GAME THEORY

Guillermo Owen
Associate Professor of Mathematics
Fordham University

W. B. SAUNDERS COMPANY
Philadelphia · London · Toronto
1968

Г. ОУЭН

Теория игр

Перевод с английского
*И. Н. Врублевской, Г. Н. Дюбина
и А. Н. Ляпунова*

Под редакцией *А. А. Корбута*

С вступительной статьей
Н. Н. Воробьева

*

Издательство «Мир»

МОСКВА 1971

УДК 519.9

Книга представляет собой краткое и сравнительно элементарное учебное пособие, пригодное как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Для ее чтения достаточно знания элементов математического анализа и теории вероятностей.

Книга естественно делится на две части, первая из которых посвящена играм двух лиц, а вторая — играм n лиц. Она охватывает большинство направлений теории игр, включая наиболее современные. В частности, рассмотрены антагонистические игры, игры двух лиц с ненулевой суммой и основы классической кооперативной теории. Часть материала в монографическом изложении появляется впервые. Каждая глава снабжена задачами разной степени сложности.

Книга вполне доступна студентам и аспирантам университетов, технических и экономических высших учебных заведений. Она представляет интерес не только для математиков, но и для специалистов в области исследования операций, военного дела, теории управления и математической экономики.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
31-71

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория игр является широко разветвленной и богатой результатами современной математической теорией. Многие ее факты имеют весьма сложную природу и устанавливаются с использованием аппарата современной топологии, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и т. п.

Предлагаемая советскому читателю книга представляет собой достаточно элементарный учебник, охватывающий большинство современных направлений теории игр. Хотя ее содержание заметно отличается от программ соответствующих курсов, читаемых в наших университетах и других высших учебных заведениях студентам различных специальностей (например, математикам или экономистам-кибернетикам), она с успехом может быть использована как пособие при прохождении этих курсов. Книга включает достаточное количество фактического материала по элементарным вопросам теории игр, и — что особенно важно — автор не ограничивается изложением традиционных разделов, а вводит читателя в круг достаточно новых проблем. Часть материала в монографическом изложении появляется впервые.

В конце каждой главы приведены хорошо подобранные задачи, существенно повышающие педагогическую ценность книги. Трудность этих задач изменяется в весьма широком диапазоне: от элементарных примеров на решение небольших конкретных матричных игр или задач линейного программирования до проблем, решения которых становились важными событиями в истории теории игр. Для того чтобы облегчить самостоятельное решение задач последнего типа, автор расчленяет каждую из них на пункты, представляющие уже достаточно простые задачи. Систематическое решение таких задач является весьма высокой формой изучения теории игр, непосредственно подводящей читателя к самостоятельной научной работе.

Следует отметить, однако, что автор ограничивается изложением конкретных научных фактов, не стремясь связать их в единую систему, каковой в сущности и является теория игр, и почти не уделяет внимания общим вопросам. Это обстоятельство представляется весьма существенным потому, что книга носит по преимуществу учебный характер, и нельзя ограничиться надеждами на то, что читатель ознакомится с некоторыми основными вопросами предмета по другим руководствам.

Для того чтобы компенсировать этот недостаток авторского изложения и облегчить использование книги в качестве учебного пособия, ее тексту предпослана вступительная статья, написанная Н. Н. Воробьевым. В ней излагается общий взгляд на теорию игр как на теорию принятия оптимальных решений в условиях конфликта.

* * *

Перевод выполнили И. Н. Врублевская (гл. I—III), Г. Н. Дюбин (гл. IV и VIII) и А. Н. Ляпунов (гл. V—VII, IX, X и приложение).

А. А. Корбут

ПРЕДМЕТ И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ ИГР

Н. Н. Воробьев

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Разумная человеческая деятельность в большинстве случаев состоит в том, что человеку для достижения тех или иных целей приходится принимать решения. При этом представляется вполне естественным стремление принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. Научные постановки вопроса о выборе оптимальных решений встречались и встречаются в различных теоретических и прикладных дисциплинах — медицине, праве, военном деле, экономике, технике и т. д. По мере развития и математизации этих дисциплин соответствующие процессы принятия решений формализуются и приобретают характер математических моделей. Теория математических моделей принятия оптимальных решений составляет ныне обширную отрасль науки, называемую исследованием операций.

Особое место среди условий, в которых приходится принимать решения, занимают условия конфликта. Это особое положение определяется, во-первых, практической важностью, которую имеют конфликты в жизни и развитии общества, и, во-вторых, специфической сложностью конфликта как явления, в связи с которым приходится принимать решение. Дело в том, что в условиях конфликта принимающему решения субъекту приходится считаться не только со своими собственными целями, но также с теми целями, которые ставят перед собой его партнеры. Помимо этого, он должен учитывать, кроме объективных, известных ему обстоятельств конфликта, еще и те решения, которые принимают его противники и которые ему самому, вообще говоря, неизвестны. Из сказанного вытекает, что раздел исследования операций, занимающийся теорией математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов, является весьма специфическим и весьма сложным. Этим разделом является теория игр.

Поскольку теория игр есть теория моделей принятия решений, она не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами; не занимается она и вопросами их фактической реализации. В рамках теории игр принимаемые решения выступают как достаточно упрощенные и идеализированные схемы реальных явлений. При этом, разумеется, степень этого упрощения не должна превосходить известных пределов, за которыми модель уже утрачивает существенные черты явления.

Далее, теория игр есть теория математических моделей; она является разделом математики. Это значит, что конструируемые в ней модели являются формальными, знаковыми (а не, скажем, макетными или аналоговыми) моделями и их формирование и средства их анализа также формальны. В частности, формально должны вводиться в рассмотрение и основные понятия теории игр. Практически это означает, что эти понятия должны задаваться своими основными свойствами, которым тем самым придается смысл аксиом. Дальнейшее образование понятий и установление свойств может вестись уже без повторного обращения к их содержательному смыслу и без того, чтобы прибегать к каким-либо «интуитивным» соображениям. Сказанное отнюдь не оспаривает практической целесообразности использования интуиции, особенно как способа практической проверки формально полученных результатов.

В соответствии со сказанным при построении теории игр с самого начала необходимо формализовать те понятия, которые входят в ее определение: конфликта, принятия решения и оптимальности решения. Этому в свою очередь должно предшествовать ясное содержательное представление о сущности этих понятий и их основных структурных компонентах.

§ 2. КОНФЛИКТ И ЕГО ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Конфликтом естественно называть всякое явление, применительно к которому имеет смысл говорить, кто и как в этом явлении участвует, каковы его возможные исходы, кто в этих исходах заинтересован и, наконец, в чем состоит эта заинтересованность. Таким образом, в формальное определение конфликта должны входить те или иные формальные задания только что перечисленных его компонент. Достаточно общая постановка вопроса состоит в том, чтобы описать наиболее простым образом каждую из пяти указанных компонент конфликта в терминах первичных математических понятий, а именно — в терминах абстрактных множеств и отношений.

Будем в соответствии с этим считать, что принимающие участие в конфликте стороны суть элементы некоторого абстрактного множества. (Это значит, что мы априори не предполагаем, что они наделены какими-либо содержательными или хотя бы формальными свойствами.) Часто оказывается целесообразным считать их подмножествами некоторого универсального множества; элементы последнего принято называть игроками, а подмножества игроков, которые являются действующими сторонами в конфликте, — коалициями действия (различные коалиции действия могут пересекаться и даже содержаться одна в другой). Множество всех коалиций действия в конфликте далее будет обозначаться через $\mathfrak{K}_\partial$.

Каждая из коалиций действия K принимает некоторое решение из некоторого множества S_K доступных для нее решений .Будем пока считать, что множество S_K является абстрактным, и процесс принятия решения сводится к формальному и притом произвольному выбору элемента из этого множества. Элементы множества S_K называются **стратегиями** коалиции K.

Выбор каждой из коалиций действия некоторой стратегии определяет то, что естественно назвать *исходом* конфликта. При этом не обязательно, чтобы этот исход понимался как однозначно определенное детерминированное явление. Допустимо, чтобы тот или иной из этих исходов был множеством физических явлений или же случайным явлением, т. е. множеством явлений с вероятностной мерой на нем. Кроме того, некоторые комбинации выбранных коалициями действия стратегий могут оказаться несовместимыми и потому неосуществимыми. В этом случае можно считать, что конфликт не состоялся (в применении к салонным или спортивным играм это может выражаться в появлении некоторой помехи, воспрепятствовавшей окончанию игры).

Все исходы конфликта называются *ситуациями.* Из сказанного выше следует, что ситуации составляют некоторое множество S, являющееся подмножеством множества всех комбинаций стратегий коалиций действия, т. е. декартова произведения множеств стратегий: $S \subset \prod\limits_{K \in \mathfrak{K}_\partial} S_K$.

По поводу заинтересованных в исходах конфликта сторон можно повторить почти все, сказанное в связи с коалициями действия. Их естественно называть **коалициями интересов**, и они считаются элементами некоторого абстрактного множества, которое далее будет обозначаться через $\mathfrak{K}_u$. Обычно достаточно считать, что коалиции интересов суть подмножества того же множества игроков, что и коалиции действия.

В нашем изложении множества коалиций действия и множества коалиций интересов рассматриваются как различные. Это сделано не ради одной лишь формальной общности. Во многих реальных конфликтах могут встречаться коалиции действия, не являющиеся коалициями интересов, и наоборот. Например, наблюдающий за футбольным матчем по телевидению болельщик заинтересован в исходе матча, но не может влиять на его ход. Наоборот, судья этого матча может весьма существенно влиять на его ход, но не имеет права обнаруживать заинтересованность в его исходе.

Рассмотрим, наконец, форму выражения заинтересованности для коалиций интересов. Эта заинтересованность проявляется в том, что каждая из этих коалиций предпочитает одни исходы конфликта другим. Это описывается в виде некоторого отношения предпочтения — абстрактного бинарного отношения $\succ_K$ на множестве всех ситуаций. Тот факт, что коалиция интересов K предпочитает ситуацию x ситуации y, обозначается как $x \succ_K y$.

Вообще говоря, никаких свойств у отношения $\succ_K$ (кроме его бинарности) не предполагается, хотя обычно оно считается транзитивным (т. е. из $x \succ_K y$ и $y \succ_K z$ следует $x \succ_K z$). В частности, не требуется, чтобы отношение было линейным, т. е. чтобы любые две ситуации были сравнимы друг с другом (в формальной записи для любых двух различных ситуаций x и y либо $x \succ_K y$, либо $y \succ_K x$). Допускается даже, чтобы некоторые ситуации вообще не поддавались сравнению по предпочтительности с какими-либо другими ситуациями.

Нередко отношение предпочтения задается следующим образом. На множестве ситуаций S определяется функция H_K, принимающая вещественные значения и называемая *функцией выигрыша* коалиции интересов K. Ее значение $H_K(x)$ понимается как выигрыш, который коалиция K получает в ситуации x. Естественно принять, что $x \succ_K y$, если $H_K(x) > H_K(y)$.

Итак, формальное описание конфликта состоит в задании системы

$$\Gamma = \langle \mathfrak{K}_\partial, \{S_K\}_{K \in \mathfrak{K}_\partial}, S, \mathfrak{K}_u, \{\succ_K\}_{K \in \mathfrak{K}_u} \rangle,$$

где перечисленные в ломаных скобках множества и отношения связаны друг с другом, как это было описано выше. Такая система является формальной моделью конфликта. Она называется *игрой*. Теория игр занимается изучением игр именно в этом понимании.

Разумеется, приведенное определение игры является чрезвычайно общим. Фактически приходится иметь дело со значительно более узкими классами игр. Некоторые из этих классов рассматриваются в книге Оуэна.

Физическая и социальная природа компонент игры и, в частности коалиций действия, коалиций интересов и игроков, может быть весьма разнообразной: юридические лица, спортивные команды, конкурирующие фирмы, воюющие стороны, биологические виды в борьбе за существование и т. д.

Некоторые заинтересованные стороны могут даже не существовать реально, а являться лишь отражением определенных представлений, которые могут возникать в тех или иных условиях у реальных заинтересованных сторон. Этот случай, как это ни покажется на первый взгляд странным, является достаточно распространенным.

Предположим для простоты, что мы имеем дело с единственным субъектом, принимающим решения и притом недостаточно осведомленным об обстановке, в которой ему приходится это делать. Он допускает наступление различных последствий в результате принятия каждого своего решения, и эти последствия имеют для него различную предпочтительность. На самом деле наступление тех или иных последствий зависит от некоторой неизвестной ему закономерности природы. Поэтому он может допустить, что истинная закономерность природы является для него наименее благоприятной. Это значит, что субъект представляет себе дело так, *как будто* вместо объективной, но непознанной природы ему противостоит сознательный противник, стремящийся к ситуациям, наименее предпочитаемым субъектом. В этом смысле мы можем иногда причислять к участникам конфликта *природу*. Очевидно, в этом не заключено никакой антропоморфизации природы. Описанная форма принятия решения обычно называется принятием решений в условиях неопределенности. Оно носит конфликтный характер и формализуется в виде игры. Таким образом, математическое моделирование принятия оптимальных решений в условиях иеопределенности также можно естественным образом отнести к теории игр («игры против природы»).

Столь же разнообразной может быть и природа отношений предпочтения. Очевидно, что при рассмотрении вопроса в наиболее общем виде доказательствам поддаются лишь отдельные, и притом не слишком глубокие утверждения. В целях построения содержательной теории желателен переход к более конкретным отношениям предпочтения. Очень часто в теории игр отношения предпочтения сводятся к функциям выигрыша. Некоторые вопросы, касающиеся возможности такого сведения, рассматриваются в гл. VI.

Вопрос о природе стратегий действующих сторон рассматривается в следующем параграфе.

§ 3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Мы рассмотрим два аспекта этого вопроса. Для того чтобы без каких-либо специальных оговорок говорить о выборе стратегии из множества всех стратегий как о выборе элемента из множества, необходимо представлять себе, в каком смысле и до какой степени эта коалиция в состоянии отличать свои стратегии как одну от другой, так и от иных объектов, не являющихся ее стратегиями. Если множество стратегий у коалиции действия конечно, то такого рода различения для нее во всяком случае потенциально осуществимы и эта сторона вопроса о выборе стратегии отпадает. В противном же случае некритические представления о неограниченных возможностях выбора стратегии приводят к слишком большой свободе в конструировании самих игр и как следствие этого — к построению игр, анализ которых приводит к парадоксальным явлениям. Следует подчеркнуть, что получаемые в теории игр парадоксы противоречат не только сложившейся математической практике, но и представлениям житейского здравого смысла; поэтому анализ и раскрытие этих парадоксов оказывается особенно важным и актуальным.

Далее, в представлении о решении как об элементе абстрактного множества никак не отражается возможный динамический характер решения, когда оно принимается не каким-либо однократным актом, а вырабатывается постепенно, шаг за шагом. Для того чтобы учесть этот динамический характер, необходимо конкретизировать понятие стратегии, рассматривая ее не просто как элемент абстрактного множества, а как объект, имеющий внутреннюю структуру и конструируемый в некотором процессе, причем результаты отдельных шагов этого процесса могут изменяться в зависимости от тех или иных обстоятельств, являясь тем самым функциями этих обстоятельств. Областью задания каждой такой функции является множество всех представлений принимающего решения субъекта (т. е. коалиции действия) об обстановке, в которой приходится принимать решения. Здесь важно отметить, что аргументом функции-стратегии является не истинное состояние субъекта, а его субъективное представление о нем (его информационное состояние). Каждое информационное состояние субъекта можно понимать как некоторый класс его истинных состояний, в который объединяются состояния, не различаемые субъектом в момент принятия им решения. Возможными значениями функции на каждом из информационных состояний являются те частичные решения, которые субъект в состоянии принять в этот момент. Очевидно, область значений функции-решения в различных информационных состояниях определяется теми же внешними по отношению к субъекту обстоятельствами, что и сами информационные состояния.

Описанное представление о стратегии как о функции, заданной на множестве информационных состояний субъекта, весьма характерно для большинства салонных и спортивных игр, а также для большинства конфликтов, моделями которых призваны быть игры. Поэтому в ряде руководств по теории игр и в том числе в данной книге изложение начинается с описания игр именно такой динамической природы (см. § 1.2).

§ 4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Понятие оптимальности принимаемого решения значительно труднее поддается формализации, чем понятия конфликта и принятия решения. Эта задача является сейчас одной из основных в теории игр.

При современном состоянии теории игр представляется наиболее естественным следующий подход к вопросам такого рода.

Отвлечемся на мгновение от теоретико-игровых сложностей и рассмотрим обычную задачу экстремального типа. Пусть мы хотим максимизировать значение интересующей нас функции f, которая задана на некотором множестве M и принимает вещественные значения. При этом будем предполагать, что в нашей власти выбрать любую точку или любые точки множества M.

Поставленную задачу можно сформулировать несколькими, как легко видеть, эквивалентными способами. Например:

1) найти точки x, в которых значение функции f не меньше ее значений в каких-либо других точках M:

$$f(x) \geqq f(y) \qquad (y \in M);$$

2) найти такие точки x, что любое отклонение от них в пределах множества M не увеличивает значения функции f;

3) найти такое множество точек R, что для произвольных x, $y \in R$ не может быть $f(x) > f(y)$, а для любой точки $z \notin R$ найдется такая точка $x \in R$, что $f(x) > f(z)$.

Ясно, что если мы вместо максимизации значения функции будем заниматься поисками наиболее предпочтительной точки в множестве M в условиях линейного отношения предпочтения (см. § 2) на этом множестве, то эти формулировки останутся эквивалентными. Но если отношение предпочтения не линейно, а носит более сложный характер, то приведенные формулировки уже перестают быть эквивалентными.

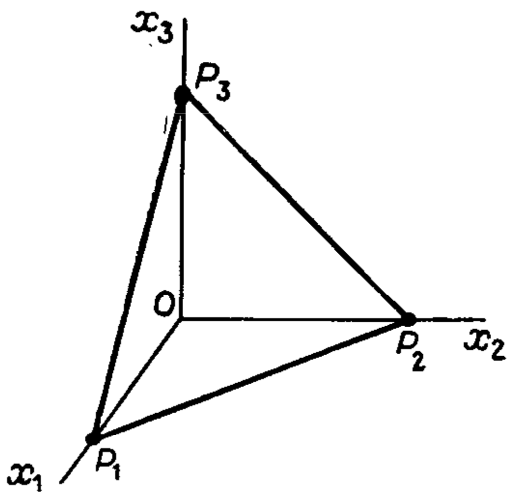

Рис. 1.

Рассмотрим, например, трехмерное евклидово пространство. Его точками являются тройки вещественных чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$. Возьмем в качестве множества M треугольник $P_1P_2P_3$ с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ (см. рис. 1).

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ — две точки этого треугольника. Положим $x \succ y$ и будем говорить, что точка x предпочтительнее, чем точка y, если выполняется хотя бы одна из следующих троек неравенств:

$$x_1 + x_2 \leqq {}^2/_3, \quad x_1 > y_1, \quad x_2 > y_2, \tag{1}$$

или

$$x_1 + x_3 \leqq {}^2/_3, \quad x_1 > y_1, \quad x_3 > y_3, \tag{2}$$

или, наконец,

$$x_2 + x_3 \leqq {}^2/_3, \quad x_2 > y_2, \quad x_3 > y_3. \tag{3}$$

Наглядная интерпретация такого понимания предпочтения разбирается в § 5 этого введения, а также в § VIII.4 книги.

Рассмотрим теперь три задачи:

а) найти точки x, каждая из которых более предпочтительна, чем какая-либо другая точка y из M:

$$x \succ y \quad (y \in M)$$

(очевидно, одинаково предпочтительных точек в рассматриваемых условиях не бывает);

б) найти такие точки x, что любое отклонение от x в пределах M не приводит к более предпочтительным точкам;

в) найти такое множество точек R, что для произвольных $x, y \in R$ не может быть $x \succ y$, а какова бы ни была точка $z \notin R$, найдется такая точка $x \in R$, что $x \succ z$.

Эти задачи в применении к исследованию предпочтительности точек в смысле своих формулировок полностью соответствуют приведенным выше трем задачам о нахождении экстремума функции f. Однако они уже не являются эквивалентными.

Действительно, задача а) вовсе не имеет решения. В самом деле, возьмем произвольную точку $x = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть для определенности x_3 — отличная от нуля координата этой точки. Тогда у точки

$$y = (x_1 + x_3/2,\ x_2 + x_3/2,\ 0)$$

две координаты больше соответствующих координат точки x. Поэтому не может быть $x \succ y$.

Решение задачи б) состоит из единственной точки $(^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$.

В самом деле, пусть $y = (y_1, y_2, y_3) \succ x$. По определению отношения предпочтения это значит, что либо

$$y_1 + y_2 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > {}^1/_3, \quad y_2 > {}^1/_3,$$

либо

$$y_1 + y_3 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > {}^1/_3, \quad y_3 > {}^1/_3,$$

либо

$$y_2 + y_3 \leqq {}^2/_3, \quad y_2 > {}^1/_3, \quad y_3 > {}^1/_3.$$

Но ни одна из этих троек неравенств, очевидно, не совместна.

Значит, $(^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$ является искомой точкой. Покажем, что иных точек с этим свойством нет. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$. Пусть для определенности x_3 — наибольшая из координат этой точки. Тогда, очевидно, $x_3 > {}^1/_3$, так что $x_1 + x_2 < {}^2/_3$. Возьмем теперь столь малое $\varepsilon > 0$, что

$$x_1 + x_2 + 2\varepsilon \leqq {}^2/_3, \quad x_3 - 2\varepsilon > 0,$$

и положим

$$x_1 + \varepsilon = y_1, \quad x_2 + \varepsilon = y_2, \quad x_3 - 2\varepsilon = y_3.$$

Мы получаем

$$y_1 + y_2 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > x_1, \quad y_2 > x_2,$$

т. е. $y \succ x$.

Решим, наконец, задачу в). Возьмем для этого точку $O=(^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$ и соединим ее с серединами всех трех сторон треугольника $P_1P_2P_3$, т. е. с точками $K=(^1/_2, {}^1/_2, 0)$, $L=(^1/_2, 0, {}^1/_2)$ и $M=(0, {}^1/_2, {}^1/_2)$, как это показано на рис. 2. Объединение трех отрезков OK, OL и OM обозначим через R. Покажем, что множество R является искомым.

Возьмем некоторую точку $x=(x_1, x_2, x_3)$, для которой $x_1+x_2 \leqq {}^2/_3$. Это значит, что точка x находится в треугольнике ABP_3. Отношение $x_1 > y_1$ означает, что точка $y=(y_1, y_2, y_3)$ расположена дальше от вершины P_1, чем x, т. е. что она находится в трапеции CDP_2P_3. Точно так же $x_2 > y_2$ означает, что y находится в трапеции EFP_3P_1. Таким образом, для всех y, лежащих в параллелограмме $CxFP_3$ (считая, что стороны Cx и xF параллелограмму не принадлежат), $x \succ y$.

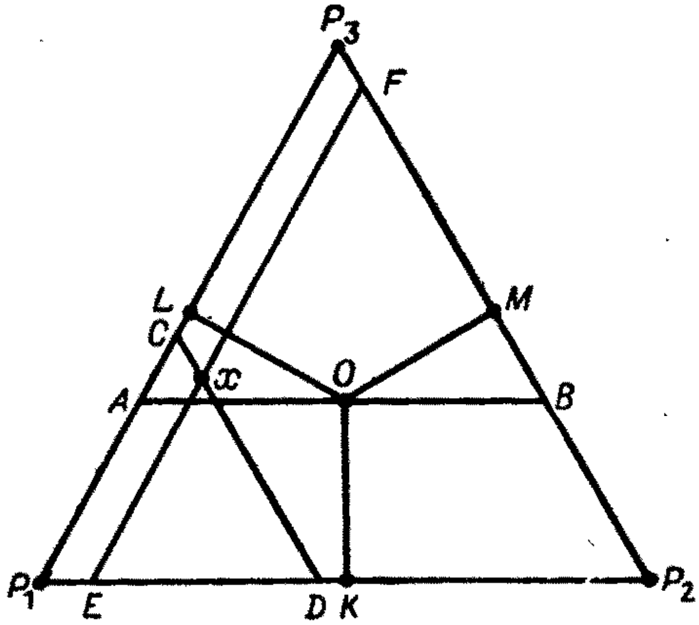

Рис. 2.

Построив такие параллелограммы из всех точек, лежащих на отрезках LO и OM, мы «заметем» весь четырехугольник OMP_3L. Значит, для каждой точки y из этого четырехугольника (за исключением точек на ломаной LOM, т. е. точек, принадлежащих R) найдется такое $x \in R$, что $x \succ y$. Ввиду симметрии всей картины, такое $x \in R$ найдется и вообще для каждой точки треугольника, не принадлежащей R.

Вместе с тем ни одна из точек R в такой параллелограмм не попадет. Следовательно, для $x, y \in R$ отношение $x \succ y$ невозможно.

Мы видим, что незначительные различия в формулировках оптимальности для традиционных экстремальных задач превращаются в существенно разные концепции оптимальности для задач более широкого типа. Это показывает, в частности, что вопрос о формализации понятия оптимального решения не может быть решен в рамках теории игр однозначно. Более того, оказывается, что для одних классов игр естественно принимать одни принципы оптимальности, а для других — совсем иные и даже противоречащие первым.

Например, читатель может непосредственно обратиться к примеру VII. 1.4 (дилемма заключенного). В этой игре участвуют два игрока, которые одновременно являются как коалициями действия, так и коалициями интересов. Стратегиями первого игрока являются строки матрицы, а стратегиями второго — ее столбцы. Пара чисел, написаная в каждой из четырех клеток матрицы, представляет собой выигрыш первого и второго игроков. Здесь выбор игроками их первых стратегий оптимален в том смысле, что оба они получают достаточно большие выигрыши. Вместе с тем никакая взаимная договоренность игроков выбирать именно первые стратегии не может считаться устойчивой, так как каждый нарушивший ее игрок получает от этого нарушения больший выигрыш. Наоборот, выбор игроками своих вторых стратегий приводит к устойчивой ситуации, но выигрыши игроков в ней малы.

§ 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР

Формальное определение игры, приведенное в § 2, оставляет весьма широкую свободу выбора конкретных возможностей для компонент, составляющих игру. Налагая на эти компоненты те или иные ограничения, мы можем получать различные классы игр.

В качестве первого классификационного признака возьмем множество коалиций интересов $\mathfrak{K}_u$. Если это множество пусто, то конфликт вырождается в явление, в исходах которого никто не заинтересован. Математические модели такого рода явлений составляют содержание традиционной описательной математики.

Если множество $\mathfrak{K}_u$ состоит из единственной коалиции интересов, то мы также утрачиваем конфликт в обычном смысле этого слова, а имеем дело с явлением, в котором единственная заинтересованная сторона стремится выбрать наиболее предпочтительнvю для себя ситуацию. Математическая трактовка этого круга вопросов сводится к разного рода экстремальным задачам, классическим, как, например, решаемые в дифференциальном или вариационном исчислениях, или современным, которые составляют предмет различных отраслей оптимального программирования (линейного, дискретного, динамического, стохастического программирования и т. д.).

Собственно теория игр начинается тогда, когда множество $\mathfrak{K}_u$ насчитывает не менее двух заинтересованных сторон. Далее мы будем все время считать, что имеем дело с этим случаем.

Следующим признаком, по которому естественно провести дальнейшую классификацию игр, является количество коалиций действия.

Прежде всего совершенно ясно, что рассмотрение игр с пустым множеством коалиций действия лишено смысла: здесь множество ситуаций состоит не более чем из одного элемента и вопрос об отношениях предпочтения вообще не возникает.

Если же в игре имеется хотя бы одна (и даже только одна) коалиция действия K, то исследование игры становится содержательным. В этом случае имеется единственное множество стратегий S_K, а множество всех ситуаций является его подмножеством: $S \subset S_K$. Поэтому рассмотрение игры можно начинать с этого множества ситуаций, считая их стратегиями единственной коалиции действия. Поскольку для таких игр стратегии совпадают с ситуациями, можно применительно к ним термина «стратегия» не употреблять вовсе. В связи с этим такого рода игры часто принято называть нестратегическими. К числу нестратегических игр относятся кооперативные игры, рассматриваемые в § VIII. 2 — VIII. 4 и в гл. IX, их обобщения, описываемые в гл. X, а также так называемые арбитражные схемы (§ VII. 2), теория угроз (§ VII. 3) и схемы рыночного типа (одна из них — модель рынка по Эджворту — разобрана в § VIII. 5).

Общая схема нестратегической игры состоит в следующем. Некоторое действующее начало (единственная коалиция действия) способно породить любую ситуацию из заранее заданного множества. Заинтересованные начала (коалиции интересов) на основании имеющихся для них отношений предпочтения для ситуаций предъявляют к ситуациям те или иные требования. Совокупность этих требований имеет значение принципа оптимальности: ситуация, удовлетворяющая им, называется оптимальной. После этого реализуется любая из оптимальных ситуаций.

За иллюстрацией обратимся к примеру из § 4. Очевидно, в этом примере мы имеем дело с нестратегической игрой. Так как во всех ситуациях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

эти ситуации естественно понимать как дележи суммы, равной 1, между тремя индивидуумами. Можно считать, что в этой игре имеются три коалиции интересов: K_{12}, K_{13} и K_{23} (причины такой нумерации коалиций интересов станут ясны из дальнейшего).

Будем считать, что дележ-ситуация x предпочтительнее дележа-ситуации y для коалиции K_{12}, если выполняется тройка неравенств (1); x предпочтительнее y для K_{13}, если выполняется (2) и, наконец, x предпочтительнее y для K_{23}, если выполняется (3).

Такое представление о предпочтениях оказывается вполне наглядным, если принять, что в рассматриваемой игре имеются три игрока: 1, 2 и 3, а x_1, x_2, x_3 — суммы, которые эти игроки получают в ситуации $x = (x_1, x_2, x_3)$. Таким образом, неравенства (1) касаются игроков 1 и 2, неравенства (2) — игроков 1 и 3, а неравенства (3) — игроков 2 и 3. Это естественно понимать так, что коалиция K_{12} состоит из игроков 1 и 2, K_{13} — из игроков 1 и 3, а K_{23} — из игроков 2 и 3.

Ясно, что каждый из игроков стремится увеличить свой выигрыш, т. е. максимизировать значение соответствующей координаты. Предположим, однако, что мнение каждого из игроков в отдельности не имеет значения, но их пары составляют коалиции интересов, определяющие отношения предпочтения для ситуаций.

Выясним смысл отношения предпочтения $\succ$ в том случае, когда это предпочтение проявляется как предпочтение для коалиции K_{12}, т. е. когда оно описывается неравенствами (1).

Возьмем первое из этих неравенств:

$$x_2 + x_2 \leqq {}^2/_3.$$

Оно означает, что для того, чтобы коалиция K_{12} могла сравнивать дележ x с каким-либо другим дележом, необходимо, чтобы суммарная доля ее членов была не слишком большой, именно, не превосходила ${}^2/_3$. Это число ${}^2/_3$ можно понимать как сумму, получение которой коалиция K_{12} может себе обеспечить при любых обстоятельствах. Поэтому если ей будет предложен дележ x, в котором $x_1 + x_2 > {}^2/_3$, то ей остается только сразу согласиться на такое предложение.

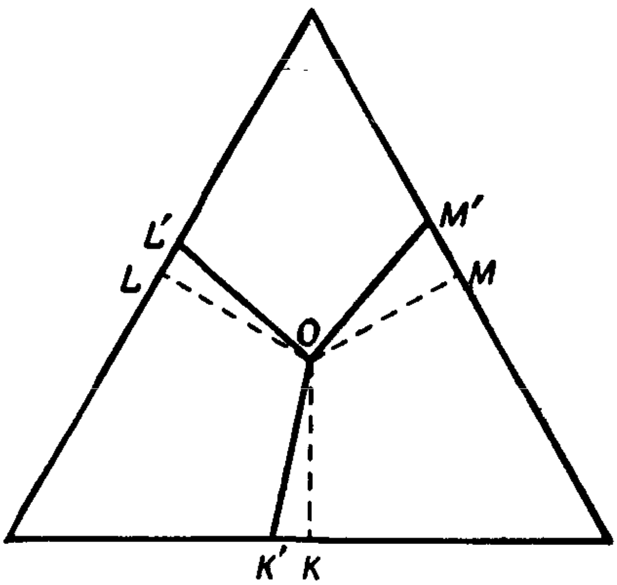

Рис. 3.

Выполнение оставшихся двух неравенств из (1)

$$x_1 > y_1, \quad x_2 > y_2$$

достаточно прозрачно и означает, что в ситуации, предпочитаемой коалицией K_{12}, каждый из членов коалиции (игроков 1 и 2) должен получить больше, чем в альтернативной ситуации. Описанный подход к вопросу должен носить нормативный характер, т. е. должен в каждом случае указывать, какая именно ситуация является оптимальной. Однако как раз в этом отношении он страдает известной неполнотой.

Во-первых, как уже отмечалось выше, коалиции интересов могут придерживаться весьма разнообразных принципов оптимальности (примеры см. в § 4, а также в гл. VIII и IX). Это является одним из источников множественности ответов на вопрос об оптимальной ситуации.

Во-вторых, само решение может оказаться неединственным. Так, в примере из § 4 в задаче в) наряду с приведенным решением R существуют и другие, скажем, получаемые в результате произвольного незначительного сдвига прямолинейных отрезков, выходящих из центра треугольника ситуаций (см. рис. 3). В связи с этим возникает вопрос о выборе из множества всех оптимальных решений некоторого одного (в каком-то смысле «наиболее оптимального»).

В-третьих, каждое отдельное решение может состоять из большого числа ситуаций. Пример тому мы уже видели. Это опять-таки порождает вопрос о таком дальнейшем уточнении принципа оптимальности, чтобы из полученного решения выбрать некоторую единственную ситуацию.

Наконец, в-четвертых, решение, определяемое некоторым принципом оптимальности, может и не существовать, как, например, в задаче а) из § 4. Это означает, что выбранный принцип оптимальности, являющийся на первый взгляд достаточно разумным, может тем не менее противоречить условиям конфликта, также достаточно естественным.

Нестратегическим играм противостоят игры, в которых участвует более одной коалиции действия. Эти игры называются стратегическими. В большинстве работ по теории игр рассматриваются такие стратегические игры, в которых множества коалиций действия и коалиций интересов совпадают (как те, так и другие коалиции называются в этом случае игроками), множество ситуаций совпадает с декартовым произведением множеств стратегий: $S = \prod_{K \in \mathfrak{K}_\partial} S_K$, а отношения предпочтения (для игроков) определяются, как это указывалось в § 2, соответствующими функциями выигрыша. Такие игры называются бескоалиционными.

Из сказанного видно, что бескоалиционная игра может быть задана в виде системы

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I — множество игроков, S_i — множество стратегий игрока i ($i \in I$), а H_i — его функция выигрыша, т. е. функция, заданная на множестве всех ситуаций и принимающая вещественные значения. В даной книге рассматриваются только такие бескоалиционные игры, в которых число игроков равно 2. О более общем случае лишь бегло упоминается в § VIII. 1.

Важным частным случаем бескоалиционной игры является тот, когда число игроков равно двум (обычно полагают $I = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$), а значения их функций выигрыша в любой ситуации равны по величине и противоположны по знаку:

$$H_{\mathrm{I}}(s) = -H_{\mathrm{II}}(s). \tag{4}$$

Такие игры называются антагонистическими, или играми двух лиц с нулевой суммой (или, короче, нулевыми играми). Этому классу игр посвящены первые пять глав книги.

Бескоалиционные игры двух лиц, не являющиеся антагонистическими, рассматриваются в § VII. 1. Процесс протекания бескоалиционной игры можно представить себе следующим образом. Каждый из игроков независимо от остальных выбирает некоторую стратегию (перед тем, как это сделать, игроки могут, вообще говоря, вступать между собой в переговоры и заключать соглашения; однако ни те, ни другие не являются обязывающими; последнее в сущности и означает независимость выбора игроками стратегий). После того как в результате выборов сформировалась некоторая ситуация, каждый игрок получает выигрыш, равный значению своей функции выигрыша в этой ситуации.

Основным изучавшимся до сих пор принципом оптимальности в бескоалиционных играх является стремление игроков к ситуациям равновесия, описываемым определением I. 4.1 (см. также определение VII. 1.1). Этот принцип оптимальности иногда называется *принципом осуществимости цели*, потому что только ситуации равновесия могут быть предметом предварительных договоров, которые будут соблюдаться. (Если в договоре зафиксирована неравновесная ситуация, то хотя бы один из игроков будет заинтересован в нарушении договора и ситуация фактически не будет достигнута.)

В случае антагонистической игры принцип осуществимости цели превращается в принцип *максимина* (см. § II. 4), а ситуации равновесия становятся *седловыми точками*.

Принцип осуществимости цели, подобно принципам оптимальности в нестратегических играх, страдает неполнотой: соответствующие ему решения игры (т. е. ситуации равновесия) для многих игр не существуют; вместе с тем многие игры имеют и более одного решения. Отсутствие у игр решений достаточно успешно преодолевается введением так называемых «смешанных стратегий» (см. § II. 3), преодоление же множественности решений является важной и нерешенной проблемой.

§ 6. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИГР

В соответствии с приведенным в § 1 определением теории игр она является теорией математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта (а также в условиях неопределенности). Поэтому вопросы, связанные с оптимальным поведением сторон в конфликтах, с желательными исходами конфликтов, являются основными в теории игр.

Непосредственных вопросов такого рода три.

1) Какими принципами оптимальности следует руководствоваться при рассмотрении конфликтов того или иного типа? Иначе говоря, в чем состоит (оптимальное) решение той или иной игры?

2) Реализуем ли применительно к данному классу игр выбранный для него принцип оптимальности? Формально этот вопрос сводится к существованию у игр из заданного класса тех решений, которые выбранным принципом квалифицируются как оптимальные.

3) В чем состоит применение выбранного принципа оптимальности к данной игре (или к данному классу игр)? Ответом на этот вопрос должно служить нахождение решения игры в том же смысле слова, в каком принято говорить о нахождении решения применительно к любой математической задаче.

Большинство выполненных работ по теории игр связано с ответами на эти вопросы. В соответствии с этим им посвящены почти все материалы, вошедшие в состав данной книги. Немногие исключения касаются естественного обобщения третьего из сформулированных вопросов, именно, установления свойств решений игр, принадлежащих некоторому классу. Таковы теоремы I.4.5 и IV.4.2 (они имеют вид типичных теорем существования; однако в действительности в них доказывается не просто существование ситуаций равновесия, а существование ситуаций равновесия в чистых стратегиях), а также рассуждения из § IV.5 и V.1.

Факт решения игры в смысле некоторого принципа оптимальности можно понимать двояко: как нахождение хотя бы одного из решений и как перечисление всех решений (разумеется, соответствующих данному принципу оптимальности). Сложность второй задачи по сравнению с первой нередко выходит за пределы чисто технических трудностей и приобретает принципиальный характер. Так, автор в примере IV.6.3, указывая одно из решений игры и намечая путь получения дальнейших ее решений, даже не ставит своей целью описания всех решений игры.

В случае антагонистической игры все решения являются в известном смысле «взаимозаменяемыми» (точный смысл этого утверждения содержится в формулировке теоремы II.1.2). Поэтому в таких играх нахождение одного из решений для практических целей достаточно. Однако в общем случае это далеко не так, и примеры VII.1.3 и VIII.4.5 являются в этом отношении достаточно убедительными.

Все перечисленные вопросы по существу связаны с исследованием отдельных игр. Однако для математики — особенно для современной — характерен переход от изучения изолированных объектов к совместному рассмотрению целых систем однотипных объектов и операций над ними, переводящих одни объекты в другие. Так, например, возникновение математического анализа связано с переходом от описаний свойств функций (в том числе их дифференциальных и интегральных свойств) к построению дифференциального и интегрального исчислений, а появление функционального анализа — с введением в рассмотрение функциональных пространств.

Теория игр также идет по этому пути. В ней используются разного рода редукции одних игр к другим, в том или ином смысле более просто устроенным. В качестве примеров можно указать на сведение многошаговых игр к матричным (см. гл. V), а также на введение (0, 1)-редуцированной формы кооперативных игр (см. теорему VIII. 3.6). Простейшими исчислениями игр можно в известном смысле считать игры на выживание, стохастические, рекурсивные и дифференциальные игры, описанные в § V. 2 — V. 5. Каждая из игр этих классов представляет собой семейство однотипных игр с фиксированным начальным состоянием. Процесс многошаговой игры оказывается определенным образом устроенной системой переходов от одной такой игры к другой.

Дальнейшее развитие этого круга вопросов выходит за рамки предлагаемого элементарного курса.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже в течение нескольких лет ощущается заметная потребность в книге, всесторонне освещающей основные аспекты теории игр (как двух лиц, так и n лиц) с математической точки зрения. Я надеюсь, что настоящая книга в какой-то мере восполнит этот пробел.

Можно считать, что главы I — V образуют первую часть книги (теория игр двух лиц), а следующие пять глав — ее вторую часть (теория игр n лиц). Эти две части не зависят одна от другой и могут рассматриваться как отдельные односеместровые курсы. Подобным же образом можно построить общий элементарный курс (с теоретической ориентировкой), взяв только главы I, II, VI, VIII и IX. Так мог бы получиться хороший односеместровый цикл. Вообще, преподаватель может отобрать темы для курса по своему желанию, не испытывая особой необходимости обращаться к материалу оставшихся глав. Следует добавить, что большинство руководств по этому предмету охватывает вопросы, изложенные в главах II, III, VIII и IX.

При изложении материала я старался неизменно выдерживать математическую строгость. В то же время моим желанием было, особенно во второй части книги, дать, насколько это возможно, также и эвристическую интерпретацию математических рассуждений. Теория игр является, в конце концов, математическим описанием определенных социологических явлений; поэтому изложение, не связывающее математику с конкретными ситуациями, было бы поистине убогим.

При подборе материала для книги моей основной целью было преподнести теоретико-игровые идеи студентам, которые только приступают к самостоятельным занятиям. Поэтому я считал, что лучше всего было бы начать книгу с некоторых решенных задач. Это может дать изучающему приятное сознание того, что он имеет дело с завершенным вопросом; выражаясь фигурально, он получает нечто, на чем он сможет испробовать и свои зубы. С теорией игр двух лиц дело обстоит именно так. Я намеренно опустил некоторые стороны этой теории, особенно вопрос об информации в позиционных играх, — при чтении курса у меня неизменно возникало впечатление, что введение этих понятий не только не облегчает понимания основного материала, но скорее мешает ему, и лучше всего оставить этот вопрос для более углубленного освоения теории игр. Изучение теории полезности отложено до второй части книги с той же целью: эта теория является центральной при изучении игр n лиц, но для теории антагонистических игр она оказывается, вообще говоря, помехой.

Я думаю, что некоторые из рассматриваемых в книге вопросов появляются в систематическом изложении впервые. Это относится к дифференциальным играм [1]), к устойчивым множествам и к играм с континуумом игроков. Я изложил эти вопросы подробно, хотя и опуская некоторые наиболее сложные стороны каждого из них. Включение их в данное изложение должно дать изучающему представление обо многих новых направлениях в теории игр.

Для плодотворного чтения этой книги необходимо, конечно, некоторое знание математического анализа и элементарной теории вероятностей. Знание абстрактной теории меры, естественно, было бы полезно, но никоим образом не является необходимым. Наконец, знакомство со свойствами выпуклых множеств и функций определенно необходимо. Однако обычно такие курсы в большинстве университетов не читаются, и поэтому я включил наиболее важные элементы этой теории в приложение в конце книги. Точно так же включены без доказательств теоремы Брауэра и Какутани о неподвижной точке, которые очень полезны во многих разделах теории игр.

Задачи в большинстве случаев взяты из литературы; их значение состоит в том, что они дают контрпримеры для различных правдоподобных предположений или же наброски доказательств некоторых важных теорем, которые я не стал включать полностью. Некоторые задачи являются просто элементарными упражнениями.

Я попытался сделать библиографию достаточно подробной, с тем чтобы читатель мог легко выяснить из первоисточников, какие именно детали опущены мною при изложении тех или иных вопросов. Вместе с тем эта библиография не претендует на полноту; более подробные библиографические списки были опубликованы ранее, особенно в прекрасной книге Р. Льюса и Х. Райфы «Игры и решения» (ИЛ, 1961. — *Ред.*) и в сборнике Annals of Mathematics Studies № 40.

Мне хочется поблагодарить профессора Альберта Таккера (Принстонский университет) и профессора Джона Исбелла (Кейсовский технологический институт) за весьма ценные замечания и предложения по улучшению первоначального текста. Некоторые примеры и упражнения были включены по их рекомендации.

Г. Оуэн

---

[1]) Это утверждение автора, по-видимому, нуждается в известных коррективах — достаточно напомнить книгу Р. Айзекса «Дифференциальные игры» («Мир», 1967). — *Прим. ред.*

Глава I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИГРЫ

I. 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

С общим представлением об игре каждый из нас хорошо знаком в связи с салонными играми. Такая игра начинается из некоторого данного положения и состоит из последовательности личных ходов, при каждом из которых один из игроков совершает выбор среди нескольких возможностей. Некоторые ходы могут, кроме того, быть случайными (таковы, например, бросание кости или тасование колоды карт).

Примерами игр такого типа являются шахматы, в которых совсем нет случайных ходов (кроме разыгрывания того, кто будет играть белыми), бридж, в котором случай играет значительно бо́льшую роль, но все еще важно искусство игроков, и рулетка, являющаяся полностью игрой случая, в которой искусство не играет никакой роли.

Примеры бриджа и шахмат позволяют указать другой важный элемент игры. Именно, в шахматной игре каждый игрок знает любой ход, который был сделан до этого момента, в то время как в бридже это знание у игрока обычно весьма неполно. Таким образом, в некоторых играх игрок не в состоянии определить, какой из нескольких возможных ходов был фактически сделан, будь то ход одного из его противников или случайный ход. На практике это означает, что, когда игрок делает свой ход, он не знает точной позиции игры и должен делать ход с учетом того, что имеется несколько возможных позиций.

В конце игры игроки обычно получают какой-либо выигрыш (он может быть в форме денег, престижа или иного удовлетворения), который зависит от протекания игры. Его можно представить себе как функцию, которая каждой «окончательной позиции» игры ставит в соответствие определенный выигрыш.

I. 2. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ[1]

В наше общее представление об игре входят, таким образом, три элемента: 1) чередование ходов, которые могут быть как личными, так и случайными, 2) возможная недостаточность информации и 3) функция выигрыша.

---

[1]) В оригинале games in extensive form, т. е. «игры в развернутой форме». — *Прим. перев.*

Определим прежде всего *топологическое дерево*, или *дерево игры*, как конечную совокупность узлов, называемых *вершинами*, соединенных линиями, называемыми *ребрами*, и притом так, что получается связная фигура, не содержащая простых замкнутых кривых. Отсюда следует, что для любых двух данных вершин A и B существует единственная последовательность ребер и вершин, соединяющая A с B.

Итак, мы получаем следующее определение.

I.2.1. Определение. Пусть Γ — топологическое дерево с выделенной вершиной A. Будем говорить, что вершина C *следует* за вершиной B, если последовательность ребер, соединяющая A с C, проходит через B. Будем говорить, что C следует за B *непосредственно*, если C следует за B и, кроме того, существует ребро, соединяющее B с C. Вершина X называется *окончательной*, если за X не следует ни одной вершины.

I.2.2. Определение. *Под позиционной игрой n лиц* понимается следующее:

(α) топологическое дерево Γ с выделенной вершиной A, называемой *начальной позицией игры*;

(β) функция, называемая *функцией выигрыша*, которая ставит в соответствие каждой окончательной позиции (т. е. окончательной вершине) дерева Γ некоторый n-вектор;

(γ) разбиение множества всех неокончательных позиций (т. е. неокончательных вершин) дерева Γ на $n+1$ множеств S_0, S_1, ..., S_n, называемых *множествами очередности*;

(δ) вероятностное распределение для каждой позиции из S_0 на множестве непосредственно следующих за ней позиций;

(ε) подразбиение множества S_i для каждого $i = 1, \ldots, n$ на подмножества S_i^j, называемые *информационными множествами*; при этом позиции из одного и того же информационного множества имеют одинаковое число непосредственно следующих за ними позиций, т. е. *альтернатив*, и никакая позиция не может следовать за другой позицией из того же самого информационного множества;

(ζ) для каждого информационного множества S_i^j множество индексов I_i^j вместе с взаимно однозначными отображениями множества I_i^j на множества альтернатив каждой позиции из S_i^j.

Мы будем обозначать игру также через Γ.

Здесь перечислены все элементы игры: условие (α) устанавливает, что имеется начальная позиция; (β) задает функцию выигрыша; (γ) разделяет множество неокончательных позиций на позиции с ходом случая (S_0) и личные позиции, соответствующие каждому из n игроков: (S_1, ..., S_n) [1]; (δ) задает схему рандоми-

[1]) В позиции из S_i очередь хода принадлежит игроку i. — *Прим. перев.*

зации в каждой позиции случая; (ε) разбивает позиции каждого игрока на «информационные множества»: игрок знает лишь, в каком информационном множестве он находится, но не знает, в какой именно позиции этого множества [1]).

I. 2.3. Пример. В игре в *орлянку* (рис. I. 2.1) игрок I выбирает «решетку» (Р) или «герб» (Г). Игрок II, не зная выбора игрока I, также выбирает «решетку» или «герб». Если оба противника совершают одинаковый выбор, то игрок II выигрывает единицу у игрока I; в противном случае игрок I выигрывает единицу у игрока II. На дереве игры (рис. I. 2.1) векторы при окончательных позициях представляют функцию выигрыша; число при каждой из остальных позиций означает игрока, которому принадлежит очередь хода в этой позиции. Затененная область охватывает позиции из одного информационного множества.

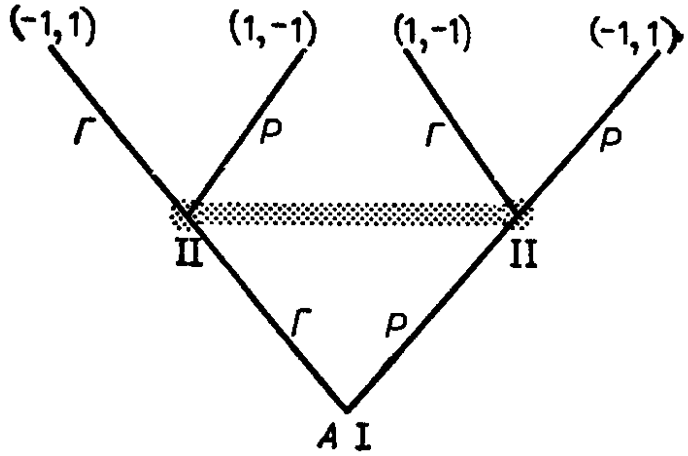

Рис. I. 2.1.

I. 2.4. Пример. Каждому из двух игроков сдается полная масть карт (тринадцать карт). Третья масть тасуется, и затем карты этой третьей масти открываются одна за другой. Каждый раз, когда карта открыта, оба игрока по своему желанию открывают одновременно какую-то одну из своих карт; тот, кто открыл старшую карту, «выигрывает» третью. (Если оба игрока открыли карты одинакового достоинства, никто не выигрывает.) Так продолжается до тех пор, пока все три масти не будут исчерпаны. После этого каждый игрок подсчитывает количество очков на картах, которые он «выиграл»; «счет» ведется по разности выигрышей игроков.

В случае тринадцати карт каждой масти дерево такой игры слишком велико для того, чтобы его можно было привести здесь. Мы изобразили лишь часть дерева для аналогичной игры с мастями из трех карт (рис. I. 2.2).

