод о том, что рассматриваемый класс слагаемых универсальной формулы может быть выражен через параметры сильно регулярного графа.**

Ключевые слова: **простой цикл, сильно регулярный граф.**

I. Введение

В 1972 году Харари представил универсальные формулы [1] для вычисления количества циклов в произвольном графе для циклов длиной s=3,4,5. В 2011 г. Варапаев и Перепечко [3] предложили универсальные формулы для вычисления количества циклов заданной длины для произвольных графов. Кроме того, ими были исследованы частные свойства универсальных формул для специальных классов графов – двудольных графов, графов с ограниченной степенью вершин. В работе [4] приводятся формулы вычисления количества циклов заданной длины в сильно регулярном графе через его параметры для случаев $s \le 6$. В данной работе исследуется зависимость между количеством простых циклов в сильно регулярных графах и параметрами сильно регулярных графов при $s \le 8$.

II. Постановка задачи

В материалах конференции [4] представлен способ вычисления количества циклов сильно регулярных графах, зависящий от параметров сильно регулярных графов. При увеличении длины цикла в универсальной формуле попадаются слагаемые, к которым не могут быть применены правила **редуцирования** [4]. Назовём их **нередуцируемыми**.

Таким образом, среди формальных графов, слагаемых формулы для вычисления циклов заданной длины, при увеличении длины цикла встречаются слагаемые, к которым нельзя применить формулы понижения кратности суммирования. Следовательно, вполне возможно, что данные слагаемые не могут быть выражены через параметры сильно регулярного графа и, более того, влияют на то, что задача поиска гамильтонова цикла в сильно регулярных графах перестает быть полиномиальной [4] при увеличении размера графа, в котором осуществляется поиск гамильтонова цикла. Рассмотрим в статье вклад **нередуцируемых** слагаемых в значенинт $C_s(G)$.

4. Оформление рисунков

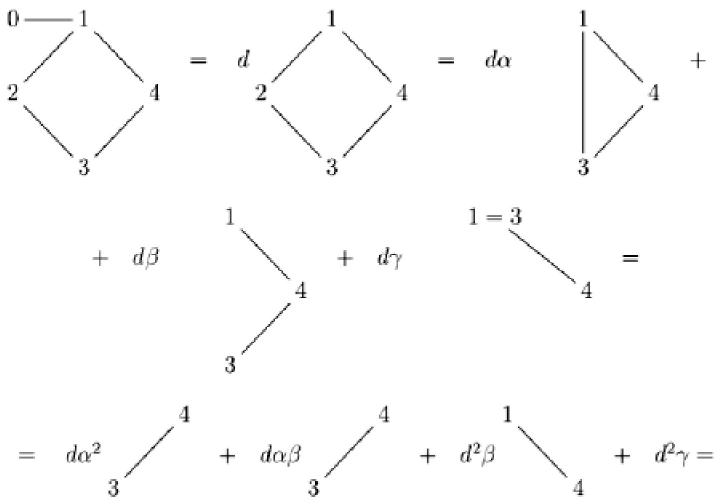
Напомним основные положения [4].

$$C_s(G) = \frac{1}{2s}\sum c_\alpha H_\alpha(A), \quad (1)$$

где G – произвольный граф (в данном случае сильно регулярный); A – матрица смежности графа G; s – длины цикла; $C_s(G)$ – количество простых циклов в графе G; c_α – коэффициенты при слагаемых универсальной формулы; H_α – формальные графа, являющиеся слагаемыми универсальной формулы.

Для сильно регулярного графа G будем обозначать: n – количество вершин в сильно регулярном графе; d – степень вершин сильно регулярного графа; a – количество вершин смежных двум смежным вершинам; b – количество вершин смежных двум несмежным вершинам.