В этой игре есть один случайный ход, тасование, упорядочивающее карты одним из шести возможных способов, каждый из которых имеет вероятность $1/6$. После этого ходы соответствуют двум

[1]) (ζ) вводит одинаковые индексы на множествах альтернатив всех позиций из одного информационного множества; тем самым каждый индекс определяет по одной альтернативе в каждой позиции данного информационного множества. Ход переводит игру из некоторой позиции в какую-то ее альтернативу. — *Прим. перев.*

игрокам I и II, пока игра не кончится. Мы изобразили часть дерева игры, содержащую начальную позицию, несколько ветвей и четыре окончательные позиции. Остальные ветви подобны изображенным.

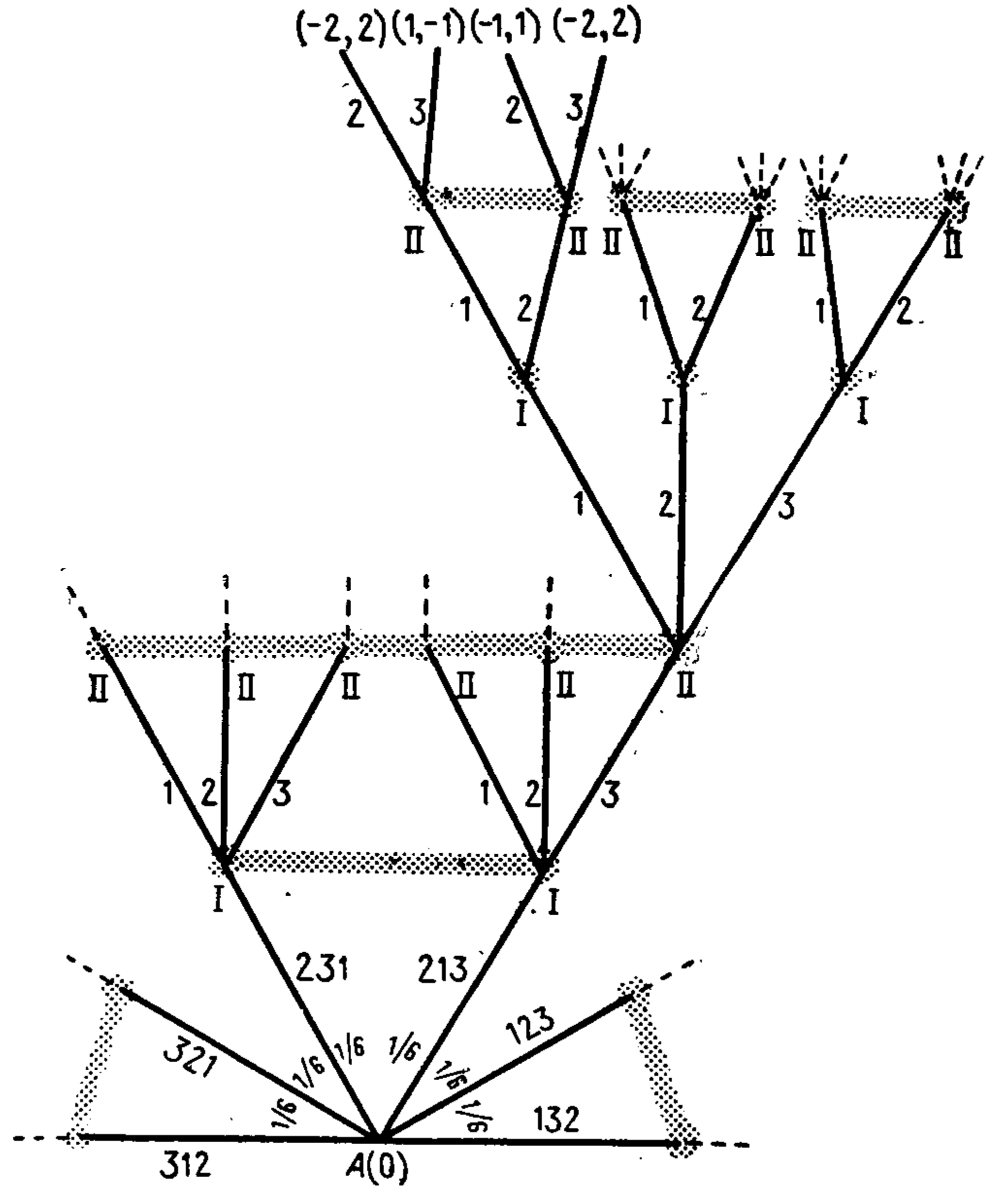

Рис. I. 2.2.

По поводу информации сформулируем следующее определение.

I. 2.5. Определение. Говорят, что *игрок i имеет полную информацию* в игре Г или что Г есть игра *с полной информацией для игрока i*, если каждое его информационное множество S_i^j состоит из одного элемента. Говорят, что Г есть игра *с полной информацией*, если в Г каждый игрок имеет полную информацию.

Например, шахматы и шашки — это игры с полной информацией, а бридж и покер — нет.

I. 3. СТРАТЕГИИ. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ИГРЫ

В интуитивном понимании стратегия есть некоторый план разыгрывания игры. Можно считать, что игрок говорит себе: «Если случится то-то и то-то, то я буду действовать так-то и так-то». Приведем точное определение.

I. 3.1. Определение. *Стратегия* игрока i есть некоторая функция, которая ставит в соответствие каждому информационному множеству S_i^j этого игрока некоторый индекс из I_i^j.

Множество всех стратегий игрока i мы будем обозначать через Σ_i.

Вообще говоря, мы привыкли к тому, что игрок принимает решение о своем ходе в игре только на несколько ходов вперед, а обычно — даже только в тот момент, когда он должен сделать данный ход. На практике это так и должно быть ввиду того, что в таких играх, как шахматы или покер, число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия, учитывая все возможные обстоятельства. Однако с чисто теоретической точки зрения можно абстрагироваться от такого практического ограничения и предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом случае. Таким образом, фактически мы предполагаем, что каждый игрок выбирает некоторую стратегию еще до начала игры.

Поскольку это так, остается лишь произвести случайные ходы. Более того, все случайные ходы можно объединить в один ход, результат которого вместе с выбранными стратегиями определяет исход игры[1]).

В действительности нас, так же как и участников игры, интересует, какие из стратегий являются наилучшими с точки зрения максимизации доли каждого игрока в выигрыше (а именно, игрок i стремится максимизировать i-ю компоненту функции выигрыша). Так как, однако, результаты случайных ходов известны только в вероятностном смысле, естественно рассматривать математическое ожидание функции выигрыша, определенное в случае, когда игроки используют данный n-набор стратегий, т. е. данную *ситуацию*. Поэтому для описания математического ожидания функции выигрыша при условии, что игрок i применяет стратегию $\sigma_i \in \Sigma_i$, можно употребить следующее обозначение:

$$\pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = (\pi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \pi_2(\ldots), \ldots, \pi_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)).$$

Исходя из этого, функцию $\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ на множестве всех возможных значений переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ можно выразить либо

---

[1]) Иными словами, определяется последовательность ребер и вершин от начальной позиции до некоторой окончательной позиции, т. е. определяется *партия* и выигрыш в ней. — *Прим. перев.*

в форме соотношения, либо в виде n-мерной таблицы n-векторов. (В случае $n=2$ эта запись сводится к матрице, элементами которой являются пары вещественных чисел.) Такая n-мерная таблица называется *нормальной формой* игры Г.

I. 3.2. Пример. В игре в орлянку (см. пример I. 2.3) каждый игрок имеет две стратегии: «решетку» и «герб». Нормальной формой этой игры является матрица

	Р	Г
Р	(−1, 1)	(1, −1)
Г	(1, −1)	(−1, 1)

(здесь каждая строка представляет стратегию игрока I, а каждый столбец — стратегию игрока II).

I. 3.3. Пример. Рассмотрим следующую игру.

Случайно выбирается целое число z с возможными значениями 1, 2, 3, 4 (каждое имеет вероятность 1/4). Игрок I, не зная результата этого хода, выбирает целое число x. Игрок II, не зная ни результата случайного хода, ни выбора игрока I, выбирает целое число y. Выигрыш определяется следующим образом:

$$(|y-z|-|x-z|,\ |x-z|-|y-z|),$$

т. е. целью является выбор числа, по возможности близкого к z.

В этой игре каждый игрок имеет четыре стратегии: 1, 2, 3, 4, так как от других целых чисел мало проку. Если, например, игрок I выбирает 1, а игрок II выбирает 3, то выигрыш будет равен (2, —2) с вероятностью 1/4, (0, 0) с вероятностью 1/4 и (—2, 2) с вероятностью 1/2. Ожидаемый выигрыш тогда равен $\pi(1, 3) = (-1/2, 1/2)$. Подсчитывая все значения $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$, мы получаем такую таблицу:

	1	2	3	4
1	(0, 0)	(−1/2, 1/2)	(−1/2, 1/2)	(0, 0)
2	(1/2, −1/2)	(0, 0)	(0, 0)	(1/2, −1/2)
3	(1/2, −1/2)	(0, 0)	(0, 0)	(1/2, −1/2)
4	(0, 0)	(−1/2, 1/2)	(−1/2, 1/2)	(0, 0)

I. 3.4. Определение. Игра называется *конечной*, если ее дерево содержит только конечное число вершин.

В этом смысле большинство салонных игр оказывается конечным. Шахматы, например, являются конечной игрой в силу того правила, что игра прекращается после некоторых последовательностей ходов.

Следует отметить, что в конечной игре каждый игрок имеет лишь конечное число стратегий.

I. 4. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ

I. 4.1. Определение. Пусть дана игра Γ; говорят, что ситуация (т. е. n-набор стратегий) $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *равновесна*, или что она является *ситуацией равновесия*, если для любого $i = 1, \ldots, n$ и для любого $\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ имеет место неравенство

$$\pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \hat{\sigma}_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \leqq \pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*).$$

Другими словами, ситуация равновесна, если ни один игрок не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки собираются придерживаться своих стратегий. В этом случае, если каждый игрок знает, как будут играть остальные, он имеет основание придерживаться той стратегии, которая соответствует этой ситуации равновесия; тем самым игра становится весьма устойчивой.

I. 4.2. Пример. Для игры в нормальной форме

	β_1	β_2
α_1	(2, 1)	(0, 0)
α_2	(0, 0)	(1, 2)

как (α_1, β_1), так и (α_2, β_2) являются ситуациями равновесия.

К сожалению, не каждая игра обладает ситуациями равновесия. Например, игра в орлянку (пример I. 3.2) такой ситуации не имеет.

Вообще, если игра не имеет ситуаций равновесия, то обычно некоторые игроки пытаются отгадать стратегии остальных участников, сохраняя собственные стратегии в тайне. Это наводит на мысль (и это действительно верно), что в играх с полной информацией ситуации равновесия существуют.

Чтобы доказать это утверждение, мы должны изучить вопрос о разложении игры.

Будем говорить, что игра Γ *разложима* в некоторой позиции X, если не существует информационных множеств, которые содержали бы позиции из следующих двух множеств одновременно: а) X и все следующие за ней позиции, б) остальные позиции дерева игры. В этом случае мы можем выделить подигру Γ_X, состоящую из X и всех следующих за ней позиций, и факторигру Γ/X, состоящую из всех оставшихся позиций плюс X, т. е. разложить игру Γ. Для факторигры позиция X будет окончательной; в качестве выигрыша здесь можно рассматривать Γ_X, т. е. выигрышем в этой позиции является партия[1]) подигры Γ_X.

Далее, как мы видели, стратегия для игрока i — это функция, область определения которой состоит из информационных множеств этого игрока. Если мы разложим игру в X, то сможем также разложить стратегию σ на две части: на $\sigma_{|\Gamma/X}$, являющуюся ограничением σ информационными множествами из Γ/X, и на $\sigma_{|\Gamma_X}$, являющуюся ограничением σ информационными множествами из Γ_X. Обратно, стратегия для Γ/X и стратегия для Γ_X могут быть объединены очевидным образом в стратегию для всей игры Γ.

I. 4.3. Теорема. *Пусть Γ разложена в X. Для $\sigma_i \in \Sigma_i$ поставим в соответствие позиции X (рассматриваемой как окончательная позиция для Γ/X) выигрыш*

$$\pi_X(\sigma_{1|\Gamma_X}, \sigma_{2|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X}).$$

В этом случае

$$\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \pi_{\Gamma/X}(\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X}).$$

Доказательство этой теоремы несложно и может быть предоставлено читателю в качестве упражнения. Коротко говоря, необходимо только проверить, что для каждого возможного исхода случайных ходов в конечном счете достигается одна и та же окончательная вершина как для исходной игры, так и для разложенной игры.

На основании этого мы можем доказать следующее утверждение.

I. 4.4. Теорема. *Пусть Γ разложена в X, и пусть $\sigma_i \in \Sigma_i$ таковы, что* а) $(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$ *есть ситуация равновесия для Γ_X и* б) $(\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X})$ *есть ситуация равновесия для Γ/X с выигрышем $\pi(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$, сопоставленным окончательной позиции X. Тогда $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ есть ситуация равновесия для Γ.*

Доказательство. Пусть $\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$. Так как $(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$ является ситуацией равновесия для Γ_X, мы имеем

$$\pi_i(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \hat{\sigma}_{i|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X}) \leqq \pi_i(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X}).$$

С другой стороны, в силу б) мы знаем, что если позиции X приписан выигрыш $\pi(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$, то

$$\pi_i(\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \hat{\sigma}_{i|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X}) \leqq \pi_i(\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X}).$$

---

[1]) См. примечание на стр. 29 и последующее рассуждение. — *Прим. перев.*

Далее, выигрыш (в данной ситуации) есть взвешенное среднее выигрышей в некоторых из окончательных позиций дерева. Следовательно, если выигрыш игрока i в данной окончательной позиции (X в нашем случае) уменьшается, то его ожидаемый выигрыш при любом выборе стратегий будет либо оставаться тем же, либо уменьшится. Поэтому, применяя теорему I. 4.3, мы получаем неравенство

$$\pi_i(\sigma_1, \ldots, \hat{\sigma}_i, \ldots, \sigma_n) \leqq \pi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

так что $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ является ситуацией равновесия.

Теперь мы можем доказать следующий результат.

I. 4.5. Теорема. *Любая конечная игра n лиц с полной информацией имеет ситуацию равновесия.*

Доказательство. Определим длину игры как наибольшее возможное число ребер, которые можно пройти прежде, чем попасть в окончательную позицию, т. е. наибольшее возможное число ходов до конца игры. Очевидно, что конечная игра имеет конечную длину. Доказательство проводится индукцией по длине игры.

Если Г имеет длину 0, теорема тривиальным образом справедлива. Если Г имеет длину 1, то не более чем один игрок имеет возможность сделать ход и он добивается равновесия, выбирая свою наилучшую альтернативу. Если игра Г имеет длину m, то она разлагается (ввиду того, что информация полная) на несколько подигр длины, меньшей m. По предположению индукции каждая из этих подигр имеет ситуацию равновесия; на основании теоремы I. 4.4 они образуют ситуацию равновесия для игры Г.

Задачи

1. Бесконечная нгра, даже с полной нnформацней, не обязательно имеет ситуацню равновесия.

а) Рассмотрим нгру двух лнц, в которой нгроки ходят поочередно и прн каждом ходе каждый игрок выбирает одну из двух цифр 0 и 1. Если при i-м ходе выбирается цифра x_i, то каждой партии игры соответствует число

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$$

из интервала [0, 1]. Тогда игрок I выиграывает единицу у игрока II, еслн $x \in S$, и пронграывает единицу, если $x \notin S$, где S — некоторое подмножество из [0, 1].

б) Каждый нгрок имеет ровно $2^{\aleph_0}$ стратегий, которые можно обозначнть, таким образом, соответственно через σ_β, τ_β для $\beta < \alpha$, где α — нанменьшее порядковое число, которому предшествует по крайней мере $2^{\aleph_0}$ порядковых чисел.

в) Пусть $\langle\sigma, \tau\rangle$ означает партию (или число x), получающуюся, еслн игроки выберут стратегии σ и τ соответственно. Для каждой стратегин σ игрока I игрок II имеет $2^{\aleph_0}$ стратегий τ, которые дадут различные значения для $\langle\sigma, \tau\rangle$. (Аналогично обстоит дело для каждой стратегии τ нгрока II.)

г) Можно построить (с использованием аксномы выбора) такое множество S, что для каждого σ_β существует τ_β с $\langle\sigma_\beta, \tau_\beta\rangle \notin S$, а для каждого τ_γ существует σ_γ с $\langle\sigma_\gamma, \tau_\gamma\rangle \in S$.

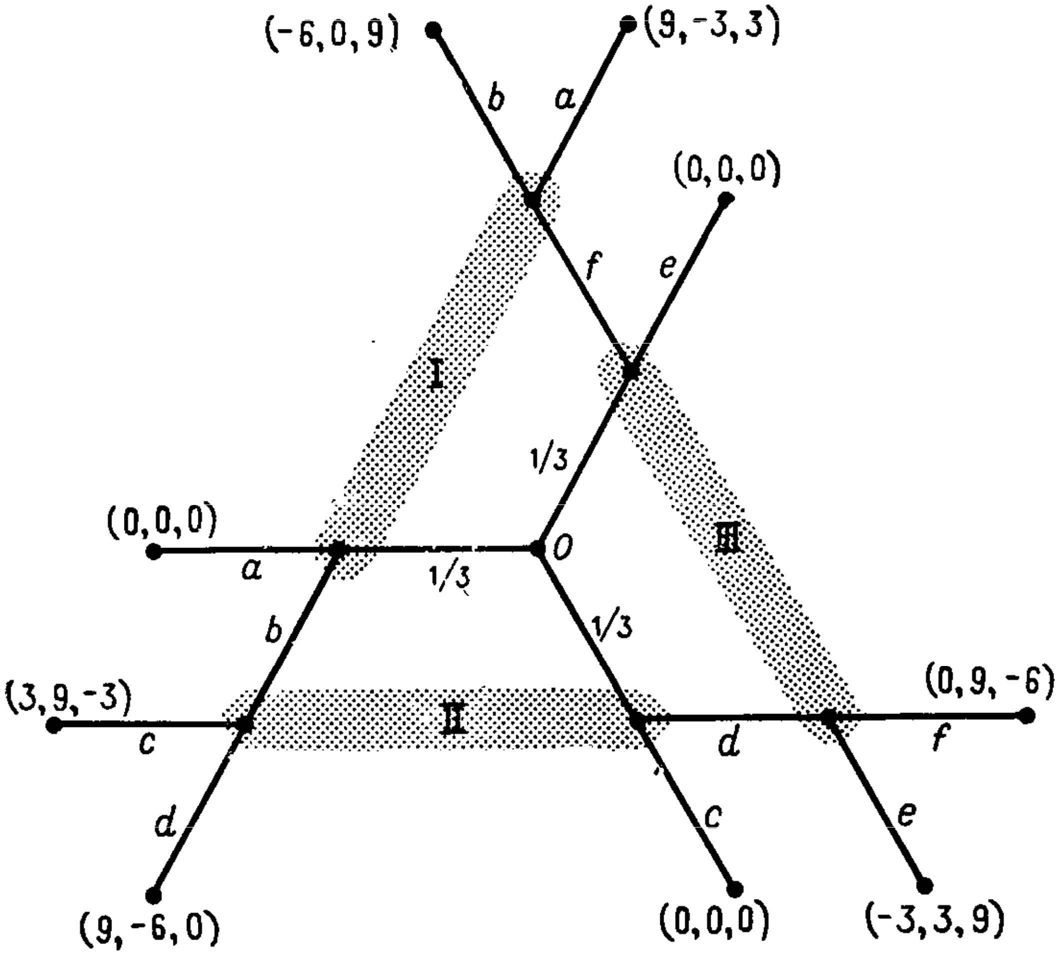

Рис. I. 3.1.

2. Построить нормальную форму для игры с деревом, изображенным на рис. I. 3.1. Игра начинается в позиции O (позиция случая); каждый из трех игроков имеет по одному информационному множеству с двумя позициями и с двумя альтернативами (обозначенными соответственно a и b, c и d, e и f) в каждой позиции.

Глава II

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

II. 1. ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

II. 1.1. Определение. Игра Г называется *игрой с нулевой суммой*, если в каждой окончательной позиции функция выигрыша $(p_1, \ldots, p_n)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0. \tag{2.1.1}$$

Вообще говоря, игра с нулевой суммой представляет собой замкнутую систему: все то, что кто-нибудь выиграл, должно быть кем-то проиграно. Большинство салонных игр является играми такого типа. Игры двух лиц с нулевой суммой называются *антагонистическими*, или *строго конкурентными*.

На основании условия (2.1.1) n-я компонента вектора выигрышей определяется остальными $n-1$ компонентами. В случае антагонистической игры можно просто задавать первую компоненту вектора выигрышей; вторая компонента обязательио равна первой с противоположным знаком. В этом случае назовем первую компоненту просто *выигрышем*, и это означает, что второй игрок отдает эту сумму первому.

Далее мы увидим, что антагонистическая игра отличается от остальных игр тем, что в ней нет никаких оснований для каких бы то ни было переговоров между игроками: в самом деле, если один выигрывает, то другой проигрывает. Смысл этого свойства виден из следующей теоремы.

II.1.2. Теорема. *Пусть* (σ_1, σ_2) *и* (τ_1, τ_2) — *две ситуации равновесия антагонистической игры. Тогда*

(i) (σ_1, τ_2) *и* (τ_1, σ_2) *также являются ситуациями равновесия и*

$$\text{(ii)}\quad \pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\sigma_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2). \tag{2.1.2}$$

Доказательство. Ситуация (σ_1, σ_2) равновесна. Следовательно,

$$\pi(\sigma_1, \sigma_2) \geqq \pi(\tau_1, \sigma_2).$$

С другой стороны, ситуация (τ_1, τ_2) также равновесна. Поэтому

$$\pi(\tau_1, \sigma_2) \geqq \pi(\tau_1, \tau_2).$$

Таким образом,

$$\pi(\sigma_1, \sigma_2) \geqq \pi(\tau_1, \sigma_2) \geqq \pi(\tau_1, \tau_2).$$

Но, аналогично,

$$\pi(\tau_1, \tau_2) \geqq \pi(\sigma_1, \tau_2) \geqq \pi(\sigma_1, \sigma_2),$$

и эти две системы неравенств доказывают равенство (2.1.2).

Далее, для любого $\hat{\sigma}_1$

$$\pi(\hat{\sigma}_1, \sigma_2) \leqq \pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2)$$

и для любого $\hat{\sigma}_2$

$$\pi(\tau_1, \hat{\sigma}_2) \geqq \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2).$$

Следовательно, (τ_1, σ_2) является ситуацией равновесия; аналогично, равновесна и ситуация (σ_1, τ_2).

Эта теорема не имеет места для других игр: так, в игре, описанной в примере I.4.2, (α_1, β_1) и (α_2, β_2) являются ситуациями равновесия, но выигрыши в них различны и, кроме того, ни (α_1, β_2) ни (α_2, β_1) ситуациями равновесия не будут.

II. 2. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Как мы видели, нормальная форма конечной антагонистической игры сводится к некоторой матрице A с числом строк, равным числу стратегий игрока I, и с числом столбцов, равным числу стратегий игрока II. Выигрыш — если игрок I выбирает i-ю стратегию, а игрок II выбирает j-ю стратегию — представляет собой элемент a_{ij} в i-й строке и j-м столбце этой матрицы.

Как выяснится далее, ситуация (пара стратегий) будет равновесной тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется *седловой точкой* (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз в другом).

II.2.1. Пример. Матрица игры

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет седловую точку во второй строке и втором столбце.

II.2.2. Пример. Матрица игры

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

не имеет седловых точек.

Предположим, что два игрока действительно участвуют в матричной игре. Выбирая стратегии, игрок I тем самым выбирает строку i, а игрок II выбирает столбец j. Выигрышем будет элемент a_{ij}. Так как таковой будет сумма, которую I получает от II, ясно, что игрок I будет стараться максимизировать a_{ij}, в то время как игрок II будет стараться его минимизировать. К сожалению, ни один из них не знает наверняка, какой будет стратегия противника, а это обычно имеет большое значение при решении вопроса о том, какую стратегию использовать.

Например, при игре в орлянку (см. пример I.3.2) можно представить себе, что игрок I рассуждает следующим образом: «Обычно игроки выбирают герб и потому II ожидает, что я выберу герб и выберет герб сам, так что я должен был бы выбрать решетку. Но, возможно, и игрок II рассуждает таким же образом. Он ожидает, что я выберу решетку, так что мне лучше бы выбрать герб. Но, возможно, так же рассуждает и игрок II, так что...». В этом случае игрок I никогда не сможет принять решение, при котором он чувствовал бы себя уверенно, и исход игры оказывается неопределенным.

Предположим теперь, что мы находимся в условиях игры из примера II. 2.1. В этой игре игрок I, наверное, решил бы применить либо первую, либо вторую стратегию, и можно было бы ожидать, что он рассуждает так: «Я должен был бы использовать либо первую, либо вторую стратегию, но если игрок II поймет это, он применит вторую стратегию, так что мне лучше использовать вторую стратегию». Даже если игрок II отгадает стратегию игрока I, то игроку I все равно лучше придерживаться ее! Таким образом, между этими двумя играми имеется огромная разница. В одной секретность важна, а в другой она не имеет никакого значения. Причина этого состоит, конечно, в том, что вторая игра имеет седловую точку.

II. 3. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Проведенный выше анализ показывает, как играть в матричную игру с седловой точкой, но не вносит никакой ясности в вопрос о том, каков наилучший выбор игрока в подавляющем большинстве игр, не имеющих седловых точек.

Предположим теперь, что мы играем в игру без седловой точки, например в игру

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Мы не можем сказать, что произойдет. Однако допустим, что наш противник не только ведет себя непредсказуемо, но и всеведущ: он будет правильно угадывать любое наше решение. В этом случае, если мы поставим себя на место игрока I, то будем использовать первую стратегию, при которой мы не можем выиграть меньше двух единиц, в то время как при второй стратегии мы выиграем только одну единицу. Этот гарантированный выигрыш по меньшей мере двух единиц есть наш «нижний выигрыш», который мы обозначим через

$$v'_{\mathrm{I}} = \max_i \{\min_j a_{ij}\}.$$

Если бы мы поставили себя на место игрока II, то выбрали бы (при тех же условиях) вторую стратегию, которая дала бы нам «верхний проигрыш» трех единиц. Обозначим этот верхний проигрыш через

$$v'_{\mathrm{II}} = \min_j \{\max_i a_{ij}\}.$$

Таким образом, для матричных игр мы имеем понятия нижнего выигрыша и верхнего проигрыша. Было бы нелепо ожидать, что нижний выигрыш игрока I превышает верхний проигрыш игрока II. И действительно, легко доказать, что

$$v'_{\mathrm{I}} \leqq v'_{\mathrm{II}}. \tag{2.3.0}$$

Доказательство этого неравенства элементарно и может быть предоставлено читателю. Если в нем имеет место равенство, то мы получаем седловую точку; если равенство не имеет места, то мы получаем игру без седловых точек. Для такой игры не определено, что же в действительности произойдет; можно лишь утверждать следующее: *игрок* I *не должен выиграть меньше, чем* v'_{I}; *игрок* II *не должен проиграть больше, чем* v'_{II}.

Если в игре без седловых точек мы раскроем противнику нашу стратегию, то лучшее, на что мы можем рассчитывать, есть или «нижний выигрыш» v'_{I}, или «верхний проигрыш» v'_{II} в зависимости от того, поставили ли мы себя на место игрока I или на место игрока II. Если же мы надеемся добиться лучшего, то не следует допускать того, чтобы противник знал нашу стратегию.

Это трудно осуществить, если мы выбираем свою стратегию на основании некоторых разумных соображений, так как ничто не мешает противнику воспроизвести наши рассуждения. Не собираемся ли мы этим сказать, что мы должны выбирать свою стратегию неразумно? Но какую пользу тогда представляет собой весь наш анализ?

Ответ состоит в том, что стратегия должна выбираться случайно — значит, не на основании каких-то разумных соображений, — но сама схема рандомизации должна выбираться разумно. В этом и состоит идея использования смешанных стратегий.

II.3.1. Определение. *Смешанная стратегия* игрока есть вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий.

В случае когда игрок имеет только конечное число m чистых стратегий, смешанная стратегия представляет собой m-вектор $x = (x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющий условиям

$$x_i \geqq 0, \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \tag{2.3.2}$$

Обозначим множество всех смешанных стратегий игрока I через X, а множество всех смешанных стратегий игрока II через Y.

Предположим, что игроки I и II участвуют в матричной игре A. Если игрок I выбирает смешанную стратегию x, а игрок II выбирает y, то *ожидаемый выигрыш* будет равен

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j, \tag{2.3.3}$$

или в матричных обозначениях:

$$A(x, y) = xAy^T. \tag{2.3.4}$$

Как и прежде, игрок I должен опасаться, что игрок II раскроет его выбор стратегии. Если бы это случилось, то игрок II несомненно выбрал бы y так, чтобы минимизировать $A(x, y)$; иначе говоря, ожидаемый нижний выигрыш игрока I в предположении, что он использует стратегию x, будет равен

$$v(x) = \min_{y \in Y} xAy^T. \tag{2.3.5}$$

Далее, xAy^T можно рассматривать как взвешенное среднее ожидаемых выигрышей для игрока I, когда он использует x против чистых стратегий игрока II. Таким образом, этот минимум будет достигаться на некоторой чистой стратегии j:

$$v(x) = \min_{j} xA_{\cdot j} \tag{2.3.6}$$

(здесь $A_{\cdot j}$ есть j-й столбец матрицы A).

Поэтому игрок I должен выбрать x так, чтобы максимизировать $v(x)$, т. е. так, чтобы получить

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{j} xA_{\cdot j}. \tag{2.3.7}$$

(Следовало бы доказать, что максимум существует; однако, так как X компактно, а функция $v(x)$ непрерывна, это очевидно.) Такая стратегия x называется *максиминной* стратегией игрока I.

Аналогично, если игрок II выбирает стратегию y, он будет иметь ожидаемый верхний проигрыш

$$v(y) = \max_i A_{i\cdot} y^T \tag{2.3.8}$$

(где $A_{i\cdot}$ есть i-я строка матрицы A) и должен выбирать y так, чтобы иметь

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_i A_{i\cdot} y^T. \tag{2.3.9}$$

Такая стратегия y называется *минимаксной* стратегией игрока II.

Таким образом, мы получаем два числа v_I и v_{II}. Эти числа называются *значениями* игры для игроков I и II соответственно.

II. 4. ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ

Легко доказать, что для любой функции $F(x, y)$, определенной на произвольном декартовом произведении $X \times Y$, имеет место неравенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leqq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y). \tag{2.4.1}$$

Отсюда следует, что

$$v_I \leqq v_{II}.$$

Это неравенство аналогично (2.3.0). Действительно, вполне естественно, что в этом случае, как и выше, нижний выигрыш игрока I не может превышать верхнего проигрыша игрока II. Однако ранее мы видели, что равенство выполняется только в исключительных случаях. В данном же случае справедлива следующая теорема.

II.4.1. Теорема (теорема о минимаксе).

$$v_I = v_{II}.$$

Эта важнейшая в теории игр теорема была доказана многими способами. Мы приведем здесь доказательство, принадлежащее фон Нейману и Моргенштерну. Начнем с двух лемм.

II.4.2. Лемма (теорема об опорной гиперплоскости). *Пусть B — замкнутое выпуклое множество в n-мерном евклидовом пространстве, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая точка, не принадлежащая B. Тогда существуют такие числа $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$, что*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_{n+1} \tag{2.4.2}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i > p_{n+1} \text{ для всех } y \in B. \tag{2.4.3}$$

(Геометрически это означает, что через точку x можно провести гиперплоскость так, что B будет лежать целиком «выше» этой гиперплоскости.)

Доказательство. Пусть z — такая точка из B, расстояние которой от x минимально. (Такая точка существует, так как B замкнуто.) Положим

$$p_i = z_i - x_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Очевидно, равенство (2.4.2) выполняется. Нужно доказать, что имеет место (2.4.3). Мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

и, следовательно,

$$\sum p_i z_i - p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2 > 0.$$

Поэтому

$$\sum p_i z_i > p_{n+1}.$$

Допустим, что существует $y \in B$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leqq p_{n+1}.$$

Так как B выпукло, отрезок, соединяющий y с z, должен целиком содержаться в B, т. е. $w_r = ry + (1-r)z \in B$ для всех $0 \leqq r \leqq 1$. Квадрат расстояния от x до w_r имеет вид

$$\rho^2(x, w_r) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - ry_i - (1-r)z_i)^2.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial r} = 2\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)(x_i - ry_i - (1-r)z_i) =$$

$$= 2\sum (z_i - x_i) y_i - 2\sum (z_i - x_i) z_i + 2\sum r(z_i - y_i)^2 =$$

$$= 2\sum p_i y_i - 2\sum p_i z_i + 2r\sum (z_i - y_i)^2.$$

При $r = 0$ (т. е. при $w_r = z$) имеем

$$\left.\frac{\partial \rho^2}{\partial r}\right|_{r=0} = 2\sum p_i y_i - 2\sum p_i z_i.$$

Здесь первое слагаемое по предположению не превосходит $2p_{n+1}$, а второе больше $2p_{n+1}$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial \rho^2}{\partial r}\right|_{r=0} < 0.$$

Отсюда следует, что для r, достаточно близких к нулю,

$$\rho(x, w_r) < \rho(x, z).$$

Но это противоречит выбору z; следовательно, для всех $y \in B$ условие (2.4.3) должно выполняться.

II.4.3. Лемма (теорема об альтернативах для матриц). *Пусть $A = (a_{ij})$ есть $(m \times n)$-матрица. Тогда справедливо либо утверждение* (i), *либо утверждение* (ii):

(i) *точка* **0** *(в m-мерном пространстве) содержится в выпуклой оболочке $m + n$ точек*

$$a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})$$

и

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_m = (0, 0, \ldots, 1);$$

(ii) *существуют числа $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие условиям*

$$x_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (i) неверно. На основании леммы II.4.2 существуют такие числа $p_1, \ldots, p_{m+1}$, что

$$\sum_{i=1}^{m} 0 \cdot p_i = p_{m+1}$$

(отсюда следует, конечно, что $p_{m+1} = 0$) и

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i > 0$$

для всех y в указанном выпуклом множестве. В частности, это выполняется, если y является любым из $m + n$ векторов a_j, e_i. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i > 0 \quad \text{для всех } j,$$
$$p_i > 0 \quad \text{для всех } i.$$

Так как $p_i > 0$, получаем $\sum p_i > 0$, и можно положить

$$x_i = \frac{p_i}{\sum p_i}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i > 0, \qquad x_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

На основании двух этих лемм можно доказать теорему.

Доказательство теоремы о минимаксе. Пусть A — матричная игра. По лемме II. 4.3 имеет место либо утверждение (i), либо (ii).

Если верно (i), то $\mathbf{0}$ является выпуклой линейной комбинацией $m+n$ векторов. Поэтому существуют такие $s_1, \ldots, s_{m+n}$, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} s_j a_{ij} + s_{n+i} &= 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ s_j &\geqq 0, \qquad j = 1, \ldots, m+n, \\ \sum_{j=1}^{m+n} s_j &= 1. \end{aligned}$$

Если бы все числа $s_1, \ldots, s_n$ были равны нулю, то $\mathbf{0}$ оказывался бы выпуклой линейной комбинацией m единичных векторов $e_1, \ldots, e_m$, что, очевидно, невозможно, так как они линейно независимы. Следовательно, по крайней мере одно из чисел $s_1, \ldots, s_n$ положительно и $\sum_{j=1}^{n} s_j > 0$. Тогда можно положить

$$y_j = \frac{s_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j}$$

и мы получаем

$$y_i \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \frac{-s_{n+i}}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \leqq 0 \qquad \text{для всех } i.$$

Значит, $v(y) \leqq 0$ и $v_{\mathrm{II}} \leqq 0$.

Предположим теперь, что верно утверждение (ii). Тогда $v(x) > 0$, так что $v_{\mathrm{I}} > 0$.

Следовательно, неравенство $v_{\mathrm{I}} \leqq 0 < v_{\mathrm{II}}$ не может иметь места. Предположим теперь, что мы изменили игру A, заменив ее на игру $B = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = a_{ij} + k.$$

Ясно, что для любых x, y

$$xBy^T = xAy^T + k.$$

Поэтому

$$v_{\mathrm{I}}(B) = v_{\mathrm{I}}(A) + k,$$
$$v_{\mathrm{II}}(B) = v_{\mathrm{II}}(A) + k.$$

Так как неравенство

$$v_{\mathrm{I}}(B) < 0 < v_{\mathrm{II}}(B)$$

не может иметь места, то неравенство

$$v_{\mathrm{I}}(A) < -k < v_{\mathrm{II}}(A)$$

также не выполняется. Но k произвольно. Значит, неравенство $v_{\mathrm{I}} < v_{\mathrm{II}}$ невозможно. Так как $v_{\mathrm{I}} \leqq v_{\mathrm{II}}$, то

$$v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы видим, что при использовании смешанных стратегий нижний выигрыш игрока I в точности равен верхнему проигрышу игрока II. Общая величина v этих двух чисел называется *значением* игры. Мы видим, что стратегия x, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geqq v, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.4.4}$$

является *оптимальной* для игрока I в том смысле, что не существует стратегии, которая дала бы ему больший ожидаемый выигрыш, чем v, против каждой стратегии игрока II. Обратно, если y удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqq v, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.4.5}$$

то y является *оптимальной* стратегией для игрока II в том же смысле. Далее, очевидно, что

$$xAy^T = v,$$

так как если бы правая часть этого равенства была меньше левой, то это противоречило бы (2.4.5), а если бы она была больше левой, это противоречило бы (2.4.4). Следовательно, оптимальные стратегии x и y являются также оптимальными одна против другой, а также против любой иной оптимальной стратегии. Будем называть любую пару оптимальных стратегий (x, y) *решением* игры.

В дальнейшем окажется полезной следующая теорема (несколько более сильная форма теоремы о минимаксе).

II.4.4. Теорема. *В игре с $(m \times n)$-матрицей A либо игрок II имеет оптимальную стратегию y, в которой $y_n > 0$, либо игрок I имеет оптимальную стратегию x, для которой*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i > v.$$

Для доказательства теоремы II.4.4 приведем сначала одно определение.

II.4.5. Определение. *Пусть* $r^k = (r_1^k, \ldots, r_n^k)$, $k = 1, \ldots, p$, — система p n-векторов. Тогда под *выпуклым конусом*, порожденным векторами $r^1, \ldots, r^p$, понимается множество всех таких векторов x, что

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k r^k$$

для некоторых неотрицательных $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Легко проверить, что такой конус действительно является выпуклым.

II.4.6. Лемма (Фаркаш). *Пусть* $r^k = (r_1^k, \ldots, r_n^k)$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, p+1$, — *такие n-векторы, что любые $(q_1, \ldots, q_n)$, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^k \geqq 0, \quad k = 1, \ldots, p, \tag{2.4.6}$$

будут также удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} \geqq 0. \tag{2.4.7}$$

Тогда r^{p+1} принадлежит выпуклому конусу C, порожденному векторами $r^1, \ldots, r^p$.

Доказательство. Допустим, что $r^{p+1} \notin C$. По лемме II.4.2 существуют такие числа $q_1, \ldots, q_{n+1}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} = q_{n+1}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} q_j s_j > q_{n+1} \quad \text{для всех } s \in C.$$

Далее, $0 \in C$; следовательно, $q_{n+1} < 0$. Допустим, кроме того, что сумма $\sum_{j=1}^{n} q_j s_j$ отрицательна для любого $s \in C$. Для всякого положительного числа α имеем $\alpha s \in C$. Тогда, взяв α достаточно большим, можно было бы сделать форму $\sum q_j \alpha s_j = \alpha \sum q_j s_j$ меньше, чем q_{n+1}. Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} < 0,$$

но

$$\sum_{j=1}^{n} q_j s_j \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in C$$

и, в частности, для $r = r^1, \ldots, r^p$, а это противоречит предположению леммы.

Докажем теперь теорему II.4.4. Предположим сначала, что $v(A) = 0$. Рассмотрим $m + n$ m-векторов

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \ldots, 0),\\
e_2 &= (0, 1, \ldots, 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
e_m &= (0, 0, \ldots, 1),\\
a_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-1} &= (a_{1, n-1}, a_{2, n-1}, \ldots, a_{m, n-1}),\\
-a_n &= (-a_{1n}, -a_{2n}, \ldots, -a_{mn}).
\end{aligned}$$

Тогда $-a_n$ либо принадлежит выпуклому конусу C, порожденному остальными $m+n-1$ точками, либо не принадлежит ему. Допустим, что $-a_n \in C$. Тогда существуют такие неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, что

$$-a_{in} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j e_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_{ij} \quad \text{для всех } i,$$

а это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_{ij} + a_{in} = -\mu_i \leqq 0 \text{ для всех } i.$$

Положим теперь

$$y_j = \frac{\lambda_j}{1 + \sum \lambda_i}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad y_n = \frac{1}{1 + \sum \lambda_i}.$$

Ясно, что $y = (y_1, \ldots, y_n)$ является такой оптимальной стратегией для игрока II, что $y_n > 0$.

Допустим теперь, что $-a_n \notin C$. Тогда существуют такие числа $q_1, \ldots, q_m$, что

$$\sum_{i=1}^{m} q_i e_{ij} \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad j=1, \ldots, m, \tag{2.4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij} \geqq 0 \quad \text{для} \quad j=1, \ldots, n-1 \tag{2.4.9}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} q_i(-a_{in})<0. \tag{2.4.10}$$

В силу (2.4.8) имеем $q_i \geqq 0$, а по (2.4.10) не все q_i равны нулю. Поэтому можно положить

$$x_i=\frac{q_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} q_j}, \quad i=1, \ldots, m,$$

и из (2.4.9) и (2.4.10) непосредственно следует, что x является такой оптимальной стратегией для игрока I, что $\sum x_i a_{in}>0$.

Предположим теперь, что $v(A)=k \neq 0$. Как и выше, построим матрицу $B=(b_{ij})$, где $b_{ij}=a_{ij}-k$; доказательство дальше проводится так же, как в теореме II.4.1.

II. 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Теорема II.4.1 (теорема о минимаксе) гарантирует, что каждая антагонистическая игра имеет оптимальные стратегии. К сожалению, приведенное доказательство является доказательством существования и не указывает, как следует вычислять эти оптимальные стратегии.

Мы опишем теперь методы решения простейших игр. В гл. III речь будет идти о более общем методе.

II.5.1. Седловые точки. Простейшим является тот случай, когда существует седловая точка, т. е. когда существует элемент a_{ij}, являющийся максимальным в своем столбце и минимальным в своей строке. Тогда чистые стратегии i и j (или, что равносильно, смешанные стратегии x и y, для которых $x_i=1$, $y_j=1$, а все остальные компоненты равны нулю) будут оптимальными стратегиями для игроков I и II соответственно.

II.5.2. Доминирование. Пусть дана матрица A; будем говорить, что i-я строка *доминирует* k-ю строку, если

$$a_{ij} \geqq a_{kj} \quad \text{для всех } j \tag{2.5.1}$$

и

$$a_{ij}>a_{kj} \quad \text{по крайней мере для одного } j. \tag{2.5.2}$$

Аналогично, будем говорить, что j-й столбец *доминирует* l-й столбец, если

$$a_{ij} \leqq a_{il} \text{ для всех } i \tag{2.5.3}$$

и

$$a_{ij} < a_{il} \text{ по крайней мере для одного } i. \tag{2.5.4}$$

Короче, говорят, что одна чистая стратегия (представленная своей строкой или столбцом) доминирует другую чистую стратегию, если выбор первой (доминирующей) стратегии по крайней мере не хуже выбора второй (доминируемой) стратегии, а в некоторых случаях и лучше. Отсюда следует, что игрок всегда может обойтись без доминируемых стратегий и использовать только недоминируемые стратегии. Это утверждение содержится в следующей приводимой без доказательства теореме.

II.5.3. Теорема. *Пусть A — матричная игра, и пусть строки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ матрицы A доминируются. Тогда игрок* I *имеет такую оптимальную стратегию x, что $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = 0$; кроме того, любая оптимальная стратегия для игры, получающейся в результате удаления доминируемых строк, будет также оптимальной стратегией для первоначальной игры.*

Аналогичная теорема справедлива и для доминирования столбцов; общий результат этих теорем состоит в том, что все доминируемые строки и столбцы могут быть отброшены, а это позволяет иметь дело с меньшей матрицей.

II.5.4. Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что второй столбец доминирует четвертый. Отсюда следует, что игрок II никогда не будет использовать свою четвертую стратегию, а поэтому можно не обращать на нее внимания и рассматривать матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице третья строка доминирует первую. Удаляя ее, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

а в этой матрице третий столбец доминируется вторым. Следовательно, исходная матрица сводится к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

и нужно искать оптимальные стратегии только для малой матричной (2×2)-игры. Такие игры рассматриваются в следующем пункте.

II.5.5. (2×2) - игры. Пусть дана матричная (2×2)-игра

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Может оказаться, что эта игра имеет седловую точку; если это так, то никакой проблемы нет. Предположим, что игра не имеет седловой точки. Отсюда следует, что оптимальные стратегии $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ должны иметь положительные компоненты. Далее, если значение игры есть v, то

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = v,$$

или

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = v. \qquad (2.5.5)$$

Каждое из двух выражений в скобках в левой части (2.5.5) меньше или равно v, так как y, по предположению, является оптимальной стратегией. Допустим, что одно из этих выражений меньше v, т. е. допустим, что

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 < v, \qquad (2.5.6)$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leqq v. \qquad (2.5.7)$$

Тогда, поскольку $x_1 > 0$ и $x_1 + x_2 = 1$, левая часть в (2.5.5) будет строго меньше v. Отсюда следует, что оба выражения, заключенные в скобки в (2.5.5), должны быть равны v. Значит,

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \qquad (2.5.8)$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v. \qquad (2.5.9)$$

Аналогично можно показать, что

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \qquad (2.5.10)$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \qquad (2.5.11)$$

или в матричной форме:

$$Ay^T = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \qquad (2.5.12)$$

$$xA = (v,\ v). \qquad (2.5.13)$$

Эти уравнения вместе с уравнениями

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{2.5.14}$$

$$y_1 + y_2 = 1 \tag{2.5.15}$$

позволяют найти x, y и v. Действительно, если матрица A невырожденная, то

$$x = vJA^{-1},$$

где J — вектор (1, 1). Теперь исключим v, замечая, что сумма компонент x, т. е. xJ^T, должна быть равна 1; отсюда получаем

$$vJA^{-1}J^T = 1,$$

или

$$v = \frac{1}{JA^{-1}J^T} \tag{2.5.16}$$

и

$$x = \frac{JA^{-1}}{JA^{-1}J^T}. \tag{2.5.17}$$

Аналогично

$$y = \frac{A^{-1}J^T}{JA^{-1}J^T}. \tag{2.5.18}$$

Если A — вырожденная матрица, то все это, конечно, лишено смысла. Но тогда легко видеть, что формулы

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T} \tag{2.5.19}$$

и

$$y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T} \tag{2.5.20}$$

(где A^* — присоединенная[1]) матрица для A) дают оптимальные стратегии; заметим, что (2.5.19) и (2.5.20) совпадают с (2.5.17) и (2.5.18), если матрица A невырожденная. Ясно также, что

$$v = \frac{|A|}{JA^*J^T}, \tag{2.5.21}$$

где $|A|$ — определитель матрицы A, дает значение игры как для вырожденной, так и для невырожденной матрицы A. Объединим установленные правила в следующей теореме.

II.5.6. Теорема. *Если A — матричная (2×2)-игра, не имеющая седловой точки, то ее единственные оптимальные стратегии и*

[1]) Ее элементы равны соответствующим алгебраическим дополнениям для транспонированной матрицы. — *Прим. перев.*

значение определяются формулами

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T}, \qquad (2.5.22)$$

$$y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}, \qquad (2.5.23)$$

$$v = \frac{|A|}{JA^*J^T}, \qquad (2.5.24)$$

где A^* — присоединенная матрица для A, $|A|$ — определитель матрицы A, J — вектор $(1, 1)$.

II.5.7. Пример. Решить матричную игру

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что эта игра не имеет седловой точки. Далее, присоединенная матрица для A есть

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и $|A| = 2$, $JA^* = (3, 1)$; $A^*J^T = (2, 2)$ и $JA^*J^T = 4$. Таким образом, $x = (3/4, 1/4)$, $y = (1/2, 1/2)$, $v = 1/2$. Можно проверить, что эти стратегии x и y действительно гарантируют выигрыш $1/2$.

II. 5.8. $(2 \times n)$- и $(m \times 2)$-игры. Следующие простейшие игры, которые можно решить, — это игры, в которых один из игроков имеет только две стратегии ($(2 \times n)$- или $(m \times 2)$-игры). Мы рассмотрим здесь $(2 \times n)$-игры; аналогичный анализ может быть проведен и для $(m \times 2)$-игр.

Задача игрока I состоит в максимизации

$$v(x) = \min_j \{a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2\}.$$

Так как $x_1 = 1 - x_2$, мы имеем

$$v(x) = \min_j \{(a_{2j} - a_{1j})x_2 + a_{1j}\}.$$

Таким образом, $v(x)$ является минимумом n линейных функций одной переменной x_2; можно вычертить графики этих функций и затем максимизировать их минимум $v(x)$ графическими методами.

II.5.9. Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно построить графики функций $(a_{2j} - a_{1j})x_2 + a_{1j}$, если заметить, что они должны проходить через точки $(0, a_{1j})$ и $(1, a_{2j})$.

Жирная ломаная линия представляет функцию $v(x)$. Высшая точка этой линии X находится на пересечении прямых, соответствующих второму и третьему столбцам. Абсцисса этой точки равна $^2/_7$, а ордината $^{17}/_7$. Следовательно, $x=(^5/_7, {}^2/_7)$ и $v={}^{17}/_7$.

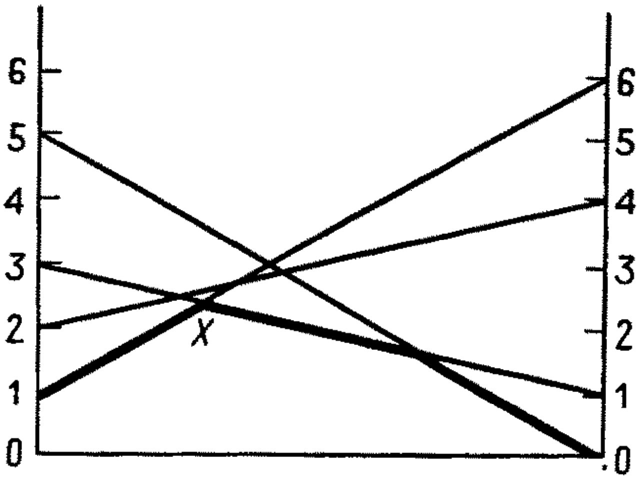

Рис. II.5.1.

Эти величины могут быть вычислены также при помощи формул (2.5.22) и (2.5.24) для (2×2)-матрицы, состоящей из второго и третьего столбцов исходной матрицы. Применение (2.5.23) к этой матрице дает также $y=(0, {}^5/_7, {}^2/_7, 0)$; легко проверить, что это действительно оптимальные стратегии и значение игры.

Этим исчерпывается простейший тип игр; обобщения указанных методов на другие игры, если и возможны, то слишком трудоемки, чтобы принести какую-то практическую пользу. Для более общих игр используются некоторые другие схемы. Самая простая для объяснения схема приводится ниже. Мы не даем доказательства сходимости этой схемы; его можно найти в соответствующей литературе.

II.5.10. Решение при помощи фиктивного разыгрывания[1]). Предположим, что два игрока, возможно, не знающие теории игр, решают разыграть игру много раз. Не зная теории игр, они тем не менее склонны к статистике и потому следят за чистыми стратегиями, которые использует противник в отдельных разыгрываниях игры. При каждом разыгрывании каждый игрок действует так, чтобы максимизировать свой ожидаемый выигрыш против наблюдаемого эмпирического вероятностного распределения противника: если игрок II использовал свою j-ю стратегию q_j раз, то игрок I выберет i так, чтобы максимизировать $\sum_j a_{ij}q_j$. Аналогично, если игрок I использовал i-ю стратегию p_i раз, то игрок II выберет j так, чтобы минимизировать $\sum_i a_{ij}p_i$.

Сколь ни наивным кажется этот метод, поразительным является то, что такие эмпирические распределения сходятся к оптимальным стратегиям. Точнее, пусть p_i^N — число использований игроком I i-й стратегии в течение первых N разыгрываний игры. Если положить $x_i^N=p_i^N/N$, то очевидно, что x^N является смешан-

[1]) Этот метод часто называется итеративным методом (Брауна — Робинсон). — *Прим. перев.*

ной стратегией. Эта последовательность стратегий не обязана сходиться; однако, поскольку она находится в компактном множестве смешанных стратегий, она должна содержать сходящуюся подпоследовательность. Справедливо утверждение, что *предел любой сходящейся подпоследовательности является оптимальной стратегией.*

Мы опускаем доказательство этой теоремы, поскольку оно слишком сложно. Коротко говоря, оно основано на том факте, что если x^N и y^N — полученные указанным выше способом стратегии игроков I и II соответственно, то будет выполнено равенство

$$\lim_{N \to \infty} \{v(y^N) - v(x^N)\} = 0. \tag{2.5.25}$$

Этот метод, между прочим, наиболее полезен в случае очень больших игр (т. е. игр с большим числом чистых стратегий), к которым довольно трудно применить какой-либо другой метод вследствие их объема. (Набросок доказательства этой теоремы см. в задаче II.9.)

II. 6. СИММЕТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Мы закончим эту главу кратким рассмотрением одного частного класса игр.

II.6.1. Определение. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j. Матричная игра называется *симметричной*, если ее матрица кососимметрическая.

II.6.2. Теорема. *Значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, если x есть оптимальная стратегия для игрока* I, *то x есть также оптимальная стратегия для игрока* II.

Доказательство. Пусть A — матрица игры и x — произвольная стратегия. Легко видеть, что $A = -A^T$. Следовательно,

$$xAx^T = -xA^Tx^T = -(xAx^T)^T = -xAx^T.$$

Поэтому $xAx^T = 0$. Отсюда следует, что для любого x

$$\min_y xAy^T \leqq 0,$$

так что значение игры неположительно; в то же время

$$\max_y yAx^T \geqq 0,$$

так что значение игры неотрицательно. Следовательно, значение игры равно нулю. Далее, если x — оптимальная стратегия игрока I, то

$$xA \geqq \mathbf{0}.$$

Но отсюда

$$x(-A^T) \geqq 0,$$

так что

$$xA^T \leqq 0$$

или

$$Ax^T \leqq 0.$$

Значит, стратегия x оптимальна также и для игрока II.

Для решения симметричных игр был предложен итеративный алгорифм, несколько напоминающий метод, приведенный в п. II.5.10. В отличие от метода из п. II.5.10, приводящего к дискретной последовательности стратегий, этот метод, принадлежащий фон Нейману и Брауну, основан на непрерывной модификации данной стратегии, что в пределе дает оптимальную стратегию. Однако его практическая ценность весьма ограничена (если не считать того, что он дает конструктивное доказательство существования для теоремы о минимаксе), так как возникающие при его применении дифференциальные уравнения, вообще говоря, не могут быть решены аналитически.

II.6.3. Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее можно считать обобщением хорошо известной детской игры «камень, мешок и ножницы». Так как матрица кососимметрическая, значение игры должно быть равно нулю. Очевидно, эта игра не имеет седловой точки. Кроме того, оптимальная стратегия не может использовать только две чистые стратегии; действительно, если, например, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_3 = 0$, то легко видеть, что такая смешанная стратегия для игрока I дает отрицательный ожидаемый выигрыш против первой чистой стратегии игрока II. Поэтому все компоненты оптимальной стратегии x будут положительными. Эта стратегия оптимальна также и для игрока II, и рассуждение, подобное проведенному в п. II.5.5, показывает, что компоненты x должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} - \quad x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 \qquad &= 0, \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$) нетрудно найти. Для обоих игроков это единственная оптимальная стратегия.

Задачи

1. Показать, что если C — любое выпуклое множество и x — любая точка границы C, то существует такой вектор $p \neq 0$, что $\sum x_i p_i = 0$ и $\sum y_i p_i \geq 0$ для всех $y \in C$. (Это несколько более сильный вариант теоремы об опорной гиперплоскости. Воспользуйтесь этой теоремой и тем обстоятельством, что если x находится на границе C, то существует последовательность точек $x^n \notin \overline{C}$, которая сходится к x.)

2. Показать, что множество оптимальных стратегий всегда замкнуто, выпукло и ограничено и, следовательно, является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

3. Показать, что если представить матричную $(m \times n)$-игру как точку в mn-мерном евклидовом пространстве, то значение такой игры оказывается непрерывной функцией игры.

4. Показать, что отображение матрицы игры на множество ее оптимальных стратегий является полунепрерывным снизу.

5. Показать, что множество матричных $(m \times n)$-игр с единственным решением всюду плотно и открыто.

6. Пусть x и y — крайние точки множеств оптимальных стратегий игры с матрицей M и ненулевым значением. Показать, что M имеет такую квадратную невырожденную подматрицу $\dot{M}$, что

$$\dot{x} = \frac{j\dot{M}^{-1}}{j\dot{M}^{-1}j^T}, \quad \dot{y}^T = \frac{\dot{M}^{-1}j^T}{j\dot{M}^{-1}j^T}, \quad v = \frac{1}{j\dot{M}^{-1}j^T},$$

где j — вектор нужной размерности, все компоненты которого равны 1.

а) Произведение x на любой столбец из M, принадлежащий $\dot{M}$, должно равняться v.

б) Произведение y на любую строку из M, принадлежащую $\dot{M}$, должно равняться v.

в) i-я строка и j-й столбец из M должны принадлежать $\dot{M}$, если $x_i > 0$ и $y_j > 0$.

г) К матрице $\dot{M}$ можно добавлять строки и столбцы (при этом должны выполняться свойства а) и б)) до тех пор, пока они остаются линейно независимыми.

д) Если построенная таким способом матрица имеет линейно зависимые строки, то точка x не является крайней. Если столбцы линейно зависимы, то точка y не является крайней.

7. Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица игры. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — смешанная стратегия. Введем обозначения:

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \qquad \varphi(u_i) = \max(0, u_i),$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(u_i), \qquad \psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi^2(u_i).$$

Показать, что для любой «начальной» стратегии x^0 решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi(u_i) - x_i \Phi(x), \qquad x(0) = x^0$$

сходится к оптимальной стратегии в том смысле, что оно должно иметь предельные точки и любая предельная точка является оптимальной стратегией.

а) Если x^0 — стратегия, то $x(t)$ будет стратегией при всех t.

б) Функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -2\Phi(x)\,\psi(x).$$

в) $\psi(x) \leqq \Phi^2(x)$.

г) Из б) и в) должно следовать неравенство

$$\psi(x) \leqq \frac{\psi(x^0)}{\left(1 + t\sqrt{\psi(x^0)}\right)^2}.$$

8. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная $(m \times n)$-матрица. Рассмотрим, далее, $(mn \times mn)$-матрицу $B = (b_{pq})$, определяемую следующим образом:

$$b_{(i-1)n+j,\,(k-1)n+l} = a_{il} - a_{kj}.$$

Показать, что матрица B кососимметрическая; следовательно, она представляет симметричную игру. Кроме того, показать, что если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn})$ — оптимальная стратегия для B, то векторы x и y, определяемые равенствами

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{(i-1)n+j}$$

и

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{(i-1)n+j},$$

являются оптимальными стратегиями в A для игроков I и II соответственно.

9. (Решение игр при помощи фиктивного разыгрывания). Рассмотрим следующий процесс для матричной игры $A = (a_{ij})$. Два игрока разыгрывают эту игру много раз. При первом разыгрывании они могут использовать любые стратегии. Предположим, что за первые k разыгрываний игрок I использовал i-ю стратегию X_i^k раз $(i = 1, \ldots, m)$, а игрок II использовал j-ю стратегию Y_j^k раз $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда при $(k+1)$-м разыгрывании игрок I будет использовать i_{k+1}-ю стратегию, а игрок II — свою j_{k+1}-ю стратегию, где

$$\sum_j a_{i_{k+1},j} Y_j^k = \max_i \sum_j a_{ij} Y_j^k = U_k$$

и

$$\sum_i a_{i,\,j_{k+1}} X_i^k = \min_j \sum_i a_{ij} X_i^k = V_k.$$

(Таким образом, при каждом разыгрывании каждый игрок выбирает такую стратегию, которая является наилучшей по отношению к накопленным прошлым выборам противника.) Показать, что любая предельная точка пары последовательностей X^k/k, Y^k/k есть решение игры A.

а) Будем говорить, что i_0-я строка является подходящей в интервале $[k, k']$, если существует такое k_1, $k \leqq k_1 \leqq k'$, что

$$\sum_j a_{i_0 j} Y_j^{k_1} = U_{k_1},$$

и аналогично j_0-й столбец является подходящим в интервале $[k, k']$, если существует такое k_2, $k \leqq k_2 \leqq k'$, что

$$\sum_i a_{ij_0} X_i^{k_2} = V_{k_2}.$$

Тогда, если все строки являются подходящими для $[k, l]$, то

$$V_l - U_l \leqq 4a\,(k - l),$$

где $a = \max |a_{ij}|$.

б) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k_0, что $V_k - U_k \leqq k\varepsilon$ для всех $k \geqq k_0$. Доказательство вести индукцией по размерам матрицы. Если A есть (1×1)-матрица, это очевидно. Предположим, что это верно для всех подматриц $\tilde{A}$ матрицы A. Выберем k^* так, что $V_{k^*} - U_{k^*} \leqq k\varepsilon/2$ для всех $\tilde{A}$. Тогда $k_0 \geqq 8ak^*/\varepsilon$ удовлетворяет нашему требованию. (Показать, что если какая-либо строка или какой-либо столбец являются неподходящими для некоторого интервала, то их можно в этом интервале вычеркнуть и исследовать только остающуюся подматрицу; рассмотреть интервалы вида $(k, k + k^*)$, где $k + k^* \leqq k_0$.)

Глава III

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

III. 1. ВВЕДЕНИЕ

Коротко говоря, задача линейного программирования есть задача максимизации (или минимизации) линейной функции (называемой *целевой функцией*) при наличии линейных ограничений. Обычно ограничения имеют вид нестрогих неравенств, а на переменные налагается условие неотрицательности. Таким образом, самая обычная форма задачи линейного программирования такова: найти $(x_1, \ldots, x_m)$ так, чтобы

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \tag{3.1.1}$$

при условиях

$$\sum a_{ij} x_i \leqq b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.1.2}$$

$$x_i \geqq 0, \tag{3.1.3}$$

или в матричных обозначениях:

$$\text{максимизировать } xC^T \tag{3.1.4}$$

при условиях

$$xA \leqq B, \tag{3.1.5}$$

$$x \geqq \mathbf{0}. \tag{3.1.6}$$

Следует указать, что такая форма записи задачи линейного программирования не является наиболее общей. Действительно, может потребоваться не максимизировать целевую функцию, а минимизировать ее. Некоторые ограничения могут иметь форму равенств, а некоторые переменные принимать и отрицательные значения. Следует, однако, указать, что минимизация функции равносильна максимизации этой функции, взятой с противоположным знаком, равенство можно заменить двумя противоположными неравенствами, а переменную, не имеющую ограничения на знак, можно выразить в виде разности двух неотрицательных переменных. Поэтому, строго говоря, при рассмотрении задачи в виде (3.1.1) — (3.1.6) мы не теряем общности.

III.1.1. Определение. Множество всех точек, удовлетворяющих ограничениям (3.1.2) и (3.1.3), мы будем называть *допустимым множеством* задачи (3.1.1) — (3.1.3). Максимум выражения (3.1.1) называется *значением* задачи.

Можно показать, что решение матричной игры можно свести к задаче линейного программирования. Действительно, если игрок I использует стратегию $(x_1, \ldots, x_m)$, он обеспечивает себе ожидаемый выигрыш не менее λ, где λ — любое число, такое, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqq \lambda, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поэтому задача нахождения оптимальной стратегии для игрока I сводится к задаче линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \lambda \tag{3.1.7}$$

при условиях
$$-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + \lambda \leqq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{3.1.9}$$

$$x_i \geqq 0, \; i = 1, \ldots, m. \tag{3.1.10}$$

Аналогично задача для игрока II сводится к задаче линейного программирования:

$$\text{минимизировать } \mu \tag{3.1.11}$$

при условиях
$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \mu \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.1.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \tag{3.1.13}$$

$$y_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.14}$$

III. 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\text{максимизировать } xC^T \tag{3.2.1}$$

при условиях
$$xA \leqq B, \tag{3.2.2}$$

$$x \geqq 0 \tag{3.2.3}$$

$$\text{минимизировать } By^T \tag{3.2.4}$$

при условиях
$$yA^T \geqq C, \tag{3.2.5}$$

$$y \geqq 0. \tag{3.2.6}$$

Задача (3.2.4)—(3.2.6) называется *двойственной* к задаче (3.2.1)—(3.2.3). Кроме того, если изменить знаки у A, B и C, то (3.2.4)—(3.2.6) можно переписать как задачу максимизации:

$$\text{максимизировать} \quad y(-B)^T \tag{3.2.7}$$

при условиях

$$y(-A^T) \leqq -C, \tag{3.2.8}$$

$$y \geqq \mathbf{0}. \tag{3.2.9}$$

Двойственной задачей для (3.2.7)—(3.2.9), как определено выше, должна быть задача:

$$\text{минимизировать} \quad -Cx^T \tag{3.2.10}$$

при условиях

$$x(-A) \geqq -B, \tag{3.2.11}$$

$$x \geqq \mathbf{0}. \tag{3.2.12}$$

Но очевидно, что (3.2.10)—(3.2.12) эквивалентно (3.2.1)—(3.2.3). Следовательно, можно утверждать, что двойственной задачей для (3.2.4)—(3.2.6) является задача (3.2.1)—(3.2.3). Поэтому двойственность является взаимно обратным отношением: две задачи (3.2.1)—(3.2.3) и (3.2.4)—(3.2.6) двойственны одна другой.

Следующие далее теоремы уточняют это соотношение между двойственными задачами линейного программирования.

III.2.1. Теорема. *Пусть x и y принадлежат допустимым множествам задач* (3.2.1)—(3.2.3) *и* (3.2.4)—(3.2.6) *соответственно. Тогда*

$$xC^T \leqq By^T. \tag{3.2.13}$$

Доказательство. Мы имеем

$$xC^T = \sum_{i=1}^{m} x_i c_i \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i \Bigl(\sum_j a_{ij} y_j\Bigr) = \qquad \text{(по (3.2.3) и (3.2.5))}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\Bigr) y_j \leqq \sum_{j=1}^{n} b_j y_j = By^T \qquad \text{(по (3.2.2) и (3.2.6))}.$$

III.2.2. Следствие. *Предположим, что векторы x^* и y^* принадлежат допустимым множествам задач* (3.2.1)—(3.2.3) *и* (3.2.4)—(3.2.6) *соответственно и что $x^*C^T = By^{*T}$. Тогда x^* и y^* являются решениями этих двух задач.*

Задача линейного программирования в общем случае не обязательно имеет решение. Это может произойти по следующим двум причинам. С одной стороны, если система ограничений окажется несовместной, то допустимое множество пусто. В этом случае задача называется *недопустимой*. С другой стороны, может случиться, что искомый максимум (или минимум) не существует, даже если задача *допустима*, так как целевая функция может принимать на допустимом множестве произвольно большие (или малые в случае задачи минимизации) значения. Например, задача

$$\text{максимизировать } 2x$$

$$\text{при условиях} \qquad -x \leqq 1, \quad x \geqq 0,$$

не имеет решения, так как целевая функция может принимать произвольно большие значения. Такая задача называется *неограниченной.*

Укажем еще одно следствие из теоремы III.2.1.

III. 2.3. Следствие. *Если задача линейного программирования* (3.2.1)—(3.2.3) *неограниченна, то двойственная задача* (3.2.4)—(3.2.6) *недопустима. Аналогично, если задача* (3.2.4)—(3.2.6) *неограниченна, то* (3.2.1)—(3.2.3) *недопустима.*

Доказательство. Предположим, что задача (3.2.4)—(3.2.6) допустима, т. е. y принадлежит допустимому множеству для (3.2.4)—(3.2.6). Тогда целевая функция xC^T ограничена сверху величиной By^T. Следовательно, задача (3.2.1)—(3.2.3) не будет неограниченной.

Обращение следствия III.2.3 не имеет места. Иначе говоря, если задача недопустима, то отсюда не следует, что двойственная ей задача неограниченна. Может оказаться, что обе задачи недопустимы.

III.2.4. Пример. Двойственные задачи:

$$\text{максимизировать } 5x_1 + x_2$$

$$\text{при условиях} \qquad x_1 - x_2 \leqq 1,$$

$$-x_1 + x_2 \leqq -2,$$

$$x_1, \ x_2 \geqq 0,$$

и

$$\text{минимизировать } y_1 - 2y_2$$

$$\text{при условиях} \qquad y_1 - y_2 \geqq 5,$$

$$-y_1 + y_2 \geqq 1,$$

$$y_1, \ y_2 \geqq 0$$

обе являются недопустимыми.

Таким образом, если задача недопустима, то двойственная ей задача может быть неограниченной или недопустимой. Мы покажем сейчас, что других возможностей нет.

III.2.5. Теорема. *Пусть задача* (3.2.1)—(3.2.3) *допустима, а двойственная задача* (3.2.4)—(3.2.6) *недопустима. Тогда задача* (3.2.1)—(3.2.3) *неограниченна.*

Доказательство. Пусть задача (3.2.4)—(3.2.6) недопустима. Рассмотрим игру с $[m \times (n+1)]$-матрицей

$$(-A \,\vdots\, C^T), \tag{3.2.14}$$

полученной добавлением вектора-столбца C^T к матрице $-A$. Предположим, что значение этой игры отрицательно. Тогда, если $s = (s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$ — оптимальная стратегия игрока II, то

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j + c_i s_{n+1} < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если $s_{n+1} = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j > 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

так что для достаточно больших k

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(ks_j) > c_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$ks_j \geqq 0,$$

т. е. вектор ks удовлетворяет (3.2.5) и (3.2.6), так что задача (3.2.4)—(3.2.6) допустима. Если же $s_{n+1} > 0$, то положим $y_j = s_j/s_{n+1}$; тогда y удовлетворяет (3.2.5) и (3.2.6). Таким образом, *значение этой игры должно быть нулевым или положительным.*

Предположим теперь, что значение этой игры равно нулю; предположим также, что игрок II имеет оптимальную стратегию s, в которой $s_{n+1} > 0$. Если положить $y_j = s_j/s_{n+1}$, то снова окажется, что y удовлетворяет (3.2.5) и (3.2.6), а это противоречит предположению о недопустимости задачи (3.2.4)—(3.2.6).

Следовательно, значение матричной игры (3.2.14) неотрицательно. Кроме того, если это значение равно нулю, то для всех оптимальных стратегий s игрока II мы должны иметь $s_{n+1} = 0$.

Из теорем II.4.4 и II.4.6 следует, что игрок I должен иметь такую стратегию $t = (t_1, \ldots, t_m)$, что

$$\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij})\, t_i \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i t_i > 0.$$

По предположению, задача (3.2.1)—(3.2.3) допустима. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$ принадлежит ее допустимому множеству. Тогда для любого положительного числа α вектор $x+\alpha t$ также будет принадлежать этому допустимому множеству. Кроме того,

$$(x+\alpha t)\,C^T = xC^T + \alpha tC^T$$

и правая часть этого равенства может быть сделана произвольно большой за счет увеличения α. Значит, задача (3.2.1)—(3.2.3) неограниченна.

Таким образом, для пары двойственных задач (3.2.1)—(3.2.3) и (3.2.4)—(3.2.6) возможны четыре варианта. Либо обе задачи являются недопустимыми, либо одна задача недопустима, а другая неограниченна, либо обе допустимы и ограниченны. В последнем случае тот факт, что допустимое множество замкнуто, позволяет утверждать, что обе задачи будут иметь решения. Следующая очень важная теорема поясняет соотношение между ними в этом последнем случае.

III.2.6. Теорема. *Пусть обе двойственные задачи* (3.2.1)—(3.2.3) *и* (3.2.4)—(3.2.6) *являются допустимыми. Тогда обе они имеют решения x^* и y^* соответственно и, кроме того,*

$$x^*C^T = By^{*T},$$

т. е. обе задачи имеют одно и то же значение.

Доказательство. Рассмотрим игру с матрицей

$$M = \left(\begin{array}{c:c:c} 0 & A^T & -B^T \\ -A & 0 & C^T \\ B & -C & 0 \end{array}\right),$$

где $\mathbf{0}$ представляет собой матрицу соответствующих размеров, все элементы которой равны нулю. Матрица M кососимметрическая; следовательно, значение игры равно нулю.

Предположим теперь, что $s=(s_1, \ldots, s_{m+n+1})$ — оптимальная стратегия для игрока I. Положим

$$y=(s_1, \ldots, s_n),$$
$$x=(s_{n+1}, \ldots, s_{n+m}),$$
$$w=s_{n+m+1}.$$

Ввиду оптимальности s и того, что значение игры равно нулю, мы получаем

$$\begin{aligned} -xA + wB &\geqq 0, \\ yA^T - wC &\geqq 0, \\ -yB^T + xC^T &\geqq 0. \end{aligned}$$

Пусть $w > 0$. Если положить $x^* = x/w$ и $y^* = y/w$, то ясно, что

$$x^*A \leqq B,$$
$$y^*A^T \geqq C,$$
$$x^*,\ y^* \geqq \mathbf{0}$$

и

$$x^*C^T \geqq y^*B^T.$$

Это означает, что x^* и y^* принадлежат допустимым множествам для задач (3.2.1)—(3.2.3) и (3.2.4)—(3.2.6). Из теоремы III.2.1 и следствия III.2.2 получаем, что x^* и y^* являются решениями этих двух задач и, кроме того,

$$x^*C^T = y^*B^T.$$

Предположим теперь, что ни для какой оптимальной стратегии s игрока I не имеет место неравенство $s_{m+n+1} > 0$. В этом случае по теореме II. 4.4 игрок II имеет оптимальную стратегию $r = (r_1, \ldots, r_{m+n+1})$, скалярное произведение которой с последней строкой матрицы M отрицательно. Так как оба игрока имеют одинаковые множества оптимальных стратегий, мы должны иметь $r_{m+n+1} = 0$. Если положить теперь

$$y = (r_1,\ \ldots,\ r_n),$$
$$x = (r_{n+1},\ \ldots,\ r_{m+n}),$$

то

$$-xA \geqq \mathbf{0},$$
$$yA^T \geqq \mathbf{0},$$
$$-yB^T + xC^T > \mathbf{0},$$

или, равносильно,

$$xA \leqq \mathbf{0},$$
$$yA^T \geqq \mathbf{0},$$
$$xC^T > yB^T. \qquad (3.2.15)$$

В неравенстве (3.2.15) либо левая часть положительна, либо правая часть отрицательна. Допустим, что левая часть положительна. По предположению, задача (3.2.1)—(3.2.3) допустима; пусть x' принадлежит ее допустимому множеству. Легко видеть, что $x' + \alpha x$ для любого положительного α также принадлежит допустимому множеству и $(x' + \alpha x)C^T$ может быть сделано произвольно большим при возрастании α. Значит, задача (3.2.1)—(3.2.3) неограниченна. Но это означает, что задача (3.2.4)—(3.2.6) недопустима. Аналогично, если правая часть (3.2.15) отрицательна, то задача (3.2.4)—(3.2.6) неограниченна, а задача (3.2.1)—(3.2.3) недопустима. Полученное противоречие доказывает теорему.

III. 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

На первый взгляд может показаться, что задачи линейного программирования можно решать методами математического анализа, полагая частные производные равными нулю. Однако на самом деле целевая функция линейна, так что все ее частные производные постоянны; решение задачи линейного программирования будет находиться на границе допустимого множества. Метод, который обычно используется для решения задач линейного программирования, основывается на следующих соображениях.

(3.3.1) Допустимое множество является пересечением нескольких полупространств; так как каждое полупространство выпукло, допустимое множество оказывается выпуклым многогранником.

(3.3.2) Так как допустимое множество выпукло, а целевая функция линейна, любой локальный экстремум целевой функции будет глобальным экстремумом.

(3.3.3) Так как целевая функция линейна, экстремум будет достигаться в одной из крайних точек (вершин) допустимого множества (многогранника).

С геометрической точки зрения симплекс-метод может быть описан следующим образом. Находится одна из вершин многогранника (это можно сделать и аналитически, решая систему n уравнений, задаваемых ограничениями). Затем рассматриваются все ребра, сходящиеся в этой вершине. Если целевая функция не может быть улучшена при передвижении вдоль любого из этих ребер, то данная вершина является локальным экстремумом, а следовательно (на основании замечания (3.3.2)), и глобальным экстремумом. Если же целевая функция улучшается вдоль одного из ребер, то мы переходим по этому ребру к вершине, расположенной на другом его конце, и повторяем этот процесс. Так как целевая функция на каждом шаге улучшается, через одну и ту же вершину нельзя пройти дважды. Но поскольку имеется лишь конечное число вершин, этот процесс через конечное число шагов приведет нас к решению.

III. 3.1. Пример. Поясним эту идею на примере:

$$\text{максимизировать } w = 2x + y$$

при условиях

$$x \leqq 1,$$

$$y \leqq 1,$$

$$2x + 2y \leqq 3,$$

$$x,\ y \geqq 0.$$

Допустимое множество на рис. III.3.1 затенено. Стрелка указывает градиент целевой функции. Если начинать из начала координат, то мы видим, что w возрастает вдоль любого начинающегося в нем ребра. Возьмем, например, ребро, идущее к $(1,0)$. В точке $(1,0)$ мы находим, что w возрастает вдоль ребра, идущего в точку

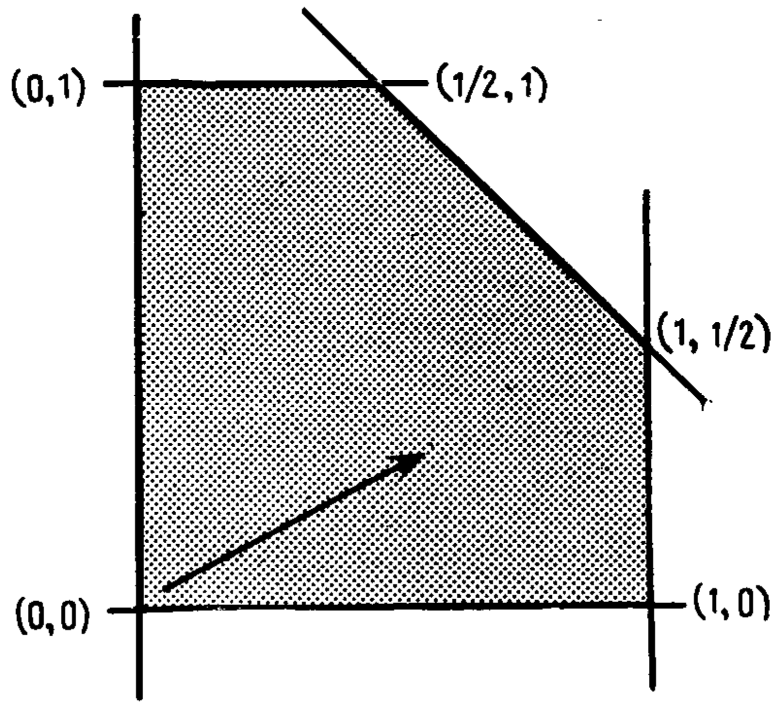

Рис. III.3.1.

$(1, {}^1/_2)$. В этой точке находим, что w убывает вдоль обоих сходящихся в ней ребер. Поэтому можно заключить, что точка $(1, {}^1/_2)$ является решением нашей задачи.

III. 4. АЛГОРИФМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Теперь опишем указанный выше метод алгебраически.

Введем одно схематическое обозначение, чтобы добиться некоторого упрощения символики. Пусть дана система неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m &\leqq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m &\leqq b_n, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

которая вместе с обычными ограничениями неотрицательности характеризует допустимое множество некоторой задачи линейного программирования. Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m - b_1 &= -u_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m - b_2 &= -u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m - b_n &= -u_n, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

где u_j, $j = 1, \ldots, n$, — так называемые *свободные* переменные, подчиненные условию неотрицательности. Ограничения (3.4.1) сведены теперь к этой системе уравнений вместе с ограничениями неотрицательности $x_i \geqq 0$, $u_j \geqq 0$. Мы будем отождествлять систему уравнений (3.4.2) со схемой

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_m & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{|cccccc|l} \hline a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & & -b_1 & = -u_1, \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} & & -b_2 & = -u_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & & -b_n & = -u_n. \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{3.4.3}$$

Итак, каждая строка внутри рамки этой схемы представляет линейное уравнение, которое получается в результате умножения каждого элемента строки на элемент, расположенный над строкой (вне рамки) и соответствующим столбцом; полученная сумма затем приравнивается элементу, стоящему вне рамки справа. Главное преимущество такой схемы, как отмечалось выше, состоит в том, что она позволяет избежать повторения переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ и тем самым упрощает запись. Можно также ввести в схему (3.4.3) и целевую функцию, обозначая ее, например, через w и приписывая ее к схеме, т. е. добавляя внизу строку

$$\begin{array}{|cccccc|l} c_1 & c_2 & \ldots & c_m & & 0 & = w. \\ \hline \end{array} \tag{3.4.4}$$

Если сделать все это, то можно видеть, что схему, соответствующую задаче линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3), можно также использовать для получения двойственной задачи (3.2.4)—(3.2.6). Действительно, для представления уравнений системы (3.2.5) можно использовать столбцы. В результате мы получаем двойную схему

$$\begin{array}{c|cccc|c|l} \diagdown & x_1 & x_2 & \ldots & x_m & 1 & \\ \hline y_1 & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & -b_1 & = -u_1, \\ y_2 & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} & -b_2 & = -u_2, \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n & a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & -b_n & = -u_n, \\ \hline -1 & c_1 & c_2 & \ldots & c_m & 0 & = w, \\ \hline & \Vert & \Vert & & \Vert & \Vert & \diagdown \\ & v_1 & v_2 & \ldots & v_m & -w' & \end{array} \tag{3.4.5}$$

которая описывает две двойственные задачи (3.2.1)—(3.2.3) и (3.2.4)—(3.2.6) одновременно.

Рассмотрим теперь задачу максимизации (3.2.1)—(3.2.3), представленную строками схемы (3.4.5). Мы имеем систему $n+1$ уравнений с $m+n+1$ неизвестными $x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_n$ и w. Можно, вообще говоря, выразить $n+1$ этих неизвестных через остальные m неизвестных. Схема, конечно, дает представление для $u_1, \ldots, u_n$ и w через x_i, но, кроме вырожденных случаев, когда мы сталкиваемся с обращением вырожденной матрицы, можно выразить любые $n+1$ неизвестных через остальные m.

Предположим, что мы уже выразили $n+1$ переменных $s_1, s_2, \ldots, s_n, w$ через переменные $r_1, r_2, \ldots, r_m$ и получили новую схему (симплекс-таблицу)

$$\begin{array}{c|cccc|c|l}
 & r_1 & r_2 & \ldots & r_m & 1 & \\
\hline
 & a'_{11} & a'_{21} & \ldots & a'_{m1} & -b'_1 & = -s_1, \\
 & a'_{12} & a'_{22} & \ldots & a'_{m2} & -b'_2 & = -s_2, \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & a'_{1n} & a'_{2n} & \ldots & a'_{mn} & -b'_n & = -s_n, \\
\hline
 & c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_m & \delta & = w, \\
\hline
\end{array} \qquad (3.4.6)$$

где каждый элемент нижней строки (кроме, может быть, стоящего справа элемента δ) и каждый элемент крайнего правого столбца (снова кроме нижнего элемента) неположительны. Если это так, то таблица (3.4.6) дает решение задачи (3.2.1)—(3.2.3). Действительно, если мы положим все переменные $r_1, \ldots, r_m$ равными нулю, то каждая из переменных s_j будет равна соответствующему b_j. Но величины $-b_j$ неположительны. Следовательно, все s_i будут неотрицательными. Так как все r_i равны нулю, эта точка принадлежит допустимому множеству для задачи (3.2.1)—(3.2.3). Кроме того, нижняя строка дает уравнение

$$w = c'_1 r_1 + \ldots + c'_m r_m + \delta,$$

где все c'_i неположительны. Ясно, что наибольшее возможное значение для w получится, если положить все r_i равными нулю (так как меньше они быть не могут). Таким образом, решение задачи (3.2.1)—(3.2.3) получается из (3.4.6), если положить

$$r_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (3.4.7)$$

$$s_j = b'_j, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (3.4.8)$$

$$w = \delta. \qquad (3.4.9)$$

Мы ищем метод, который позволит переписать систему (3.4.5) в виде (3.4.6) с неположительными элементами в правом столбце и в нижней строке (кроме, быть может, правого нижнего элемента δ). Дадим сначала некоторые определения.

III.4.1. Определение. В симплекс-таблице (схеме) (3.4.6) переменные s_j называются *базисными* переменными, а переменные r_i — *небазисными* переменными.

III.4.2. Определение. Симплекс-таблица будет также называться *базисной точкой*. Если все элементы в правом столбце (кроме, быть может, нижнего элемента) неположительны, она будет называться *базисной допустимой точкой*. Если все элементы нижней строки (кроме, быть может, крайнего правого элемента) неположительны, она будет называться *базисной двойственно допустимой точкой*.

Как уже отмечалось, если элементы правого столбца неположительны, мы получаем точку в допустимом множестве для задачи (3.2.1)—(3.2.3), полагая небазисные переменные равными нулю. Именно это и понимается под базисной допустимой точкой. Если все элементы нижней строки неположительны, то мы получаем точку в допустимом множестве двойственной задачи (3.2.4)—(3.2.6). Это базисная двойственно допустимая точка. Наконец, если базисная допустимая точка есть также и базисная двойственно допустимая точка, то, как было отмечено выше, она является решением задачи.

С геометрической точки зрения базисная допустимая точка представляет некоторую вершину выпуклого многогранника, являющегося допустимым множеством для задачи (3.2.1)—(3.2.3). Как пояснялось выше, нужно рассматривать далее те ребра, которые проходят через эту вершину, или, что равносильно, те вершины, которые лежат на других концах этих ребер. Вершина получается, если положить m переменных (небазисных) равными нулю; ребро получается, если положить $m-1$ этих переменных равными нулю. Ребро проходит через вершину, если эти $m-1$ переменных находятся среди тех m, которые соответствуют вершине. Значит, две вершины лежат на одном ребре, если они имеют общими $m-1$ своих небазисных переменных. Это приводит к следующему определению.

III.4.3. Определение. Две базисные точки называются *смежными*, если они представляют различные точки в пространстве и их множества базисных переменных различаются не более чем одним элементом.

Следует заметить, что две симплекс-таблицы могут представлять одну и ту же точку даже в том случае, когда их базисные переменные различны. Действительно, ничто не мешает элементам правого столбца быть равными нулю. Если какое-то b'_j равно нулю, то соответствующее s_j будет нулем, когда небазисные переменные будут нулевыми. Значит, можно поместить его среди небазисных переменных без изменения точки, представленной таблицей.

III.4.4. Ведущие преобразования. Ведущее преобразование есть операция изменения множества базисных переменных на один элемент; иначе говоря, это операция решения $m+1$ уравнений из (3.4.6) относительно $n-1$ переменных s_j, одной из переменных r_i и переменной w; эти переменные выражаются через оставшиеся m переменных. Покажем, как это делается.

Пусть мы хотим сделать s_j небазисной переменной, а r_i — базисной переменной. Решаем уравнение

$$a_{1j}r_1 + a_{2j}r_2 + \ldots + a_{mj}r_m - b_j = -s_j$$

относительно $-r_i$:

$$\frac{a_{1j}}{a_{ij}}r_1 + \ldots + \frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}r_{i-1} + \frac{1}{a_{ij}}s_j + \ldots + \frac{a_{mj}}{a_{ij}}r_m - \frac{b_j}{a_{ij}} = -r_i$$

(предполагаем, конечно, что $a_{ij} \neq 0$). Это новое уравнение будет j-й строкой преобразованной симплекс-таблицы. Для того чтобы получить остальные строки, нужно подставить в них это выражение для r_i. Тогда (предполагаем, что $j \neq 1$) первое уравнение будет иметь вид

$$\left(a_{11} - \frac{a_{1j}}{a_{ij}}\right)r_1 + \ldots + \left(a_{i-1,1} - \frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)r_{i-1} - \frac{a_{1i}}{a_{ij}}s_j + \ldots$$

$$\ldots - \left(b_1 - \frac{b_j}{a_{ij}}\right) = -s_1;$$

аналогично изменятся и другие уравнения (кроме, конечно, j-го). Чтобы получить новую таблицу, мы просто пересчитываем коэффициенты и меняем местами переменные r_i и s_j.

Элемент a_{ij}, который не может быть нулевым, называется *ведущим элементом* преобразования. Само преобразование называется *ведущим преобразованием.* Это преобразование можно коротко изобразить соответствующей диаграммой:

$$\begin{bmatrix} \overset{*}{p} & q \\ r & s \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p} & \dfrac{q}{p} \\ \dfrac{-r}{p} & s - \dfrac{qr}{p} \end{bmatrix}. \qquad (3.4.10)$$

Здесь p представляет ведущий элемент, q — любой другой элемент ведущей строки, r — любой другой элемент ведущего столбца, а s — элемент из строки, соответствующей r, и столбца, соответствующего q. Таким образом, ведущий элемент заменяется на обратный ему элемент $1/p$. Остальные элементы ведущей строки просто делятся на p, а остальные элементы ведущего столбца делятся на p и меняют знак. Наконец, остальные элементы таблицы уменьшаются на произведение элементов той же строки и ведущего столбца, и того же столбца и ведущей строки, деленное на p.

III.4.5. Пример. Пусть дана симплекс-таблица

$$\begin{array}{cccc|l} r_1 & r_2 & r_3 & 1 & \\ \hline 4 & 1 & 3 & 2 & = -s_1, \\ -1^* & 2 & -1 & 4 & = -s_2, \\ 1 & 2 & 2 & 0 & = -s_3, \\ 0 & 1 & 4 & 1 & = -s_4. \end{array} \tag{3.4.11}$$

Она представляет систему уравнений, разрешенную относительно s_1, s_2, s_3, s_4, которые выражены через r_1, r_2, r_3, а мы хотим решить эту систему относительно s_1, r_1, s_3, s_4 и выразить их через s_2, r_2, r_3. Ведущим будет тогда отмеченный звездочкой элемент, который расположен ниже r_1 и левее s_2. Выполняя преобразование, описанное в (3.4.10), и меняя положения r_1 и s_2, получаем таблицу

$$\begin{array}{cccc|l} s_2 & r_2 & r_3 & 1 & \\ \hline 4 & 9 & -1 & 18 & = -s_1, \\ -1 & -2 & 1 & -4 & = -r_1, \\ 1 & 4 & 1 & 4 & = -s_3, \\ 0 & 1 & 4 & 1 & = -s_4. \end{array} \tag{3.4.12}$$

Можно проверить, что система уравнений (3.4.12) равносильна системе (3.4.11).

III. 4.6. Двойственная задача. В III. 4.4 была определена форма преобразования, которое нужно произвести над симплекс-таблицей для того, чтобы система уравнений, представляемая строками новой таблицы, была равносильна системе, представляемой старой таблицей. С другой стороны, мы говорили выше, что таблица может быть использована для представления пары двойственных задач одновременно. Остается проверить тогда, что уравнения, представляемые столбцами этой таблицы, также будут равносильны старой системе.

Столбец i таблицы (3.4.5) представляет линейное уравнение

$$\sum a_{ij}y_j - c_i = v_i.$$

Здесь, конечно, v_i являются базисными переменными, а y_j — небазисными. Пусть мы хотим менять ролями v_i и y_i, т. е. мы хотим сделать y_j базисной переменной, а v_i небазисной. Как и выше, выражаем из этого уравнения y_j через v_i и остальные y_j и получаем

$$-\frac{a_{i1}}{a_{ij}}y_1-\ldots-\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}y_{j-1}+\frac{1}{a_{ij}}v_i+\ldots+\frac{c_i}{a_{ij}}=y_j.$$

Подставим это значение для y_j в остальные уравнения; тогда для первого столбца получим (предполагая, конечно, $i\neq 1$)

$$\left(a_{11}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right)y_1+\ldots+\frac{a_{1j}}{a_{ij}}v_i+\ldots-\left(c_1-\frac{c_ia_{1j}}{a_{ij}}\right)=v_1;$$

для остальных столбцов получаются аналогичные результаты. Если представить эти преобразования схематически, как в (3.4.10), то получаем диаграмму

$$\begin{bmatrix} p & q\\ r & s\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\frac{1}{p} & \frac{q}{p}\\ -\frac{r}{p} & s-\frac{qr}{p}\end{bmatrix}.$$

Но это в точности схема (3.4.10). Таким образом, преобразование, которое сохраняет прямую задачу (3.2.1)—(3.2.3), будет сохранять и двойственную задачу (3.2.4)—(3.2.6). Иначе говоря, любая симплекс-таблица, полученная при помощи ведущих преобразований, будет представлять пару двойственных задач одновременно.

III. 5. АЛГОРИФМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Мы дали описание основного ведущего преобразования, которое является главным орудием симплекс-метода. Теперь нужно установить, как пользоваться этим орудием. В самом деле, симплекс-таблица будет, вообще говоря, иметь много ненулевых элементов, которые могут быть использованы в качестве ведущих; необходимо правило, указывающее, какой из них следует брать.

Обращаясь к геометрической модели, мы замечаем, что каждую из $m+n$ переменных $x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_n$ можно считать представляющей граничную гиперплоскость допустимого множества, т. е. ту гиперплоскость, где эта переменная обращается в нуль. Тогда точка пересечения m таких гиперплоскостей (если считать их независимыми) является базисной точкой допустимого множества. Если все остальные переменные также неотрицательны, то базисная точка действительно является базисной допустимой точкой, т. е. будет принадлежать допустимому множеству.

Выбор ведущих преобразований будет преследовать две цели. Сначала, начиная с базисной точки, мы должны двигаться к базисной допустимой точке. Затем, имея базисную допустимую точку, мы должны стараться улучшить (увеличить или уменьшить) целевую функцию, придерживаясь все время базисных допустимых точек, пока не будет достигнуто решение (т. е. такая точка, что дальнейшее улучшение невозможно). Мы дадим, таким образом, два набора правил: первый (без всяких априорных предположений) будет давать базисную допустимую точку; второй (в предположении, что мы начинаем с базисной допустимой точки) будет давать решение. Назовем их соответственно случаем I и случаем II.

III. 5.1. Правила выбора ведущего элемента.

(3.5.1) Случай I. Пусть $-b_k$ есть наименьший положительный элемент в правом столбце (кроме, может быть, нижнего). Возьмем произвольный отрицательный элемент a_{i_0k} в k-й строке. Ведущий элемент будет в i_0-м столбце. Далее, для всех $j \geqq k$, для которых $-b_j/a_{i_0j}$ отрицательно, пусть j_0 есть то значение j, для которого это отношение наибольшее (т. е. ближе всего к нулю). Тогда $a_{i_0j_0}$ будет искомым ведущим элементом. (Если имеется равенство, то может быть выбран любой из тех элементов, которые дают максимум.)

(3.5.2) Случай II. Пусть c_{i_0} — любой положительный элемент нижней строки (снова исключая, быть может, крайний правый элемент). Ведущий элемент будет в i_0-м столбце. Для всех j, для которых $-b_j/a_{i_0j}$ отрицательно, пусть j_0 есть то значение j, для которого это отношение наибольшее (т. е. ближайшее к нулю). Тогда $a_{i_0j_0}$ будет искомым ведущим элементом. (В случае равенства снова можно выбирать любой из соответствующих элементов.)

III. 5.2. Доказательство сходимости. Теперь докажем, что указанный алгорифм действительно сходится через конечное число шагов. Сделаем предположение о невырожденности, т. е. о том, что ни нижняя строка, ни правый столбец не содержат нулей (снова за исключением правого нижнего элемента).

(3.5.3) В случае I мы докажем, что все элементы правого столбца ниже k-го элемента остаются отрицательными, а k-й элемент уменьшается.

Мы знаем, что для каждого $j \neq j_0$ элемент $-b_j$ будет заменен на

$$-b'_j = -b_j + \frac{a_{i_0j}b_{j_0}}{a_{i_0j_0}}.$$

Мы также знаем, что $-b_{j_0}/a_{i_0j_0}$ отрицательно. Следовательно, если $a_{i_0j} < 0$, то, очевидно, $-b'_j < -b_j$.

Если, с другой стороны, $a_{i_0j} > 0$, то мы знаем (согласно нашему правилу), что для $j \geqq k$ будет

$$-\frac{b_{j_0}}{a_{i_0j_0}} \geqq -\frac{b_j}{a_{i_0j}}.$$

Тогда

$$-b'_j = a_{i_0 j}\left(-\frac{b_j}{a_{i_0 j}}+\frac{b_{j_0}}{a_{i_0 j_0}}\right).$$

Член в скобках будет неположительным. Следовательно, $-b'_j<0$.

Наконец заметим, что $-b_{j_0}$ будет заменено на $-b_{j_0}/a_{i_0 j_0}$, которое, по предположению, отрицательно.

Следовательно, для $j>k$ имеем $b'_j<0$. Кроме того, $-b'_k<-b_k$. Существует только конечное число возможных симплекс-таблиц, и поэтому если продолжать определять ведущие элементы согласно указанному правилу, то в конце концов будет получена таблица, в которой $-b_j<0$ для каждого $j \geqq k$. Тогда преобразуем предыдущую (сверху) строку и т. д., пока все элементы правого столбца не станут неположительными.

(3.5.4) В случае II на тех же основаниях, что и выше, каждое $-b_j$ будет заменено на $-b'_j$, где $-b'_j \leqq 0$. Нижний правый элемент δ будет заменен на

$$\delta' = \delta + \frac{c_{i_0} b_{j_0}}{a_{i_0 j_0}}.$$

Мы знаем, что $c_{i_0}>0$, а $-b_{j_0}/a_{i_0 j_0}<0$. Следовательно, $\delta'>\delta$. Далее δ и δ' являются значениями целевой функции в двух данных базисных допустимых точках. Значит, целевая функция возрастает. Так как имеется только конечное число базисных допустимых точек, мы в конце концов достигнем решения.

Таким образом, мы получаем, что (при предположении о невырожденности) если можно продолжать находить ведущие элементы согласно правилам из III.5.1, то алгорифм симплекс-метода даст решение задачи линейного программирования через конечное число шагов. Однако может случиться, что наборы правил (3.5.1) и (3.5.2) осуществить не удастся. Здесь могли бы не пройти два пункта. В случае I может оказаться, что все элементы строки, кончающейся положительным элементом, неотрицательны. В случае II может оказаться, что в столбце, имеющем положительный нижний элемент, все остальные элементы неположительны. В обоих случаях невозможно следовать правилам III.5.1. Мы увидим ниже, что в такой ситуации задача неразрешима (либо по причине недопустимости, либо по причине неограниченности).

Итак предположим, что в случае I все элементы строки, кончающейся положительным элементом, неотрицательны. Эта строка представляет уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i - b_j = -s_j. \tag{3.5.5}$$

Тогда все a_{ij} и r_i, по предположению, неотрицательны, а $-b_j$ положительно. Но это означает, что s_j должно быть отрицательно.

Следовательно, ограничения несовместны, т. е. задача является недопустимой.

В случае II предположим, что в столбце с положительным нижним элементом остальные элементы неположительны. Тогда, если коэффициент a_{ij} неположителен, из уравнения (3.5.5) следует, что r_i может неограниченно возрастать без убывания s_j. Так как все элементы данного столбца (кроме нижнего элемента) неположительны, отсюда следует, что мы можем неограниченно увеличивать r_i, оставляя все остальные $r_{i'}$ равными нулю и сохраняя их в допустимом множестве. Но так как нижний элемент указанного столбца положителен, это будет неограниченно увеличивать целевую функцию. Следовательно, задача неограниченна.

III.5.3. Вырожденность. В предыдущих рассуждениях было сделано явное предположение о невырожденности: мы предполагали, что нули никогда не появляются в правом столбце (кроме, быть может, нижнего элемента). Если же нули появятся, то ясно, что некоторые строгие неравенства, которые приводились выше, должны быть заменены нестрогими неравенствами. Например, неравенство $\delta' > \delta$, которое характеризует ведущие преобразования в случае II в предположении невырожденности, должно быть заменено на более слабое $\delta' \geqq \delta$. Но $\delta' > \delta$ означает, что целевая функция возрастает при каждом преобразовании, откуда следует, что мы не можем проходить дважды через одну и ту же базисную допустимую точку. Это гарантирует окончание процесса. Более слабое неравенство $\delta' \geqq \delta$ допускает возможность, что мы выполним ведущие преобразования несколько раз и после всех этих шагов снова получим ту же самую таблицу.

Вырожденность задачи, характеризуемая появлением нулей в правом столбце, возникает тогда, когда более чем m переменных одновременно обращается в нуль, т. е. когда более чем m гиперплоскостей, ограничивающих допустимое множество, проходят через одну точку. Таким образом, невырожденность будет иметь место, если $m+n$ ограничивающих гиперплоскостей находятся в общем положении в пространстве. Но это означает, что в вырожденной задаче произвольно малое возмущение ограничений устранит вырожденность.

Обычно для борьбы с вырожденностью используется метод возмущения. Если одна из строк заканчивается нулем, т. е. если она имеет вид

$$|a_{1j} \; a_{2j} \; \ldots \; a_{mj} \;\; 0| = -s_j,$$

то мы заменяем переменную s_j на переменную $s'_j = s_j + \varepsilon$ и получаем строку

$$|a_{1j} \; a_{2j} \; \ldots \; a_{mj} \;\; -\varepsilon| = -s'_j,$$

где ε предполагается положительным, но очень малым. Далее решаем модифицированную задачу симплекс-методом. Поскольку такие возмущения устраняют всякую вырожденность, задача, измененная конечным числом возмущений, будет этим способом решена (если она имеет решение). Решение будет функцией набора возмущений, т. е. значения переменных $x_1, \ldots, x_m$ будут зависеть от частных значений, которые получают ε, введенные при этих возмущениях. Однако, вообще говоря, значения переменных линейно зависят от этих ε; остается просто положить все ε равными нулю, получая тем самым решение исходной задачи (без возмущений).

На самом деле возмущения, которые заменяют ограничения $s_j \geqq 0$ более слабыми ограничениями $s'_j \geqq 0$, имеют тенденцию увеличивать допустимое множество. Нас интересуют крайние точки допустимого множества; ясно, что при таком возмущении меняются только те из них, для которых $s_j = 0$. В каждой из них (а их только конечное число) возмущение увеличит (или уменьшит) целевую функцию на некоторое кратное числа ε. Предположим теперь, что решение задачи достигается в крайней точке P_1. Существует такое положительное число η, что если P_2 — любая другая крайняя точка (не являющаяся решением задачи), то $w(P_2) \leqq \leqq w(P_1) - \eta$ (где $w(P)$ — значение целевой функции в точке P). Ясно, что если все ε достаточно малы, то целевая функция не может увеличиться более чем на η ни в какой крайней точке. Отсюда следует, что P_2 не может быть решением модифицированной задачи, так как она не была решением исходной задачи. Следовательно, решение модифицированной задачи всегда дает решение исходной задачи.