Определим термин редуцирование графа – как процесс уменьшения кратности суммирования, т.е. редуцирование графа – это последовательное убирание вершин степени 1 и 2 из формального графа, с конечным стягиванием его в точку. Таким образом, назовем формальный граф **Редуцируемым**, если у нас есть возможность стянуть его в точку, что равнозначно выражению графа через параметры сильно регулярного графа.



$$= d^2\alpha^2 n + d^2\alpha\beta n + d^3\beta n + d^3\gamma n$$

Рис. 1. Пример редуцирования графа G

Для сильно регулярных графов справедливы следующие свойства [4]:

1) из формальных графов, которые являются слагаемыми универсальной формулы для сильно регулярных графов, можно убирать вершины степени 1;

2) из формальных графов, которые являются слагаемыми универсальной формулы для сильно регулярных графов, можно убирать вершины степени 2;

3) для $s \leq 7$ формула для подсчета количества циклов заданной длины имеет полиномиальную сложность.

Таким образом, при $s \leq 7$ слагаемые универсальной формулы для сильно регулярных графов редуцируются в точку.

При увеличении длины цикла до $s>7$ в универсальной формуле появляются слагаемые, к которым не могут быть применены правила редуцирования. Основное свойство этих слагаемых – все степени вершин **нередуцируемого** слагаемого имеют степень $d \geq 3$.

Соответственно, к графам данного вида не могут быть применены формулы понижения кратности суммирования.

На рисунке 2 изображено представление графа G, где $P(a,b,d,n)$ – часть графа, которая может быть редуцирована в точку, а C_1 – коэффициент перед нередуцируемой частью графа G.

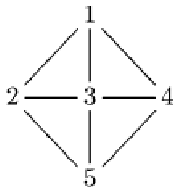
$C_8(G) = P(a, b, d, n) + C_1$ 

Рис. 2. Представление графа *G*

Исследуем вклад нередуцируемых слагаемых в универсальную формулу для вычисления количества циклов в сильно регулярном графе.

На рис. 3 показано представление нередуцируемой части графа *G*.

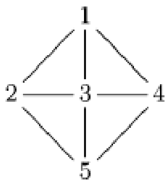
 $= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{25}a_{35}a_{34}a_{45}$

Рис. 3. Представление нередуцируемой части графа *G*

Для этого опишем два алгоритма, которые реализуем в среде компьютерных вычислений.

Распишем алгоритм, с помощью которого осуществлялся поиск графов, к которым не могут быть применены формулы понижения кратности суммирования.

Алгоритм 1 - *Поиск нередуцируемых формальных графов.*

Шаг 1.

Осуществляем поиск вершин степени 1.

Шаг 2

Удаляем вершины степени 1.

Шаг 3.

Условие 3.1.

Если найдена вершина степени *i* вершина степени 2, смежная вершинам *j* и *k* 2 , то

Шаг 3.1.1.

Прибавляем к матрице смежности формального графа строку l, полученную сложением строк *j* и *k*.

Шаг 3.1.2

Прибавляем к матрице смежности формального графа столбец l, полученный сложением столбцов *j* и *k*.

Шаг 3.1.3.

Удаляем вершины (соответствующие строки и столбцы) *i*, *j*, *k* из матрицы смежности формального графа.

Конец алгоритма

После того как будут определены все встречающиеся нередуцируемые графы, посчитаем вклад каждого такого нередуцируемого слагаемого в универсальную формулу. Для этого возьмем набор неизоморфных сильно регулярных графов с одинаковыми параметрами *n, d, a, b*.

Вычислять вклад каждого слагаемого будем по следующему алгоритму.

Алгоритм 2 - *вычисление вклада нередуцируемых слагаемых в значение $C_s(G)$*

Шаг 1. Cycle *(A,S)* *n=dim(A)*

Шаг 2. for $i=_1$ to *n do*

for $i_2=1$ to *n* do

for $i_s=1$ to *n* do

Условие 2.1. if i_1=i_3 или $i_1=i_4$ then $r=0$

Условие 2.2. else $r=a_{i1i2}\ldots a_{isi1}$

Шаг 2.3. *R=R+r*

Конец алгоритма

IV. Результаты экспериментов

Применим алгоритм 1 к полученным формулам для подсчета циклов заданной длины.

В формулах для длин цикла $s \le 7$ нередуцируемые фигуры не встречаются.