Вообще говоря, решение задачи методом возмущения, хотя он и полезен (главным образом для доказательства конечности симплекс-алгорифма), — дело достаточно утомительное, особенно из-за того, что никогда не известно, сколь малыми должны быть эти ε, чтобы гарантировать, что решение модифицированной задачи будет давать решение исходной задачи. При проведении вычислений оказывается легче поручать вычислительной машине действовать случайным образом, когда нужно выбирать один из нескольких возможных ведущих элементов. Это гарантирует с вероятностью единица, что зацикливания, которое усложняет алгорифм в подобных случаях, не произойдет (поскольку в действительности такое зацикливание происходит только тогда, когда существует систематический метод выбора ведущего элемента).

III.6. ПРИМЕРЫ

Теперь рассмотрим несколько примеров решения задач линейного программирования симплекс-методом.

III.6.1. Пример.

$$\text{Максимизировать } 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

при условиях
$$x_1 + 3x_2 - x_3 \leqq 6,$$
$$x_2 + x_3 \leqq 4,$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 7,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0.$$

Строим таблицу:

$$\begin{array}{ccc|c|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & -1 & -6 & = -u_1, \\ 0 & 1 & 1 & -4 & = -u_2, \\ 3^* & 1 & 0 & -7 & = -u_3, \\ \hline 5 & 2 & 1 & 0 & = w. \end{array} \qquad (3.6.1)$$

Так как все столбцы имеют положительные элементы в нижней строке, в качестве ведущего можно выбрать любой столбец. Можно, например, выбрать первый столбец: тогда ведущим будет отмеченный звездочкой элемент. Совершая ведущее преобразование, мы получаем таблицу

$$\begin{array}{ccc|c|l} u_3 & x_2 & x_3 & 1 & \\ \hline -1/3 & 8/3 & -1 & -11/3 & = -u_1, \\ 0 & 1 & 1^* & -4 & = -u_2, \\ 1/3 & 1/3 & 0 & -7/3 & = -x_1, \\ \hline -5/3 & 1/3 & 1 & 35/3 & = w. \end{array} \qquad (3.6.2)$$

Снова используя отмеченный элемент в качестве ведущего, получаем

$$\begin{array}{ccc|c|l} u_3 & x_2 & u_2 & 1 & \\ \hline -1/3 & 11/3 & 1 & -23/3 & = -u_1, \\ 0 & 1 & 1 & -4 & = -x_3, \\ 1/3 & 1/3 & 0 & -7/3 & = -x_1, \\ \hline -5/3 & -2/3 & -1 & 47/3 & = w. \end{array} \qquad (3.6.3)$$

Очевидно, что здесь мы получили решение: $(7/3, 0, 4)$. Для этого набора переменных значение w равно $47/3$.

III.6.2. Пример.

$$\text{Минимизировать } 6y_1 + 4y_2 + 7y_3$$

при условиях

$$\begin{aligned} y_1 \qquad + 3y_3 &\geqq 5, \\ 3y_1 + y_2 + \ y_3 &\geqq 2, \\ -y_1 + y_2 \qquad &\geqq 1, \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что эта задача является двойственной для задачи III.6.1. Если записать таблицу (3.6.1) так, чтобы она включала обе задачи, и действовать, как выше, то последняя таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{c|ccc|c|l} & u_3 & x_2 & u_2 & 1 & \\ \hline y_1 & -1/3 & 11/3 & 1 & -23/3 & = -u_1, \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & -4 & = -x_3, \\ v_1 & 1/3 & 1/3 & 0 & -7/3 & = -x_1, \\ \hline -1 & -5/3 & -2/3 & -1 & 47/3 & = w. \\ \hline & \| & \| & \| & \| & \\ & y_3 & v_2 & y_2 & w' & \end{array} \tag{3.6.4}$$

Следовательно, решением задачи III.6.2 будет $(0,\ 1,\ 5/3)$. Значение этой задачи то же, что и задачи III. 6.1, т. е. $47/3$.

III.6.3. Пример. Решить матричную игру

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем задачу максимизации в форме:

$$\text{максимизировать } \lambda$$

при условиях

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + \ x_3 &\geqq \lambda, \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geqq \lambda, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geqq \lambda, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geqq \lambda, \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Это дает таблицу

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \lambda \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccc}
-3 & -5 & -1 & 1 \\
-6 & -2 & -4 & 1 \\
-1 & -4 & -3 & 1 \\
-4 & -2 & -5 & 1^* \\
-1 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
= -u_1, \\
= -u_2, \\
= -u_3, \\
= -u_4, \\
= -1.
\end{array}
\end{array}
\tag{3.6.5}
$$

Здесь нужно прежде всего совершить такое ведущее преобразование, чтобы перевести λ в число базисных переменных, а 1 в число небазисных. К сожалению, элемент, расположенный ниже λ в строке, содержащей 1, равен нулю; поэтому придется сделать не одно, а два ведущих преобразования.

В следующих далее таблицах для обозначения ведущих элементов на каждом шаге используются звездочки:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & u_4 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccc}
1 & -3 & 4 & -1 \\
-2 & 0 & 1 & -1 \\
3 & -2 & 2 & -1 \\
-4 & -2 & -5 & 1 \\
-1 & -1 & -1^* & 0
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
= -u_1, \\
= -u_2, \\
= -u_3, \\
= -\lambda, \\
= -1,
\end{array}
\end{array}
\tag{3.6.6}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & 1 & u_4 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccc}
-3 & -7 & 4 & -1 \\
-3 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -4 & 2 & -1 \\
1 & 3 & -5 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
= -u_1, \\
= -u_2, \\
= -u_3, \\
= -\lambda, \\
= -x_3.
\end{array}
\end{array}
\tag{3.6.7}
$$

Теперь переставим строки и столбцы так, чтобы правый столбец отвечал свободному члену, а нижняя строка — целевой функции λ.

Изменив также знаки в нижней строке, мы получим таблицу

x_1	x_2	u_4	1	
-3	-7	-1	4	$=-u_1$,
-3	-1	-1	1	$=-u_2$,
1	-4	-1^*	2	$=-u_3$,
1	1	0	-1	$=-x_3$,
-1	-3	-1	5	$=\lambda$.

(3.6.8)

Далее действуем по правилам (3.5.1), пока не получим базисную допустимую точку:

x_1	x_2	u_3	1	
-4	-3	-1^*	2	$=-u_1$,
-4	3	-1	-1	$=-u_2$,
-1	4	-1	-2	$=-u_4$,
1	1	0	-1	$=-x_3$,
-2	1	-1	3	$=\lambda$,

(3.6.9)

x_1	x_2	u_1	1	
4	3	-1	-2	$=-u_3$,
0	6^*	-1	-3	$=-u_2$,
3	7	-1	-4	$=-u_4$,
1	1	0	-1	$=-x_3$,
2	4	-1	1	$=\lambda$.

(3.6.10)

Теперь, имея базисную допустимую точку, мы действуем по правилам (3.5.2):

x_1	u_2	u_1	1	
4^*	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$=-u_3$,
0	$1/6$	$-1/6$	$-1/2$	$=-x_2$,
3	$-7/6$	$1/6$	$-1/2$	$=-u_4$,
1	$-1/6$	$1/6$	$-1/2$	$=-x_3$,
2	$-2/3$	$-1/3$	3	$=\lambda$,

(3.6.11)

$$
\begin{array}{r|rrr|r|l}
 & u_3 & u_2 & u_1 & 1 & \\
\hline
v_1 & {}^1/_4 & -{}^1/_8 & -{}^1/_8 & -{}^1/_8 & = -x_1, \\
v_2 & 0 & {}^1/_6 & -{}^1/_6 & -{}^1/_2 & = -x_2, \\
y_4 & -{}^3/_4 & -{}^{19}/_{24} & {}^{13}/_{24} & -{}^1/_8 & = -u_4, \\
v_3 & -{}^1/_4 & -{}^1/_{24} & {}^7/_{24} & -{}^3/_8 & = -x_3, \\
\hline
-1 & -{}^1/_2 & -{}^5/_{12} & -{}^1/_{12} & {}^{13}/_4 & = \lambda. \\
\hline
 & \| & \| & \| & \| & \\
 & y_3 & y_2 & y_1 & \mu &
\end{array}
\qquad (3.6.12)
$$

Таблица (3.6.12) дает решение: оптимальная стратегия игрока I есть $(^1/_8, {}^1/_2, {}^3/_8)$. Двойственные переменные, которые были опущены в промежуточных таблицах, указывают, что оптимальная стратегия игрока II есть $(^1/_{12}, {}^5/_{12}, {}^1/_2, 0)$. Значение игры равно $^{13}/_4$.

В связи с этим примером можно сделать несколько замечаний. Первое состоит в том, что при проведении ведущего преобразования в таблице (3.6.8) поменялись местами две переменные u_4 и u_3. Но следующий шаг меняет местами u_3 и u_1. Мы могли бы сэкономить шаг, сразу поменяв местами u_4 и u_1, и тем самым перейти от таблицы (3.6.8) к (3.6.10) за один шаг. Таким образом, мы видим, что правила (3.5.1) не всегда дают результаты самым быстрым способом; можно сделать видоизменения, которые значительно сократят число необходимых операций (а следовательно, и время).

Второе замечание следующее. Таблица (3.6.8) не дает базисной допустимой точки. Однако она дает базисную двойственно допустимую точку. Можно видоизменить правила (3.5.1) так, чтобы двигаться не по базисным допустимым точкам, а по базисным двойственно допустимым точкам, пока не получим решение. Другими словами, наш метод начинает с базисной двойственно допустимой точки из (3.6.8), но не использует тот факт, что это базисная двойственно допустимая точка. Вместо этого сначала находятся базисные допустимые точки, после чего ищется решение. Если при поиске базисной допустимой точки мы стремимся придерживаться таблиц, соответствующих базисным двойственно допустимым точкам, то ясно, что первая полученная базисная допустимая точка будет решением.

Третье замечание относится к тому, что не нужно следить за двойственными переменными y_j и v_i. На самом деле каждое y_j необходимо будет расположено против соответствующего u_j задачи максимизации; то же верно для v_i и x_i. Действительно, очевидно, что каждое ведущее преобразование сохраняет такое взаимное расположение.

III.6.4. Пример.

$$\text{Максимизировать } x_1 + x_2$$

при условиях
$$-2x_1 + x_2 \leqq -3,$$
$$x_1 - 2x_2 \leqq 4,$$
$$x_1, x_2 \geqq 0.$$

Решение. Мы получаем таблицу

$$\begin{array}{cc|c|l} x_1 & x_2 & 1 & \\ \hline -2 & 1 & -3 & = -u_1, \\ 1 & -2^* & 4 & = -u_2, \\ \hline 1 & 1 & 0 & = w. \end{array} \tag{3.6.13}$$

Делая ведущие преобразования с отмеченными звездочкой элементами, получаем таблицы

$$\begin{array}{cc|c|l} x_1 & u_2 & 1 & \\ \hline -7/4^* & 1/2 & 5 & = -u_1, \\ -1/2 & -1/2 & -2 & = -x_2, \\ \hline 3/2 & 1/2 & 2 & = w, \end{array} \tag{3.6.14}$$

$$\begin{array}{cc|c|l} u_1 & u_2 & 1 & \\ \hline -4/7 & -2/7 & -20/7 & = -x_1, \\ -2/7 & -9/14 & -24/7 & = -x_2, \\ \hline 6/7 & 13/14 & 44/7 & = w. \end{array} \tag{3.6.15}$$

Из (3.6.15) ясно, что эта задача неограниченна.

III. 7. ИГРЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Теория линейного программирования имеет много применений помимо теории игр. Хотя многие из них сами по себе весьма интересны, мы не можем детально на них останавливаться. Укажем здесь одно применение, которое имеет отношение к теории игр.

Рассмотрим игру, в которой допускаются не все смешанные стратегии. Обычно для этого имеются определенные практические основания. Итак предположим, что смешанные стратегии x и y соответственно должны выбираться из некоторых выпуклых многогранников, т. е. из допустимых множеств, определяемых линейными неравенствами и уравнениями.

Если матрица игры есть $A = (a_{ij})$, то задача игрока I состоит в том, чтобы найти

$$\max_{x \in X} \{\min_{y \in Y} xAy^T\}, \tag{3.7.1}$$

где два множества X и Y определяются соответственно неравенствами

$$xB \leqq C, \tag{3.7.2}$$
$$x \geqq 0 \tag{3.7.3}$$

и

$$yE^T \geqq F, \tag{3.7.4}$$
$$y \geqq 0. \tag{3.7.5}$$

Аналогично, задача игрока II состоит в том, чтобы найти

$$\min_{y \in Y} \{\max_{x \in X} xAy^T\}. \tag{3.7.6}$$

Рассмотрим выражение (3.7.1). Величина, стоящая в скобках, очевидно, является функцией x. Точнее, она является значением задачи линейного программирования, целевая функция которой имеет коэффициенты, зависящие от x. По теоремам двойственности из § III.2 мы знаем, что если эта задача допустима и ограничена (что, вообще говоря, не зависит от x), то две задачи

минимизировать $(xA)y^T$ (3.7.7)

при условиях $yE^T \geqq F,$ (3.7.8)

$y \geqq 0$ (3.7.9)

и

максимизировать zF^T (3.7.10)

при условиях $zE \leqq xA,$ (3.7.11)

$z \geqq 0$ (3.7.12)

будут иметь одно и то же значение. Значит, задача игрока I сводится просто к задаче максимизации:

максимизировать zF^T (3.7.13)

при условиях $zE - xA \leqq 0,$ (3.7.14)

$xB \leqq C,$ (3.7.15)

$z, x \geqq 0.$ (3.7.16)

Эта задача, конечно, может быть решена обычными методами линейного программирования (симплекс-методом).

Аналогично, можно показать, что задача (3.7.6) игрока II сводится к задаче минимизации:

$$\text{минимизировать } Cs^T \tag{3.7.17}$$

при условиях
$$sB^T - yA^T \geqq 0, \tag{3.7.18}$$
$$yE^T \geqq F, \tag{3.7.19}$$
$$s, y \geqq 0. \tag{3.7.20}$$

Можно показать, что задача (3.7.17)—(3.7.20) является двойственной для задачи (3.7.13)—(3.7.16). Поэтому если обе эти задачи допустимы, то выражения (3.7.1) и (3.7.6) будут равны и, таким образом, игра с ограничениями будет иметь решение в смешанных стратегиях.

Задачи

1. Записать двойственные задачи для следующих задач линейного программирования:

(а) максимизировать $x_1 + 3x_2 - x_3$

при условиях
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad &\leqq 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -6, \\ x_2 + 3x_3 &\leqq 4, \\ x_i &\geqq 0, \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

(б) минимизировать $2x_1 + 5x_2 + 6x_3$

при условиях
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\geqq 5, \\ 3x_2 + 2x_3 &\geqq 7, \\ x_1 \quad + x_3 &\geqq 3, \\ x_i &\geqq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2. Показать, что задача

минимизировать $2x_1 - 3x_2 + 4x_3$

при условиях
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &\geqq -2, \\ -2x_1 \quad + 3x_3 &\geqq 3, \\ x_1 - 3x_2 \quad &\geqq -4, \\ x_i &\geqq 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

имеет значение, равное нулю. (Указание: показать, что она допустима; затем найти двойственную задачу).

3. Пусть $A(x, y)$ — непрерывная функция x и y в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Пусть $b(y)$ и $c(x)$ определены и непрерывны на $[0, 1]$. Показать, что если $f(x)$ и $g(y)$ — непрерывные неотрицательные функции на $[0, 1]$, такие, что

$$\int_0^1 A(x, y) f(x)\, dx \leqq b(y)$$

и

$$\int_0^1 A(x, y) g(y)\, dy \geqq c(x),$$

то

$$\int_0^1 c(x) f(x)\, dx \leqq \int_0^1 b(y) g(y)\, dy.$$

4. Пусть A — матричная игра, и пусть B — матрица тех же размеров, что и A. Обозначив через $v(A)$ значение игры A, определим

$$\frac{\partial v(A)}{\partial B} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{v(A+\alpha B) - v(A)}{\alpha}.$$

Показать, что

$$\frac{\partial v(A)}{\partial B} = \max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} xBy^T,$$

где X^* и Y^* — множества оптимальных стратегий соответственно игроков I и II для игры A.

5. *Задача о потоке* содержит систему узлов (вершин), пронумерованных числами $0, 1, 2, \ldots, n+1$ и связанных ребрами A_{ij} $(i \neq j)$. Узлы, отмеченные 0 и $n+1$, выделены; они называются соответственно *источником* и *стоком*. Ребра неориентированные, следовательно, A_{ij} и A_{ji} совпадают. Каждое ребро имеет *пропускную способность* C_{ij}, и каждый узел также имеет пропускную способность C_{ii}. (Некоторые ребра A_{ij} могут отсутствовать; в этом случае $C_{ij} = 0$.) *Поток* является вектором $x = (x_{ij})$, в котором компонента x_{ij} представляет количество, «протекающее» от узла i к узлу j. Поток должен, конечно, удовлетворять очевидным ограничениям

$$x_{ij} \leqq C_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ii} = \sum_{j \neq i} x_{ij} = \sum_{j \neq i} x_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{00} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j},$$

$$x_{n+1,\, n+1} = \sum_{j=0}^{n} x_{j,\, n+1}.$$

Значение потока есть число x_{00}. Показать, что $x_{00} = x_{n+1,\, n+1}$.

Разрезом называется набор ребер и узлов, который пересекает любую цепь из ребер и узлов, идущую от источника к стоку. Значение разреза равно сумме пропускных способностей ребер и узлов в соответствующем наборе. Доказать теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе: значение максимального потока равно значению минимального разреза.

6. Максимизировать $2x_1 + 5x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 7, \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 6, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

7. Минимизировать $3x_1 + 6x_2 - x_3$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\geqq 7, \\ 3x_2 + x_3 &\geqq 5, \\ 3x_1 \qquad - x_3 &\geqq 8, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

8. Максимизировать $x_1 + 4x_2 - 6x_3$
при условиях
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\leqq 5, \\ x_1 \qquad + 4x_3 &\leqq 7, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqq 8, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

9. Минимизировать $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
при условиях
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\geqq 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 &\geqq 6, \\ x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &= 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Найти пару оптимальных стратегий и значение для ных игр.

10.
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.
$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Глава IV

БЕСКОНЕЧНЫЕ ИГРЫ

IV.1. ИГРЫ СО СЧЕТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СТРАТЕГИЙ

До сих пор мы имели дело главным образом с конечными играми, т. е. с играми, в которых каждый игрок имеет конечное число стратегий. Перейдем теперь к бесконечным играм.

Рассмотрим прежде всего игры со счетным множеством чистых стратегий. Обычно эти стратегии будут нумероваться целыми положительными числами. Как в конечных играх, пусть a_{ij} представляет выигрыш, получаемый игроком I от игрока II при условии, что игрок I выбирает i-ю стратегию, а игрок II — свою j-ю чистую стратегию.

В этом случае смешанной стратегией игрока I будет последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$, для которой

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, \tag{4.1.1}$$

$$x_i \geqq 0. \tag{4.1.2}$$

Смешанной стратегией игрока II будет последовательность $(y_1, y_2, \ldots)$, определяемая аналогично. Функция выигрыша при смешанных стратегиях (x, y) определяется следующим образом:

$$A(x, y) = \sum_{i, j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \tag{4.1.3}$$

при условии, что этот ряд абсолютно сходится.

Игры со счетным числом стратегий обладают рядом нежелательных свойств, которых нет у конечных игр. Здесь могут возникнуть следующие трудности: во-первых, ряд (4.1.3) не обязательно сходится и может случиться, что суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \tag{4.1.4}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \tag{4.1.5}$$

существуют, но различны. Во-вторых, множества смешанных стратегий не компактны и, таким образом, максимумы и минимумы не будут существовать. Для того чтобы продемонстрировать эти трудности, мы приведем два примера; следует заметить, что тот интерес, который представляют игры со счетным числом стратегий, практически исчерпывается этими примерами.

IV.1.1. Пример. Рассмотрим игру с функцией выигрыша $a_{ij} = \operatorname{sign}(i - j)$. (В сущности эта игра приводит к следующему: каждый игрок выбирает натуральное число; выбравший меньшее число платит противнику единицу.) Такая игра представляется нелепой, но в действительности дело обстоит еще хуже.

Действительно, предположим, что x — смешанная стратегия игрока I. Известно, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_i > 1 - \varepsilon,$$

и, таким образом,

$$\sum_{i=N}^{\infty} x_i < \varepsilon. \tag{4.1.6}$$

Предположим, что если игрок I выбрал смешанную стратегию x, игрок II выберет свою N-ю чистую стратегию. Тогда, очевидно, ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$\sum_i a_{iN} x_i < -1 + 2\varepsilon$$

и поэтому

$$\inf_N \sum_i a_{iN} x_i = -1.$$

Но стратегия x произвольна; следовательно,

$$\sup_x \inf_N \sum_i a_{iN} x_i = -1. \tag{4.1.7}$$

Аналогично можно показать, что

$$\inf_y \sup_N \sum_j a_{Nj} y_j = 1, \tag{4.1.8}$$

и мы видим, что теорема о минимаксе (даже обобщенная путем замены min и max на inf и sup) не имеет места. Заметим также, что каждая строка и каждый столбец доминируются.

IV. 1.2. Пример. Рассмотрим игру с матрицей выигрышей $a_{ij} = i - j$. Как и в примере IV.1.1, все дело здесь в выборе как можно большего числа. Однако это усложнено тем, что функция выигрыша не ограничена.

Рассмотрим теперь стратегию x, определяемую равенствами

$$x_i = \begin{cases} 1/(2i), & \text{если } i = 2^k,\ k - \text{целое}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (4.1.9)$$

Легко проверить, что это действительно стратегия. Теперь для любого j

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} i x_i - \sum_{i=1}^{\infty} j x_i = \sum_{i=1}^{\infty} i x_i - j.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij} = +\infty \qquad (4.1.10)$$

и, следовательно, математическое ожидание выигрыша игрока I, если он применяет смешанную стратегию x, а игрок II любую чистую стратегию, равно бесконечности. Иначе говоря, первый игрок может гарантировать себе бесконечное математическое ожидание выигрыша, как бы ни поступал игрок II. Но игра симметрична, и поэтому игрок II также может обеспечить себе бесконечное математическое ожидание выигрыша. Таким образом, мы имеем патологическую игру. Действительно, пример IV. 1.1 противоречит только теореме о минимаксе, последний же пример противоречит просто здравому смыслу.

IV. 2. ИГРЫ НА КВАДРАТЕ

Важный класс бесконечных игр составляют игры, в которых каждый игрок имеет континуум чистых стратегий, обычно представляемых точками интервала $[0, 1]$. Тогда чистой стратегией каждого из игроков будет число из этого интервала, а функцией выигрыша — вещественнозначная функция $A(x, y)$, определенная на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

Как и прежде, смешанная стратегия представляет собой вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. В нашем случае смешанная стратегия может быть представлена функцией распределения, т. е. функцией F, определенной на $[0, 1]$ и такой, что

$$F(0) = 0; \qquad (4.2.1)$$

$$F(1) = 1; \qquad (4.2.2)$$

$$\text{если } x > x', \quad \text{то } F(x) \geqq F(x'); \qquad (4.2.3)$$

$$\text{если } x \neq 0, \quad \text{то } F(x) = F(x+0). \qquad (4.2.4)$$

Если игрок I использует чистую стратегию x, а игрок II — смешанную стратегию G, то ожидаемый выигрыш равен интегралу

Стильтьеса

$$E(x, G) = \int_0^1 A(x, y)\, dG(y). \tag{4.2.5}$$

Если же игрок II использует чистую стратегию y, а игрок I — смешанную стратегию F, то ожидаемый выигрыш равен

$$E(F, y) = \int_0^1 A(x, y)\, dF(x). \tag{4.2.6}$$

Наконец, если игрок I использует F, а игрок II использует G, то мы имеем

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 A(x, y)\, dF(x)\, dG(y), \tag{4.2.7}$$

считая в каждом случае, что интегралы существуют. Разумеется, если они существуют, то

$$E(F, G) = \int_0^1 E(F, y)\, dG(y) = \int_0^1 E(x, G)\, dF(x). \tag{4.2.8}$$

Оптимальные стратегии и значеиие игры. Как и в конечных играх, можно определить два числа

$$v_{\mathrm{I}} = \sup_F \inf_y E(F, y) \tag{4.2.9}$$

и

$$v_{\mathrm{II}} = \inf_G \sup_x E(x, G). \tag{4.2.10}$$

Возникают два вопроса. 1) Будет ли выполняться равенство $v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}$? 2) Можно ли $\sup\inf$ и $\inf\sup$ заменить на $\max\min$ и $\min\max$ соответственно? Если ответ на оба эти вопроса положителен, то оптимальные смешанные стратегии существуют; если их можно найти, то игра определена столь же хорошо, как и конечные игры. В таком случае, когда ответить утвердительно можно только на первый вопрос, игра имеет значение (общая величина v_{I} и v_{II}), но не имеет оптимальных стратегий. Тем не менее она будет иметь ε-оптимальные стратегии; иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие смешанные стратегии F и G игроков I и II соответственно, что

$$E(F, y) > v - \varepsilon \tag{4.2.11}$$

и

$$E(x, G) < v + \varepsilon \tag{4.2.12}$$

для любого x и y из $[0, 1]$. Таким образом, хотя игра определена не столь же хорошо, сколь конечные игры, она обладает известной устойчивостью.

IV. 3. ИГРЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ЯДРОМ

Среди игр на квадрате самыми очевидными «кандидатами на проверку» являются игры, в которых функция выигрыша $A(x, y)$ (обычно называемая *ядром*) непрерывна. Для таких игр оптимальные стратегии существуют, что мы сейчас и докажем.

IV.3.1. Теорема. *Если ядро* $A(x, y)$ — *непрерывная функция, то* sup inf *и* inf sup *могут быть заменены на* max min *и* min max *соответственно.*

Доказательство. Известно, что функция $A(x, y)$ непрерывна. Поэтому для любой F функция

$$E(F, y) = \int_0^1 A(x, y)\, dF(x)$$

непрерывна по y. Так как интервал $[0, 1]$ компактен, $E(F, y)$ в некоторой его точке будет достигать минимума. Таким образом, sup inf можно заменить на sup min.

По определению v_{I} для любого n существует такое распределение F_n, что

$$\min_y E(F_n, y) > v_{\mathrm{I}} - 1/n.$$

Заметим теперь, что из любой последовательности функций распределения $(F_1, F_2, \ldots)$ на $[0, 1]$ можно извлечь некоторую поточечно сходящуюся подпоследовательность. Пусть F_0 — предел этой подпоследовательности. Ясно, что F_0 удовлетворяет условиям (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3), так как им удовлетворяет каждая из функций F_n. С другой стороны, F_0 не обязательно удовлетворяет (4.2.4), потому что это свойство не сохраняется при предельном переходе. Тем не менее определим функцию $\bar{F}_0$ следующим образом:

$$\bar{F}_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ F_0(x+0), & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1; \end{cases} \tag{4.3.1}$$

легко видеть, что $\bar{F}_0$ является стратегией. Функции F_0 и $\bar{F}_0$ отличаются только в точках разрывов; но так как эти функции монотонны, точки их разрывов образуют счетное множество и поэтому для всех y

$$\int_0^1 A(x, y)\, d\overline{F}_0(x) = \int_0^1 A(x, y)\, dF_0(x).$$

Функция $A(x, y)$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна. Ввиду того что F_0 является пределом подпоследовательности из F_n, мы имеем

$$\int_0^1 A(x, y)\, dF_0(x) = \lim_n \int_0^1 A(x, y)\, dF_n(x).$$

Но последний предел не меньше v_{I} для каждого значения y. Таким образом,

$$\min_y E(\overline{F}_0, y) \geqq v_{\mathrm{I}} \tag{4.3.2}$$

и на $\overline{F}_0$ достигается требуемый максимум.

Аналогично можно показать, что $\inf \sup$ можно заменить на $\min \max$.

IV.3.2. Теорема. *Если ядро $A(x, y)$ непрерывно, то $v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}$.*

Доказательство. Для любого целого числа n рассмотрим $[(n+1) \times (n+1)]$-матрицу $A_n = (a^n_{ij})$, где

$$a^n_{ij} = A(i/n, j/n), \quad i, j = 0, \ldots, n. \tag{4.3.3}$$

Игра с матрицей выигрыша A_n имеет значение w_n и оптимальные стратегии $r_n = (r^n_0, \ldots, r^n_n)$ и $s_n = (s^n_0, \ldots, s^n_n)$ игроков I и II соответственно.

Функция $A(x, y)$ непрерывна. Так как квадрат компактен, то A равномерно непрерывна. Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta,$$

то

$$|A(x, y) - A(x', y')| < \varepsilon.$$

Возьмем n столь большим, чтобы $1/n < \delta$. Определим стратегию $F_n(x)$ равенством

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{[nx]} r^n_i \tag{4.3.4}$$

(здесь $[nx]$ обозначает целую часть числа nx).

Для любого y положим $j=[ny]$. Ясно, что

$$E(F_n,\ j/n)=\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^n r_i^n > w_n, \tag{4.3.5}$$

и так как $|y-j/n|<\delta$,

$$|A(x,\ y)-A(x,\ j/n)|<\varepsilon,$$

имеем

$$|E(F_n,\ y)-E(F_n,\ j/n)|<\varepsilon.$$

Следовательно, для любого y

$$E(F_n,\ y)>w_n-\varepsilon$$

и поэтому

$$v_{\mathrm{I}}>w_n-\varepsilon. \tag{4.3.6}$$

Аналогично можно показать, что

$$v_{\mathrm{II}}<w_n+\varepsilon. \tag{4.3.7}$$

Из двух последних неравенств получаем

$$v_{\mathrm{I}}>v_{\mathrm{II}}-2\varepsilon.$$

Но из того, что $v_{\mathrm{I}}\leqq v_{\mathrm{II}}$ и ε произвольно, следует, что

$$v_{\mathrm{I}}=v_{\mathrm{II}}. \tag{4.3.8}$$

Из доказательства теоремы IV.3.2 следует, что, во-первых,

$$v=\lim_n w_n \tag{4.3.9}$$

и, во-вторых, что стратегии F_n аппроксимируют оптимальную стратегию сколь угодно точно. В этом смысле матричные игры аппроксимируют непрерывную игру $A(x, y)$. Если ядро очень гладкое, то может оказаться, что уже при очень небольшом n аппроксимация будет достаточно хорошей. С другой стороны, если ядро слишком нерегулярно, то для хорошей аппроксимации требуются большие значения n. Методы, в большинстве случаев используемые для решения матричных игр (метод фиктивного разыгрывания и симплекс-метод), не позволяют достаточно быстро решать игры размером, скажем, 100×100. Таким образом, предпочтительнее было бы находить решения таких игр аналитически. К сожалению, общих методов для этого пока не существует. Развитие таких методов — одна из насущных задач на сегодня. Было бы также желательно найти способ выяснения того, может ли оптимальная стратегия F быть ступенчатой функцией, т. е. достаточно ли конечного числа чистых стратегий или же должны использоваться непрерывные функции распределения. Следующие параграфы показывают, каких успехов можно добиться в этих направлениях.

IV. 4. ВОГНУТО-ВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

IV. 4.1. Определение. Говорят, что игра на квадрате *вогнуто-выпукла*, если ее ядро $A(x, y)$ вогнуто по x при каждом значении y и выпукло по y при каждом значении x.

По существу вогнуто-выпуклая игра должна иметь седлообразное ядро. Так как ядро седлообразно, следует ожидать, что игра будет иметь седловую точку в чистых стратегиях. То, что это действительно так, доказывается — при дополнительном предположении непрерывности — следующим образом.

IV.4.2. Теорема. *Пусть вогнуто-выпуклая игра $A(x, y)$ непрерывна. Тогда она имеет оптимальные чистые стратегии.*

Доказательство. Так как игра непрерывна, она имеет оптимальные стратегии. Пусть ими будут F и G для игроков I и II соответственно. Теперь положим

$$x_0 = \int_0^1 x\,dF(x), \tag{4.4.1}$$

$$y_0 = \int_0^1 y\,dG(y). \tag{4.4.2}$$

Так как функция A вогнута по x, то для любой заданной y существует такое α, что функция

$$B_y(x) = A(x, y) - \alpha x$$

достигает своего максимального значения (при фиксированной y) в точке x_0. Мы имеем

$$E(F, y) = \int_0^1 (B_y(x) + \alpha x)\,dF(x),$$

$$E(F, y) = \int_0^1 B_y(x)\,dF(x) + \alpha \int_0^1 x\,dF(x). \tag{4.4.3}$$

Функция B_y достигает максимума в x_0, следовательно, первый интеграл в равенстве (4.4.3) не превосходит $B_y(x_0)$. Поэтому

$$E(F, y) \leqq B_y(x_0) + \alpha x_0 = A(x_0, y), \tag{4.4.4}$$

откуда следует, что x_0 не хуже F против любой y. Аналогично можно показать, что y_0 не хуже G против любой x. Таким образом, x_0 и y_0 — оптимальные чистые стратегии.

В известном смысле доказательство теоремы IV.4.2 излишне усложнено. Едва ли желательно, чтобы в ее доказательстве использовались смешанные стратегии, в то время как сама она касается лишь чистых стратегий. Поэтому мы дадим доказательство, в котором используются лишь чистые стратегии, при несколько более сильном предположении строгой вогнутости и строгой выпуклости.

IV.4.3. Вариант доказательства теоремы IV.4.2 (в предположении строгой вогнутости и выпуклости).

Для любого значения x существует единственное значение y (ввиду строгой выпуклости), которое минимизирует $A(x, y)$. Обозначим это значение y через $\varphi(x)$. Таким образом, мы имеем

$$A(x, \varphi(x)) = \min_y A(x, y). \tag{4.4.5}$$

Предположим, что функция φ не непрерывна. Пусть, скажем, $\varphi(x)$ разрывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) = y_0$. Тогда существует такая последовательность чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, что x_0 является пределом x_n, а y_0 не является пределом $\varphi(x_n)$. В силу компактности существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\varphi(x_{n_k})$ сходится к y', где $y' \neq y_0$.

Далее,

$$A(x_{n_k}, \varphi(x_{n_k})) < A(x_{n_k}, y_0),$$

а поэтому, переходя к пределу и используя непрерывность A, получаем

$$A(x_0, y') \leqq A(x_0, y_0).$$

Но y_0 — *единственное* значение y, которое минимизирует $A(x_0, y)$. Это противоречие показывает, что $\varphi(x)$ должна быть непрерывной функцией.

Аналогично мы можем определить функцию $\psi(y)$ как значение x, которое максимизирует функцию $A(x, y)$, т. е.

$$A(\psi(y), y) = \max_x A(x, y). \tag{4.4.6}$$

Рассмотрим теперь композицию функций $\psi \circ \varphi$. Очевидно, что это непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя. По теореме Брауэра о неподвижной точке должно существовать такое $\bar{x}$, что

$$\bar{x} = \psi \circ \varphi(\bar{x}).$$

Если мы положим $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$, то последнее будет означать, что

$$\bar{x} = \psi(\bar{y}), \tag{4.4.7}$$

$$\bar{y} = \varphi(\bar{x}). \tag{4.4.8}$$

Но это и значит, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ образуют седловую точку, т. е. являются оптимальными стратегиями.

IV.4.4. Пример. Рассмотрим игру с ядром

$$A(x, y) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y.$$

Легко видеть, что $A_{xx} = -4$, $A_{yy} = 2$, поэтому это игра действительно вогнуто-выпуклая. Мы видим, что

$$A_x = -4x + 3y - 1;$$

полагая это выражение равным нулю, найдем

$$x = \frac{3y - 1}{4}.$$

Это значение x максимизирует A. Однако оно не всегда лежит в единичном интервале, будучи отрицательным при $y < 1/3$. В последнем случае мы получаем максимум, полагая $x = 0$. Следовательно,

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \leqq {}^1/_3, \\ (3y - 1)/4, & \text{если} \quad y \geqq {}^1/_3. \end{cases} \qquad (4.4.9)$$

Аналогично находим

$$A_y = 2y + 3x - 2,$$

откуда следует, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} (2 - 3x)/2, & \text{если} \quad x \leqq {}^2/_3, \\ 0, & \text{если} \quad x \geqq {}^2/_3. \end{cases} \qquad (4.4.10)$$

Теперь легко найти оптимальные стратегии и значение игры:

$$\bar{x} = {}^4/_{17}, \quad \bar{y} = {}^{11}/_{17}, \quad v = {}^{13}/_{17}.$$

IV. 5. ИГРЫ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Выше мы упоминали, что непрерывные игры всегда имеют оптимальные стратегии, но общих аналитических методов их вычисления нет. С другой стороны, в то время как мы не можем быть уверены, что все игры с разрывными ядрами имеют оптимальные стратегии, в некоторых случаях именно разрывность позволяет нам находить оптимальные стратегии (если они существуют) аналитическими методами.

Здесь нас будет интересовать один тип игр на квадрате, называемых *играми с выбором момента времени.* Прототипом такой игры является игра, в которой каждый игрок может сделать только одно действие в течение данного интервала времени. Порядок, в котором игроки действуют, чрезвычайно важен. Этот факт является причиной разрыва ядра вдоль диагонали $x = y$ квадрата.

Рассмотрим игру с ядром $A(x, y)$ вида

$$A(x, y)=\begin{cases} K(x, y), & \text{если} \quad x<y, \\ \varphi(x), & \text{если} \quad x=y, \\ L(x, y), & \text{если} \quad x>y, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

где функция K определена и непрерывна на множестве $0 \leqq x \leqq \leqq y \leqq 1$, функция L определена и непрерывна на множестве $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$, а функция φ непрерывна на $[0, 1]$. Нельзя быть уверенным, что оптимальные стратегии в этой игре существуют. Тем не менее мы можем определить некоторые свойства оптимальных стратегий в предположении, что они существуют.

Пусть F — смешанная стратегия игрока I. Для $y \in [0, 1]$ мы имеем

$$E(F, y)=\int_0^y K(x, y)\,dF(x)+\varphi(y)[F(y)-F(y-0)]+ \\ +\int_y^1 L(x, y)\,dF(x). \tag{4.5.2}$$

Если F — непрерывная функция распределения, мы, разумеется, можем опустить среднее выражение и получим

$$E(F, y)=\int_0^y K(x, y)\,dF(x)+\int_y^1 L(x, y)\,dF(x). \tag{4.5.3}$$

Предположим, что F и G — оптимальные стратегии игроков I и II и что обе они являются непрерывными функциями распределения. Известно, что если F и G оптимальны, а y_0 — точка, в которой

$$G'(y_0)>0, \tag{4.5.4}$$

то

$$E(F, y_0)=v, \tag{4.5.5}$$

где v — значение игры. Теперь, если G' положительна в точке y_0, то она положительна и в некоторой окрестности y_0. Поэтому для любого y, достаточно близкого к y_0, мы будем иметь $E(F, y)=v$. Но это значит, что

$$\partial E(F, y)/\partial y=0. \tag{4.5.6}$$

Уравнение (4.5.6) можно переписать в виде

$$[L(y, y)-K(y, y)]\,F'(y)=\int_0^y K_y(x, y)\,F'(x)\,dx+ \\ +\int_y^1 L_y(x, y)\,F'(x)\,dx \tag{4.5.7}$$

(интегральное уравнение относительно F', которое иногда довольно легко решать).

Предположим теперь, что нам дана игра с ядром вида (4.5.1). Мы не можем гарантировать существование оптимальных стратегий. Мы даже не знаем, будут ли они непрерывными, дискретными или частично непрерывными и частично дискретными распределениями. Однако довольно естественно считать, что оптимальные стратегии F и G являются непрерывными распределениями, а их производные F' и G' положительны на интервалах (a, b) и (c, d) соответственно и равны нулю вне этих интервалов. Теперь мы имеем несколько соотношений, связывающих функции F, G и числа a, b, c, d, v. Вот они:

$$E(F, y) = v \quad \text{для} \quad y \in (c, d), \tag{4.5.8}$$

$$E(F, y) \geqq v \quad \text{для всех} \quad y, \tag{4.5.9}$$

$$E(x, G) = v \quad \text{для} \quad x \in (a, b), \tag{4.5.10}$$

$$E(x, G) \leqq v \quad \text{для всех} \quad x, \tag{4.5.11}$$

$$[L(y, y) - K(y, y)]\, F'(y) = \int_0^y K_y(x, y)\, F'(x)\, dx + \int_y^1 L_y(x, y)\, F'(x)\, dx \quad \text{для} \quad y \in (c, d), \tag{4.5.12}$$

$$[K(x, x) - L(x, x)]\, G'(x) = \int_0^x L_x(x, y)\, G'(y)\, dy + \int_x^1 K_x(x, y)\, G'(y)\, dy \quad \text{для} \quad x \in (a, b). \tag{4.5.13}$$

Конечно, к этим шести соотношениям мы должны добавить ограничения $0 \leqq a < b \leqq 1$, $0 \leqq c < d \leqq 1$; кроме того, F и G должны быть стратегиями. Если вся система имеет решение, то это решение даст нам оптимальные стратегии, а также значение игры. Если решения нет, то мы заключим, что игра либо не имеет оптимальных стратегий, либо, если она их имеет, то они не такого типа, как предполагалось выше.

Иногда ядро кососимметрично, т. е.

$$L(x, y) = -K(y, x), \tag{4.5.14}$$

$$\varphi(x) = 0. \tag{4.5.15}$$

Если это так, то анализ, аналогичный проведенному в § II.6, показывает, что значение игры, если оно существует, должно равняться нулю, а оптимальные стратегии, если они существуют, должны быть одинаковы для обоих игроков. Таким образом, мы будем иметь $F = G$, $a = c$, $b = d$ и $v = 0$, и указанные выше соотношения примут вид

$$E(F, y)=0 \quad \text{для} \quad y \in (a, b), \tag{4.5.16}$$

$$E(F, y) \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad y, \tag{4.5.17}$$

$$[L(y, y)-K(y, y)]\,F'(y)=$$

$$=\int_a^y K_y(x, y)\,F'(x)\,dx+\int_y^b L_y(x, y)\,F'(x)\,dx \quad \text{для} \quad y \in (a, b). \tag{4.5.18}$$

Эта система вместе с обычными ограничениями даст нам решение игры, если такое решение существует.

IV.5.1. Пример. Рассмотрим следующую дуэль. Два дуэлянта («игрока») в момент $t=0$ начинают идти навстречу друг другу. Они встретятся (если ничто не помешает) в момент $t=1$. Каждый имеет пистолет только с одной пулей и может выстрелить в любой момент, когда пожелает. Если ему удалось поразить противника, а сам он невредим, то дуэль немедленно прекращается, и тот, кто выстрелил успешно, является победителем. Если оба дуэлянта промахнулись, то дуэль оканчивается вничью. Если оба стреляли одновременно и каждый поразил противника, то дуэль также считается окончившейся вничью.

Сделаем два предположения. Первое — меткость выстрела при сближении игроков возрастает таким образом, что если какой-либо игрок выстрелил в момент t, то вероятность поражения противника равна t. Второе — дуэль является бесшумной, т. е. игрок не знает, что его противник выстрелил (если, конечно, тот промахнулся).

Найдем ядро этой игры. Если игрок I выбирает момент x, а игрок II — момент $y > x$, то игрок I с вероятностью x попадает в противника (в этом случае его выигрыш равен $+1$). Если он промахнулся (с вероятностью $1-x$), то он будет поражен с вероятностью y (получит выигрыш -1).

Таким образом, мы имеем

$$K(x, y)=x-y+xy. \tag{4.5.19}$$

Очевидно, эта игра симметрична, поэтому

$$L(x, y)=x-y-xy \tag{4.5.20}$$

и

$$\varphi(x)=0.$$

Мы имеем также

$$K_y(x, y)=-1+x, \tag{4.5.21}$$

$$L_y(x, y)=-1-x \tag{4.5.22}$$

и

$$L(y, y)-K(y, y)=-2y^2. \tag{4.5.23}$$

Предположим теперь, что оптимальная стратегия является непрерывной функцией распределения F с положительной производной в интервале (a, b). Тогда

$$-2y^2F'(y) = \int_a^y (-1+x)\,F'(x)\,dx + \int_y^b (-1-x)\,F'(x)\,dx. \tag{4.5.24}$$

Это интегральное уравнение может быть преобразовано в дифференциальное дифференцированием обеих частей, что даст

$$-4yF' - 2y^2F'' = (y-1)\,F' + (y+1)\,F',$$

или после упрощений

$$yF'' = -3F'. \tag{4.5.25}$$

Решение последнего уравнения таково:

$$F'(y) = ky^{-3}. \tag{4.5.26}$$

Теперь нужно найти a, b и k. Предположим, что $b < 1$. Мы знаем, что для всех $y \in (a, b)$

$$E(F,\ y) = 0.$$

Но функция $E(F, y)$ непрерывна по y, откуда следует, что

$$E(F,\ b) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (x - b + bx)\,dF(x) = 0.$$

Но если $b < 1$, то

$$\int_a^b (x - 1 + x)\,dF(x) < 0,$$

и поэтому $E(F, 1) < 0$, что противоречит условию (4.5.17). Таким образом,

$$b = 1. \tag{4.5.27}$$

Так как $b = 1$, то $E(F, 1) = 0$. Ввиду этого

$$k\int_a^1 \frac{2x-1}{x^3}\,dx = 0,$$

откуда следует

$$3a^2 - 4a + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $a = 1$ и $a = 1/3$. Ясно, что значение $a = 1$ невозможно, следовательно,

$$a = 1/3. \tag{4.5.28}$$

Так как F — стратегия, то

$$\int_{1/3}^{1} kx^{-3} = 1,$$

и поэтому

$$k = 1/4. \tag{4.5.29}$$

Это дает нам оптимальную стратегию каждого из двух игроков. Она является непрерывной функцией распределения, определенной следующим образом:

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 1/3, \\ 1/(4x^3), & \text{если} \quad x > 1/3. \end{cases} \tag{4.5.30}$$

Можно непосредственно проверить, что это — решение.

IV.5.2. Пример. Рассмотрим снова дуэль, описанную в предыдущем примере, за одним исключением — дуэль теперь будет шумной, т. е. игрок знает, что его противник выстрелил и промахнулся. В таком случае он, естественно, не стреляет до момента $t = 1$, когда он попадает наверняка. Поэтому, если игрок I выбрал x, а игрок II выбрал $y > x$, то игрок I с вероятностью x побеждает и с вероятностью $1 - x$ проигрывает. Следовательно,

$$K(x, y) = 2x - 1, \tag{4.5.31}$$

$$L(x, y) = 1 - 2y, \tag{4.5.32}$$

$$\varphi(x) = 0. \tag{4.5.33}$$

Мы могли бы пытаться применить к этому примеру рассуждения того же типа, что и к предыдущему. Однако легко видеть, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях. В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} &A(1/2, y) = L(x, y) = 1 - 2y > 0, && \text{если} \quad y < 1/2, \\ &A(1/2, y) = \varphi(1/2) = 0, && \text{если} \quad y = 1/2, \\ &A(1/2, y) = K(1/2, y) = 0, && \text{если} \quad y > 1/2, \end{aligned}$$

и поэтому $1/2$ — оптимальная чистая стратегия.

IV. 6. БОЛЕЕ ВЫСОКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

В последних четырех параграфах рассматривались игры на квадрате, т. е. игры, в которых чистые стратегии каждого игрока образовывали одномерный континуум. Разумеется, любое множество, равномощное континууму, можно взаимно однозначно отобразить на единичный интервал.

Таким образом, любая игра, в которой каждый игрок имеет равномощное континууму множество чистых стратегий, может быть представлена как игра на единичном квадрате. Однако трудность состоит в том, что при этом многие свойства функции выигрыша могут быть потеряны. Мы предпочитаем поэтому сохранить самую естественную структуру множеств стратегий.

Как и прежде, мы будем иметь функцию $A(x, y)$ — ядро игры, которое определено на прямом произведении $X \times Y$ двух множеств чистых стратегий. Смешанной стратегией игрока I будет такая мера μ, заданная на X, что

$$\mu(X) = 1, \tag{4.6.1}$$

и аналогично смешанной стратегией игрока II будет такая мера ν, что

$$\nu(Y) = 1. \tag{4.6.2}$$

Ожидаемый выигрыш определится следующим образом:

$$E(\mu, y) = \int_X A(x, y)\, d\mu(x), \tag{4.6.3}$$

$$E(x, \nu) = \int_Y A(x, y)\, d\nu(y), \tag{4.6.4}$$

$$E(\mu, \nu) = \int_{X \times Y} A(x, y)\, d(\mu \times \nu), \tag{4.6.5}$$

если эти интегралы существуют. Следует заметить, что если интеграл (4.6.5) существует, то он может быть заменен на любой из соответствующих повторных интегралов.

Значение игры и оптимальные стратегии для этих игр определяются точно так же, как и для игр на квадрате. Мы приведем следующие теоремы — непосредственные обобщения соответствующих теорем для игр на единичном квадрате.

IV.6.1. Теорема. *Если множества X и Y компактны, а ядро $A(x, y)$ непрерывно, то $v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}$ и, кроме того, существуют оптимальные стратегии.*

IV.6.2. Теорема. *Если множества X и Y — выпуклые компактные подпространства некоторых линейных пространств, ядро $A(x, y)$ непрерывно, а также вогнуто по x (для каждого y) и выпукло по y (для каждого x), то игра имеет решение в чистых стратегиях.*

Доказательства теорем IV.6.1 и IV.6.2 являются легкими обобщениями доказательств теорем IV.3.1, IV.3.2 и IV.4.2. (Заметим, что эти доказательства не использовали конкретных особенностей структуры множеств чистых стратегий, а только их компактность и выпуклость.) Здесь мы не будем их приводить. Как и прежде, необходимо указать, что общих методов решения непрерывных игр пока не создано, но разрывность очень часто будет давать нам возможность решать такие игры аналитически.

IV.6.3. Пример. Два генерала, командующие одинаковыми армиями, должны бороться за захват трех стратегических пунктов. При этом боевые условия таковы, что та сторона, которая располагает у данного пункта бо́льшим числом солдат, захватывает его. Считается, что обе армии бесконечно делимы, а выигрыш равен просто числу захваченных пунктов.

Множество X будет таким множеством всех упорядоченных троек $x = (x_1, x_2, x_3)$, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{4.6.6}$$

$$x_i \geqq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{4.6.7}$$

Множество Y определяется аналогично. Функция выигрыша есть

$$A(x,\ y) = \operatorname{sign}(x_1 - y_1) + \operatorname{sign}(x_2 - y_2) + \operatorname{sign}(x_3 - y_3). \tag{4.6.8}$$

Это эквивалентно тому, что каждый из игроков выбирает три неотрицательных числа, сумма которых равна 1. Игрок побеждает, если два из его чисел больше, чем соответствующие два числа, выбранные его противником. Если какие-либо два соответствующих числа равны, то это приводит к ничьей.

Мы можем представить множество X равносторонним треугольником (рис. IV. 6.1).

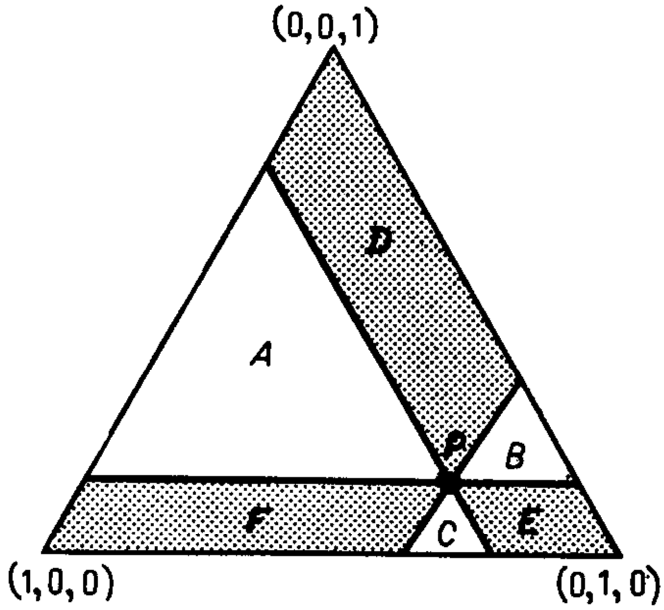

Рис. IV. 6.1.

Можно заметить, что если игрок выбирает некоторую точку P (как показано на рисунке), то он победит, если его противник выберет любую точку, содержащуюся в областях D, E и F, и проиграет, если его противник выберет любую точку, содержащуюся в областях A, B и C. (При выборе противником точек на отрезках, разделяющих эти области, игра заканчивается вничью.)

Предположим, что оптимальные стратегии существуют и что они являются непрерывными распределениями, которые могут быть представлены интегралом Лебега от некоторой функции f, положительной внутри некоторого связного множества M и равной нулю вне его.

Предположим, далее, что f положительна в окрестности точки P. Если $P' = P + \Delta P$ — любая другая точка из этой окрестности, то мы знаем (ввиду симметрии игры), что

$$E(\mu, P) = E(\mu, P') = 0.$$

Тот факт, что $E(\mu, P) = 0$, означает

$$\int\limits_{A \cup B \cup C} f\, d\sigma = {}^1/_2 \tag{4.6.9}$$

(где σ — мера Лебега). Аналогично

$$\int\limits_{A' \cup B' \cup C'} f\, d\sigma = {}^1/_2, \tag{4.6.10}$$

где A', B', C' — множества точек, которые «выигрывают» у P'.

Из рис. IV.6.2 легко усмотреть, что два множества $A \cup B \cup C$ и $A' \cup B' \cup C'$ отличаются просто на три полоски, лежащие между прямыми L_1, L_2, L_3, проходящими через точку P параллельно сторонам треугольника (сплошные линии), и соответствующими пунктирными прямыми, проходящими через точку P'. Если $P = (x_1, x_2, x_3)$, а $\Delta P = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$, то можно заметить, что для малых ΔP разность между левыми частями равенств (4.6.9) и (4.6.10) приближенно можно выразить как

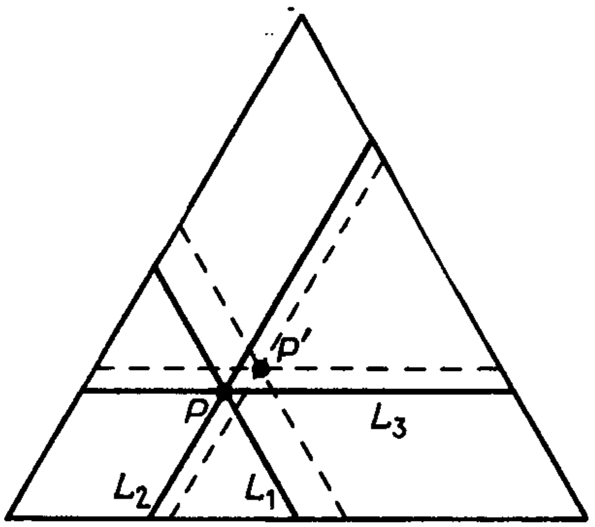

Рис. IV.6.2.

$$\Delta x_1 \int\limits_{L_1} f\, ds + \Delta x_2 \int\limits_{L_2} f\, ds + \Delta x_3 \int\limits_{L_3} f\, ds \tag{4.6.11}$$

(где s — линейная мера Лебега). Выражение (4.6.11) должно обращаться в нуль при всех значениях Δx_1, Δx_2, Δx_3, удовлетворяющих условию

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0. \tag{4.6.12}$$

Это значит, что

$$\int\limits_{L_1} f\, ds = \int\limits_{L_2} f\, ds = \int\limits_{L_3} f\, ds = k. \tag{4.6.13}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что интеграл от функции f имеет одно и то же значение вдоль всех отрезков, параллельных сторонам нашего треугольника и пересекающих множество M.

Теперь мы должны определить множество M. Предположим прежде всего, что замыкание множества M не касается прямой $x_1 = 0$, и найдем точку P этого замыкания с минимальным значением x_1. Поскольку эта точка принадлежит замыканию множества M, в ней должно выполняться равенство (4.6.9). Рассмотрим точку

$$P' = (x_1 - 2\varepsilon,\ x_2 + \varepsilon,\ x_3 + \varepsilon);$$

тогда — с учетом (4.6.11) — мы имеем

$$\int\limits_{A' \cup B' \cup C'} f\, d\sigma = {}^1/_2 + 2\varepsilon \int\limits_{L'_1} f\, ds - \varepsilon \int\limits_{L'_2} f\, ds - \varepsilon \int\limits_{L'_3} f\, ds.$$

Прямая L'_1, очевидно, не пересекает множество M, так как на ней значение первой координаты меньше, чем в точке P, где это значение достигает минимума в M. С другой стороны, хотя бы одна из прямых L'_2 и L'_3 должна (при достаточно малом ε) пересекать M, так как по предположению M связно и не может лежать полностью в области, ограниченной прямыми L_2, L_3 и сторонами треугольника (эта область в точности совпадает с множеством F). Отсюда следует, что

$$\int\limits_{A' \cup B' \cup C'} f\, d\sigma < {}^1/_2$$

и поэтому $E(\mu, P') < 0$. Но это означает, что μ не оптимальна. Таким образом, *замыкание множества M должно касаться трех сторон треугольника*.

Поэтому мы видим, что минимальные значения x_1, x_2 и x_3 на множестве M должны быть равны нулю. Чтобы найти максимальные значения, заметим прежде всего, что если M связно, то каждая прямая $x_1 = a$ при a, лежащих между нулем и максимальным значением r_1 координаты x_1, пересекает M. Но это значит, что интеграл от f по множеству M равен $r_1 k$. Следовательно, $r_1 = 1/k$. Аналогично, максимальным значением x_2 и x_3 (на M) будет $r = 1/k$.

Таким образом, мы нашли, что множество M вписывается в шестиугольник, показанный на рис. IV.6.3 и определенный неравенствами

$$0 \leqq x_i \leqq r, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Пусть теперь P — точка (в замыкании M), для которой $x_3 = r$. Можно заметить, что

$$E(\mu,\ P) = E(\mu,\ Q),$$

где $Q = (0, 1 - r, r)$, так как это выражение постоянно вдоль прямой PQ. На рисунке пунктирная прямая, проходящая через Q, делит M на две части. Та часть M, которая лежит выше этой прямой, состоит из точек, которые «проигрывают» точке Q; часть, которая лежит ниже этой прямой, состоит из точек, которые «выигрывают» у Q. Следовательно, интеграл от f по верхней части M должен быть равен 1/2. Далее, все прямые $x_2 = a$ при a из интервала $(0, 1-r)$ пересекают эту часть; поэтому интеграл от f по этой части равен $k(1-r)$. Следовательно,

$$(1-r)/r = {}^1/_2,$$

так что

$$r = {}^2/_3. \tag{4.6.14}$$

Таким образом, мы нашли, что M должно быть связным множеством, вписанным в шестиугольник $0 \leqq x_i \leqq {}^2/_3$. Функция f такова, что она равна нулю вне множества M и положительна на M, а интеграл от f вдоль любой прямой, параллельной одной из сторон треугольника и пересекающей M, равен 3/2.

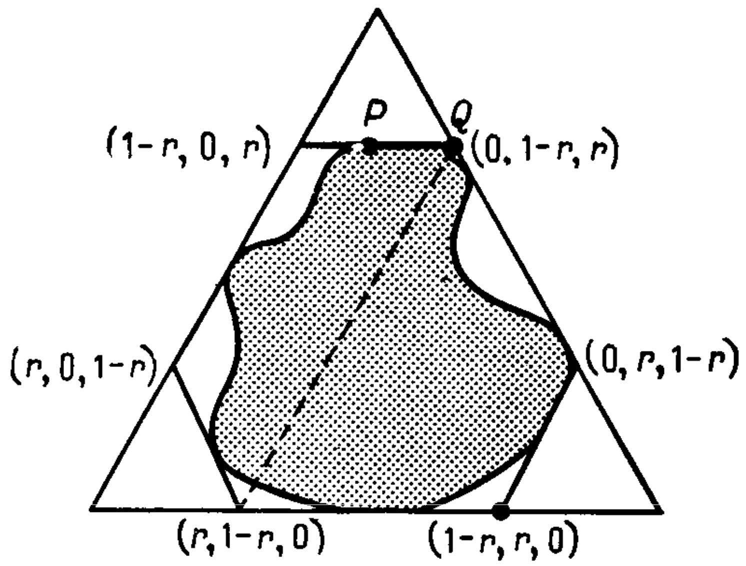

Рис. IV. 6.3.

Эти соображения еще не определяют f или M однозначно; вообще говоря, существует много оптимальных стратегий. Мы можем, например, считать, что M — круг (ясно, что шестиугольник правильный), а f является функцией, зависящей только от расстояния от центра круга. Тогда, если f выбрана так, что ее интеграл одинаков вдоль всех прямых одного направления, то очевидно, что он одинаков вдоль всех прямых, которые пересекают M.

Рассмотрим теперь круг $x^2 + y^2 \leqq 1$. Нам нужно найти такую функцию $f(R)$, что для любого $x \in (-1, 1)$ интеграл

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2)\, dy \tag{4.6.15}$$

постоянен. Если мы произведем замену переменных

$$y = t\sqrt{1-x^2},$$

то получим

$$R = x^2 + y^2 = x^2 + t^2 - t^2x^2,$$

и интеграл (4.6.15) примет вид

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, f(x^2+t^2-t^2x^2)\, dt.$$

По условию этот интеграл не зависит от x, поэтому мы продифференцируем его по x и положим производную равной нулю. Производная, разумеется, представляет собой интеграл; достаточно положить подинтегральное выражение равным нулю. Таким образом, мы получаем дифференциальное уравнение

$$xf(R) = 2x(1-x^2)(1-t^2)f'(R),$$

которое приводится к виду

$$f(R) = 2(1-R)f'(R).$$

Решение этого уравнения есть

$$f(R) = C/\sqrt{1-R} = C/\sqrt{1-r^2}.$$

Применим это к нашей задаче. Мы тем не менее должны помнить, что радиус круга, с которым мы имеем дело, равен только третьей части единицы. Таким образом, мы имеем

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = C/\sqrt{1-9r^2},$$

где

$$r^2 = (x_1 - {}^1/_3)^2 + (x_2 - {}^1/_3)^2 + (x_3 - {}^1/_3)^2. \tag{4.6.16}$$

Константу C легко вычислить, вспомнив, что интеграл вдоль прямой должен равняться ${}^3/_2$; это дает $C = {}^9/_2$. Таким образом, оптимальная стратегия равна

$$f = 9/(2\sqrt{1-9r^2}) \tag{4.6.17}$$

для точек таких, что $r \leqq {}^1/_3$, и равна 0 вне этого множества.

Задачи

1. Пусть $K(x, y)$ — ядро игры на единичном квадрате. Предположим, что K имеет непрерывные производные n-го порядка и что

$$\partial^n K/\partial y^{n'} \geqq 0$$

на всем единичном квадрате. Показать, что игрок II имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более чем $n/2$ точек (при условии, что если используется концевая точка интервала, то она считается за половину точки).

а) Предположим сначала, что $\partial^n K/\partial y^n > 0$. Предположим, что $F(x)$ является оптимальной стратегией игрока I. Показать, что любая стратегия, оптимальная против F, может использовать не более $n/2$ точек.

б) Будем считать теперь, что $\partial^n K/\partial y^n \geqq 0$. Пусть $L_\varepsilon(x, y) = K(x, y) + \varepsilon y^n$, где $\varepsilon > 0$. Пусть G_ε — оптимальная стратегия игрока II в игре с ядром L_ε. Тогда если G_0 является пределом стратегий G_ε, то G_0 будет оптимальной стратегией игрока II в игре с ядром K. (Аналогично, если F_ε — оптимальная стратегия игрока I в игре с ядром L_ε, а F_0 является пределом F_ε при $\varepsilon \to 0$, то F_0 — оптимальная стратегия в игре с ядром K.)

2. Показать, что если функция K непрерывна и $K_{yy} \geqq 0$ на всем единичном квадрате, то игрок I имеет оптимальную смешанную стратегию, использующую не более двух точек.

а) Показать, что игрок II имеет оптимальную чистую стратегию y_0.

б) Если F — оптимальная стратегия, то $K(x, y_0) = v$ для любой точки x, используемой в F.

в) Если игрок I не имеет оптимальной чистой стратегии, то он должен иметь две такие чистые стратегии x_1 и x_2, что $K_y(x_1, y_0) > 0$ и $K_y(x_2, y_0) < 0$.

г) Игрок I имеет оптимальную смешанную стратегию, использующую только x_1 и x_2.

3. Пусть $P(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$ — ядро игры на единичном квадрате.

а) Если две функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют одинаковые моменты, т. е. если для $i = 1, \ldots, m$

$$F_1^{(i)} = \int\limits_0^1 x^i \, dF_1(x) = \int\limits_0^1 x^i \, dF_2(x) = F_2^{(i)},$$

то F_1 оптимальна тогда и только тогда, когда оптимальна F_2. Аналогично, если $G_1(y)$ и $G_2(y)$ имеют одинаковые моменты, то G_1 оптимальна тогда и только тогда, когда оптимальна G_2.

б) Моменты $F^{(i)}$ любой функции распределения содержатся в выпуклой оболочке кривой, лежащей в m-мерном пространстве и заданной уравнениями $r_i = r^i$.

в) Игроки I и II имеют оптимальные стратегии, использующие самое большее m и n точек соответственно.

г) Выразить функцию $E(F, G)$ через моменты $F^{(i)}$ и $G^{(j)}$.

Показать, что оптимальные стратегии обоих игроков можно вычислить, решая некоторую систему алгебраических уравнений.

4. Тот факт, что игра на единичном квадрате имеет непрерывное или даже рациональное ядро, не дает гарантии, что игроки имеют оптимальные стратегии, использующие только конечное число точек.

а) Если $K(x, y)$ — непрерывная рациональная функция и игрок I имеет оптимальную стратегию, использующую не более m точек, то эта оптимальная стратегия может быть получена из решения системы алгебраических уравнений.

б) Если функция $K(x, y)$ рациональна, а v трансцендентно, то ни один из игроков не имеет оптимальных стратегий, которые используют лишь конечное число точек.

в) Игра с ядром

$$K(x, y) = (1 + x)(1 + y)(1 - xy)/(1 + xy)^2$$

имеет оптимальные стратегии

$$F(x) = (4/\pi) \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$
$$G(y) = (4/\pi) \operatorname{arctg} \sqrt{y},$$

а значение игры равно $4/\pi$.

5. Игра даже с «очень регулярным» ядром не обязательно имеет значение. Рассмотрим ядро

$$K(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < y < x + 1/2, \\ 0, & \text{если} \quad x = y \text{ или } y = x + 1/2, \\ +1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Для любой стратегии $F(x)$ существует такое y, что $E(F, y) \leqq 1/3$. (Рассмотреть два случая: $F(1/2 - 0) \leqq 1/3$ и $F(1/2 - 0) > 1/3$.)

б) Для любой $G(y)$ существует такое x, что $F(x, G) \geqq 3/7$. (Рассмотреть три случая: (i) $G(1-0) \geqq 3/7$; (ii) $G(1-0) < 3/7$, а $G(1/2 - 0) < 1/7$; (iii) $G(1-0) < 3/7$, а $G(1/2 - 0) \geqq 1/7$.)

в) Таким образом, $v_{\mathrm{I}} \leqq 1/3$, а $v_{\mathrm{II}} \geqq 3/7$. Показать, что в действительности значения $1/3$ и $3/7$ достигаются на стратегиях F^* и G^* соответственно, где F^* использует лишь 0, $1/2$ и 1, а G^* — лишь $1/4$, $1/2$ и 1. Найти вероятности, с которыми эти точки используются в F^* и G^*.

6. Найти значение и оптимальные стратегии игры с ядром

$$A(x, y) = \begin{cases} 2x - y + xy, & \text{если} \quad x < y, \\ 0, & \text{если} \quad x = y, \\ x - 2y - xy, & \text{если} \quad x > y. \end{cases}$$

7. Найти метод решения игры-дуэли, в которой каждый игрок имеет две пули вместо одной. Предполагается, что дуэль бесшумна, так что ни один из игроков не знает, выстрелил ли другой (если тот промахнулся).

8. Пусть c_1, c_2, c_3 — положительные числа, удовлетворяющие строгому «неравенству треугольника» $c_i + c_j > c_k$. Рассмотреть следующую игру. Игрок I выбирает неотрицательные числа (x_1, x_2, x_3), сумма которых равна 1. Аналогично игрок II выбирает (y_1, y_2, y_3). Функция выигрыша

$$A(x, y) = c_1 \operatorname{sign}(x_1 - y_1) + c_2 \operatorname{sign}(x_2 - y_2) + c_3 \operatorname{sign}(x_3 - y_3).$$

Найти оптимальные стратегии.

9. Даже игра с рациональной функцией выигрыша может иметь сингулярное решение. Рассмотрим функцию Кантора $C(x)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$C(x/3) = C(x)/2, \qquad C(x) + C(1-x) = 1,$$

если $x_1 \geqq x_2$, то $C(x_1) \geqq C(x_2)$.

а) Для любой интегрируемой функции f

$$\int_0^1 f(x)\, dC(x) = \int_0^{1/3} f(x)\, dC(x) + \int_{2/3}^1 f(x)\, dC(x).$$

б) Если f — произвольная непрерывная функция, то

$$\int_0^1 [2f(x) - f(1 - x/3) + f(x/3)]\, dC(x) = 0.$$

в) Функция

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n [2x^n - (1 - x/3)^n - (x/3)^n] [2y^n - (1 - y/3)^n - (y/3)^n]$$

непрерывна и рациональна для $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. (Для доказательства нужно раскрыть каждое слагаемое и привести подобные члены.) Кроме того, $C(x)$ и $C(y)$ — оптимальные стратегии обонх игроков. Значение игры равно нулю.

г) Пусть $F(x)$ — любая оптнмальная стратегия нгрока I. Функция $E(F, y)$ — аналитнческая функция от y. Следовательно, либо она равна нулю на всем интервале [0, 1], либо нмеет на нем лишь конечное число нулей.

е) Если $E(F, y)$ не обращается в нуль на всем интервале [0, 1], то $C(y)$ не может быть оптнмальной стратегией игрока II.

ж) Тот факт, что $E(F, y) = 0$ на всем интервале [0, 1] для любой оптимальиой стратегии F, позволяет нам вычислнть ее моменты $F^{(i)}$. Следовательно, две любые оптимальные стратегии нмеют одинаковые моменты. (По известной теореме это означает, что любые две оптнмальные стратегии идентичны.) Поэтому C — единственная оптимальная стратегия.

Глава V

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ

V. 1. СТРАТЕГИИ ПОВЕДЕНИЯ

Рассмотрим многоходовую игру. Это может быть весьма простая игра, например «крестики и нолики», столь простая, что научиться играть в нее может даже ребенок. Предположим, однако, что мы хотим сосчитать число стратегий первого игрока. Заметим (пренебрегая симметрией), что на первом ходе он имеет девять альтернатив. Далее для любого из восьми возможных ответов на своем втором ходе у него будет семь альтернатив. Если мы рассмотрим только первые два хода первого игрока, то мы найдем, что у него $9 \cdot 7^8 = 51\,883\,209$ чистых стратегий. Естественно, ни о какой попытке перечислить их не может быть и речи. Даже если мы учтем симметрию, то увидим, что число чистых стратегий в этой игре астрономическое. А ведь эта игра чрезвычайно проста (в практическом смысле слова в противоположность шахматам, которые тоже просты в теоретико-игровом смысле, но практически весьма сложны).

Таким образом, ясно, что чистые стратегии оставляют желать много лучшего. Вспомним определение чистой стратегии: это функция, определенная на совокупности информационных множеств одного игрока и приписывающая каждому информационному множеству число между 1 и k (где k — число альтернатив в данном информационном множестве). Таким образом, если у игрока N информационных множеств и в каждом из них k альтернатив, то общее число чистых стратегий равно k^N, а это число может быть очень большим.

Возвращаясь к примеру с «крестиками и ноликами», мы видим, что никто не играет в эту игру, фактически рассматривая все возможные чистые стратегии (т. е. все возможные последовательности ходов с первого до последнего). Скорее, в нее играют, рассматривая на каждом ходе все возможные альтернативы только для этого хода и выбирая из них наилучшую (исходя из собственного опыта или как-либо иначе).

Итак, сущность упрощения состоит в том, чтобы рассматривать ходы по одному за раз. Этот прием сводит один выбор из $k_1 k_2 \ldots k_N$ возможных стратегий к N выборам из k_i возможных альтернатив в каждом информационном множестве. Это приводит к следующему определению.

V.1.1. Определение. *Стратегией поведения* называется набор N вероятностных распределений, каждое из которых задано на множестве возможиых альтернатив в каждом информационном множестве.

V.1.2. Пример. Игроку сдается карта из колоды в 52 карты; посмотрев на свою карту, он может либо спасовать, либо поставить некоторую фиксированную величину. Общее число чистых стратегий равно 2^{52}; следовательно, множество смешанных стратегий будет иметь размерность $2^{52} - 1$. С другой стороны, стратегия поведения приписывает каждой карте вероятность того, что игрок поставит (т. е. число между 0 и 1). Таким образом, размерность множества стратегий поведения равна 52.

Итак, множество стратегий поведения имеет, вообще говоря, гораздо меньшую размерность, чем множество смешанных стратегий. С другой стороны, необходимо заметить, что при некоторых условиях не все смешанные стратегии можно получить, используя стратегии поведения, как показывает следующий пример.

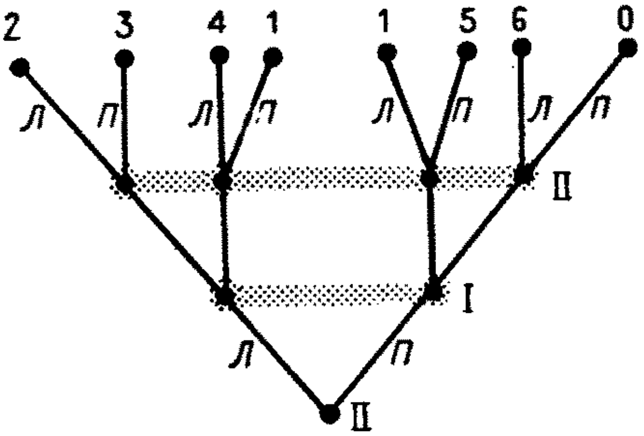

Рис. V.1.1.

V.1.3. Пример. В игре, дерево которой изображено на рис. V.1.1, мы можем обозначить чистые стратегии игрока II через ЛЛ, ЛП, ПЛ, ПП. Смешанная стратегия есть вектор (x_1, x_2, x_3, x_4), удовлетворяющий обычным ограничениям; стратегия поведения есть пара чисел (y_1, y_2), удовлетворяющая лишь условиям $0 \leqq y_i \leqq 1$. Стратегии поведения (y_1, y_2) соответствует смешанная стратегия

$$(y_1 y_2,\ y_1(1-y_2),\ (1-y_1)y_2,\ (1-y_1)(1-y_2)). \tag{5.1.1}$$

Далее, оптимальная стратегия игрока II есть вектор $(0, {}^5/_7, {}^2/_7, 0)$ (см. пример II.5.9). Ясно, что он не может быть представлен в виде (5.1.1). Следовательно, эта игра не имеет решения в стратегиях поведения.

Трудность с примером V.1.3 в некотором смысле состоит в том, что игрок II на своем втором ходе не знает, что он делал на своем первом ходе. Говорят, что такая игра имеет *неполную память*. Эта трудность усложняет положение: нет уверенности, допускаются ли все смешанные стратегии. В бридже два партнера рассматриваются как один игрок, который «забывает» некоторые из своих предыдущих выборов. Так как секретные соглашения запрещены, партнер не может знать, было ли предложение, сделанное его партнером, честным или оно было рассчитано на психологический эффект, хотя он может знать вероятность такого «психологического» предложения.

Мы не будем вдаваться здесь в эти трудности. Тип игр, которые мы собираемся изучать, весьма близок к играм с полной информацией: после заданного числа ходов оба игрока (одновременно) получают полную информацию (которая не забывается), так что в некотором смысле игру можно начинать снова из данной позиции. Общая схема игры будет такова: первым ходит игрок I, затем игрок II (не зная предыдущего хода игрока I); далее производится случайный ход, после чего оба игрока получают полную информацию. (Эта общая схема может меняться, но лишь незначительно.) Каждый из этих циклов будет называться *шагом* игры.

V. 2. ИГРЫ НА РАЗОРЕНИЕ

Теперь мы будем рассматривать игры такого типа, в которых каждый игрок начинает игру, имея некоторые ограниченные ресурсы. На каждом шаге игры ресурсы одного из игроков уменьшаются на единицу. Выигравшим считается тот, кто истощит ресурсы своего противника (разорит его). Возможно также, что на каждом шаге игрок может выиграть очко; тогда выигравшим будет тот, кто первым наберет фиксированное число очков. Ясно, что в первом случае общая величина ресурсов обоих игроков уменьшается на единицу; во втором случае общее число очков возрастает на единицу. Следовательно, эти игры всегда будут заканчиваться после некоторого фиксированного числа ходов.

Целесообразно решать эти игры, двигаясь «от конца к началу». Общая идея состоит в том, что каждый шаг можно рассматривать как отдельную игру. После того как стратегии для этого шага выбраны, выигрыш определяется либо как обычный выигрыш (если многошаговая игра закончена), либо как обязательство разыгрывать следующий шаг игры.

Так как обычно мы имеем дело с математическими ожиданиями, мы можем заменить обязательство разыгрывать игру значением этой отдельной игры.

V.2.1. Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{12} \end{pmatrix}, \tag{5.2.1}$$

где элементы Γ_1 и Γ_2 представляют собой обязательство разыграть соответственно две другие игры с матрицами

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.2.2}$$

Если значения игр Γ_1 и Γ_2 равны соответственно v_1 и v_2, то в смысле математических ожиданий перспектива играть в эти игры эквивалентна их значениям. Поэтому матрицу (5.2.1) мы можем заменить матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{12} \end{pmatrix}. \qquad (5.2.3)$$

Теперь можно решить игру с матрицей (5.2.3); решение даст нам оптимальные стратегии и значение игры (5.2.1).

Таким образом, для игр на разорение мы начнем с нахождения решений во всех играх, в которых оба игрока начинают, имея лишь одну единицу ресурсов. Так как такая игра должна закончиться только за один шаг, ее можно решить непосредственно. Используя значение этой игры, мы можем затем решить все игры, в которых общая величина ресурсов обоих игроков составляет три единицы. Эти решения дадут нам возможность решить игры с величиной ресурсов в четыре единицы, затем в пять и т. д.

Вообще говоря, для игр с небольшим количеством ресурсов (т. е. для игр, которые должны закончиться после небольшого числа шагов) значение и оптимальные стратегии можно найти непосредственно. В играх с большим числом шагов для значения на каждом шаге можно вывести рекуррентное соотношение. Это рекуррентное соотношение обычно имеет вид разностного уравнения, которое может легко поддаваться решению, а может и не поддаваться ему. Если удастся решить это разностное уравнение, то значения игр для каждого шага можно использовать для нахождения оптимальных стратегий. Если разностные уравнения решить нельзя, то тем не менее может оказаться возможным получить разумные приближения к значениям игр и оптимальным стратегиям.

V.2.2. Пример (игра инспектирования). Игрок I (нарушитель) хочет совершить некоторое запрещенное действие; имеется N периодов времени, в которые это действие может быть осуществлено. Игрок II (инспектор), желающий предотвратить это действие, может провести только одну инспекцию в любой из этих периодов времени. Выигрыш равен 1, если запрещенное действие проводится и остается необнаруженным; он равен -1, если нарушитель пойман (это будет в том случае, когда для совершения действия он выбирает тот же самый период времени, что и инспектор для проверки); выигрыш равен нулю, если нарушитель не действует вовсе.

В первом периоде (на первом шаге) игры каждый игрок имеет две альтернативы. Игрок I может предпринимать действие или не предпринимать его; игрок II может инспектировать или не инспектировать. Если игрок I действует и игрок II инспектирует, то игра заканчивается и выигрыш равен -1. Если игрок I действует, а игрок II не инспектирует, то игра заканчивается и выигрыш равен 1. Если игрок I не действует, а игрок II инспектирует, то игрок I может предпринять действие в следующий период времени (в предположении, что $N > 1$) и выигрыш также равен 1. Если игрок I не действует и игрок II не инспектирует, то мы переходим к следующему шагу игры, который отличается от предыдущего только тем, что до конца игры остается меньшее число периодов времени. Следовательно, матрица для первого шага игры выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{5.2.4}$$

Это дает нам следующее рекурсивное определение[1])

$$v_N = \operatorname{val}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{5.2.5}$$

Далее ясно, что $v_{N-1} < 1$; следовательно, матрица (5.2.5) не имеет седловой точки. Поэтому мы можем применить формулу (2.5.24) и получить разностное уравнение

$$v_N = \frac{v_{N-1}+1}{-v_{N-1}+3}, \tag{5.2.6}$$

которое вместе с начальным условием

$$v_1 = 0 \tag{5.2.7}$$

определяет v_N. Мы можем решить это уравнение подстановкой

$$t_N = 1/(v_N - 1), \tag{5.2.8}$$

приводящей к новому разностному уравнению

$$t_N = t_{N-1} - 1/2, \tag{5.2.9}$$

$$t_1 = -1. \tag{5.2.10}$$

Это уравнение имеет очевидное решение

$$t_N = -(N+1)/2,$$

откуда

$$v_N = (N-1)/(N+1). \tag{5.2.11}$$

Таким образом, (5.2.11) дает нам значение игры на каждом шаге. После этого мы можем вычислить оптимальные стратегии каждого игрока на каждом шаге. Действительно, матрица игры (5.2.3) теперь принимает вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & (N-2)/N \end{pmatrix} \tag{5.2.12}$$

---

[1]) Через $\operatorname{val} A$ обозначается значение игры с матрицей A. — *Прим. перев.*

и уравнения (2.5.22) и (2.5.23) дают нам оптимальные стратегии

$$x^N = (1/(N+1),\ N/(N+1)), \tag{5.2.13}$$

для $N \geqq 2$

$$y^N = (1/(N+1),\ N/(N+1)). \tag{5.2.14}$$

V.2.3. Пример (женщины и кошки против мышей и мужчин). В этой фантастической игре группа I состоит из m_1 женщин и m_2 кошек; группа II состоит из n_1 мышей и n_2 мужчин. На каждом шаге каждая группа выбирает представителя. Один из двух выбранных представителей устраняется, согласно следующим правилам: женщина устраняет мужчину; мужчина устраняет кошку; кошка устраняет мышь; мышь устраняет женщину. Игра продолжается до тех пор, пока в одной из групп не останутся игроки только одного типа. Когда группа не имеет больше выбора, другая группа, очевидно, выигрывает. Матрица игры, вообще говоря, будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \Gamma(m_1-1,\ m_2;\ n_1,\ n_2) & \Gamma(m_1,\ m_2;\ n_1,\ n_2-1) \\ \Gamma(m_1,\ m_2;\ n_1-1,\ n_2) & \Gamma(m_1,\ m_2-1;\ n_1,\ n_2) \end{pmatrix}, \tag{5.2.15}$$

и рассуждения, аналогичные рассуждениям примера V.2.2, приводят к рекуррентному соотношению

$$v(m_1,\ m_2;\ n_1,\ n_2) = \frac{v(m_1-1)\,v(m_2-1) - v(n_1-1)\,v(n_2-1)}{v(m_1-1) + v(m_2-1) - v(n_1-1) - v(n_2-1)} \tag{5.2.16}$$

(здесь приняты следующие сокращенные записи:

$$v(m_1-1) \equiv v(m_1-1;\ m_2;\ n_1,\ n_2),$$
$$v(m_2-1) \equiv v(m_1,\ m_2-1;\ n_1,\ n_2),$$
$$v(n_1-1) \equiv v(m_1,\ m_2;\ n_1-1,\ n_2),$$
$$v(n_2-1) \equiv v(m_1,\ m_2;\ n_1,\ n_2-1)),$$

которое вместе с граничными условиями

$$v(m_1,\ m_2;\ n_1,\ 0) = v(m_1,\ m_2;\ 0,\ n_2) = +1,$$

$$\text{если } m_1,\ m_2 > 0; \tag{5.2.17}$$

$$v(m_1,\ 0;\ n_1,\ n_2) = v(0,\ m_2;\ n_1,\ n_2) = -1,$$

$$\text{если } n_1,\ n_2 > 0, \tag{5.2.18}$$

индуктивно определяет значение игры. К сожалению, это нелинейное уравнение в частных разностях решить нелегко. Однако некоторые результаты мы получить можем; например, если $m_2 = n_1 = n_2 = 1$, то мы имеем

$$v(m,\ 1;\ 1,\ 1) = \frac{v(m-1,\ 1;\ 1,\ 1)+1}{-v(m-1,\ 1;\ 1,\ 1)+3} \qquad (5.2.19)$$

и в силу симметрии

$$v(1,\ 1;\ 1,\ 1) = 0. \qquad (5.2.20)$$

Но эти уравнения в точности совпадают с уравнениями примера V.2.2, приведенными выше. Следовательно,

$$v(m,\ 1;\ 1,\ 1) = (m-1)/(m+1) \qquad (5.2.21)$$

и оптимальные стратегии в этом случае также в точности совпадают с приведенными в примере V.2.2.

V. 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Эти игры аналогичны играм, рассмотренным в § V. 2, но отличаются от них в некоторых важных отношениях. Здесь имеется только конечное число различных позиций, но игра может возвращаться в предшествующую позицию, так что теоретически эти игры могут продолжаться бесконечно. Кроме того, на каждом шаге игры обычно определен выигрыш, так что бесконечный выигрыш снова теоретически возможен. Однако правила игры включают рандомизацию, которая гарантирует, что для всех выборов стратегий вероятность бесконечной партии равна нулю и математическое ожидание выигрыша конечно.

Точнее, стохастическая игра есть набор p *«игровых элементов»*, или позиций Γ_k. Каждый игровой элемент представляется $(m_k \times n_k)$-матрицей, элементы которой имеют вид

$$\alpha_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl}\Gamma_l, \qquad (5.3.1)$$

где

$$q_{ij}^{kl} \geqq 0, \qquad (5.3.2)$$

$$\sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1. \qquad (5.3.3)$$

Элемент α_{ij}^k, определенный в (5.3.1), означает, что если в k-м игровом элементе игрок I выбирает свою i-ю чистую стратегию, а игрок II выбирает свою j-ю чистую стратегию, то выигрыш равен a_{ij}^k и, кроме того, с вероятностью q_{ij}^{kl} для $l = 1, \ldots, p$ разыгрывается l-й игровой элемент, а с вероятностью

$$q_{ij}^{k0} = 1 - \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \qquad (5.3.4)$$

партия заканчивается. Условие (5.3.3) утверждает, что на каждом шаге вероятность того, что партия закончится, положительна. Таким образом, вероятность того, что партия окажется бесконечной, равна нулю и математическое ожидание выигрыша конечно.

V.3.1. Определение. Стратегия игрока I представляет собой для $k=1, \ldots, p$ и всех положительных целых t набор m_k-векторов x^{kt}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^{kt} = 1, \tag{5.3.5}$$

$$x_i^{kt} \geqq 0. \tag{5.3.6}$$

Стратегия будет называться *стационарной*, если для всех k векторы x^{kt} не зависят от t.

Аналогично стратегия игрока II есть набор n_k-векторов y^{kt}.

Короче говоря, число x_i^{kt} есть вероятность выбора игроком I на t-м шаге игры в игровом элементе Γ_k своей i-й чистой стратегии. Так как элемент Γ_k может играться несколько раз, игрок I необязательно должен использовать одни и те же вероятности всякий раз, когда этот элемент разыгрывается. Если же, однако, он действительно использует одну и ту же рандомизационную схему всякий раз, когда разыгрывается этот игровой элемент, то говорят, что стратегия стационарна. Естественно, что с точки зрения простоты стационарная стратегия предпочтительнее.

Если дана пара стратегий, то математическое ожидание выигрыша можно вычислить для любого $k=1, \ldots, p$ в предположении, что первым шагом игры будет игровой элемент Γ_k. Таким образом, математическое ожидание выигрыша для пары стратегий можно рассматривать как p-вектор. Как и в обычных матричных играх, это приводит к определению оптимальных стратегий и значения игры, причем значение игры есть p-вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

Ясно, что если вектор значений существует, то можно заменить игровой элемент Γ_k компонентой v_k значения. Отсюда следует, что мы должны иметь

$$v_k = \operatorname{val} B_k, \tag{5.3.7}$$

где B_k есть $(m_k \times n_k)$-матрица (b_{ij}^k), определенная формулой

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} b_{ij}^{kl} v_l. \tag{5.3.8}$$

Это, конечно, лишь неявное определение; мы должны показать, что существует в точности один вектор $(v_1, \ldots, v_p)$, удовлетворяющий уравнениям (5.3.7) и (5.3.8).

V.3.2. Лемма. *Пусть* $A=(a_{ij})$ *и* $B=(b_{ij})$ *суть* $(m\times n)$*-матрицы, удовлетворяющие условию*

$$a_{ij}<b_{ij}+k, \qquad i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n, \tag{5.3.9}$$

для некоторого k. *Тогда* $\operatorname{val} A<\operatorname{val} B+k$.

Доказательство. Пусть $v=\operatorname{val} B$, а y — оптимальная стратегия игрока II в игре B. Тогда для всех i

$$\sum a_{ij}y_j<\sum b_{ij}y_j+k\sum y_j\leqq v+k,$$

так что y дает верхнюю границу проигрыша в игре A, которая меньше $v+k$.

V.3.3. Теорема. *Существует в точности один вектор* $v=(v_1, \ldots, v_p)$, *удовлетворяющий соотношениям* (5.3.7) *и* (5.3.8).

Доказательство. Докажем сначала единственность. Предположим, что существуют два таких вектора, v и w. Пусть k — номер компоненты, для которого величина $|v_k-w_k|$ наибольшая, и предположим для определенности, что $v_k-w_k=c>0$.

Определим две матрицы B_k и $\bar{B}_k$ соотношениями

$$b_{ij}^k=a_{ij}^k+\sum q_{ij}^{kl}v_l, \qquad \bar{b}_{ij}^k=a_{ij}^k+\sum q_{ij}^{kl}w_l.$$

Ясно, что

$$|b_{ij}^k-\bar{b}_{ij}^k|\leqq\sum q_{ij}^{kl}|v_l-w_l|<c$$

и из леммы V.3.2 следует, что

$$\operatorname{val} B_k<\operatorname{val}\bar{B}_k+c.$$

Но так как, по предположению, v и w оба удовлетворяют (5.3.7) и (5.3.8), то

$$v_k<w_k+c.$$

Однако мы предположим, что $v_k-w_k=c$. Это противоречие доказывает единственность.

Докажем теперь существование. Мы построим последовательность векторов, которая будет сходиться к требуемому вектору значений. Определим индуктивно

$$v^0=(0, 0, \ldots, 0), \tag{5.3.10}$$

$$b_{ij}^{kr}=a_{ij}^k+\sum_l q_{ij}^{kl}v_l^r, \quad r=1, 2, \ldots, \tag{5.3.11}$$

$$v_k^{r+1}=\operatorname{val} B_k^r=\operatorname{val}\left(b_{ij}^{kr}\right). \tag{5.3.12}$$

Нам нужно доказать, что, во-первых, последовательность векторов $v^r=\left(v_1^r, \ldots, v_p^r\right)$ сходится и, во-вторых, предел обладает требуемыми свойствами (5.3.7) и (5.3.8). Положим

$$s = \max_{k,\,i,\,j}\left\{\sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl}\right\}. \tag{5.3.13}$$

В силу (5.3.3) и конечности множеств индексов k, i, j имеем $s < 1$. Если мы положим

$$t_r = \max_k \left\{ \left| v_k^{r+1} - v_k^r \right| \right\},$$

то легко показать (по лемме V. 3.2), что $t_r \leqq s t_{r-1}$ и, следовательно, $t_r \leqq s^r t_0$. Отсюда следует, что последовательность векторов v^r есть последовательность Коши и поэтому должна сходиться к пределу; обозначим этот предел через v. Положим теперь

$$w_k = \operatorname{val} B_k = \operatorname{val}(b_{ij}^k),$$

где

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_l q_{ij}^{kl} v_l.$$

Мы увидим, что $w_k = v_k$ для всех k. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать r столь большим, чтобы для всех k выполнялись неравенства

$$\left| v_k^r - v_k \right| < \varepsilon/2, \tag{5.3.14}$$

$$\left| v_k^{r+1} - v_k \right| < \varepsilon/2. \tag{5.3.15}$$

Легко показать, что из (5.3.14) и леммы V.3.2 следует, что для всех k будет $\left| v_k^{r+1} - w_k \right| < \varepsilon/2$; это вместе с (5.3.15) означает, что для всех k

$$| w_k - v_k | < \varepsilon.$$

Но так как ε произвольно, $v_k = w_k$.

Вторая часть доказательства теоремы V. 3.3 конструктивна; она дает нам возможность аппроксимировать значения игровых элементов Γ_k достаточно эффективным способом. Если мы предположим, что игра будет продолжаться как стохастическая, пока мы не сыграем r раз, а затем необходимо заканчивается (если она уже не закончилась), то мы получим игру на разорение (усеченную игру), а не стохастическую игру. Если мы решим эту игру на разорение методами § V. 2, то мы получим значения v^r и оптимальные стратегии в матричных играх B_k^r. Число s, определенное формулой (5.3.13), обладает тем свойством, что *вероятность того, что игра будет продолжаться более r шагов*, какие бы стратегии ни использовались, *не превосходит s^r*. Таким образом, если r достаточно велико, так что s^r пренебрежимо мало, то мы можем *аппроксимировать стохастическую игру игрой, усеченной после r*

шагов. Имеиио в этом смысл последовательности векторов v^r. Кроме того, оптимальиые стратегии x^{kr} и y^{kr} усеченных игр в пределе сходятся к *оптимальным стационарным стратегиям* стохастической игры.

V.3.4. Пример. Игроки I и II имеют вместе пять единиц. На каждом шаге игры игрок I выбирает либо «герб», либо «решетку»; игрок II, не зная выбора игрока I, делает аналогичный выбор. Если выборы совпадают, игрок II платит игроку I либо три, либо одну единицу в зависимости от того, что было выбрано, «герб» или «решетка». Если выборы не совпадают, игрок I платит игроку II две единицы. После каждого шага бросается монета для того, чтобы определить, продолжать игру или закончить ее; кроме того, игра заканчивается, как только один из игроков разорится. Мы накладываем еще дополнительное условие, состоящее в том, что ни один игрок не может платить больше, чем он имеет.

Эту игру можно представить четырьмя игровыми элементами Γ_k, где k — величина, которую имеет игрок I в начале данного шага, следующим образом:

$$\Gamma_1=\begin{pmatrix}3+\Gamma_4/2 & -1\\ -1 & 1+\Gamma_2/2\end{pmatrix}, \tag{5.3.16}$$

$$\Gamma_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1+\Gamma_3/2\end{pmatrix}, \tag{5.3.17}$$

$$\Gamma_3=\begin{pmatrix}2 & -2+\Gamma_1/2\\ -2+\Gamma_1/2 & 1+\Gamma_4/2\end{pmatrix}, \tag{5.3.18}$$

$$\Gamma_4=\begin{pmatrix}1 & -2+\Gamma_2/2\\ -2+\Gamma_2/2 & 1\end{pmatrix}. \tag{5.3.19}$$

Если мы используем индуктивные формулы (5.3.10)—(5.3.12), то в качестве начальных приближений к значениям получим

$$\begin{aligned}
v^0&=(0,\ 0,\ 0,\ 0),\\
v^1&=(0{,}33;\ -0{,}13;\ -0{,}29;\ -0{,}5),\\
v^2&=(0{,}26;\ -0{,}19;\ -0{,}29;\ -0{,}53),\\
v^3&=(0{,}26;\ -0{,}19;\ -0{,}31;\ -0{,}55),\\
v^4&=(0{,}26;\ -0{,}19;\ -0{,}32;\ -0{,}55),
\end{aligned}$$

и v^4 есть вектор значений с точностью до двух десятичных знаков. Теперь мы можем использовать v^4 для нахождения оптимальных стратегий в каждом игровом элементе. Действительно, имеем

$$B_1=\begin{pmatrix} 2{,}72 & -1 \\ -1 & 0{,}91 \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0{,}84 \end{pmatrix},$$

$$B_3=\begin{pmatrix} 2 & -1{,}87 \\ -1{,}87 & 0{,}72 \end{pmatrix},$$

$$B_4=\begin{pmatrix} 1 & -2{,}10 \\ -2{,}10 & 1 \end{pmatrix},$$

и эти матричные игры имеют соответственно следующие оптимальные стратегии:

$$x^1=(0{,}34;\ 0{,}66),\quad y^1=(0{,}34;\ 0{,}66),$$
$$x^2=(0{,}38;\ 0{,}62),\quad y^2=(0{,}38;\ 0{,}62),$$
$$x^3=(0{,}40;\ 0{,}60),\quad y^3=(0{,}40;\ 0{,}60),$$
$$x^4=(0{,}50;\ 0{,}50),\quad y^4=(0{,}50;\ 0{,}50).$$

Эти векторы дают оптимальные (стационарные) стратегии в стохастической игре.

V. 4. РЕКУРСИВНЫЕ ИГРЫ

V.4.1. Рекурсивные игры аналогичны играм на разорение и стохастическим играм, ио содержат некоторые усложнения, отсутствующие в других играх. Как и в стохастических играх, игровые элементы (позиции) могут повторяться; как и в играх на разорение, вероятности окончания на некотором шаге могут быть равны нулю. Но эти два факта делают возможной не только бесконечную партию, но и ее осуществление с положительной вероятностью. Для того чтобы значения были конечны, выигрыш обычно определяется только после окончания игры. В случае бесконечной партии также может быть определен выигрыш a_∞.

Главная трудность в этих играх в противоположность стохастическим состоит в том, что аппроксимация рекурсивных игр усеченными обычно невозможна. Действительно, так как бесконечная партия может иметь положительную вероятность, не существует такого числа r, чтобы эффектом усечения после r шагов можно было бы пренебречь. Кроме того, так как условие (5.3.3) заменяется более слабым условием

$$\sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \leqq 1, \tag{5.4.1}$$

система уравнений, аналогичная (5.3.7) и (5.3.8), необязательно будет иметь единственное решение. Аналогично, последовательность векторов v^r, определенная как в теореме V. 3.3, необязательно будет сходиться к истинному значению игры. Приведем в качестве примера рекурсивную игру с единственным игровым элементом

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.2}$$

В этом случае ясно, что если мы возьмем $v^0 \geqq -1$, то v^1, v^2 и т. д. будут равны v^0, а если мы возьмем $v^0 \leqq -1$, то v^1, v^2 и т. д. будут равны -1. Следовательно, хотя последовательность значений сходится, она необязательно сходится к истинному значению игры, которое равно, очевидно, большему из двух чисел a_∞ и -1.

Точное определение заключается в следующем: рекурсивная игра состоит из конечного числа игровых элементов Γ_k, задаваемых матрицами A_k, элементы которых имеют вид

$$a_{ij}^k = q_{ij}^{k0} a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \Gamma_l, \tag{5.4.3}$$

где q_{ij}^{kl} удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=0}^{p} q_{ij}^{kl} = 1, \tag{5.4.4}$$

$$q_{ij}^{kl} \geqq 0. \tag{5.4.5}$$

Если мы теперь рассмотрим соотношения

$$v_k = \operatorname{val} B_k, \tag{5.4.6}$$

где B_k — матрица с элементами

$$b_{ij}^k = q_{ij}^{k0} a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l, \tag{5.4.7}$$

то мы увидим, что эти соотношения имеют решение, хотя, вообще говоря, и не единственное. Действительно, нетрудно показать, что функция

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_p) = (\operatorname{val} B_1, \ldots, \operatorname{val} B_p)$$

непрерывна (в действительности она удовлетворяет условию Липшица с константой 1). Кроме того, нетрудно показать, что если все v_k принадлежат интервалу

$$\left[\min_{i,j,k} a_{ij}^k, \ \max_{i,j,k} a_{ij}^k\right],$$

то все b_{ij}^k, а следовательно, и значения игр с матрицами B_k также принадлежат этому интервалу. По теореме Брауэра о неподвижной точке существует такой вектор v, что $f(v) = v$. К сожалению, таких векторов может быть несколько, хотя во многих интересных приложениях они единственны. Вообще говоря, вектором значений будет вектор, ближайший в некотором смысле к числу a_∞. (Относительно более подробного изложения, а также доказательств см. Эверетт [V. 6] и Милнор и Шепли [V. 10].) Наконец следует заметить, что могут существовать лишь ε-оптимальные стратегии, а оптимальных стратегий может и не быть вовсе. При $\varepsilon \to 0$ математическое ожидание продолжительности игры может неограниченно возрастать; следовательно, математическое ожидание выигрыша будет иметь разрыв, так как при переходе к предельной стратегии выигрыш будет меняться с v на a_∞.

Чтобы проиллюстрировать некоторые из перечисленных выше трудностей, приведем следующий пример (см. Эверетт [V. 6]). Этот пример представляет собой один из вариантов игр Блотто, называемых так по имени «главного героя» полковника Блотто.

V.4.2. Пример. Полковник Блотто, имея три подразделения, должен захватить вражеский форпост, обороняемый двумя подразделениями. Он должен, однако, заботиться о том, чтобы в то время как он атакует вражеский форпост, противник не захватил его собственный лагерь. Атакующему для успеха необходимо иметь на одно подразделение больше обороняющих сил; если атакующие силы недостаточно велики, то они просто отступают в свой лагерь, и игра начинается снова на следующий день. Выигрыш равен $+1$, если Блотто захватывает вражеский форпост, не теряя при этом свой лагерь, и равен -1, если противник захватывает лагерь Блотто. Для бесконечной партии выигрыш предполагается равным нулю.

Эту рекурсивную игру можно представить одним игровым элементом Γ. Стратегии в Γ соответствуют просто делению на атакующие и обороняющие силы; так, Блотто имеет четыре стратегии, соответствующие 0, 1, 2, 3 атакующим подразделениям, а его противник — три стратегии. Матрица этой игры будет такова:

$$\begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma & \Gamma \\ \Gamma & \Gamma & 1 \\ \Gamma & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.8}$$

Можно показать, что значение этой игры равно $+1$, а ε-оптимальные стратегии Блотто имеют вид $(0, 1-\delta-\delta^2, \delta, \delta^2)$. Чем меньше δ, тем больше у Блотто вероятность победы и тем больше математическое ожидание продолжительности игры. Таким образом, самое важное здесь, по-видимому, терпение. Однако если мы положим $\delta = 0$, то игра может бесконечно повторяться. Таким образом, у Блотто не существует оптимальной стратегии.

V.4.3. Обобщения. Можно обсудить обобщения рекурсивных и стохастических игр в разных направлениях. Одна возможность могла бы состоять в том, чтобы допускать платежи в рекурсивных играх даже тогда, когда игра не кончается. Трудность здесь, конечно, состоит в том, что в некоторых ситуациях не будет существовать математического ожидания выигрыша. Здесь могут встретиться расходящиеся ряды, причем они могут либо расходиться в $+\infty$ или $-\infty$, либо осциллировать. В первых двух случаях мы могли бы сказать, что математическое ожидание бесконечно, но в случае осциллирующих рядов математического ожидания, конечно, не существует.