В формулах для $s=8,9,10$ встречается по одной нередуцируемой фигуре.

В формуле для $s=11$ встречается 11 нередуцируемых слагаемых.

В формуле для $s=12$ встречается 46 нередуцируемых слагаемых.

После того как нередуцируемые слагаемые найдены, вычислим вклад каждого слагаемого в значение *C_s(G)*.

Для этого возьмем из библиотеки сильно регулярных графов «Database of adjacency matrices on cospectral non-isomorphic graph pairs» массив графов размерностей 29, 35, 40, 64.

Приведём в табл. 1 параметры сильно регулярных графов, для которых будем проводить вычисления (N_k – количество сильно регулярных графов в выборке).

ТАБЛИЦА 1

ПАРАМЕТРЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

s	*n*	*d*	*a*	*b*	N_k
G_{29}	29	14	16	7	41
G_{35}	35	18	9	9	227
G_{40}	40	12	2	4	28
G_{64}	64	18	2	6	167

На рис. 4 и 5 обозначены нередуцируемые фигуры, по которым будут проводиться вычисления

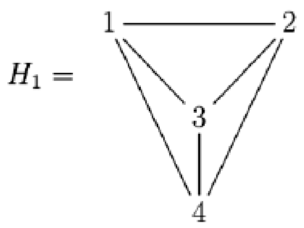


Рис. 4. Нередуцируемая часть графа *G*

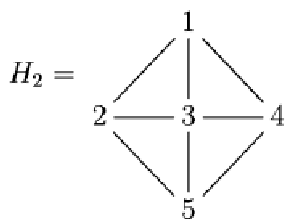


Рис. 5. Нередуцируемая часть графа *G*

В табл. 2 отражен вклад нередуцируемых фигур в значение $C_{s(G)}$.

ТАБЛИЦА 2

ПАРАМЕТРЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

s	G_{29}	G_{35}	G_{40}	G_{64}
H_{29}	34104	102060	11520	41472
H_{35}	477456	1888110	234240	1751040

V. Обсуждение результатов

Как видно из вычислительных экспериментов, каждое не стягиваемое слагаемое от различных неизоморфных сильно регулярных графов с одинаковыми параметрами *(n, d, a, b)* даёт один и тот же вклад в универсальную формулу вычисления количества циклов заданной длины. Таким образом, численный вклад не стягиваемых фигур в универсальную формулу зависит только от параметров сильно регулярного графа.

VI. Выводы и заключение

Было показано, что численный вклад не стягиваемой фигуры в универсальную формулу зависит только от параметров сильно регулярного графа. Можно говорить о справедливости следующей гипотезы:

Гипотеза. *Пусть G – сильно регулярный граф, $H'_1, H'_2 \ldots H'_i$ нередуцируемые слагаемые универсальной формулы для вычисления циклов заданной длины, тогда вклад не стягиваемых слагаемых в универсальную формулу зависит от параметров сильно регулярного графа.*

Список литературы

1. Harary F., Manvel B. On the Number of Cycles in a Graph. Matematick asopis, 1971, vol. 21, no. 1, PP. 55–63.
2. Камерон П., Линт Дж. ван. Теория графов, теория кодирования и блок схемы. М., 1980 г., 144 с.
3. Воропаев А. Н. Кратности сумм в явных формулах для подсчета циклов фиксированной длины в неориентированных графах, Прикладная дискретная математика. № 14. 2011. С. 42–55.
4. Астахов М. С., Шутенко А. В., Широков И. В. Вывод формулы для подсчета числа простых циклов в простом графе (тезисы доклада. Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач – АЛМАЗ'2: тез. докл. Междунар. конф. Омск: Изд-во ОМГТУ. 2015. С. 6–10.
5. Астахов М. С., Широков И. В., Шутенко А. В. Графическое представление алгоритма получения аналитической формулы для вычисления количества простых циклов в произвольном графе // Проблемы современной науки и образования: Науч. – метод. журн. М: Из-во проблемы науки. 2014, № 2. С. 9–12.