Вторая возможность может состоять в том, что игровые элементы Γ_k имеют бесконечное число чистых стратегий. Так, Γ_k могут иметь вид игр на квадрате или даже более сложный вид. Эверетт [V. 6] показал, что при некоторых разумных предположениях эти игры также имеют значение и ε-оптимальные стратегии; при этом ε-оптимальные стратегии, однако, могут быть нестационарны.

V. 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Другое возможное обобщение стохастических и рекурсивных игр дают игры, в которых промежуток времени между ходами убывает и, наконец, в пределе получается игра, в которой каждый игрок должен делать ход в каждый момент времени. Ввиду того, что ходы совершаются непрерывно, естественно подозревать, что игровой элемент будет меняться весьма незначительно в течение малых промежутков времени; иначе говоря, игровой элемент меняется непрерывно. Так, если игровой элемент представлен точкой в евклидовом пространстве некоторой размерности, то обычно считают, что стратегии определяют движение этой точки (игрового элемента) посредством дифференциальных уравнений.

Точнее говоря, мы можем дать следующее определение: игровой элемент представляется набором n вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, называемых *переменными состояниями.*

В каждый момент времени t игрок I выбирает набор p вещественных чисел $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, подчиненных, вообще говоря, некоторым ограничениям, обычно имеющим вид $a_i \leqq \varphi_i \leqq b_i$, где a_i и b_i — константы. Аналогично, игрок II выбирает набор q чисел $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q)$. Векторы φ и ψ называются *управляющими переменными.* Управляющие переменные влияют затем на изменение переменных состояния в соответствии с системой дифференциальных уравнений (называемых *кинематическими уравнениями*)

$$\dot{x}_i = f_i(x; \varphi, \psi), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.5.1}$$

где $\dot{x}_i$ — правая производная от x_i по времени.

Дифференциальная игра продолжается в соответствии с кинематическими уравнениями до окончания, которое наступает, когда переменные состояния достигают границы некоторого замкнутого подмножества $\mathscr{C}$ в n-мерном пространстве; эта граница называется *терминальной поверхностью*. В практических приложениях это может означать, что игрок I достаточно близок к игроку II, чтобы поймать его, или же что закончился определенный период времени (если игра должна закончиться после определенного момента времени, то время, конечно, также является переменной состояния). Выигрыш может быть нескольких типов, наиболее общими из которых являются терминальный и интегральный выигрыши, а также их комбинации.

Если игра начинается в момент $t=0$ и заканчивается в момент $t=T$ в точке $(y_1, \ldots, y_n)$, то терминальный выигрыш есть просто функция $G(y_1, \ldots, y_n)$, определенная на терминальной поверхности игры, а интегральный выигрыш имеет вид

$$\int_0^T K(x_1, \ldots, x_n)\,dt. \qquad (5.5.2)$$

Наиболее общий тип выигрыша, который мы будем здесь рассматривать, будет иметь вид функции G плюс интеграл вида (5.5.2).

Основиое уравнение. Как и в случае дискретных многошаговых игр, метод решения дифференциальных игр состоит в замене игровых элементов их значениями с последующим решением рекуррентных уравнений для этих значений. (Эти уравнения теперь будут дифференциальными.)

Предположим теперь, что такие значения существуют; значение игры, которая начинается в точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$, будет обозначаться через $V(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в момент $t=0$ игрок I выбирает управляющую переменную $\bar{\varphi}$, а игрок II — управляющую переменную $\bar{\psi}$. В этом случае после малого интервала времени Δt мы увидим, что переменные состояния будут приближенно равны $x+\Delta x$, где

$$\Delta x_i = f_i(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi})\,\Delta t, \qquad (5.5.3)$$

и (если игра имеет интегральный выигрыш) общий выигрыш будет приближенно равен

$$K(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta t. \qquad (5.5.4)$$

Игра начинается снова из точки $x+\Delta x$, определенной формулой (5.5.3), и с уже достигнутым выигрышем (5.5.4). Если, начиная с момента Δt, используются оптимальные стратегии, то общий выигрыш будет равен

$$K(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta t + V(x+\Delta x).$$

Однако мы знаем, что

$$V(x+\Delta x) \cong V(x) + \sum V_i(x)\,\Delta x_i$$

(где V_i — частные производные от V по x_i), или

$$V(x+\Delta x) \cong V(x) + \sum_{i=1}^{n} V_i(x)\, f_i(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi})\,\Delta t.$$

Следовательно, предполагая, что $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — оптимальные выборы управляющих переменных в момент $t=0$, мы имеем

$$V(x) \cong K(x)\,\Delta t + V(x) + \sum V_i(x)\, f_i(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi})\,\Delta t,$$

или, полагая $\Delta t \to 0$,

$$K(x) + \sum V_i(x)\, f_i(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi}) = 0, \tag{5.5.5}$$

или, что эквивалентно,

$$\max_{\varphi} \min_{\psi} \{K(x) + \sum V_i(x)\, f_i(x;\ \varphi,\ \psi)\} = 0. \tag{5.5.6}$$

Уравнение (5.5.5) или эквивалентное ему уравнение (5.5.6) известно как *основное уравнение*. В уравнении (5.5.6) обычно возможно переставить порядок двух операторов max и min, хотя на практике могут встретиться множества меньшей размерности (*сингулярные поверхности*), на которых это не так. Таким образом, обычно достаточно чистых стратегий; рандомизация обычно необходима только в конечном числе точек в любой партии игры.

Уравнения траекторий. После того как получено основное уравнение (5.5.5), можно (как и в играх на разорение) двигаться назад вдоль траекторий дифференциальных уравнений с терминальной поверхности (как ранее мы двигались вдоль траекторий разностных уравнений). Действительно,

$$K + \sum V_i f_i = 0.$$

Если мы продифференцируем левую часть этого равенства по x_j, то получим сумму членов

$$K_j + \sum_i V_i f_{ij} \tag{5.5.7}$$

(где $K_j = \partial K/\partial x_j$ и $f_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$),

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} f_i, \tag{5.5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(K + \sum_i V_i f_i\right)\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x_j} \tag{5.5.9}$$

и

$$\sum_{l=1}^{q} \frac{\partial}{\partial \psi_l}\left(K + \sum_i V_i f_i\right)\frac{\partial \bar{\psi}_l}{\partial x_j}. \tag{5.5.10}$$

Рассмотрим члены (5.5.9), предполагая, что управляющие переменные φ_k ограничены константами. Мы знаем, что $\bar{\varphi}_k$ будут либо внутри, либо на границе своего интервала ограничений. Если это внутренняя точка, то

$$\partial\left(K + \sum V_i f_i\right)/\partial\varphi_k = 0,$$

потому что $\bar{\varphi}$ выбираются так, чтобы максимизировать выражение в скобках. Если же, с другой стороны, $\bar{\varphi}_k$ лежит на границе, то (за исключением точек сингулярности) $\bar{\varphi}_k$ будет оставаться на границе, так что

$$\partial\bar{\varphi}_k/\partial x_j = 0.$$

Мы видим, что член (5.5.9) равен нулю; аналогично равен нулю член (5.5.10).

Рассмотрим теперь член (5.5.8). Имеем

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

и поэтому

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} f_i = \sum_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{dV_j}{dt}. \qquad (5.5.11)$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $\dot{V}_j$. Если мы прибавим эту величину к выражению (5.5.7) и приравняем результат нулю, то получим уравнения

$$\dot{V}_j = -\left[K_j(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi}) + \sum_i V_i f_{ij}(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi})\right], \qquad (5.5.12)$$

которые вместе с системой

$$\dot{x}_j = f_j(x;\ \bar{\varphi},\ \bar{\psi}) \qquad (5.5.13)$$

называются *уравнениями траекторий* дифференциальной игры. Эти $2n$ уравнений вместе со значением функции G в качестве конечных условий представляют собой формальное решение игры.

Иногда удобнее использовать обратное время $\tau = T - t$ вместо прямого t (так как фактически для систем (5.5.12) и (5.5.13) мы имеем задачу с конечными значениями, а не с начальными значениями).

V.5.1. Пример. Игроки I и II управляют движением точки в евклидовой плоскости, причем каждый сообщает ей свою составляющую скорости, величина которой зависит от положения точки, а направление полностью находится в распоряжении игрока. Скорость точки равна векторной сумме этих составляющих.

Игра заканчивается, когда точка достигнет оси x; выигрыш равен времени, необходимому для завершения игры, плюс величина $x_0^2/8$, где x_0 — абсцисса точки, в которой заканчивается партия.

Если мы обозначим через $u = y$ и $w = x + y$ величины составляющих скорости, которыми управляют соответственно игроки I и II, то получим кинематические уравнения

$$\dot{x} = y\cos\varphi + (x+y)\cos\psi, \qquad \dot{y} = y\sin\varphi + (x+y)\sin\psi$$

и выигрыш

$$\int_0^T dt + x_0^2/8.$$

Таким образом, для всех x и y мы имеем $K = 1$.

Ясно, что если $u > w$, то игрок I всегда может продолжать игру неограниченно. Поэтому мы будем интересоваться только точками в положительном квадранте.

Основное уравнение для этой игры будет следующим:

$$y(V_1\cos\bar{\varphi} + V_2\sin\bar{\varphi}) + (x+y)(V_1\cos\bar{\psi} + V_2\sin\bar{\psi}) = -1. \tag{5.5.14}$$

Для того чтобы максимизировать первое слагаемое левой части (5.5.14), мы должны положить

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, \tag{5.5.15}$$

$$\sin\bar{\varphi} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, \tag{5.5.16}$$

а чтобы минимизировать второе слагаемое — положить

$$\cos\bar{\psi} = -\cos\bar{\varphi}, \tag{5.5.17}$$

$$\sin\bar{\psi} = -\sin\bar{\varphi}. \tag{5.5.18}$$

Если мы подставим эти значения в (5.5.14), то после упрощений получим

$$\sqrt{V_1^2+V_2^2} = 1/x. \tag{5.5.19}$$

Кроме того,

$$f_{11} = \cos\psi, \qquad f_{12} = \cos\varphi + \cos\psi,$$

$$f_{21} = \sin\psi, \qquad f_{22} = \sin\varphi + \sin\psi,$$

и после подстановки в эти выражения (5.5.15)—(5.5.19) мы получим уравнения траекторий

$$\dot{V}_1 = 1/x, \quad \dot{V}_2 = 0, \quad \dot{x} = -x^2V_1, \quad \dot{y} = -x^2V_2.$$

Если вместо прямого времени мы введем обратное время $\tau = T - t$, то мы получим уравнения траекторий в обратном времени

$$\mathring{V}_1 = -1/x, \quad \mathring{V}_2 = 0, \quad \mathring{x} = x^2V_1, \quad \mathring{y} = x^2V_2,$$

где $\mathring{V}_1$ — производная V_1 по τ и т. д.

Кроме того, мы имеем начальные условия, а именно при $\tau = 0$

$$x = x_0, \quad y = 0,$$
$$V_1 = x_0/4, \quad V_2 = \sqrt{1/x_0^2 - x_0^2/16}.$$

Из этих условий следует, что мы должны иметь $x_0 \leqq 2$; это условие в свою очередь означает, что никакая траектория не заканчивается в точке $x_0 > 2$.

Если мы продифференцируем $\overset{\circ}{V}_1$ по τ, то получим

$$\overset{\circ\circ}{V}_1 = \frac{1}{x^2}\overset{\circ}{x} = V_1;$$

это уравнение имеет решение

$$V_1 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau},$$

откуда в свою очередь

$$x = \frac{1}{C_2 e^{-\tau} - C_1 e^{\tau}}.$$

Положив $x_0 = a$ и разрешив начальные условия относительно C_1 и C_2, мы получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{8a}{(4+a^2)\,e^{-\tau} + (4-a^2)\,e^{\tau}}, \\ V_1 &= \frac{4+a^2}{8a}\,e^{-\tau} - \frac{4-a^2}{8a}\,e^{\tau}. \end{aligned} \qquad (5.5.20)$$

Для того чтобы найти y, заметим, что

$$\overset{\circ}{y}/\overset{\circ}{x} = V_2/V_1,$$

откуда, учитывая, что V_2 постоянна вдоль любой *оптимальной* траектории, получаем

$$dy/dx = V_2(0)/V_1.$$

Далее, $V_2(0)$ задано, а V_1 можно найти как функцию x; это преобразование дает нам уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{16a^2}{16-a^4} - x^2}},$$

которое имеет решение

$$y = C_3 - \sqrt{\frac{16a^2}{16-a^4} - x^2}.$$

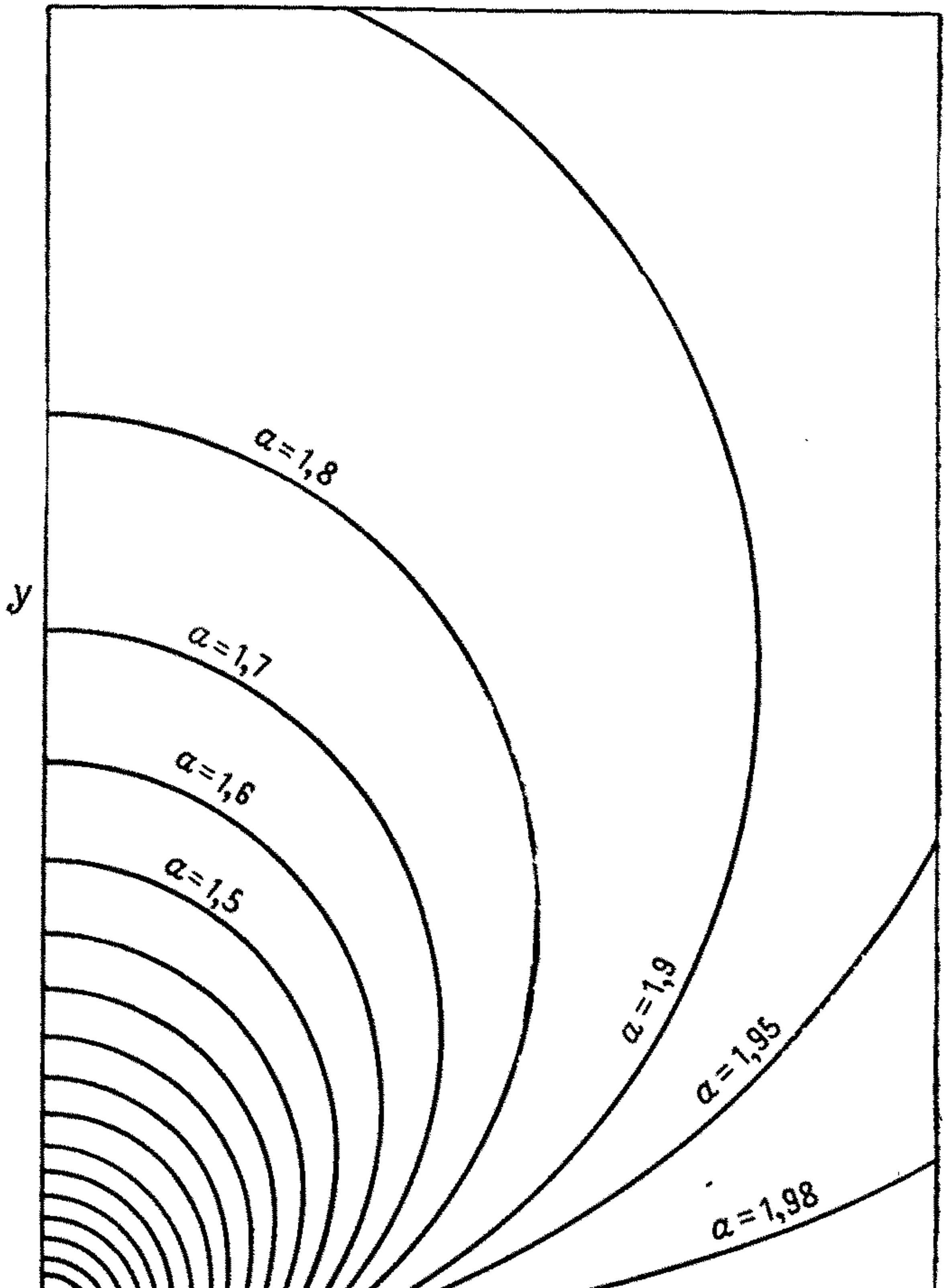

Рис. V.5.1.

Учитывая, что при $y = 0$ будет $x = a$, находим C_3. Таким образом, имеем

$$y = \frac{a^3 \pm \sqrt{16a^2 - 16x^2 - a^4x^2}}{\sqrt{16 - a^4}},$$

или, что эквивалентно,

$$x^2 + \left(y - \frac{a^3}{\sqrt{16 - a^4}}\right)^2 = \frac{16a^2}{16 - a^4}; \qquad (5.5.21)$$

иначе говоря, оптимальная траектория представляет собой окружность с центром на оси y (см. рис. V. 5.1). Значение $V(x, y)$ можно найти, разрешая (5.5.21) относительно a, а затем разрешая (5.5.20) относительно τ; тогда $V(x, y) = \tau + a^2/8$. Можно также найти оптимальные стратегии: оба игрока пытаются следовать касательной к окружности (5.5.21). Игрок I (максимизирующий) толкает вверх (от оси x); игрок II толкает вниз (к оси x).

Задачи

1. Показать, что в рекурсивных играх вектор значений не является единственным вектором, удовлетворяющим функциональному уравнению (5.3.7), и, кроме того, метод последовательных приближений, использованный в стохастических играх, может и не сходиться к вектору значений.

Для доказательства использовать рекурсивную игру с двумя элементами:

$$\Gamma_1 = (-10), \qquad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} +20 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & +20 \\ \Gamma_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}.$$

2. Обобщить результаты, полученные для рекурсивных игр, на игры, в которых выигрыш определен для каждой партии, даже если игра и не заканчивается.

а) *Ловушкой* называется такой игровой элемент или их совокупность, что если элемент ловушки встречается в партии, один из игроков может оставить партию в ловушке, так что выигрыши будут накапливаться и математическое ожидание выигрыша станет неограниченным. Показать, что для игры с тремя игровыми элементами

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & 10 & \Gamma_3 \\ -10 & 0 & -10 \\ \Gamma_3 & 10 & \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = (\Gamma_2 + 1), \qquad \Gamma_3 = (\Gamma_3 - 2),$$

которая имеет ловушки, отображение (5.3.7), определяющее значение игры, не имеет неподвижной точки.

б) Если все выигрыши в игре неотрицательны и игра не имеет ловушек, то существует значение игры.

в) Если выигрыши в игре как положительны, так и отрицательны, то игра может и не иметь значения, даже если в ней нет ловушек. Привести пример. (При «наилучших» стратегиях значение будет осциллировать.)

3. Показать, что если время рассматривать как непрерывное, а не как дискретное, то рекурсивная игра может и не иметь значения, даже если функциональное уравнение (5.3.7) имеет единственное решение. Рассмотреть следующую игру с одним игровым элементом:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Здесь игра должна разыгрываться в течение некоторого (нефиксированного) интервала времени, а затем должна закончиться. Другими словами, каждый игрок выбирает момент для того, чтобы предпринять действие; до этого момента он непрерывно применяет свою третью чистую стратегию.

4. Изучение дифференциальных игр включает не только уравнения траекторий (5.5.12), но и так называемые сингулярные поверхности. Рассмотрим игру на полуплоскости $y \geqq 0$ с терминальной поверхностью $y = 0$ и терминальным выигрышем

$$G(x^*) = 1/(1 + x^{*2}).$$

Пусть кинематические уравнения таковы:

$$\dot{x} = \varphi\left(1 + 2\sqrt{|x|}\right) + \psi, \qquad \dot{y} = -1,$$

где управляющие переменные φ и ψ ограничены интервалом $[0, 1]$. Показать, что ось y — сингулярная поверхность в том смысле, что оптимальные траектории образуют семейство кривых, которые *начинаются* на оси y. Что нужно делать в точке на оси y (где встречаются два оптимальных пути)?

5. Кажется весьма правдоподобным, что любая дифференциальная игра с интегральным или непрерывным терминальным выигрышем должна иметь решение в чистых стратегиях, за исключением, быть может, множества меньшей размерности (сингулярной поверхности). Показать, что это не так.

Рассмотрим игру на полуплоскости $y \geqq 0$ с терминальной поверхностью $y = 0$ и интегральным выигрышем $\int x\,dt$, кинематические уравнения которой таковы:

$$\dot{x} = (\psi - \varphi)^2, \qquad \dot{y} = -1,$$

где, как и ранее, ψ и φ ограничены интервалом $[0, 1]$. Показать, что для любой начальной точки (x_0, y_0) значения в чистых стратегиях удовлетворяют неравенствам

$$v_{\mathrm{I}} \leqq x_0 y_0, \quad v_{\mathrm{II}} \geqq x_0 y_0 + y_0^2/8.$$

Следовательно, для $y > 0$ игра не имеет решения в чистых стратегиях (а также не имеет оптимальных траекторий).

6. Дифференциальная игра называется *игрой качества*, если она имеет только два возможных исхода, например выиграть и проиграть (для игрока I). Таким образом, можно представить себе, что терминальная поверхность $\mathscr{C}$ разделена $(n-2)$-мерным многообразием $\mathscr{K}$ на два множества $\mathscr{W}$ и $\mathscr{L}$. Игрок I пытается закончить игру в $\mathscr{W}$; игрок II — в $\mathscr{L}$.

Вообще говоря, пространство игры R^n будет так разбито на две части, называемые выигрывающей зоной (WZ) и проигрывающей зоной (LZ), что из точки в WZ игрок I может форсировать окончание игры в $\mathscr{W}$; из точки в LZ игрок II может форсировать окончание игры в $\mathscr{L}$. Эти две зоны, вообще говоря, разделены поверхностью $\mathscr{N}$, которая пересекает $\mathscr{C}$ вдоль $\mathscr{K}$.

а) В предположении, что $\mathscr{N}$ гладка, показать, что *вектор нормали* $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ к $\mathscr{N}$ удовлетворяет уравнению

$$\max_{\varphi} \min_{\psi} \sum_i \nu_i f_i(x, \varphi, \psi) = 0$$

(где ν ориентирован в сторону WZ). Вывести для этих игр систему уравнений траекторий, аналогичную (5.5.12).

б) Рассмотреть следующую игру: игроки I и II управляют движением точек P и E соответственно в верхней полуплоскости R^2. Эти две точки могут двигаться в любом направлении со скоростями соответственно 1 и $w < 1$. Игра заканчивается выигрышем игрока I, как только расстояние PE становится меньше d; она заканчивается проигрышем игрока I, как только E достигает прямой $y = 0$.

в) Вывести кинематические уравнения этой игры, если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты P и E соответственно, а φ и ψ — управляющие переменные; описать множество $\mathscr{K}$.

г) Решить эту игру.

Глава VI

ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

VI.1. ОРДИНАЛЬНАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ

В предыдущих четырех главах мы исходили из предположения о том, что два игрока имеют прямо противоположные интересы. Однако даже в том случае, когда игроки образуют замкнутую систему, так что один из них проигрывает то, что выигрывает другой, далеко не очевидно, что их интересы всегда будут прямо противоположны. Так, если один из игроков — богатый филантроп, а другой — бедный, но достойный человек, то может случиться, что первый предпочтет дать выиграть второму (в определенных пределах). В таких случаях нужно принимать во внимание тот факт, что выигрышем являются не деньги, а полезность, выраженная деньгами. Точно так же, ставки в игре могут не иметь денежного выражения. Неденежные (например, моральные) мотивы могут сделать выигрыш весьма ценным для одного игрока, но практически ничего не стоящим для другого. Именно это понятие индивидуальной ценности, или индивидуальной полезности, должно изучаться.

Рассмотрим теперь такую ситуацию, когда некоторое лицо в одних случаях предпочитает одни события другим, а в других случаях безразлично по отношению к двум событиям. Таким образом, мы имеем здесь два отношения, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{I}$. Областью задания этих отношений является множество событий. Для обозначения событий мы будем использовать буквы A, B, C и т. д.

VI.1.1. Определение. Для любых двух событий A и B мы будем писать $A\mathfrak{P}B$, если A предпочтительнее B. Мы будем писать $A\mathfrak{I}B$, если не имеет места ни $A\mathfrak{P}B$, ни $B\mathfrak{P}A$.

VI.1.2. Аксиомы полезности. Отношения $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{I}$ удовлетворяют следующим аксиомам:

(6.1.2.1) Для любых двух событий A и B имеет место в точности одно из следующих отношений:

$$(\alpha)\ A\mathfrak{P}B,$$

$$(\beta)\ B\mathfrak{P}A,$$

$$(\gamma)\ A\mathfrak{I}B.$$

$A\mathfrak{I}A$ для всех A. (6.1.2.2)

Если $A\mathfrak{I}B$, то $B\mathfrak{I}A$. (6.1.2.3)

Если $A\mathfrak{I}B$ и $B\mathfrak{I}C$, то $A\mathfrak{I}C$. (6.1.2.4)

Еслн $A\mathfrak{P}B$ и $B\mathfrak{P}C$, то $A\mathfrak{P}C$. (6.1.2.5)

Если $A\mathfrak{P}B$ и $B\mathfrak{I}C$, то $A\mathfrak{P}C$. (6.1.2.6)

Если $A\mathfrak{I}B$ и $B\mathfrak{P}C$, то $A\mathfrak{P}C$. (6.1.2.7)

Аксиома 1 называется также *трихотомическим законом*. Аксиомы 2, 3 и 4 означают, что $\mathfrak{I}$ есть отношение эквивалентности. Аксиома 5 (вместе с 1) означает, что $\mathfrak{P}$ есть отношение порядка. И, наконец, аксиомы 6 и 7 утверждают, что $\mathfrak{P}$ транзитивно относительно $\mathfrak{I}$.

В сущности говоря, аксиомы VI.1.2 задают слабое линейное упорядочение событий от наиболее желательного до наименее желательного. Обычно говорят, что если кто-то предпочитает событие A событию B, то событие A имеет большую полезность, чем событие B, или же что полезность события A больше, чем полезность события B.

К сожалению, хотя отсюда мы можем заключить, что полезность A больше полезности B, мы не знаем, сколь велика разность этих полезностей. В некоторых случаях этот вопрос не представляет трудностей (например, если задача состоит просто в определении события, которое выберет индивидуум). С другой стороны, если имеется какой-либо риск, то ясно, что мы должны иметь некоторую оценку разности полезностей для данной пары событий (а не просто знать, какое из этих событий предпочитается индивидуумом). Если, например, некоторое лицо должно выбрать между событием B и лотереей, исходами которой являются события A и C с равными вероятностями, и если, кроме того, $A\mathfrak{P}B\mathfrak{P}C$, то задача состоит в том, чтобы определить, достаточна ли возможность выигрыша (в случае, если осуществится событие A), для того чтобы возместить риск убытка (если осуществится событие C).

Если бы существовал некий товар, для которого полезность была бы линейна (т. е. такой товар, что полезность некоторого его количества прямо пропорциональна этому количеству), то никаких трудностей не возникало бы. Мы могли бы просто определить величину побочных платежей (в единицах этого товара), которые побудили бы нашего игрока отказаться от A в пользу B и от B в пользу C, а затем действовать в соответствии с этим правилом. К сожалению, мы видели, что никакой товар (в том числе и деньги) не обладает этим свойством, так что эта идея неосуществима. Однако мы покажем, что такой товар можно ввести в рассмотрение и иметь с ним дело до тех пор, пока мы не попытаемся обращаться с ним, как с другими товарами, которые можно покупать, продавать, передавать или уничтожать.

VI. 2. ЛОТЕРЕИ

Выше мы упоминали, что одним из важных случаев, в которых мы хотели бы иметь описанный выше товар, является случай наличия некоторого риска. Но введение в рассмотрение риска связано в сущности с понятием лотереи.

VI.2.1. Определение. Пусть A и B — два любых события, а $0 \leqq r \leqq 1$. Тогда под $rA+(1-r)B$ мы будем понимать *лотерею*, которая имеет два возможных исхода A и B соответственно с вероятностями r и $1-r$.

Аналогично можно определить лотереи с тремя или большим числом возможных исходов. Нужно заметить, что лотерея также есть событие. Таким образом, возможна лотерея, одним из исходов которой является другая лотерея. Кроме того, комбинирование событий с помощью лотерей подчиняется всем обычным законам арифметики (и линейной алгебры). Таким образом, мы имеем следующие аксиомы:

$$rA+(1-r)B=(1-r)B+rA, \tag{6.2.1}$$

$$rA+(1-r)\{sB+(1-s)C\}=rA+(1-r)sB+(1-r)(1-s)C, \tag{6.2.2}$$

$$rA+(1-r)A=A. \tag{6.2.3}$$

Аксиома (6.2.1), коммутативный закон, имеет очевидный смысл. Аксиомы (6.2.2) и (6.2.3), похожие на дистрибутивный закон, утверждают, что порядок, в котором осуществляется лотерея или последовательность лотерей, не имеет значения; важны лишь окончательные вероятности возможных исходов.

Далее, ясно, что в лотерее $rA+(1-r)B$ событие A можно заменить на такое событие C, что $A\mathfrak{J}C$. Таким образом, мы имеем следующие аксиомы:

Если $A\mathfrak{J}C$, то для любых r, B

$$\{rA+(1-r)B\}\mathfrak{J}\{rC+(1-r)B\}. \tag{6.2.4}$$

Если $A\mathfrak{P}C$, то для любых $r>0$, B

$$\{rA+(1-r)B\}\mathfrak{P}\{rC+(1-r)B\}. \tag{6.2.5}$$

Когда мы рассматриваем лотерею $rA+(1-r)B$, мы видим, что при $r=1$ лотерея совпадает с событием A, а при $r=0$ — с событием B. Теперь кажется правдоподобным, что небольшие изменения r должны вызывать небольшие изменения в полезности лотереи (что бы этот термин ни означал). Это соображение, вместе с теоремой о промежуточном значении для непрерывной вещественной функции, приводит нас к следующей аксиоме:

VI.2.2. Аксиома (непрерывности). Пусть A, B и C — такие события, что $A\mathfrak{P}C\mathfrak{P}B$. Тогда существует такое $r \in [0, 1]$, что

$$\{rA+(1-r)B\}\mathfrak{J}C.$$

Нужно заметить, что на самом деле в аксиоме VI.2.2 должно быть $r \in (0, 1)$. Действительно, если $r = 0$ или 1, то лотерея совпадает соответственно с B или A, а по предположению $A \mathfrak{P} C \mathfrak{P} B$, так что ни в одном из этих двух случаев лотерея не может быть эквивалентна C (относительно $\mathfrak{J}$). Этот факт можно сформулировать как теорему:

VI.2.3. Теорема. *Если* $A \mathfrak{P} C \mathfrak{P} B$ *и*

$$\{rA + (1-r) B\} \mathfrak{J} C,$$

то $0 < r < 1$; *кроме того, r единственно.*

Доказательство. Мы видели, что r не может быть равно ни 0, ни 1. Для доказательства единственности предположим, что s — любое другое число из $(0, 1)$. Мы можем предположить, что $s < r$. Имеем $0 < r - s < 1 - s$; так как

$$B = \left\{ \frac{r-s}{1-s} B + \frac{1-r}{1-s} B \right\}$$

и $A \mathfrak{P} B$, отсюда следует, что

$$\left\{ \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B \right\} \mathfrak{P} B.$$

Теперь имеем

$$rA + (1-r) B = sA + (1-s) \left\{ \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B \right\},$$

и ввиду аксиомы (6.2.5)

$$\{rA + (1-r) B\} \mathfrak{P} \{sA + (1-s) B\}.$$

Аксиомы, которые мы сформулировали, достаточны для построения функции полезности. Рассмотрим два случая. Первый состоит в том, что рассматриваемый индивидуум безразличен к любому выбору; иначе говоря, для любых двух событий A и B имеет место $A \mathfrak{J} B$. Не задаваясь вопросом о том, может ли существовать такой индивидуум в действительности (для него все события имеют одинаковую полезность, так что он скорее похож на растение, чем на человека), отметим, что на самом деле этот случай тривиален и его едва ли можно включить в рамки теории игр. Второй случай встречается в доказательстве следующей теоремы. (Нужно заметить, что теорема верна в обоих случаях, а не только во втором.)

VI.2.4. Теорема. *Существует такая функция u, отображающая множество всех событий в вещественные числа, что для любых двух событий A и B и любого $r \in [0, 1]$*

$$u(A) > u(B) \text{ тогда и только тогда, когда } A \mathfrak{P} B, \tag{6.2.6}$$

$$u(rA + (1-r) B) = ru(A) + (1-r) u(B). \tag{6.2.7}$$

Кроме того, функция и единственна с точностью до линейного преобразования; иначе говоря, если существует другая функция v, также удовлетворяющая (6.2.6) *и* (6.2.7), *то найдутся такие вещественные числа $\alpha > 0$ и β, что для всех A*

$$v(A) = \alpha u(A) + \beta. \tag{6.2.8}$$

Доказательство (существование). Если для всех A и B будет $A\mathfrak{J}B$, мы можем просто положить для любого события $u(A) = 0$. Предположим теперь, что существуют два таких события E_1 и E_0, что $E_1\mathfrak{P}E_0$. Согласно аксиомам VI.1.2 для любого события A имеется пять возможностей:

$$\begin{aligned} &(а)\ A\mathfrak{P}E_1,\\ &(б)\ A\mathfrak{J}E_1,\\ &(в)\ E_1\mathfrak{P}A\mathfrak{P}E_0,\\ &(г)\ A\mathfrak{J}E_0,\\ &(д)\ E_0\mathfrak{P}A. \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Положим прежде всего $u(E_1) = 1$ и $u(E_0) = 0$. После этого для любого события A мы можем определить $u(A)$ так, как будет показано ниже. Рассмотрим последовательно эти пять возможностей.

В случае (а) имеем $A\mathfrak{P}E_1\mathfrak{P}E_0$. По аксиоме непрерывности существует такое $r \in (0, 1)$, что

$$\{rA + (1-r)E_0\}\mathfrak{J}E_1.$$

Положим

$$u(A) = 1/r. \tag{6.2.10а}$$

В случае (б) мы, очевидно, должны положить

$$u(A) = 1. \tag{6.2.10б}$$

В случае (в) существует такое $s \in (0, 1)$, что

$$\{sE_1 + (1-s)E_0\}\mathfrak{J}A.$$

В этом случае полагаем

$$u(A) = s. \tag{6.2.10в}$$

В случае (г) мы, очевидно, имеем

$$u(A) = 0. \tag{6.2.10г}$$

Наконец, в случае (д) существует такое $t \in (0, 1)$, что

$$\{tA + (1-t)E_1\}\mathfrak{J}E_0.$$

В этом случае полагаем

$$u(A) = (t-1)/t. \tag{6.2.10д}$$

Таким образом, мы определили функцию $u(A)$ для всех событий A; теперь нужно показать, что эта функция удовлетворяет условиям (6.2.6) и (6.2.7).

Доказательство того факта, что u действительно удовлетворяет этим условиям, весьма длинно и зависит от того, какой из случаев (а), (б), (в), (г) или (д) имеет место для каждого из двух событий A и B. Мы докажем эти условия в предположении, что для обоих событий имеет место случай (в); доказательства для остальных 14 случаев аналогичны.

Итак, пусть как для A, так и для B имеет место случай (в), и пусть $u(A)=s_1$, $u(B)=s_2$. Если $s_1=s_2$, то как A, так и B эквивалентны (относительно $\mathfrak{J}$) лотерее $s_1E_1+(1-s_1)E_0$ и, следовательно, $A\mathfrak{J}B$. Если же $s_1>s_2$, то, как и при доказательстве теоремы VI.2.3, можно показать, что

$$\{s_1E_1+(1-s_1)E_0\}\mathfrak{P}\{s_2E_1+(1-s_2)E_0\},$$

и, следовательно, $A\mathfrak{P}B$. Аналогично, если $s_2>s_1$, то $B\mathfrak{P}A$. Этим доказано, что u удовлетворяет условию (6.2.6).

Для доказательства (6.2.7) возьмем $r\in(0,1)$. Имеем

$$A\mathfrak{J}\{s_1E_1+(1-s_1)E_0\},$$
$$B\mathfrak{J}\{s_2E_1+(1-s_2)E_0\},$$

и, следовательно, ввиду (6.2.4)

$$\{rA+(1-r)B\}\mathfrak{J}\{r[s_1E_1+(1-s_1)E_0]+(1-r)[s_2E_1+(1-s_2)E_0]\}.$$

Поэтому

$$\{rA+(1-r)B\}\mathfrak{J}\{[rs_1+(1-r)s_2]E_1+[r(1-s_1)+(1-r)(1-s_2)E_0\}$$

и, значит,

$$u(rA+(1-r)B)=rs_1+(1-r)s_2,$$

или

$$u(rA+(1-r)B)=ru(A)+(1-r)u(B).$$

Наконец мы должны доказать, что функция u единственна с точностью до линейного преобразования. Действительно, пусть v — любая другая функция, удовлетворяющая условиям (6.2.6) и (6.2.7). Так как $E_1\mathfrak{P}E_0$, мы должны иметь $v(E_1)>v(E_0)$, так что можно положить

$$\beta=v(E_0),$$
$$\alpha=v(E_1)-v(E_0)>0.$$

Предположим теперь, что $E_1\mathfrak{P}A\mathfrak{P}E_0$. Если $u(A)=s$, то

$$A\mathfrak{J}\{sE_1+(1-s)E_0\}$$

и поэтому

$$v(A) = v(sE_1 + (1 - s) E_0),$$
$$v(A) = sv(E_1) + (1 - s) v(E_0),$$
$$v(A) = s(\alpha + \beta) + (1 - s)\beta = s\alpha + \beta,$$
$$v(A) = \alpha u(A) + \beta.$$

Аналогично можно показать, что соотношение (6.2.8) имеет место для других случаев (а), (б), (г), (д).

Таким образом, мы доказали существование функции полезности. То, что эта функция не единственна, не имеет большого значения: различие между двумя функциями полезности определяется различием в положении нуля и единицы на шкале измерения, подобно различию между температурными шкалами Цельсия и Фаренгейта. По определению функция полезности u линейна относительно лотерей (уравнение (6.2.7)). Тот факт, что в лотерее с двумя исходами первому исходу можно приписать любую вероятность между 0 и 1, означает, что областью значений функции полезности является выпуклое подмножество вещественной прямой, т. е. интервал. Существует 11 типов интервалов; но один из них является пустым множеством, а другой, состоящий только из одной точки, соответствует, очевидно, упомянутому выше тривиальному случаю (случаю индивидуума, безразличного к любому выбору). Однако остается еще девять типов интервалов, и вопрос о том, какой из этих девяти типов в действительности соответствует данному индивидууму, остается открытым.

VI.3. НАБОРЫ ТОВАРОВ

С абстрактной точки зрения полезности приписываются событиям любых типов. Так это и должно быть, ибо игроки проводят различие между событиями любых типов. Однако с точки зрения экономиста естественным приложением теории полезности является приложение ее к владению товарами.

Предположим, что имеется конечное число n основных товаров. Этими товарами обладают различные лица в различных количествах. Для обозначения количеств этих товаров, находящихся у некоторого лица (или группы лиц), естественно использовать n-вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Такой n-вектор мы будем называть *набором товаров*. Далее эти наборы товаров будут рассматриваться как события; иначе говоря, событие состоит в обладании данным набором. Таким образом, функция полезности будет определена на наборах товаров.

Здесь необходима осторожность: мы должны различать лотерею

$$rq' + (1 - r) q'',$$

которая приписывает вероятность r набору q' и вероятность $1-r$ набору q'', и набор q, определенный равенствами

$$q_j = rq'_j + (1-r)q''_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

который является фиксированным набором, а не лотереей. Например, q' может состоять из двух автомобилей без покрышек, а q'' может состоять из десяти покрышек. Ясно, что при $r = 1/2$ набор q (один автомобиль и пять покрышек) гораздо предпочтительнее, по крайней мере для большинства людей, чем лотерея $rq' + (1-r)q''$.

Одно очевидное условие, которому должна удовлетворять функция полезности, есть монотонность: если $q' \geqq q$, то мы должны иметь $u(q') \geqq u(q)$. Иногда также предполагается, что функция u непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые частные производные (так как она монотонна, то по крайней мере почти везде она будет непрерывна и будет иметь первые частные производные).

Частные производные $\partial u/\partial q_j = u_j$ называются *фиктивными ценами* (они представляют, естественно, «справедливую» цену на некоторый товар при данном его количестве, выраженную в единицах полезности).

Говорят, что j-й товар подчиняется закону *убывания дохода*, если для всех q

$$u_{jj} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_j^2} \leqq 0.$$

Предполагается, что большинство товаров подчинено этому закону.

Говорят, что i-й товар удовлетворяет условию *валовой заменимости* j-м товаром, если

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \, \partial q_j} \leqq 0,$$

т. е. если уменьшение количества j-го товара вызывает возрастание фиктивной цены i-го товара. Так как обычно $u_{ji} = u_{ij}$, валовая заменимость является симметричным отношением.

Говорят, что товары i и j являются *дополнительными* друг к другу, если

$$u_{ij} = u_{ji} \geqq 0,$$

т. е. если увеличение количества одного из них вызывает увеличение цены другого.

Говорят, что некоторый товар, например n-й, *отделим*, если его полезность не зависит от других товаров; иначе говоря, если существуют две такие функции $w = w(q_1, \ldots, q_{n-1})$ и $\varphi = \varphi(q_n)$, что для всех q

$$u(q_1, \ldots, q_n) = w(q_1, \ldots, q_{n-1}) + \varphi(q_n).$$

Отделимый товар естественно использовать как средство обмена. В некоторых случаях функция φ линейна; если это имеет место для двух различных лиц, то мы будем говорить, что n-й товар *линейно трансферабелен* между двумя игроками. Важность этого случая состоит в том, что если подходящим образом выбрать единицы полезности для этих двух игроков, то передача товара от одного игрока другому не меняет их общей полезности. Следовательно, остальные $n-1$ товаров можно распределить так, чтобы максимизировать эту общую полезность; после этого можно использовать передачу n-го товара (*побочный платеж*) для того, чтобы исправить «несправедливость», которая могла возникнуть после первой процедуры.

VI. 4. АБСОЛЮТНАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ

В экономике иногда необходимо знать, «принесет ли некоторое действие лицу a больше пользы, чем оно навредит лицу b». Теперь ясно, что ответ на этот вопрос нельзя дать, просто измеряя для этих двух лиц возрастание и убывание полезностей, которое вызывает данное действие, ибо, как мы указали, единицы шкал полезности произвольны и их нельзя использовать для сравнения полезностей разных лиц. Трудность состоит здесь в том, что не существует абсолютной шкалы для измерения полезностей.

Предположим, однако, что пространствами полезностей различных людей являются ограниченные интервалы. В этом случае будет существовать абсолютная единица полезности, а именно, длина этих интервалов. Мы можем нормировать все интервалы так, что они будут иметь своими концами 0 и 1. Тогда естественно сравнивать полезности по этим шкалам.

Задача, таким образом, сводится к вопросу о том, ограничено или нет пространство полезностей некоторого лица. Этот вопрос конечно, остается открытым. Исбелл, являющийся сторонником гипотезы об ограниченности интервала, приводит следующие доводы в пользу этой гипотезы.

1. Предположим, что мое пространство полезности неограничено сверху. Пусть A — событие, состоящее в том, что «ничто не меняется», а B — событие «меня варят в масле». Так как пространство неограничено сверху, должно существовать такое событие C, что

$$u(C) > 2u(A) - u(B),$$

а это означает, что

$$\{C/2 + B/2\} \mathfrak{P} A.$$

Но я не могу представить себе событие C, которое заставило бы меня предпочесть лотерею $(C/2 + B/2)$ моему нынешнему положению в жизни. Следовательно, мое пространство полезности ограничено сверху.

2. Предположим, что мое пространство полезности неограничено снизу. Пусть A — то же событие «ничто не меняется», а B — событие «я выигрываю миллион долларов». Теперь, если пространство неограничено снизу, то существует такое событие C, что

$$A \mathfrak{P} \{0{,}999999B + 0{,}000001C\}.$$

Но я не могу представить такого события C. Следовательно, мое пространство полезности ограничено снизу.

3. Предположим снова, что пространство полезности неограничено сверху. Тогда существует такая последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$, что

$$u(A_n) = 2^n.$$

Тогда лотерея

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} A_n$$

будет иметь бесконечную полезность (петербургский парадокс). Для того чтобы избежать этого парадокса, нужно предполагать, что пространство полезности ограничено сверху. Аналогичным образом можно показать, что пространство полезности ограничено снизу.

Таковы доводы Исбелла в пользу ограниченной полезности. Можно возразить, что неспособность некоторого лица представить себе описанное событие C означает просто недостаточность его воображения, а петербургский парадокс — просто один из парадоксов. Вопрос, естественно, остается открытым. Можно только сказать, что хотя при ограниченной шкале полезности многое упростилось бы, тем не менее большинство из требуемых результатов получается без какого-либо использования ограниченности этой шкалы.

Задачи

1. Завершить доказательство теоремы VI. 2.2.

2. (Доказательство невозможности; Эрроу.) В случае когда рассматриваются только ординальные полезности (но не лотереи), часто невозможно определить, какое действие должна предпринять группа людей. Рассмотрим группу из m лиц, имеющих на выбор n альтернатив $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Под *профилем индивидуальных предпочтений* мы понимаем функцию, которая для каждого лица i задает слабое упорядочение на множестве альтернатив. Под *функцией социального благосостояния* мы понимаем функцию F, которая для каждого профиля индивидуальных предпочтений задает упорядочение («социальное» упорядочение) на множестве альтернатив. Представляются разумными следующие аксиомы:

A1: F определена для всех профилей.

A2: Предположим, что для данного профиля альтернатива A_k предпочтительнее альтернативы A_j относительно функции F. Тогда A_j по-прежнему будет предпочтительнее A_k, если профиль предпочтений изменяется следующим образом:

(а) Относительные порядки отличных от A_j альтернатив не меняются;

(б) В каждом индивидуальном упорядочении положение A_j улучшается.

А3: Пусть ϑ_1 — подмножество множества $\vartheta = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Предположим, что профиль предпочтений изменяется так, что относительные порядки элементов из ϑ_1 сохраняются. Тогда в социальном упорядочении F относительный порядок элементов из ϑ_1 также сохранится.

А4: Для каждой пары альтернатив A_j и A_k существует такая система предпочтений, что в социальном упорядочении A_j предпочтительнее A_k.

А5: Не существует такого лица i, что если для него A_j предпочтительнее A_k, то и в социальном упорядочении также A_j предпочтительнее A_k.

Аксиомы Эрроу А1—А5 несовместны при $n \geqq 3$, $m \geqq 2$.

(а) Говорят, что коалиция S является *решающей* для упорядоченной пары (A_j, A_k) по отношению к данной функции F, если всякий раз как A_j предпочтительнее A_k для всех членов из S, то же самое предпочтение имеет место и в социальном упорядочении. Множество является решающим, если оно является решающим по крайней мере для одной упорядоченной пары (A_j, A_k).

(б) Пусть V — минимальное решающее множество (т. е. V является решающим, но никакое собственное подмножество V таковым не является). Тогда $V \neq \varnothing$.

(в) Предположим, что V является решающим для (A_j, A_k). Пусть $i \in V$, и пусть A_l — любая другая альтернатива. Тогда $\{i\}$ является решающим для (A_j, A_l), и, следовательно, ввиду минимальности V мы имеем $V = \{i\}$.

(г) Множество $\{i\}$ является решающим для всех пар, что противоречит аксиоме А5.

Глава VII

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СУММОЙ

VII. 1. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ (НЕКООПЕРАТИВНАЯ ТЕОРИЯ)

До сих пор мы изучали, как правило, только игры с нулевой суммой. Такие модели достаточно точно описывают салонные игры или игры, в которых ставками являются небольшие количества денег (так что полезность будет почти линейной функцией денег). Однако если ставки имеют более сложное содержание, что часто бывает в экономических ситуациях, то интересы двух игроков уже не будут, вообще говоря, прямо противоположны; очень часто оба игрока могут выгадать путем кооперирования. Такие игры называются *играми с произвольной суммой*; как частный случай они содержат игры с нулевой суммой.

Вообще говоря, конечную игру двух лиц с произвольной суммой можно описать парой $(m\times n)$-матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, или, что эквивалентно, $(m \times n)$-матрицей (A, B), каждый элемент которой есть упорядоченная пара $(a_{ij},\ b_{ij})$. Элементы a_{ij} и b_{ij} являются выигрышами (в единицах полезности) соответственно игроков I и II, в предположении, что они выберут соответственно свои i-ю и j-ю чистые стратегии. Игра в такой форме называется *биматричной игрой.*

Ясно, что во многих случаях кооперирование между игроками может принести им обоим выгоду. Однако может случиться, что, хотя такая кооперация взаимовыгодна, она запрещена правилами игры (например, антитрестовскими законами). Поэтому для биматричных игр мы различаем два случая.

1. Некооперативные (бескоалиционные) игры, в которых запрещается любой тип соглашения вроде совместного выбора стратегий и побочных платежей.

2. Кооперативные игры, в которых любая такая кооперация разрешается.

Сначала мы рассмотрим некооперативные игры. Как и в случае игр с нулевой суммой, мы можем определить смешанные стратегии игроков I и II соответственно как m- и n-векторы с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1. Мы определим ситуацию равновесия очевидным образом.

VII.1.1. Определение. Говорят, что ситуация (пара смешанных стратегий (x^*, y^*)) в биматричной игре (A, B) является *ситуацией равновесия*, если для любых других смешанных стратегий x и y

$$xAy^{*T} \leqq x^*Ay^{*T}, \quad x^*By^T \leqq x^*By^{*T}.$$

Нас, естественно, интересует вопрос о существовании таких ситуаций. Следующая теорема отвечает на этот вопрос утвердительно.

VII.1.2. Теорема. *Каждая биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольная пара смешанных стратегий в биматричной игре (A, B). Положим

$$c_i = \max\{A_{i\cdot}y^T - xAy^T, 0\}, \quad d_j = \max\{xA_{\cdot j} - xAy^T, 0\}$$

и

$$x'_i = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_k c_k}, \quad y'_j = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_k d_k}.$$

Ясно, что преобразование $T(x, y) = (x', y')$ непрерывно. Кроме того, легко видеть, что как x', так и y' — смешанные стратегии. Покажем теперь, что $(x', y') = (x, y)$ тогда и только тогда, когда (x, y) есть ситуация равновесия. Действительно, если (x, y) — ситуация равновесия, то ясно, что для всех i

$$A_{i\cdot}y^T \leqq xAy^T$$

и, следовательно, $c_i = 0$. Аналогично $d_j = 0$ для всех j. Следовательно, $x' = x$ и $y' = y$.

Предположим теперь, что (x, y) не является ситуацией равновесия. Это значит, что либо существует такое $\bar{x}$, что $\bar{x}Ay^T > xAy^T$, либо существует такое $\bar{y}$, что $xB\bar{y}^T > xBy^T$. Предположим, что имеет место первый случай; доказательство во втором случае аналогично. Так как $\bar{x}Ay^T$ есть взвешенное среднее величин $A_{i\cdot}y^T$, должно существовать некоторое i, для которого $A_{i\cdot}y^T > xAy^T$, и, следовательно, для этого i будет $c_i > 0$. Так как все c_i неотрицательны, то $\sum_k c_k > 0$.

Далее, xAy^T есть взвешенное среднее (с весами x_i) величин $A_{i\cdot}y^T$. Следовательно, для некоторого i, такого, что $x_i > 0$, мы должны иметь $A_{i\cdot}y^T \leqq xAy^T$. Но для этого i будет $c_i = 0$, так что

$$x'_i = \frac{x_i}{1 + \sum_k c_k} < x_i.$$

и, значит, $x' \neq x$.

Во втором случае мы покажем, что $y' \neq y$. Следовательно, $(x', y') = (x, y)$ тогда и только тогда, когда (x, y) — ситуация равновесия.

Далее, множество всех ситуаций является замкнутым, ограниченным и выпуклым и, следовательно, применима *теорема Брауэра о неподвижной точке*: так как преобразование $T(x, y) = (x', y')$ непрерывно, оно должно иметь неподвижную точку. Эта неподвижная точка будет ситуацией равновесия.

Заметим, что доказательство теоремы VII. 1.2 легко обобщить на случай ситуаций равновесия в конечных играх n лиц. Заметим, кроме того, что данное доказательство есть доказательство существования и не дает метода нахождения ситуаций равновесия.

К задаче нахождения ситуаций равновесия в биматричных играх можно подходить с различных сторон, и в решении этой задачи удалось добиться некоторого успеха. По поводу деталей и методов читатель отсылается к литературе. Мы предпочитаем обсудить здесь трудности, связанные с понятием ситуации равновесия, а не излагать методы их нахождения; эти трудности ярче всего проявляются при сравнении ситуаций равновесия с аналогичным понятием оптимальных стратегий в играх с нулевой суммой (матричных играх).

Как указывалось (теорема II. 1.2), в играх с нулевой суммой ситуации равновесия взаимозаменяемы и эквивалентны в том смысле, что если (x, y) и (x', y') — ситуации равновесия в матричной игре A, то ситуации (x, y') и (x', y) также равновесны и, кроме того, $xAy^T = x'Ay'^T$. Этот факт в сущности означает, что свойство принадлежать ситуации равновесия присуще вектору x (и не зависит от вектора y, который входит в ситуацию равновесия с вектором x); именно поэтому мы рассматриваем оптимальные стратегии, а не ситуацию равновесия. Теперь мы приведем пример, показывающий, что это свойство не сохраняется в играх с произвольной суммой.

VII.1.3. Пример (семейный спор). Рассмотрим биматричную игру

$$\begin{pmatrix} (4, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 4) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что чистые стратегии $x = (1, 0)$ и $y = (1, 0)$, а также $x' = (0, 1)$ и $y' = (0, 1)$ образуют ситуации равновесия. С другой стороны, ситуации (x, y') и (x', y) не являются равновесными. Кроме того, выигрыши в этих двух ситуациях равновесия (x, y) и (x', y') различны; ситуация (x, y) предпочтительнее для игрока I, а игрок II предпочитает (x', y'). Таким образом, неясно, что эти ситуации равновесия абсолютно устойчивы; даже если игрок I знает, что игрок II выберет чистую стратегию y', он может настаивать на использовании x, а не x', надеясь, что это побудит игрока II переключиться на y. Вообще здесь трудно говорить о том, что может произойти. (Нужно заметить, что смешанные стратегии $x'' = (4/5,\ 1/5)$ и $y'' = (1/5,\ 4/5)$ также образуют ситуацию равновесия.)

Даже в случае, когда имеется только одна ситуация равновесия (что бывает часто), не очевидно, что она дает как раз то, что требуется (см. следующий пример).

VII.1.4. Пример (дилемма заключенного). Рассмотрим игру

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что в этой игре вторая строка доминирует первую, а второй столбец доминирует первый (если мы теперь очевидным образом изменим определение доминирования, данное выше для игр с нулевой суммой). Следовательно, единственная ситуация равновесия образуется вторыми чистыми стратегиями каждого игрока. Она определяет вектор выигрышей $(1, 1)$. Но если оба игрока сыграют «неправильно», т. е. выберут свои первые чистые стратегии, то в результате получится выигрыш $(5, 5)$, что существенно лучше для обоих. Трудность состоит здесь в том, что каждый из игроков может выиграть еще больше, предав другого.

VII. 2. ЗАДАЧА О СДЕЛКАХ

Рассмотрим теперь случай игр, в которых допускается кооперирование между игроками. Это значит, что могут заключаться совместные соглашения, что допускается совместный выбор смешанных стратегий и что полезность может передаваться от одного игрока к другому (хотя и не всегда линейно).

Вообще говоря, имеется некоторое множество исходов, которое можно получить, если два игрока действуют совместно. Если мы для двух игроков выберем пару функций полезности, то это множество исходов можно отобразить в подмножество евклидовой плоскости R_2. Образ этого множества при таком отображении будет замкнут и ограничен сверху (в том смысле, что ограничена сверху сумма координат точек образа). Кроме того, так как допускаются лотереи (путем совместного выбора смешанных стратегий), а полезность линейна относительно лотерей, этот образ будет выпуклым. Задача, таким образом, состоит в том, чтобы из этого множества выбрать точку, которая будет удовлетворять обоих игроков.

Если дана игра двух лиц с произвольной суммой, то имеется некоторое подмножество S плоскости R_2, называемое *допустимым* *множеством*. Оно допустимо в том смысле, что для любой точки $(u, v) \in S$ игроки, действуя совместно, могут получить соответственно полезности u и v. Мы увидим, что, вообще говоря (но не обязательно всегда), чем больше получает один игрок, тем меньше сможет получить другой. Итак, сколько один игрок захочет дать другому? На какую плату за кооперацию с другим игроком он согласится?

Хотя, конечно, невозможно установить, как будет действовать некоторое лицо (вообще говоря, имеется масса индивидуальных различий, которые необходимо принимать в расчет), тем не менее мы можем установить минимальную величину, на которую согласен игрок. Это та величина, которую он может получить односторонними действиями при любых действиях другого игрока. Этой величиной является, конечно, максиминное значение игры для этого игрока. Обозначим эти два значения через u^* и v^*. Таким образом, в биматричной игре с матрицами (A, B)

$$u^* = \max_x \min_y xAy^T, \qquad (7.2.1)$$

$$v^* = \max_y \min_x xBy^T \qquad (7.2.2)$$

(где x и y выбираются из множеств всех смешанных стратегий).

Предположим теперь, что нам дано множество S и максиминные значения (u^*, v^*). Мы хотим найти правило, которое приписывает такой тройке (S, u^*, v^*) «решение задачи о сделках»:

$$\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v}).$$

Нас, естественно, интересует, как должна быть определена такая функция φ. Необходимо повторить, что, хотя исход в любом конкретном случае зависит от личных свойств игроков и их умения торговаться, можно сформулировать следующие, по-видимому, разумные условия, которые нужно наложить на любую такую функцию (аксиомы Дж. Нэша):

VII.2.1. N1 (индивидуальная разумность). $(\bar{u}, \bar{v}) \geqq (u^*, v^*)$.

N2 (допустимость). $(\bar{u}, \bar{v}) \in S$.

N3 (оптимальность по Парето). Если $(u, v) \in S$ и $(u, v) \geqq (\bar{u}, \bar{v})$, то $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$.

N4 (независимость от посторонних альтернатив). Если $(\bar{u}, \bar{v}) \in T \subset S$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(S, u^*, v^*)$, то $(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(T, u^*, v^*)$.

N5 (независимость от линейного преобразования). Пусть T получается из S с помощью линейного преобразования

$$u' = \alpha_1 u + \beta_1, \quad v' = \alpha_2 v + \beta_2.$$

Тогда, если $\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$, то

$$\varphi(T, \alpha_1 u^* + \beta_1, \alpha_2 v^* + \beta_2) = (\alpha_1 \bar{u} + \beta_1, \alpha_2 \bar{v} + \beta_2).$$

N6 (симметрия). Предположим, что S таково, что

$$(u, v) \in S \leftrightarrow (v, u) \in S.$$

Предположим также, что $u^* = v^*$ и $\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$. Тогда $\bar{u} = \bar{v}$.

Из этих аксиом N1, N2 и N3 очевидны и не нуждаются в объяснениях. Аксиома N4 утверждает, что если точка $(\bar{u}, \bar{v})$ есть решение задачи о сделках и если допустимое множество расширяется, то решением новой задачи будет либо сама $(\bar{u}, \bar{v})$, либо одна из новых точек, но никак не точка в старом меньшем множестве. В таком виде (а также и в других контекстах) эта аксиома допускает критику. Аксиома N5 достаточно естественна, если мы предполагаем, что любая функция полезности так же хороша, как и любая другая. Она также допускает критику, если вводится абсолютная полезность (см. VI.4). Наконец, аксиома N6 вполне приемлема, если сделка идет между двумя одинаковыми лицами; она может оказаться неприемлемой в случае сделок между неодинаковыми игроками, например между лицом и коллективом.

Для функции φ можно было бы предложить и несколько других аксиом, например следующую:

N7 (монотонность). Если $T \subset S$, то

$$\varphi(T, x^*, y^*) \leqq \varphi(S, x^*, y^*).$$

К сожалению, эта аксиома несовместна с N2 и N3. Так как трудно не согласиться с какой-либо из последних аксиом, мы заключаем, что N7 должна быть отброшена (хотя некоторые могут утверждать, что N7 не очень отличается от N4). Вообще говоря, нам нет необходимости рассматривать другие аксиомы, потому что имеет место следующая замечательная теорема.

VII.2.2. Теорема. *Существует единственная функция φ, определенная для всех задач о сделках (S, x^*, y^*) и удовлетворяющая аксиомам* N1—N6.

Для доказательства этой теоремы мы докажем следующие леммы.

VII.2.3. Лемма. *Если существуют такие точки $(u, v) \in S$, что $u > u^*$, $v > v^*$, то существует единственная точка $(\bar{u}, \bar{v})$, максимизирующая функцию*

$$g(u, v) = (u - u^*)(v - v^*)$$

на подмножестве множества S, для которого $u \geqq u^*$.

Доказательство. По предположению, это подмножество множества S компактно. Так как функция g непрерывна, она должна достигать на нем максимума. Также по предположению, этот максимум M положителен. Предположим теперь, что существуют две точки (u', v') и (u'', v''), которые максимизируют $g(u, v)$. Так как $M > 0$, то не может быть $u' = u''$, потому что из этого равенства следовало бы равенство $v' = v''$. Предположим, что $u' < u''$; это значит, что $v' > v''$.

Так как S выпукло, то $(\hat{u}, \hat{v}) \in S$, где $\hat{u} = (u' + u'')/2$, $\hat{v} = (v' + v'')/2$. Но

$$g(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{(u' - u^*) + (u'' - u^*)}{2} \cdot \frac{(v' - v^*) + (v'' - v^*)}{2} =$$

$$= \frac{(u' - u^*)(v' - v^*)}{2} + \frac{(u'' - u^*)(v'' - v^*)}{2} + \frac{(u' - u'')(v'' - v')}{4}.$$

Далее, каждое из первых двух слагаемых в последнем выражении равно $M/2$. Но третье слагаемое положительно. Следовательно, $g(\hat{u}, \hat{v}) > M$, а это противоречит тому, что M — максимум g. Таким образом, точка $(\bar{u}, \bar{v})$, которая максимизирует g, единственна.

VII.2.4. Лемма. *Пусть S, (u^*, v^*) и $(\bar{u}, \bar{v})$ имеют тот же смысл, что и в лемме* VII.2.3, *и пусть*

$$h(u, v) = (\bar{v} - v^*)u + (\bar{u} - u^*)v.$$

Тогда, если $(u, v) \in S$, то имеет место неравенство $h(u, v) \leqq h(\bar{u}, \bar{v})$.

Доказательство. Предположим, что существует такая точка $(u, v) \in S$, что $h(u, v) > h(\bar{u}, \bar{v})$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. В силу выпуклости S имеем $(u', v') \in S$, где $u' = \bar{u} + \varepsilon(u - \bar{u})$ и $v' = \bar{v} + \varepsilon(v - \bar{v})$. В силу линейности $h(u - \bar{u}, v - \bar{v}) > 0$. Но

$$g(u', v') = g(\bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon h(u - \bar{u}, v - \bar{v}) + \varepsilon^2 (u - \bar{u})(v - \bar{v}).$$

При $\varepsilon \to 0$ последним слагаемым можно пренебречь, поэтому $g(u', v') > g(\bar{u}, \bar{v})$. Но это противоречит максимальности $g(\bar{u}, \bar{v})$.

Фактически лемма VII.2.4 утверждает, что прямая, которая проходит через точку $(\bar{u}, \bar{v})$ и угловой коэффициент которой равен взятому со знаком минус угловому коэффициенту прямой, соединяющей точки $(\bar{u}, \bar{v})$ и (u^*, v^*), является опорной для S, т. е. S лежит целиком ниже этой прямой или на ней.

Теперь мы можем доказать теорему VII.2.2. Фактически мы покажем, что в предположениях леммы VII. 2.3 точка $(\bar{u}, \bar{v})$, которая максимизирует $g(u, v)$, должна быть решением задачи о сделках. Если же эти предположения не выполнены, то задача оказывается гораздо проще.

Доказательство теоремы VII.2.2. Предположим, что выполнены условия леммы VII.2.3. Тогда определена точка $(\bar{u}, \bar{v})$, которая максимизирует $g(u, v)$. Эта точка, очевидно, удовлетворяет аксиомам N1 и N2 по построению. Она удовлетворяет аксиоме N3, так как если $(u, v) \geqq (\bar{u}, \bar{v})$, но $(u, v) \neq (\bar{u}, \bar{v})$, то $g(u, v) > g(\bar{u}, \bar{v})$. Она удовлетворяет аксиоме N4, так как если она максимизирует $g(u, v)$ на S, то она тем более максимизирует эту функцию на меньшем множестве T. Она должна удовлетворять аксиоме N5, так как если $u' = \alpha_1 u + \beta_1$ и $v' = \alpha_2 v + \beta_2$, то

$$g'(u', v') = [u' - (\alpha_1 u^* + \beta_1)][v' - (\alpha_2 v^* + \beta_2)] = \alpha_1 \alpha_2 g(u, v),$$

и, следовательно, если $(\bar{u}, \bar{v})$ максимизирует $g(u, v)$, то $(\bar{u}', \bar{v}')$ максимизирует $g(u', v')$. Наконец, $(\bar{u}, \bar{v})$ удовлетворяет аксиоме N6. Действительно, предположим, что S симметрично в смысле N6 и что $u^* = v^*$. Тогда $(\bar{v}, \bar{u}) \in S$. Но ясно, что $g(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{v}, \bar{u})$. Так как $(\bar{u}, \bar{v})$ — единственная точка, которая максимизирует $g(u, v)$, отсюда следует, что $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$, т. е. $\bar{u} = \bar{v}$.

Таким образом, мы знаем, что точка $(\bar{u}, \bar{v})$ удовлетворяет аксиомам N1—N6. Нам нужно теперь показать, что это единственная точка, которая удовлетворяет этим аксиомам. Пусть теперь $(\bar{u}, \bar{v})$ определена, как выше. Рассмотрим множество

$$U = \{(u, v) \mid h(u, v) \leqq h(\bar{u}, \bar{v})\}$$

(см. рис. VII.2.1). По лемме VII.2.3 $S \subset U$.

Пусть T получается из U путем линейного преобразования

$$u' = \frac{u - u^*}{\bar{u} - u^*}, \qquad v' = \frac{v - v^*}{\bar{v} - v^*}. \tag{7.2.3}$$

Легко видеть, что T есть просто множество $\{(u', v') \mid u' + v' \leqq 2\}$; кроме того, $u^{*\prime} = v^{*\prime} = 0$. Так как T симметрично, из N6 следует, что решение должно лежать на прямой $u' = v'$; по N3 оно должно быть точкой $(1, 1)$. Обращая преобразование (7.2.3) и применяя аксиому N5, получаем, что $(\bar{u}, \bar{v})$ должно быть решением для (U, u^*, v^*). Но так как $(\bar{u}, \bar{v}) \in S$, отсюда следует, что $(\bar{u}, \bar{v})$ должно быть решением для (S, u^*, v^*).

Предположим теперь, что условия леммы VII.2.3 не выполнены, т. е. не существует точек $(u, v) \in S$, для которых $u > u^*$, $v > v^*$. Ввиду выпуклости S мы знаем, что если существуют точки $(u, v) \in S$, у которых $u > u^*$, $v = v^*$, то не может существовать точки $(u, v) \in S$, у которой $v > v^*$. При этих условиях мы в качестве $(\bar{u}, \bar{v})$ просто возьмем точку в S, которая максимизирует u при ограничении $v = v^*$. Аналогично, если существует $(u, v) \in S$, для которой $u = u^*$, $v > v^*$, то не существует $(u, v) \in S$, у которой $u > u^*$, и в качестве $(\bar{u}, \bar{v})$ мы возьмем точку в S, которая максимизирует v при ограничении $u = u^*$. Легко проверить, что эти решения удовлетворяют аксиомам; также легко проверить, что из аксиом N1, N2 и N3 следует единственность.

Теорема VII.2.2 показывает, таким образом, что аксиомам Нэша можно удовлетворить посредством единственной схемы; мы выяснили также, что представляет собой решение в смысле Нэша.

Согласно лемме VII.2.3, если граница множества S гладка (т. е. имеет касательную) в точке $(\bar{u}, \bar{v})$, то прямая, на которой функция $h(u, v)$ постоянна, является касательной к S в этой точке. Но наклон границы множества S в произвольной точке представляет собой отношение, в котором полезность может передаваться от одного игрока к другому. Коротко говоря, схема Нэша утверждает,

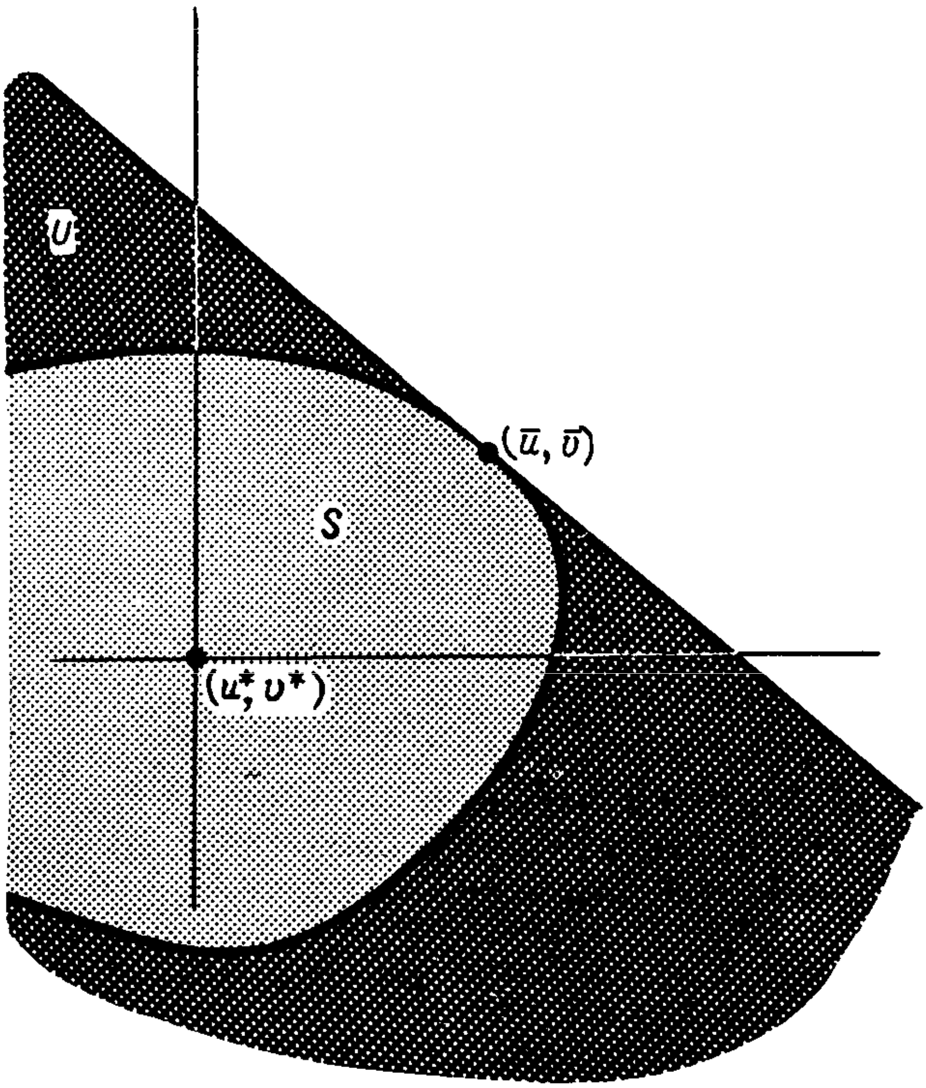

Рис. VII. 2.1.

что дополнительная полезность должна делиться между игроками в таком же отношении, в каком она может передаваться. Так как не предполагается, что полезность линейно трансферабельна, то естественно, что может оказаться лишь одна точка, в которой полезность передается в данном отношении. Это иллюстрирует рис. VII.2.2.

В случае линейно трансферабельной полезности задача, конечно, становится гораздо проще. Действительно, мы можем предполагать (изменяя, если это необходимо, шкалы полезности), что отношение, в котором полезность может передаваться, равно 1 : 1 (т. е. игрок I может передать единицу полезности игроку II;

лишаясь при этом сам только одной единицы). Таким образом, S содержит все точки, лежащие на некоторой прямой $u+v=k$ или ниже нее (где k — максимально возможная полезность, которую эти два игрока могут получить совместно) и вместе с тем выше и правее точки (u^*, v^*) (см. рис. VII.2.3). Соответствующим этому случаю решением Нэша будет точка $(\bar{u}, \bar{v})$, где $\bar{u} = (u^* - v^* + k)/2$ и $\bar{v} = (v^* - u^* + k)/2$.

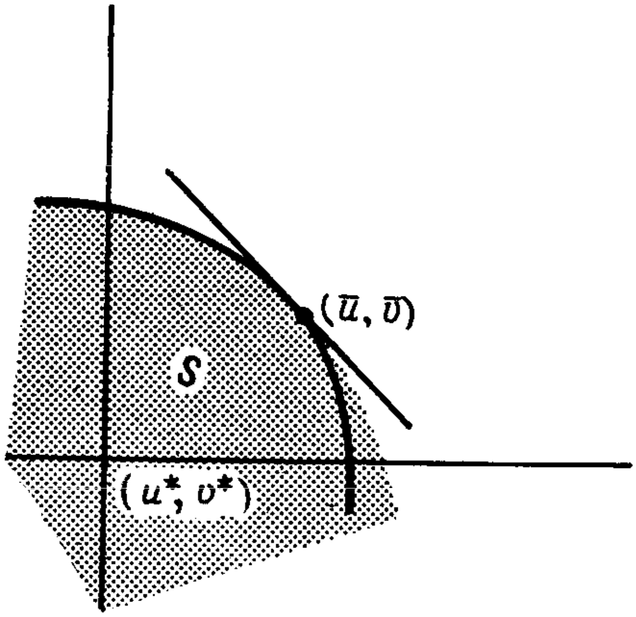

Рис. VII.2.2.

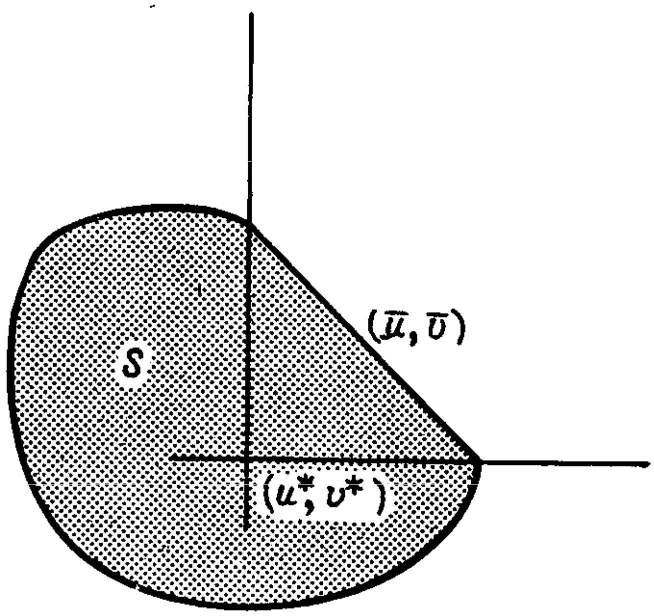

Рис. VII.2.3.

Легко видеть, что $\bar{u} + \bar{v} = k$, а $\bar{u} - \bar{v} = u^* - v^*$. Таким образом, в этом случае относительные положения игроков сохранились, а их полезности максимально возросли (т. е. избыток полезности делится поровну между игроками).

VII.2.5. Пример. Двоим людям предлагают 100 долларов, если они смогут решить, как поделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего в 100 долларов. Предполагается также, что полезность суммы денег пропорциональна ее логарифму. Как должны быть разделены эти деньги?

Так как первый игрок очень богат, мы можем предположить, что полезность x доларов, где $x \leqq 100$, пропорциональна x. Так как второй игрок имеет только 100 долларов, полезность, которую он получает от x долларов, равна

$$\log(100 + x) - \log 100 = \log \frac{100 + x}{100}.$$

(Мы, конечно, полагаем $u^* = v^* = 0$.) Таким образом, множество S будет выпуклой оболочкой точки $(0, 0)$ и дуги кривой, задаваемой уравнением

$$v = \log \frac{200 - u}{100}.$$

Так как эта функция выпукла, S просто является областью, ограниченной этой кривой (см. рис. VII.2.4); конечно, мы интересуемся только пересечением этой области с положительным квадрантом. Теперь мы ищем точку в S, которая максимизирует uv, т. е. значение u, которое максимизирует функцию

$$g = u \log \frac{200-u}{100}.$$

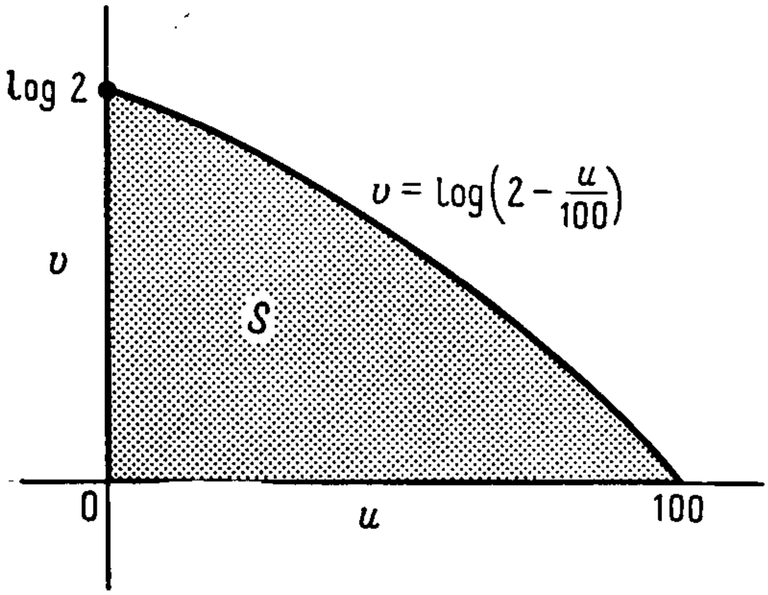

Рис. VII. 2.4.

После дифференцирования и приравнивания нулю производной мы получаем уравнение

$$\frac{u}{200-u} = \log \frac{200-u}{100}.$$

Решая его, получаем приближенно $u = 54{,}4$; иначе говоря, игрок I должен получить 54,40 доллара, а игрок II должен получить 45,60 доллара.

В некотором смысле этот результат кажется странным; из него следует, что богатый игрок должен получить больше, чем бедный, о котором можно утверждать, что он больше нуждается в деньгах. Однако такое утверждение предполагает сравнение полезностей разных лиц, что в принятой схеме, вообще говоря, не допускается. Решение учитывает, что фактически полезность денег у игрока II убывает быстро, а у игрока I медленно. В результате получается, что игрок II стремится получить хоть что-то и при сделке может уступить игроку I.

VII. 3. УГРОЗЫ

Против решения Нэша задачи о сделках можно выдвинуть серьезное возражение, состоящее в том, что оно не принимает в расчет угрозы. Это возражение лучше всего иллюстрируется следующим примером.

VII.3.0. Пример. Рабочий имеет на выбор две возможности: либо работать, и в этом случае ему будет выплачиваться зарплата, а его хозяин получит прибыль в 10 долларов, либо не работать, и в этом случае он будет голодать, а его хозяин не получит прибыли. Разумно этим событиям приписать соответственно полезности (0,10) и (—500,0). Хозяин, однако, если он этого захочет, может отдать часть прибыли рабочему, так что (в предположении, что полезность линейно трансферабельна) множество S будет содержать все точки на прямой $u+v=10$ или ниже нее и не будет содержать других точек положительного квадранта. Так как ясно, что $u^*=v^*=0$, решением Нэша будет $\bar{u}=\bar{v}=5$. Однако это решение игнорирует тот факт, что второй игрок находится в гораздо более выгодном положении, чем его оппонент. Действительно, игрок I не может воспрепятствовать игроку II получить 10 долларов иначе, как решившись на очень трудный шаг; угроза прекратить работу с его стороны была бы не очень правдоподобна, и в результате он, вероятно, продолжал бы работать за свою зарплату.

Трудно отрицать, что примеры, подобные этому, указывают на недостатки предложенного Нэшем решения задачи о сделках. Если мы хотим избавиться от этих недостатков, необходимо проанализировать угрозы. Вообще говоря, угроза эффективна, если она правдоподобна и если она может улучшить положение угрожающего по отношению к тому лицу, которому угрожают. Так, например, угроза убить кого-нибудь обычно более эффективна, чем угроза рассердиться, потому что, несомненно, положение убийцы улучшается по отношению к его жертве (хотя фактически его абсолютное положение может ухудшиться), в то время как стать рассерженным не имеет такого действия. С другой стороны, угроза уничтожить весь мир, хотя, возможно, и могла бы улучшить положение угрожающего по отношению к другим (уравнивая их всех в небытии), не очень правдоподобна и, следовательно, неэффективна.

Нэш предлагает следующую трехшаговую схему сделки:

1. Игрок I объявляет стратегию угрозы x.
2. Игрок II, не зная x, объявляет стратегию угрозы y.
3. Игроки I и II торгуются. Если они приходят к соглашению, то это соглашение вступает в силу. Если они не приходят к соглашению, то они должны применять свои стратегии угроз x и y; этими стратегиями определяются выигрыши двух игроков.

Естественно возникает вопрос о действенности этих угроз; если один из игроков сделал необдуманную угрозу, то может оказаться, что в дальнейшем он не захочет ее осуществить. Для этой цели можно, однако, предложить некоторую процедуру. Во всяком случае мы предполагаем, что в выборе своих угроз игрок ограничен тем или иным образом.

Фактически это ограничение означает, что максиминные значения u^* и v^* заменяются соответственно на значения угроз xAy^T и xBy^T. После этого применяются аксиомы N1—N5, и в результате получается решение $(\bar{u}, \bar{v})$, где $(\bar{u}, \bar{v})$ — точка в S, максимизирующая функцию

$$g(u, v)=(u-xAy^T)(v-xBy^T)$$

(конечно, при условии $u \geqq xAy^T$).

Эту схему лучше всего, вероятно, пояснить рисунком. На рис. VII.3.1 показано типичное множество S (замкнутое, ограниченное и выпуклое). Кривая S^0 представляет собой часть границы S, оптимальную по Парето (т. е. то подмножество S, которое удовлетворяет аксиоме N3). Из каждой точки S^0, в которой существует касательная к S^0, проводится прямая, угловой коэффициент которой равен взятому со знаком минус угловому коэффициенту касательной к S^0 в этой точке. Если касательная не

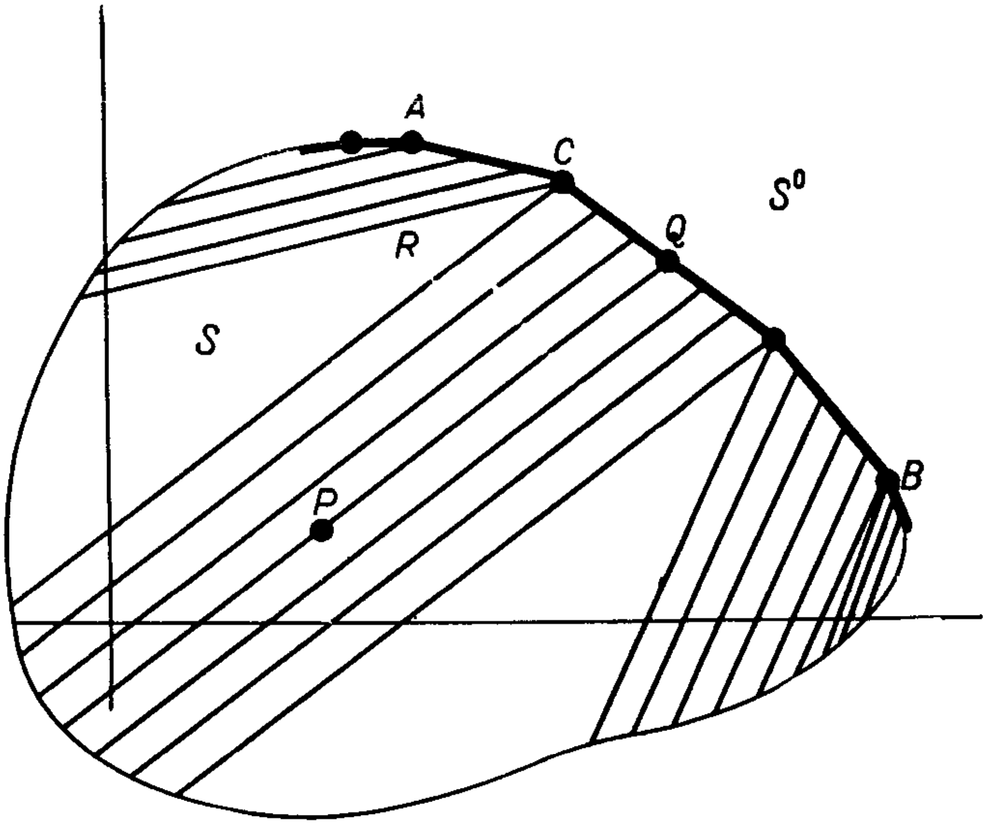

Рис. VII. 3.1.

существует (как в точке C), то проводятся две прямые, соответствующие правой и левой касательным к S^0 в точке C. Легко видеть, что в силу выпуклости S прямые этого семейства пересекаются вне S (если они пересекаются вообще).

Предположим теперь, что стратегии угроз x и y дают значение угрозы, которому соответствует точка P, лежащая на одной из этих прямых. Арбитражное значение игры (значение игры по Нэшу) есть та точка Q, в которой эта прямая пересекает S^0. Если же, с другой стороны, значение угрозы есть точка, подобная R (которая лежит внутри угла, образованного двумя прямыми, исходящими из одной и той же точки S^0), то арбитражным значением будет точка C, в которой эти прямые пересекают S^0. Таким образом, целью игрока I при выборе своей стратегии угрозы является достижение точки, лежащей на возможно более низкой прямой этого семейства; цель игрока II — достижение точки, лежащей на возможно более высокой прямой этого семейства.

На вопрос, возникающий в связи с существованием ситуации равновесия в стратегиях угроз, можно ответить, что эти ситуации действительно существуют. (Конечно, необходимо дать определение ситуаций равновесия для таких игр; ситуации равновесия определяются очевидным образом.)

VII.3.1. Теорема. *Любая биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия в стратегиях угроз* (x, y).

Однако цели двух игроков при выборе своих стратегий угроз прямо противоположны. Поэтому нетрудно также доказать следующую теорему.

VII.3.2. Теорема. *Если* (x', y') *и* (x'', y'') — *ситуации равновесия в стратегиях угроз, то ситуации* (x', y'') *и* (x'', y') *также являются равновесными. Кроме того, арбитражный выигрыш Нэша один и тот же как для ситуации* (x', y'), *так и для ситуации* (x'', y'').

Мы не будем приводить здесь доказательств теорем VII.3.1 и VII.3.2, которые оставляются в качестве задач; заметим только, что теорема VII.3.1 является модификацией теоремы VII.1.2, а теорема VII.3.2 очень мало отличается от теоремы II.1.2. Мы видим, что ввиду теоремы VII.3.2 мы действительно можем говорить об *оптимальных* стратегиях угроз (а не просто о ситуациях равновесия).

Интересной задачей является задача нахождения оптимальных стратегий угроз. Вообще говоря, эта задача может оказаться сложной, так как арбитражное значение, соответствующее паре стратегий угроз, зависит не только от чисел xAy^T и xBy^T, но также и от вида оптимальной по Парето границы множества S. Так как от S требуется только выпуклость, очевидных методов не существует. Однако в некоторых случаях эта задача может оказаться простой.

Если, в частности, полезность линейно трансферабельна между двумя игроками, то задача становится чрезвычайно простой. Действительно, в этом случае мы можем выбрать шкалы полезностей так, что полезности будут передаваться в отношении 1 : 1. Очевидное применение изложенной выше теории показывает нам, что если x и y — стратегии угроз, то арбитражное значение будет

$$\bar{u} = \frac{xAy^T - xBy^T + k}{2}, \quad \bar{v} = \frac{xBy^T - xAy^T + k}{2},$$

где k — максимальная полезность, которую могут получить совместно два игрока. Но это означает, что игрок I будет пытаться максимизировать величину $x(A - B)y^T$, а игрок II будет пытаться минимизировать ту же самую величину. Таким образом, оптимальные стратегии угроз в биматричной игре (A, B) совпадают с оптимальными стратегиями в матричной игре $A-B$ (т. е. в игре с нулевой суммой), а мы уже знаем, как решать эту игру.

VII.3.3. Пример. Рассмотрим биматричную игру (A, B), заданную матрицей

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-4/3, \ -4) \\ (-3, \ -1) & (4,1) \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что трансферабельного товара не существует, то множество S будет выпуклой оболочкой четырех точек

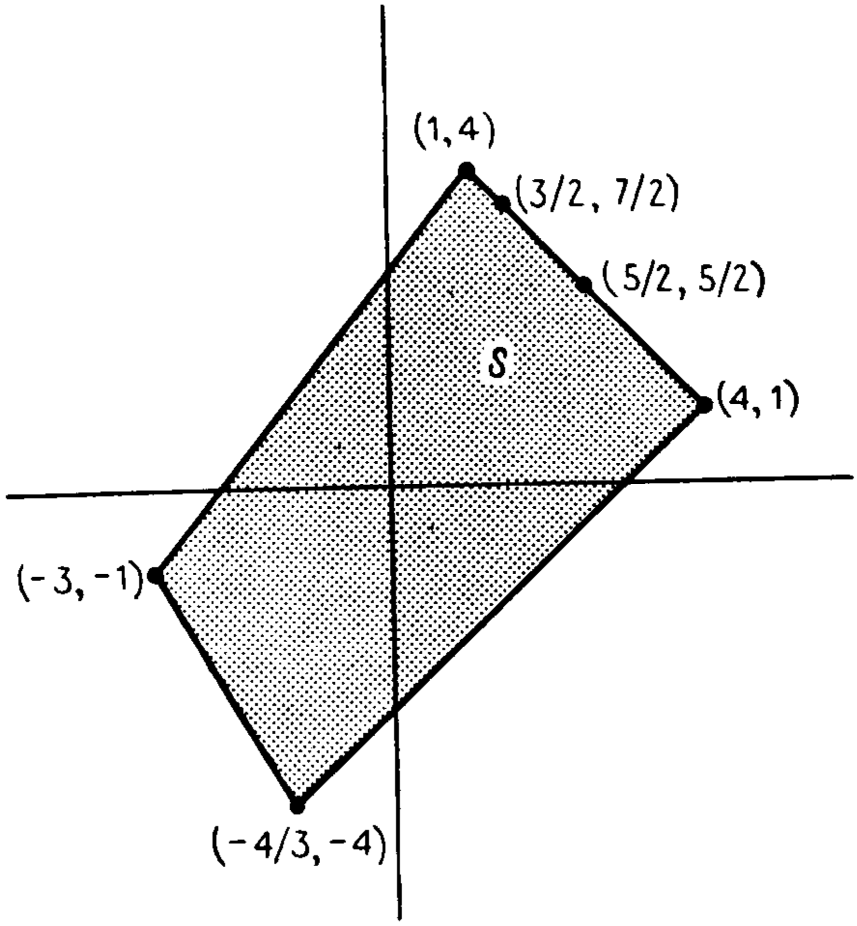

Рис. VII. 3.2.

(a_{ij}, b_{ij}), которая показана на рис. VII.3.2. Видно, что максимальные гарантированные уровни равны 0 для обоих игроков и обеспечиваются соответственно смешанными стратегиями $(^3/_4, {}^1/_4)$ и $(^1/_2, {}^1/_2)$. Так как S почти симметрично, значение по первой схеме Нэша должно быть равно $(^5/_2, {}^5/_2)$. С другой стороны, эта схема не принимает в расчет возможностей угрозы со стороны игрока II; действительно, мы видим, что если игрок II применяет свою первую чистую стратегию, то игрок I фактически мало что может сделать против него.

Таким образом, мы должны рассмотреть возможность угроз. Мы видим, что на оптимальной по Парето границе S полезность трансферабельна (путем рандомизации) в отношении 1 : 1. Следовательно, мы можем рассмотреть игру $A - B$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 8/3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта игра имеет седловую точку на элементе —2. Так как максимальная общая полезность для двух игроков равна 5, мы получаем «арбитражное решение угроз» ($3/2$, $7/2$). Это решение, конечно, принимает в расчет более сильную возможность угрозы со стороны игрока II.

Задачи

1. Мы рассматриваем сделку как некооперативную нгру, в которой «стратегия» каждого нгрока состонт в выдвижении некоторого требования. Если эти два требования (u, v) совместны (т. е. прннадлежат S), то требовання игроков удовлетворяются; в протнвном случае игроки получают минимаксные значения (u^*, v^*) (нли значения угроз).

а) Каждая точка оптимальной по Парето границы множества S является ситуацией равновесия.

б) Предположим, что $u^* = v^* = 0$, а g — характеристнческая функция множества S (т. е. $g = 1$ на S и $g = 0$ на дополнении S). Тогда, если требования игроков равны (u, v), то их выигрыши будут равны $(ug(u, v),\ vg(u, v))$.

в) Пусть $h(u, v)$ — произвольная неотрицательная функция; допустим, что если выдвинуты требования (u, v), то выигрыш равен (uh, vh). Показать, что если $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ максимизирует функцию uvh, то $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ — ситуация равновесия.

г) Пусть $h_1, h_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных непрерывных функцнй, сходящаяся к g. Тогда, если $(\bar{u}, \bar{v})$ — решение Нэша (арбитражное значение) игры, то существует последовательность точек $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$, каждая из которых является равновесной в сделке с выигрышем (uh_j, vh_j), причем эта последовательность сходится к $(\bar{u}, \bar{v})$.

2. Доказать существование «оптимальных» стратегий угроз в модифицированной модели сделки Нэша (теоремы VII. 3.1 и VII. 3.2).

3). а) Рассмотрим «сверхигру», состоящую из 100 повторений «дилеммы заключенного». В этой сверхигре каждый игрок имеет очень большое число чистых стратегий, каждая из которых определяет, что нужно делать в n-й партин игры в зависимости от «истории» сверхигры (т. е. в зависимости от того, что произошло в первых $n-1$ партиях). Показать, что если две стратегии образуют ситуацию равновесня, то использование этих двух стратегнй заставит обоих игроков применять стратегию «предательства» (вторую стратегию) в каждой партии игры.

б) Показать, однако, что для $n > 2$ стратегия σ_n в сверхигре, состоящая в том, чтобы «выбнрать первую (кооператнвную) стратегию в первых n партиях до тех пор, пока мой протнвник действует так же, а в последних $100 - n$ партиях выбирать стратегию предательства», лучше в том смысле, что против оптимального ответа протнвника она дает больший выигрыш.

в) Показать, что если сверхигра состоит из X партий, где X — случайная величнна с экспоненциальным распределением $P(n) = ke^{-an}$, то существует ситуация равновесия, при которой нспользуется кооператнвная первая стратегия в каждой партии нгры.

4. В задаче II.9 было указаио, что игры двух лиц с постоянной суммой можно решать методом «фиктивного разыгрывания». Рассматривая игру (A, B), где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

показать, что этот метод не может быть использован для нахождеиия ситуаций равновесия в биматричных играх.

а) Предположим, что игроки иачинают с выбора ситуации $(1, 1)$. За ходом $(1, 1)$ последует ход $(1, 3)$, затем ходы $(3, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$, $(1, 1)$ и т. д. циклически.

б) Каждый цикл по крайней мере вдвое длиннее предыдущего.

в) Такие эмпирические стратегии не сходятся вообще, но циклически повторяются. Ни один из двух циклов не проходит через точку $(^1/_3,\ ^1/_3,\ ^1/_3)$, которая является единственной ситуацией равновесия.

Глава VIII

ИГРЫ n ЛИЦ

VIII. 1. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

При рассмотрении игр n лиц (где $n \geqq 3$) обнаруживаются те же две возможности, с которыми мы уже встречались при изучении игр двух игроков с ненулевой суммой. Именно, правила игры могут либо запрещать, либо разрешать объединение игроков в коалиции. Рассмотрим сначала первый, т. е. бескоалиционный случай.

В этом случае основным вопросом является существование ситуаций равновесия. На него отвечает следующая теорема.

VIII.1.1. Теорема. *Любая конечная бескоалиционная игра n лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Здесь мы не приводим доказательства теоремы VIII.1.1. Однако, как легко видеть, распространение доказательства теоремы VII.1.2 на этот случай не представляет труда.

Хотя теорема VIII.1.1 и является весьма ценным результатом, нужно отметить, что все затруднения, связанные с ситуациями равновесия в случае биматричных игр, наличествуют и здесь. Кроме того, нахождение этих ситуаций в играх n лиц (где $n \geqq 3$) несравненно сложнее, чем их нахождение в биматричных играх. Вообще же, существенной разницы между теорией бескоалиционных игр n лиц и теорией биматричных игр нет.

VIII. 2. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Рассмотрим теперь случай, когда кооперация разрешена. Как мы только что отметили, в бескоалиционном варианте различие между играми двух и n лиц невелико. В этом случае игры n лиц представляют собой лишь обобщение игр двух лиц. В кооперативных же играх мы сталкиваемся с новой идеей — идеей коалиции. В случае двух лиц существует только одна возможная коалиция. В случае n игроков возможных коалиций много и поэтому для того, чтобы одна из них образовалась и продолжала существовать в течение некоторого времени, члены этой коалиции должны оказаться в некотором равновесном или устойчивом состоянии. Именно эта идея устойчивости должна рассматриваться в любой осмысленной теории.

Важность понятия устойчивости легче всего оценить на примере. Рассмотрим следующую игру трех лиц: игроки 1, 2 и 3 поставлены непосредственно перед проблемой образования коалиций. Если любые два из них объединятся, то третий обязан заплатить каждому из них по единице. Если же никакая двухчленная коалиция не сформируется, то никаких платежей не производится.

Об этом простом примере можно сказать очень немного. Действительно, не предполагая ничего о личных взаимоотношениях между игроками, естественно заключить, что может возникнуть любая из трех возможных коалиций двух игроков, и нет способа выделить какую-либо из них. Следовательно, три платежа $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$ и $(1, 1, -2)$, соответствующие этим трем коалициям, представляются «естественным» результатом игры и, в некотором смысле, могут считаться ее «решением». С другой стороны, платеж $(0, 0, 0)$, являющийся средним этих трех платежей, также может считаться некоторым решением игры. (Позже мы увидим, в каком смысле эти платежи являются решениями.)

Предположим теперь, что игра слегка изменена, а именно, если образуется коалиция $\{2, 3\}$, то игрок 1 обязан заплатить 1,1 единицы игроку 2 и 0,9 единицы игроку 3. Может показаться, что положение игрока 2 улучшилось, так как при том же образе действий он выигрывает больше. Однако более тонкий анализ показывает, что это не так. В самом деле, коалиция $\{2, 3\}$ теперь становится почти невозможной (если не существует каких-либо внешних препятствий для кооперирования игроков 1 и 3), ибо как игрок 1, так и игрок 3 оказываются в выигрыше, образовав коалицию $\{1, 3\}$. Следовательно, игрок 2 оказывается в худшем положении, чем прежде, ибо одна из коалиций, в которых он может участвовать, крайне неустойчива. Правда, он может исправить положение, заплатив 0,1 единицы игроку 3 (полагая, что такой побочный платеж допустим). Это сведет игру к предыдущей.

Приведенный пример дает возможность проиллюстрировать, во-первых, важность побочных платежей и, во-вторых, необходимость некоторой устойчивости различных платежей в решении. Последний вопрос будет изучаться позднее; сначала же мы займемся побочными платежами.

Здесь снова возникает вопрос о существовании линейно трансферабельного товара. Предположим, что такой товар существует; теория, развитая при этом предположении, будет называться теорией *игр с побочными платежами.*

Для теории, допускающей побочные платежи, функции полезности могут быть выбраны так, что для любых двух игроков полезности передаются в отношении $1:1$. Как уже указывалось при рассмотрении случая двух игроков, это означает, что та полезность, которую в состоянии получить множество S игроков (коалиция), может быть произвольным образом поделена между членами S.

Поэтому нас будет интересовать только совокупная полезность, которую коалиция имеет возможность получить.

VIII.2.1. Определение. Для игры n лиц обозначим множество всех игроков через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Любое непустое подмножество множества N (включая само N и все его одноэлементные подмножества) называется *коалицией*.

VIII.2.2. Определение. *Характеристической функцией* игры n лиц мы назовем вещественнозначную функцию v, определенную на подмножествах множества N и ставящую в соответствие любому $S \subset N$ максиминное значение (для S) игры двух лиц, которую разыграли бы S и $N \setminus S$, если бы эти две коалиции действительно возникли.

Таким образом, $v(S)$ представляет собой полезность, которую коалиция S может извлечь из игры независимо от действий остальных игроков. По очевидным причинам из этого определения следует, что

$$v(\varnothing) = 0. \tag{8.2.1}$$

Далее, если S и T — непересекающиеся коалиции, то, очевидно, объединив свои усилия, они смогут получить не меньше, чем оставаясь разделенными. Следовательно, мы имеем свойство *супераддитивности*

$$v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T), \quad \text{если} \quad S \cap T = \varnothing. \tag{8.2.2}$$

При исследовании игр двух лиц мы обычно отказывались от позиционной формы и предпочитали иметь дело с нормальной формой игры. Это происходило потому, что нормальная форма значительно упрощает изучение смешанных стратегий, а именно в этих стратегиях и заключается сущность таких игр. Сущность же игр n лиц состоит отнюдь не в рандомизации, а в образовании коалиций. Поэтому мы будем изучать характеристическую функцию, а не нормальную форму. Действительно, характеристическая функция наилучшим образом приспособлена для изучения коалиций, так как она характеризует возможность последних в предположении, что они уже используют оптимальную (максиминную) рандомизацию. В дальнейшем мы будем отождествлять игру с ее характеристической функцией.

VIII.2.3. Определение. *Игрой n лиц в форме характеристической функции* мы будем называть вещественнозначную функцию v, определенную на подмножествах множества N и удовлетворяющую условиям (8.2.1) и (8.2.2).

Некоторые авторы отказываются от условия (8.2.2) и изучают функции, удовлетворяющие лишь условию $v(\varnothing) = 0$. Очень часто такие функции называют *несобственными* играми, тогда как удовлетворяющие условию (8.2.2) функции называются *собственными* играми. В данной книге везде, где это специально не оговорено, мы будем иметь дело только с собственными играми.

Как указывалось выше, $v(S)$ представляет собой максиминное значение игры, разыгрываемой между S и $N \setminus S$. Предположим, что игра в нормальной форме имеет постоянную сумму (т. е. сумма полезностей, получаемых всеми игроками, всегда одна и та же). В этом случае интересы коалиций S и $N \setminus S$ прямо противоположны, и если игра между ними конечна, то выполнены условия теоремы о минимаксе. Поэтому

$$v(S)+v(N \setminus S)=v(N). \tag{8.2.3}$$

Это приводит к следующему определению.

VIII.2.4. Определение. Игра (в форме характеристической функции) называется *игрой с постоянной суммой*, если для любого $S \subset N$

$$v(S)+v(N \setminus S)=v(N).$$

Нужно отметить, что игра в форме характеристической функции может иметь постоянную сумму, не будучи в своей нормальной форме игрой с постоянной суммой. (Возможно даже обратное, т. е. игра может иметь постоянную сумму в нормальной форме, не являясь игрой с постоянной суммой в форме характеристической функции, хотя этого и не может произойти с конечными играми.)

Допустим, что игра n лиц разыграна. Не рассматривая вопроса о возникшей в действительности коалиционной структуре, мы интересуемся возможными векторами платежей. Если игроки пришли к определенной степени взаимопонимания, то они должны разделить общую полезность $v(N)$. (Для того чтобы это произошло в играх с постоянной суммой, никакого взаимопонимания не требуется.) Вообще говоря, такой раздел может быть произвольным, но, конечно, ни один из игроков не согласится получить меньше того минимума, который он может сам себе обеспечить.

VIII.2.5. Определение. *Дележом* (для игры n лиц с характеристической функцией v) называется вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

$$\text{(ii)} \quad x_i \geqq v(\{i\}) \quad \text{для всех} \quad i \in N.$$

Множество всех дележей игры v мы будем обозначать через $E(v)$.

Можно возразить, что условие (i) этого определения является чересчур сильным (кроме случая игр с постоянной суммой), ибо весьма вероятно, что игроки не достигнут достаточного взаимопонимания и в результате будут вынуждены делить меньше, чем общее количество $v(N)$, которое они могут получить. Хотя это и веское возражение, но, как будет видно в дальнейшем, большинство наших «концепций решения» исключает все векторы, не удовлетворяющие этому условию.

Теперь вопрос ставится следующим образом: какой из дележей явится результатом игры? Это, конечно, сложная (если вообще разрешимая) проблема. Правда, возможна ситуация, при которой эта проблема тривиальна: а именно, если множество $E(v)$ состоит из одного элемента. В этом случае очевидным результатом будет этот единственный дележ. То, какие коалиции образуются, не имеет значения. Это дает основание для деления игр на существенные и несущественные. Из супераддитивности v (использованной n раз) следует, что

$$v(N) \geqq \sum_{i \in N} v(\{i\}). \tag{8.2.4}$$

Таким образом, если в (8.2.4) имеет место равенство, то $E(v)$ содержит только одну точку, и мы приходим к следующему определению.

VIII.2.6. Определение. Игра v называется *существенной*, если

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

В противном случае игра называется *несущественной*.

Для нас представляют интерес только существенные игры.

VIII. 3. ДОМИНИРОВАНИЕ. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. НОРМАЛИЗАЦИЯ

Пусть задана игра v, и пусть x и y — два дележа в этой игре. Предположим, что игроки должны выбрать один из этих дележей. Можем ли мы найти какой-нибудь критерий, дающий возможность утверждать, что будет выбран один из этих дележей, а не другой?

Ясно, что если x не равен y, то найдутся игроки, предпочитающие x (т. е. i, для которых $x_i > y_i$). Однако найдутся и игроки, предпочитающие y, так как оба вектора являются дележами. Следовательно, недостаточно установить, что некоторые игроки предпочитают выбор x. С другой стороны, не может быть и так, чтобы все игроки предпочитали x (так как сумма компонент, как x, так и y, равна $v(N)$). В действительности же необходимо, чтобы сторонники x были достаточно сильны, чтобы заставить остальных выбрать этот дележ.

VIII.3.1. Определение. Пусть x и y — два дележа и S — некоторая коалиция. Мы говорим, что *x доминирует y по коалиции S* (обозначается $x \succ_S y$), если

$$\text{(i) } x_i > y_i \quad \text{для всех} \quad i \in S,$$

$$\text{(ii) } \sum_{i \in S} x_i \leqq v(S).$$

Мы говорим, что *x доминирует y* (обозначается $x \succ y$), если существует такая произвольная коалиция S, что $x \succ_S y$.

Таким образом, условие (i) означает, что все члены S предпочитают x; условие (ii) означает, что они в состоянии получить то, что им положено по дележу x.

Как легко видеть, отношение $\succ_S$ (для любого заданного S) является отношением частичной упорядоченности. С другой стороны, хотя отношение $\succ$ и иррефлексивно, оно не является ни транзитивным, ни антисимметричным (так как коалиция S в различных случаях может быть различной). Это — серьезная трудность, и впоследствии она сильно усложнит дело.

Так как мы собираемся анализировать игры при помощи отношения доминирования, мы заинтересованы в том, чтобы выяснить, у каких игр множества дележей имеют одинаковую структуру доминирования.

VIII.3.2. Определение. Две игры n лиц u и v называются *изоморфными*, если существует функция f, взаимно однозначно отображающая $E(u)$ на $E(v)$ таким образом, что для любых $x, y \in E(u)$ и $S \subset N$

$$x \succ_S y \leftrightarrow f(x) \succ_S f(y).$$

Пользуясь этим определением, довольно трудно выяснить, являются ли две игры изоморфными. Мы имеем, однако, следующий критерий.

VIII.3.3. Определение. Две игры n лиц u и v называются *S-эквивалентными*, если существуют положительное число r и n таких вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что для любой $S \subset N$

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i.$$

По существу, если две игры S-эквивалентны, мы можем получить одну из другой посредством линейного преобразования на пространствах полезности нескольких игроков. Нетрудно доказать, что из S-эквивалентности следует изоморфизм.

VIII.3.4. Теорема. *Если u и v являются S-эквивалентными, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть u и v являются S-эквивалентными. Рассмотрим следующую функцию, определенную на $E(u)$:

$$f(x) = rx + \alpha,$$

где r и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ те же, что и в VIII. 3.3. Легко проверить, что если $x \in E(u)$, то $f(x) \in E(v)$. Кроме того, ясно, что если $x \succ_S y$, то $f(x) \succ_S f(y)$. Следовательно, f и есть искомый изоморфизм.

Итак, S-эквивалентность достаточна для изоморфизма. Хотя обратное утверждение также верно, но доказательство его гораздо сложнее, и поэтому мы не будем его приводить; см. статью [VIII. 5].

Очевидно, что S-эквивалентность действительно является отношением эквивалеитности. Интересно выбрать по одной конкретиой игре из каждого класса эквивалентности.

VIII. 3.5. Определение. Игра v называется игрой в $(0, 1)$-*редуцированной форме*, если

$$\text{(i)}\quad v(\{i\}) = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in N,$$

$$\text{(ii)}\quad v(N) = 1.$$

VIII. 3.6. Теорема. *Любая существенная игра S-эквивалентна одной и только одной игре в $(0, 1)$-редуцированной форме.*

Теорема VIII. 3.6, доказательство которой мы опускаем (оно тривиально), показывает, что мы можем выбрать игру в $(0, 1)$-редуцированной форме для представления любого класса эквивалентности игр. Удобство этого выбора состоит в том, что в такой форме значение $v(S)$ непосредственно демонстрирует нам силу коалиции S (т. е. ту дополнительную прибыль, которую получают члены коалиции, образовав ее), а все дележи являются вероятностными векторами.

В литературе об играх n лиц использовались также и иные типы нормализации. Часто встречается редукция к форме $(-1, 0)$, при которой $v(\{i\}) = -1$, а $v(N) = 0$. Мы же в дальнейшем будем рассматривать игры только в $(0, 1)$-форме. Так как мы интересуемся исключительно существенными играми, это не повлечет за собой потери общности.

Множество игр n лиц в $(0, 1)$-редуцированной форме совпадает с множеством всех вещественнозначных функций v, заданных на подмножествах множества N и удовлетворяющих следующим требованиям:

$$v(\varnothing) = 0, \tag{8.3.1}$$

$$v(\{i\}) = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in N, \tag{8.3.2}$$

$$v(N) = 1, \tag{8.3.3}$$

$$v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T), \quad \text{если} \quad S \cap T = \varnothing. \tag{8.3.4}$$

Эти четыре условия определяют $(2^n - n - 2)$-мерное выпуклое множество. Если игра имеет постоянную сумму, то возникает дополнительное условие:

$$v(N \setminus S) = v(N) - v(S) \quad \text{для всех} \quad S \subset N. \tag{8.3.5}$$

Это дает $2^{n-1} - 1$ дополнительных условий и поэтому множество игр с постоянной суммой имеет размерность $2^{n-1} - n - 1$. Мы видим, что размерность множества игр n лиц с постоянной суммой совпадает с размерностью множества всех игр $n - 1$ лица. На самом деле, эти два множества конгруэнтны.

Действительно, пусть u — игра $n - 1$ лица в $(0,1)$-редуцированной форме. Мы можем расширить ее до игры n лиц с постоянной суммой v, добавив нового игрока n и положив:

$$v(S) = u(S), \quad \text{если} \quad n \notin S,$$
$$v(S) = 1 - u(N \setminus S), \quad \text{если} \quad n \in S.$$

Легко проверить, что получившаяся игра является игрой с постоянной суммой.

Отметим два частных типа игр, представляющих известный интерес.

VIII.3.7. Определение. Игра v называется *симметричной*, если $v(S)$ зависит только от числа элементов в S.

VIII.3.8. Определение. Игра v в $(0, 1)$-редуцированной форме называется *простой*, если для всех $S \subset N$ либо $v(S) = 0$, либо $v(S) = 1$. Игра общего вида называется простой, если проста ее $(0,1)$-редуцированная форма.

В сущности, простая игра характеризуется тем, что в ней коалиция является либо выигрывающей (значение 1), либо проигрывающей (значение 0), без каких-либо промежуточных вариантов. Поэтому простые игры приложены в политических науках поскольку этот класс игр включает игры с «голосованием» — выборы и законодательные процедуры.

VIII.4. ЯДРО. НМ-РЕШЕНИЯ

Перейдем теперь к изучению игр при помощи отношения доминирования. Естественно, во-первых, исследовать недоминируемые дележи.

VIII.4.1. Определение. *Ядром* игры v называется множество всех ее недоминируемых дележей. Ядро игры v обозначается через $C(v)$.

VIII. 4.2. Теорема. *Ядро игры v есть множество всех таких n-векторов x, что*

$$\text{(а)} \quad \sum_{i \in S} x_i \geqq v(S) \quad \textit{для всех} \quad S \subset N,$$

$$\text{(б)} \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Доказательство. При $S = \{i\}$ условие (а) превращается в $x_i \geqq v(\{i\})$. Вместе с условием (б) это означает, что все такие векторы являются дележами.

Предположим теперь, что x удовлетворяет (а) и (б) и что $y_i > x_i$ при всех $i \in S$. В сочетанни с (а) это означает, что

$$\sum_{i \in S} y_i > v(S)$$

(и поэтому y не может доминировать x по коалиции S). Следовательно, $x \in C(v)$.

Допустим теперь, что вектор y не удовлетворяет (а) или (б). Если y не удовлетворяет (б), то он даже не является дележом и поэтому не может входить в $C(v)$. Пусть теперь существует такое непустое $S \subset N$, что

$$\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}).$$

Как легко видеть, из супераддитивности v следует, что $\alpha \geqq 0$. Наконец, пусть s — число элементов в S. Определим z, положив

$$z_i = \begin{cases} y_i + \varepsilon/s, & \text{если} \quad i \in S, \\ v(\{i\}) + \alpha/(n-s), & \text{если} \quad i \notin S. \end{cases}$$

Легко видеть, что вектор z является дележом и что $z \succ_S y$. Следовательно, $y \notin C(v)$.

Теорема VIII. 4.2 показывает, что $C(v)$ представляет собой замкнутое выпуклое множество (как множество решений системы нестрогих линейных неравенств). Это весьма интересно, так как классическая экономическая теория обычно именно ядро считала «решением» большинства теоретико-игровых проблем. Любой дележ из ядра устойчив в том смысле, что ни одна из коалиций не имеет ни желания, ни возможности изменить этот исход игры.

Конечно, в общем случае ядро может содержать более одной точки. Это не является существенным препятствием и попросту означает, что устойчивых исходов несколько. Более серьезная трудность, связанная с ядром, состоит в том, что оно вообще может отсутствовать (т. е. быть пустым).

VIII. 4.3. Теорема. *Если v — существенная игра с постоянной суммой, то $C(v)=\varnothing$.*

Доказательство. Допустим, что $x \in C(v)$. Для любого $i \in N$

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geqq v(N \setminus \{i\}),$$

но по определению игры с постоянной суммой

$$v(N \setminus \{i\}) = v(N) - v(\{i\})$$

и, так как x является дележом, должно быть $x_i \leqq v(\{i\})$. Из существенности игры v следует, что

$$\sum_{i \in N} x_i \leqq \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N),$$

и, следовательно, $x \notin E(v)$. Полученное противоречие доказывает, что $C(v)$ пусто.

Поскольку ядро часто оказывается пустым, приходится искать некую иную концепцию решения. Таким новым объектом изучения будут служить НМ-решения. Мы приведем сперва некоторые эвристические соображения, оправдывающие эту концепцию.

В § VIII. 2 мы привели пример игры трех лиц, характеристическая функция которой весьма просто записывается в следующей форме:

$$v(S) = \begin{cases} -2, & \text{если } S \text{ состоит из одного игрока,} \\ 2, & \text{если } S \text{ состоит из двух игроков,} \\ 0, & \text{если } S \text{ состоит из трех игроков.} \end{cases}$$

Мы можем оставить игру в этой форме или привести ее к $(0, 1)$-редуцированной форме. (Для этого достаточно положить $r = 1/6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$.) В $(0,1)$-редуцированной форме эта игра становится простой игрой, в которой коалиции, состоящие из двух или трех игроков, выигрывают, а коалиция, включающая только одного игрока, проигрывает.

Для этой игры в $(0, 1)$-редуцированной форме мы рассматриваем три дележа:

$$\alpha_{12} = (1/2,\ 1/2,\ 0),$$
$$\alpha_{13} = (1/2,\ 0,\ 1/2),$$
$$\alpha_{23} = (0,\ 1/2,\ 1/2)$$

как «решение». В каком же смысле они составляют решение? Легко видеть, что ни один из этих трех дележей не доминирует никакого другого из них. (Именно доминирование и заставило нас отвергнуть три слегка видоизмененных дележа в последующем варианте игры.) Конечно, это еще не все; любое множество, состоящее из единственного дележа, этим свойством обладает. Наше же множество дележей имеет, помимо этого, и следующее свойство: любой дележ, кроме трех дележей α_{ij}, доминируется одним из дележей α_{ij}.

Чтобы это проверить, рассмотрим какой-нибудь дележ $x = (x_1, x_2, x_3)$. Так как мы рассматриваем игру в (0, 1)-редуцированной форме, то $x_i \geqq 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Следовательно, не более двух компонент вектора x могут быть не меньше $1/2$. Если их действительно две, то каждая из них равна $1/2$, в то время как третья равна 0. Но это означает, что x совпадает с одним из α_{ij}. Если же x — какой-либо иной дележ, то у него не более одной компоненты, не меньшей чем $1/2$. Значит, по крайней мере две компоненты, скажем x_i и x_j, где $i < j$, меньше $1/2$. Но в таком случае ясно, что $\alpha_{ij} \succ_{\{i,j\}} x$.

Мы, таким образом, приходим к следующему определению для нашей «концепции решения».

VIII.4.4. Определение. Множество $V \subset E(v)$ называется *НМ-решением* для v, если

(i) из $x, y \in V$ следует, что $x \succ y$ не может иметь места;

(ii) если $x \notin V$, то найдется такой $y \in V$, что $y \succ x$.

Таким образом, НМ-решение удовлетворяет как условию внутренней устойчивости (ни один дележ из V не доминирует другого), так и условию внешней устойчивости (любой дележ, не входящий в V, доминируется каким-нибудь дележом из V).

Впервые НМ-решения были введены фон Нейманом и Моргенштерном; их часто также называют просто *решениями игры*. Мы не будем использовать этот термин, поскольку позднее были выработаны многие другие понятия решения.

Одна из основных трудностей, связанных с НМ-решениями, состоит в том, что из определения не следует ни их существования, ни их единственности. До сих пор не было дано общего доказательства существования НМ-решений. С другой стороны, до последнего времени не было построено и игры n лиц, ими не обладающей[1]); в действительности большинство игр имеет огромное количество НМ-решений (хотя существуют и такие игры, у которых НМ-решение единственно).

---

[1]) Недавно была построена игра 10 лиц, не имеющая НМ-решений; см. Lucas W. F., A game with no solution. RAND Memorandum RM-5518-PR, RAND Corporation, October 1967.

VIII. 4.5. Пример. Рассмотрим снова игру трех лиц с постоянной суммой в (0, 1)-редуцированной форме. Как уже указывалось выше, множество

$$V = \{(^1/_2,\ ^1/_2,\ 0),\ (^1/_2,\ 0,\ ^1/_2),\ (0,\ ^1/_2,\ ^1/_2)\}$$

является НМ-решением. Но это не единственное НМ-решение. Пусть c — любое число из интервала $[0, ^1/_2)$; легко проверить, что множество

$$V_{3,c} = \{(x_1,\ 1-c-x_1,\ c)\,|\,0 \leqq x_1 \leqq 1-c\}$$

тоже является НМ-решением. В это множество входят дележи, при которых игрок 3 получает постоянную c, а игроки 1 и 2 делят остаток во всевозможных пропорциях. Внутренняя устойчивость следует из того, что для любых двух дележей x и y из этого множества, если $x_1 > y_1$, то $x_2 < y_2$. Но доминирование по коалиции, состоящей из единственного участника, невозможно.

Чтобы доказать внешнюю устойчивость $V_{3,c}$, возьмем какой-либо дележ y вне $V_{3,c}$. Это означает, что либо $y_3 > c$, либо $y_3 < c$.

Пусть $y_3 > c$, скажем, $y_3 = c + \varepsilon$. Определим дележ x следующим образом:

$$x_1 = y_1 + \varepsilon/2, \quad x_2 = y_2 + \varepsilon/2, \quad x_3 = c.$$

Легко видеть, что $x \in V_{3,c}$ и что $x \succ y$ по коалиции $\{1, 2\}$.

Пусть теперь $y_3 < c$. Ясно, что либо $y_1 \leqq {}^1/_2$, либо $y_2 \leqq {}^1/_2$ (ибо в противном случае их сумма была бы больше 1). Пусть $y_1 \leqq {}^1/_2$. Положим $x = (1-c, 0, c)$. Так как $1 - c > {}^1/_2 \geqq y_1$, то $x \succ y$ по коалиции $\{1, 3\}$. Очевидно, что $x \in V_{3,c}$. Если же $y_2 \leqq {}^1/_2$, мы покажем аналогично, что $z \succ y$, где $z = (0, 1-c, c)$.

Итак, мы видели, что, кроме симметричного НМ-решения, наша игра имеет еще целое семейство решений, при которых игрок 3 получает фиксированное количество c из интервала $[0, ^1/_2)$. Эти НМ-решения называются *дискриминирующими*; говорят, что игрок 3 при этом *дискриминирован*. В случае множества $V_{3,0}$ говорят, что игрок 3 *полностью дискриминирован* или *исключен*.

По соображениям симметрии очевидно, что существуют также два семейства НМ-решений $V_{1,c}$ и $V_{2,c}$, в которых дискриминируются игроки 1 и 2 соответственно.

Предшествующий пример показывает, что у игры может быть чрезвычайно много НМ-решений. Совершенно неясно, какое из этих решений следует выбрать. Когда же НМ-решение выбрано, остается непонятным, какой из него выбрать дележ. Фон Нейман и Моргенштерн утверждают, что НМ-решения отражают нормы поведения, свойственные данной социальной структуре. Когда же общество выбрало норму поведения (НМ-решение), дележ определяется деловыми способностями игроков.

Как уже отмечалось выше, существование НМ-решений в общем случае до сих пор не было доказано, однако получены некоторые частные результаты. Некоторые из этих результатов касаются существования НМ-решений для конкретных классов игр, другие — существования решений определенного типа.

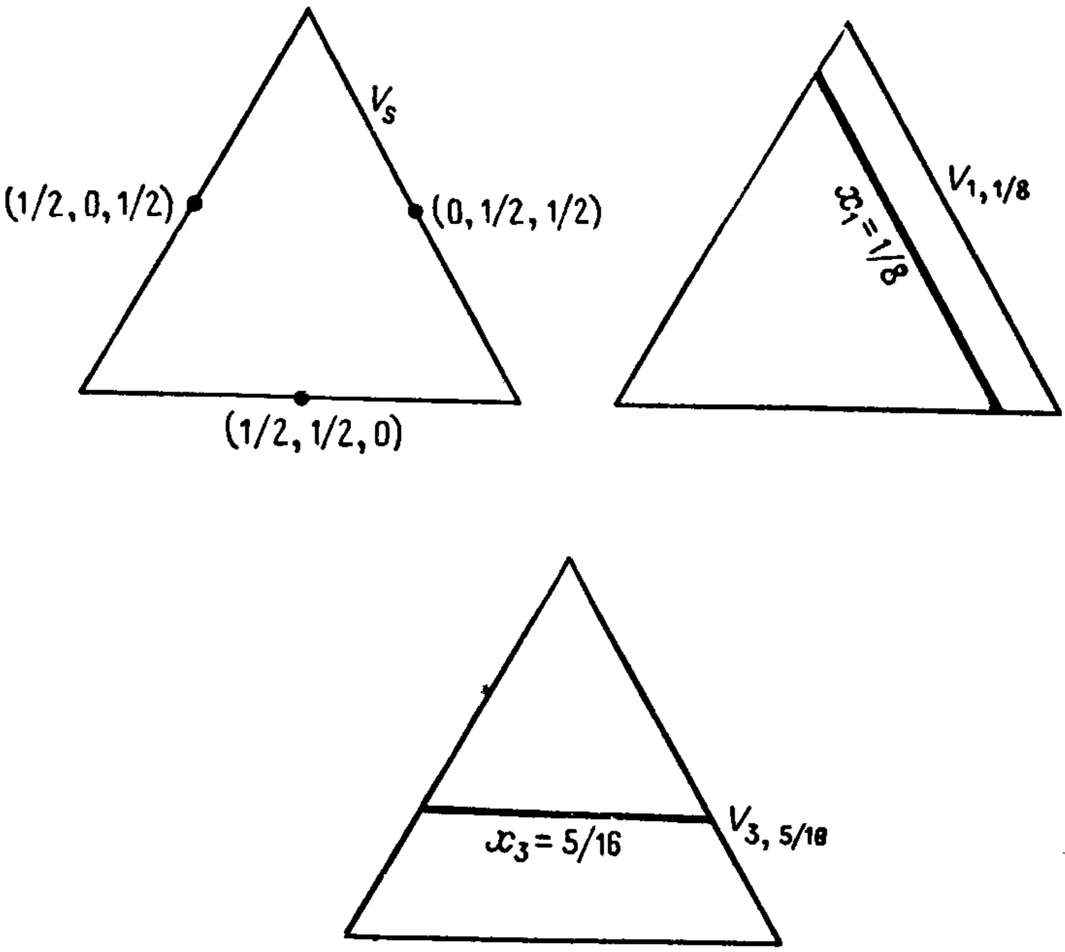

Рис. VIII. 4.1. Три НМ-решения игры трех лиц с постоянной суммой.

Рассмотрим несколько таких теорем.

VIII. 4.6. Теорема. *Пусть v — простая игра в $(0, 1)$-редуцированной форме, и пусть S — минимальная выигрывающая коалиция (т. е. такая коалиция, что $v(S) = 1$, но $v(T) = 0$ для любой коалиции $T \subset S$, $T \neq S$). Обозначим через V_S множество всех таких дележей x, что $x_i = 0$ для всех $i \notin S$. Тогда V_S есть НМ-решение.*

Доказательство. Эта теорема доказывается так же, как и тот факт (пример VIII. 4.5), что множества $V_{3,c}$ являются НМ-решениями.

Теорема VIII. 4.6 устанавливает, что любая простая игра имеет дискриминирующие НМ-решения, в которых минимальная выигрывающая коалиция исключает остальных игроков. В некоторых случаях дискриминированные участники могут получать небольшие суммы (см. пример VIII. 4.5). Иногда оказывается довольно трудно установить точные размеры этих сумм, но здесь мы не будем заниматься этим вопросом.

VIII.4.7. Пример (симметричные решения игр трех лиц).

В примере VIII. 4.5 мы перечислили все НМ-решения для игр трех лиц с постоянной суммой. Мы покажем, как обобщить симметричные трехточечные НМ-решения для случая общих игр трех лиц.

В играх трех лиц в (0, 1)-редуцированной форме значения характеристической функции для коалиций с одним и тремя участниками определены заранее и, следовательно, остается определить эти значения только для коалиций с двумя игроками. В симметричных играх они одинаковы для всех таких коалиций, и поэтому такие игры определяются единственным параметром v_2. Этот параметр может изменяться в интервале $[0, 1]$; при $v_2 = 1$ получается игра с постоянной суммой (которую мы уже проанализировали), тогда как при $v_2 = 0$ получается чистая «игра-сделка», в которой любой дележ входит в ядро, и поэтому ядро является единственным НМ-решением.

Если v_2 велико (т. е. близко к 1), естественно ожидать, что игроки будут вести себя почти так же, как и в игре с постоянной суммой. Поэтому они в первую очередь будут стремиться попасть в коалицию из двух игроков. При этом ни один из них не может потребовать слишком много от предполагаемого партнера, и, следовательно, естественным результатом должно явиться соглашение между членами образовавшейся коалиции двоих о разделении дохода поровну.

После того как коалиция двух игроков сформировалась, ее члены должны прийти к соглашению с третьим участником игры о дележе оставшихся $1 - v_2$ единиц полезности. Здесь уже нет никаких альтернатив, интересы коалиции и третьего игрока прямо противоположны, и поэтому получаемая коалицией сумма зависит только от способностей игроков к торгу. Таким образом, мы можем надеяться найти НМ-решение, состоящее из трех прямолинейных отрезков:

$$\left\{\begin{matrix} (x,\ x,\ 1-2x) \\ (x,\ 1-2x,\ x) \\ (1-2x,\ x,\ x) \end{matrix}\right\},\quad v_2/2 \leqq x \leqq {}^1/_2 \tag{8.4.1}$$

(см. рис. VIII. 4.2). Устойчивость этого множества требует проверки. Мы обнаружим, что оно действительно устойчиво при $v_2 \geqq {}^2/_3$.

Внутренняя устойчивость доказывается следующим образом. Так как $x \geqq v_2/2$, мы имеем $2x \geqq v_2$, и, следовательно, дележ вида $(x, x, 1-2x)$ может доминироваться только по коалициям $\{1, 3\}$

и $\{2, 3\}$. Но ни один из дележей из (8.4.1) не может доминировать $(x, x, 1-2x)$ по коалиции $\{1, 3\}$. Действительно, если в дележе $(y, y, 1-2y)$ будет $y > x$, то $1-2x > 1-2y$; если же $y > x$ в дележе $(y, 1-2y, y)$, то $2y > v_2$ и коалиция $\{1, 3\}$ неэффективна. Соображения симметрии и аналогичные рассуждения завершают доказательство внутренней устойчивости.

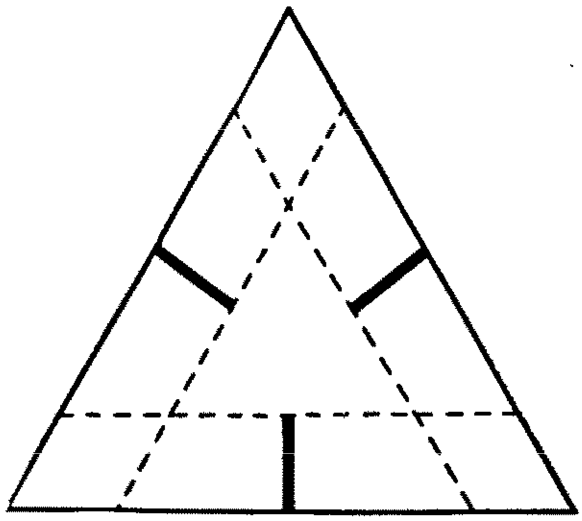

Рис. VIII. 4.2.

Несложно доказать и внешнюю устойчивость. Поскольку $v_2 \geqq 2/3$, любой дележ может иметь не более двух компонент, не меньших $v_2/2$, за единственным исключением в случае $v_2 = 2/3$ и при дележе $(1/3, 1/3, 1/3)$, который в этой ситуации удовлетворяет (8.4.1). Таким образом, любой дележ, не удовлетворяющий (8.4.1), имеет не более двух компонент, не меньших $v_2/2$. Предположим, что некоторый дележ z имеет две такие компоненты; симметричность игры позволяет считать, что это две первые компоненты, z_1 и z_2. Если $z_1 = z_2$, то z удовлетворяет (8.4.1). Если же

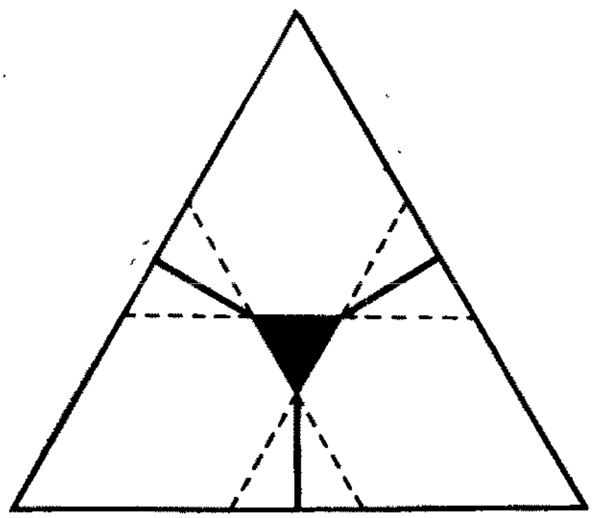

Рис. VIII. 4.3.

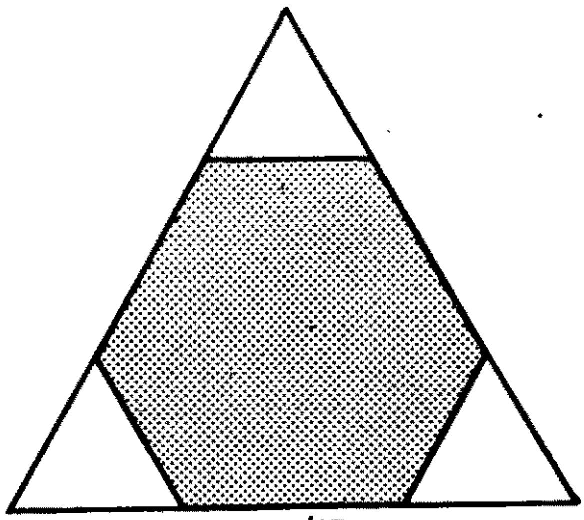

Рис. VIII. 4.4.

$z_1 \neq z_2$, то (снова используя соображения симметрии) можно считать, что $z_1 = z_2 + 3\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В этом случае z доминируется дележом $(z_2 + \varepsilon, z_2 + \varepsilon, z_3 + \varepsilon)$ по коалиции $\{2, 3\}$.

Если, однако, дележ z имеет только одну компоненту не меньшую $v_2/2$, или вообще не имеет таких компонент, то можно считать, что z_1 и z_2 меньше чем $v_2/2$. В таком случае z доминируется дележом $(v_2/2, v_2/2, 1-v_2)$ по коалиции $\{1, 2\}$.

При $v_2 < 2/3$ проведенное исследование теряет силу. Действительно, внутренняя устойчивость сохраняется, но внешней уже не будет. Эти игры имеют ядро, состоящее из всех таких дележей $y = (y_1, y_2, y_3)$, что $y_i \leqq 1 - v_2$ при $i = 1, 2, 3$. Можно проверить, что в этом случае объединение ядра и трех прямолинейных отрезков, задаваемых уравнениями (8.4.1), является НМ-решением (см. рис. VIII. 4.3). При $v_2 \leqq 1/2$ эти три отрезка будут подмножествами ядра, и, таким образом, ядро является единственным НМ-решением (см. рис. VIII. 4.4).

Как было показано, множество всех игр n лиц (в $(0, 1)$-редуцированной форме) составляет компактное подмножество $(2^n - n - 2)$-мерного евклидова пространства. Используя меру Лебега, можно сказать, что подмножество этого множества, имеющее ту же размерность, является *положительной долей* множества всех игр n лиц. Нижеследующие теоремы мы приводим без доказательства.

VIII.4.8. Теорема. *Положительная доля всех игр n лиц имеет единственное НМ-решение, совпадающее с ядром.*

VIII.4.9. Теорема. *Положительная доля всех игр n лиц имеет НМ-решения, дискриминирующие $n - 2$ игроков. Эти решения исключают по меньшей мере $n - 3$ дискриминируемых игроков.*

VIII. 5. МОДЕЛЬ РЫНКА ПО ЭДЖВОРТУ. ПРИМЕР

На протяжении этой главы мы занимались чисто математическими рассмотрениями. Сейчас мы применим некоторые из них к вопросам экономического анализа.

VIII.5.1. Рассмотрим следующую игру двух лиц с ненулевой суммой. Игрок I имеет a единиц одного товара, в то время как игрок II имеет b единиц второго товара. Ни один из них не имеет товара, которым обладает другой. Мы выражаем это, говоря, что игрок I имеет набор $(a, 0)$, а игрок II — набор $(0, b)$. Для того чтобы произошел какой-либо обмен между игроками, необходимо, чтобы каждый мог извлечь некоторую полезность из замены своего набора на (x, y) и $(a - x, b - y)$ соответственно, где $0 \leqq x \leqq a$ и $0 \leqq y \leqq b$.

Такие игры впервые рассматривались Эджвортом. Он дал «решение», вполне аналогичное решению фон Неймана — Моргенштерна. Это — такое множество распределений A, что ни одно распределение из A не предпочитается обоими игроками другому распределению из A, но для любого не входящего в A распределения $((x, y);\ (a - x, b - y))$ в множестве A найдется распределение $((x', y');\ (a - x', b - y'))$, которое предпочитают оба игрока. При любом распределении из A оба игрока получают по меньшей мере ту же полезность, что и при начальном распределении $((a, 0);\ (0, b))$. Если предположить, что обмениваемые товары бесконечно делимы, то A обычно будет представлять собой кривую, называемую *кривой контрактов.*

Понятие кривой контрактов графически иллюстрируется на рис. VIII. 5.1 с помощью системы *кривых безразличия.* Это — такие кривые, что любые две точки на кривой, выпуклой вниз, доставляют одну и ту же полезность игроку I, а две точки на кривой, выпуклой вверх, доставляют одну и ту же полезность игроку II.

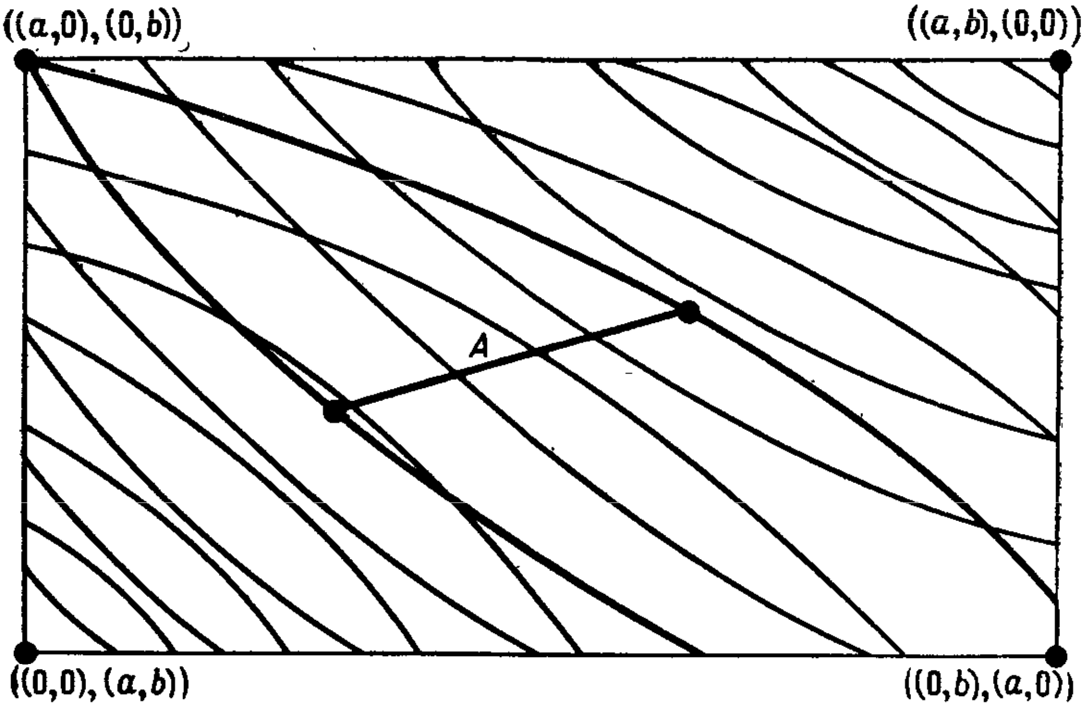

Рис. VIII. 5.1.

Кривая контрактов является геометрическим местом точек касания кривых этих двух семейств с тем ограничением, что полезности обоих игроков должны быть не меньше тех полезностей, которыми они обладают до сделки.

Анализируя свою модель, Эджворт приходит к выводу, что если число игроков возрастает, то при некоторых не слишком ограничительных условиях кривая контрактов стягивается к единственной предельной точке. Он называет эту точку «рыночной ценой». Ниже будет дана математическая интерпретация этого факта.

Рассмотрим рынок, состоящий из множества $I = M \cup N$ торговцев. Член i множества M имеет начальный набор товаров $(a_i, 0)$, а член j множества N имеет начальный набор $(0, b_j)$. Функция полезности игрока i равна $\psi_i(x, y)$. Мы предполагаем, что

$$\text{каждая } \psi_i(x, y) \text{ строго выпукла,} \tag{8.5.1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \psi_i(x, y) < \infty \quad \text{для всех} \quad y, \tag{8.5.2}$$

$$\lim_{y \to \infty} \psi_i(x, y) < \infty \quad \text{для всех} \quad x, \tag{8.5.3}$$

все ψ_i обладают вторыми частными производными, непрерывными на всей плоскости. (8.5.4)

Допустим, что образовалась коалиция S. Члены коалиции разделят свой совокупный набор товаров так, чтобы получить наибольшую общую полезность, а затем, возможно, произведут некоторые побочные платежи. Поэтому

$$v(S)=\max_{x,\,y}\left\{\sum_{k\in S}\psi_k(x_k,\ y_k)\right\}, \tag{8.5.5}$$

где максимум берется по всем таким наборам x и y, что

$$x_k\geqq 0,\quad y_k\geqq 0,\quad \sum_{k\in S}x_k=\sum_{i\in S\cap M}a_i,\quad \sum_{k\in S}y_k=\sum_{j\in S\cap N}b_j.$$

Мы примем упрощающее предположение, что все игроки имеют одну и ту же функцию полезности, т. е. $\psi_i(x, y)=\psi(x, y)$ для всех i. В этом случае из строгой выпуклости ψ следует, что оптимальным распределением товаров будет их распределение поровну. Предположим также, что все игроки из M имеют одно и то же количество a первого товара, а игроки из N — одно и то же количество b второго товара. При этих предположениях характеристическая функция игры дается формулой

$$v(S)=s\psi(s_ma/s,\ s_nb/s), \tag{8.5.6}$$

где s, s_m и s_n — число элементов в S, $S\cap M$ и $S\cap N$ соответственно. Обозначим через $[m, n]$ игру, в которой M содержит m элементов, а N содержит n элементов.

Рассмотрим игру двух лиц $[1, 1]$. Ее характеристическая функция имеет вид

$$v(\{1\})=\psi(a,\ 0),\qquad v(\{2\})=\psi(0,\ b),$$
$$v(\{1,\ 2\})=2\psi(a/2,\ b/2).$$

Эта игра имеет единственное НМ-решение, состоящее из всех ее дележей, т. е. из всех векторов (z_1, z_2), для которых

$$z_1+z_2=2\psi(a/2,\ b/2), \tag{8.5.7}$$

$$z_1\geqq\psi(a,\ 0), \tag{8.5.8}$$

$$z_2\geqq\psi(0,\ b). \tag{8.5.9}$$

Мы покажем теперь, что для любого n игра $[n, n]$ имеет НМ-решение, аналогичное задаваемому формулами (8.5.7)—(8.5.9).

VIII. 5.2. Теорема. *При любом n игра $[n, n]$ имеет НМ-решение V, состоящее из всех векторов x, для которых $x_i=z_1$ при $i\in M$ и $x_j=z_2$ при $j\in N$, где z_1 и z_2 удовлетворяют условиям* (8.5.7)—(8.5.9).

Доказательство. Во-первых, множество V внутренне устойчиво. Действительно, доминироваие может иметь место только по такому множеству S, что $S \cap M \neq \varnothing$ и $S \cap N \neq \varnothing$. Но если $x, y \in V$ и $x_i > y_i$ при некотором $i \in M$, то $x_j < y_j$ при всех $j \in N$. Следовательно, x не может доминировать y.

Пусть теперь $x \in V$. Тогда найдется некоторая пара (i, j), где $i \in M$, а $j \in N$, такая, что $x_i + x_j < 2\psi(a/2, b/2)$. Выберем вектор $(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$ так, что $\hat{z}_1 > x_i$ и $\hat{z}_2 > x_j$. Ясно, что дележ $y \in V$, соответствующий вектору $(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$, доминирует x по коалиции $\{i, j\}$. Итак, V и внешне устойчиво.

Конечно, предыдущие рассмотрения показывают, что НМ-решения не обнаруживают тенденции к «сжатию» при возрастании n. Но ядро эту тенденцию имеет. Мы рассмотрим два случая: монополию (игра $[1, n]$) и чистую конкуренцию (игра $[m, n]$, где как m, так и n велики).

VIII. 5.3. Теорема. *В игре $[1, n]$ дележ x, для которого $x_j = \psi(0, b)$ при всех $j \in N$, принадлежит ядру. Кроме того, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $n(\varepsilon)$, что если $n \geqq n(\varepsilon)$, то никакой дележ y, для которого $y_1 \leqq x_1 - \varepsilon$, не принадлежит ядру.*

Доказательство. Доминирование возможно только по коалиции, включающей 1. Если x_1 — наибольшее допустимое, то ясно, что $x \in C(v)$.

Рассмотрим теперь выражение $v(I) - v(I \setminus \{j\}) - \psi(0, b)$, где $j \in N$. Если мы заменим v его значением (8.5.6) и воспользуемся теоремой Тейлора, мы увидим, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $n(\varepsilon)$

$$| v(I) - v(I \setminus \{j\}) - \psi(0, b) | < \varepsilon/n$$

для всех $n \geqq n(\varepsilon)$. Предположим теперь, что y — дележ в игре $[1, n]$, для которого $y_1 \leqq x_1 - \varepsilon$. Должно найтись такое $j \in N$, что $y_j \geqq \psi(0, b) + \varepsilon/n$ (так как $\sum y_j = x_1 + n\psi(0, b)$). Поэтому ясно, что

$$\sum_{i \in I \setminus \{j\}} y_i \leqq v(I) - \psi(0, b) - \varepsilon/n < v(I \setminus \{j\})$$

и $y \notin C(v)$.

Теорема VIII. 5.3 описывает случай монополии. Случай чистой конкуренции характеризуется следующей теоремой.

VIII. 5.4. Теорема. *Пусть m' и n' таковы, что*

$$\psi\left(\frac{m'a}{m'+n'}, \frac{n'b}{m'+n'}\right) = \max_s \psi\left(\frac{s_m a}{s}, \frac{s_n b}{s}\right). \tag{8.5.10}$$

Тогда для игры $[m, n]$, где $m = km'$, а $n = kn'$, дележ

$$x = \left(\frac{v(I)}{m+n}, \frac{v(I)}{m+n}, \ldots, \frac{v(I)}{m+n}\right)$$

всегда принадлежит ядру. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $k(\varepsilon)$, *что при* $k \geqq k(\varepsilon)$ *никакой дележ, в котором одна из компонент меньше* $\frac{v(I)}{m+n} - \varepsilon$, *не принадлежит ядру игры* $[km', kn']$.

Мы опускаем доказательство этой теоремы, так как оно совершенно аналогично доказательству теоремы VIII. 5.3. Равенство (8.5.10) выражает тот факт, что соотношение размеров множеств M и N оптимально (например, в случае, когда наличный капитал точно соответствует количеству предлагаемого труда). Если же M и N находятся в ином отношении, то возникает неприятное несоответствие (безработица или недостаток рабочей силы) и в случае достаточно большого числа участников игра вообще не имеет ядра. Но если (8.5.10) выполняется, то всегда существует ядро, стягивающееся к единственному дележу x, и наша игра может благополучно развиваться в обстановке всеобщего счастья.

Задачи

1. а) В игре n лиц ядро является подмножеством любого НМ-решения.

б) Если ядро имеет непустое пересечение со всеми гранями $x_i = v(\{i\})$ симплекса дележей, то ядро является единственным НМ-решением игры v[1]), и обратно.

в) Положительная доля (подмножество полной размерности) множества игр n лиц (в $(0, 1)$-редуцированной форме) имеет единственное НМ-решение (теорема VIII. 4.7).

2. Для игры v определим полудележ как вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $x_i \geqq v(\{i\})$ и $\sum_{i \in N} x_i \leqq v(N)$. Тогда, если V есть НМ-решение игры v и x — полудележ, не принадлежащий V, то существует такой $y \in V$, что $y \succ x$.

3. Для игры v определим b_i соотношением

$$b_i = \max_{S \subset N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

---

[1]) Это утверждение неверно, как показывает следующий пример, построенный в 1967 г. студенткой ЛГУ Т. Е. Кулаковской (см. [VIII. 13*]).

Рассмотрим игру четырех лиц с характеристической функцией v, заданной следующим образом:

$$\begin{cases} v(S) = {}^2/_3, & \text{если } |S| = 3, \\ v(\{1, 2, 3, 4\}) = 1, & \\ v(S) = 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ядро этой игры является выпуклой оболочкой точек

$$({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3, 0), \quad ({}^1/_3, {}^1/_3, 0, {}^1/_3), \quad ({}^1/_3, 0, {}^1/_3, {}^1/_3), \quad (0, {}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$$

и, таким образом, пересекается со всеми гиперплоскостями $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Легко видеть, что ядро не будет НМ-решением.

Справедливость обратного утверждения была впервые установлена О. Н. Бондаревой [VIII. 12*]. — *Прим. ред.*

Показать, что если найдется i, для которого $x_i > b_i$, то дележ x не может принадлежать ядру и не может принадлежать ни одному из НМ-решений.

4. Показать, что можно получить *главное простое решение* симметричной игры, следующим образом обобщив рассмотренное в примере VIII.4.5 построение симметричного НМ-решения V для простой игры трех лиц.

Пусть v — простая игра n лиц с постоянной суммой в $(0, 1)$-редуцированной форме. Предположим, что существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого $\alpha_i \geqq 0$ и $\sum\limits_{i \in S} \alpha_i = 1$ для любой минимальной выигрывающей коалиции S. Для такой коалиции определим вектор x^S соотношениями: $x_i^S = \alpha_i$, если $i \in S$, $x_i^S = 0$ в противном случае. Тогда x^S — дележ и множество

$$V = \{x^S \mid S \text{ — минимальная выигрывающая коалиция}\}$$

является НМ-решением для игры v, называемым главным простым решением.

5. Рассмотрим простую игру n лиц в $(0, 1)$-редуцированной форме, в которой выигрывающие коалиции состоят из а) игрока 1 и еще хотя бы одного игрока, б) из множества $\{2, \ldots, n\}$.

а) Найти главное простое решение этой игры.

б) Пусть V_S для $S = \{1, j\}$, где $j \neq 1$, состоит из всех дележей, для которых $x_1 + x_j = 1$, и пусть V_S для $S = \{2, \ldots, n\}$ состоит из всех дележей, для которых $x_1 = 0$. В обоих случаях V_S является НМ-решением.

в) Пусть для $S = \{2, \ldots, n\}$ и $0 \leqq c \leqq 1$ множество $V_S(c)$ состоит из всех дележей, для которых $x_1 = c$. Тогда $V_S(c)$ будет НМ-решением при $0 \leqq c < (n-2)/(n-1)$, но не при $c \geqslant (n-2)/(n-1)$.

г) Для $S = \{1, j\}$ единственным НМ-решением, дискриминирующим членов множества $N \setminus S$, является множество V_S, определенное выше в б).

6. Композиция простых игр. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — простые игры в $(0, 1)$-редуцированной форме, имеющие $m_1, m_2, \ldots, m_n$ игроков соответственно, и пусть w — простая игра n лиц в $(0, 1)$-редуцированной форме. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_n, W$ представляют собой НМ-решения игр $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ соответственно.

Образуем простую игру m лиц u (где $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$) следующим образом. Поставим в соответствие каждому из m игроков упорядоченную пару (i, j), где $1 \leqq j \leqq n$ и $1 \leqq i \leqq m_j$. Коалицию же S будем считать выигрывающей в том и только в том случае, когда она содержит подмножество S' вида

$$S' = \bigcup_{j \in T} S_j \times \{j\},$$

где T — выигрывающая коалиция в w, а каждая S_j — выигрывающая коалиция в v_j. (Эвристически это можно представить себе, как «распадение» игры на n «комитетов» $M_j \times \{j\}$.)

Каждой паре $x^j \in V_j$ и $y \in W$ сопоставим m-вектор z с компонентами $z_{ij} = x_i^j y_j$. Показать, что множество всех таких z является НМ-решением «составной» простой игры u.

7. Рассмотрим простую игру v со счетным числом игроков, в которой коалиция является выигрывающей в том и только в том случае, когда ее дополнение конечно. Если v — игра в $(0, 1)$-редуцированной форме, то $E(v)$ состоит из всех последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ неотрицательных чисел, для которых $\sum x_i = 1$.

Игра v не имеет НМ-решений. (Показать, что ни один дележ не может принадлежать НМ-решению.)

8. Пусть v — простая игра четырех лиц в $(0, 1)$-редуцированной форме с выигрывающими коалициями $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$. Пусть C — любое замкнутое подмножество интервала $[0, 1)$, а J — множество всех векторов

$$x = (0,\ (1-u)/2,\ (1-u)/2,\ u),$$

где $u \in C$.

Тогда у игры v существует такое НМ-решение V, что $J \subset V$, и при этом оба множества J и $V \setminus J$ замкнуты и не пересекаются.

а) Положим $\rho(u, C) = \min\limits_{v \in C} |u - v|$. Пусть K — множество всех дележей в ид

$$((1 - u - \rho(u, C))/2,\ x,\ y,\ u)$$

для всех $u \in [0, 1]$. Показать, что K замкнуто и $K \cap J \neq \varnothing$.

б) Рассмотрим множество H, состоящее из всех дележей из K, которые доминируются каким-либо дележом из J. Тогда

$$V = J \cup (K \setminus H)$$

и есть искомое НМ-решение.

9. Доказать теорему VIII. 5.4.

Глава IX

ДРУГИЕ ПОНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В ИГРАХ n ЛИЦ

IX.1. ВЕКТОР ШЕПЛИ

То обстоятельство, что ни одна общая теорема существования решения в играх n лиц пока не доказана, заставило математиков искать другие понятия решения. Одним из таких понятий является вектор значений игры, введенный Шепли (значение по Шепли).

Шепли подходит к своему понятию значения аксиоматически. Сначала мы дадим два определения.

IX.1.1. Определение. *Носителем* игры v называется такая коалиция T, что $v(S) = v(S \cap T)$ для любой коалиции S.

Содержательно определение IX.1.1 утверждает, что любой игрок, не принадлежащий носителю, является «болваном», т. е. не может иичего внести ни в какую коалицию.

IX.1.2. Определение. Пусть v — игра n лиц, а π — любая перестановка множества N. Тогда через πv мы обозначаем такую игру u, что для любой коалиции $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_s)\}) = v(S).$$

По существу игра πv отличается от игры v лишь тем, что в последней игроки поменялись ролями в соответствии с перестановкой π.

С помощью этих двух определений можно изложить аксиоматику Шепли. Заметим только, что так как игры в сущности отождествляются с вещественными функциями, можно говорить о сумме двух или большего числа игр, а также о произведении игры на число.

IX.1.3. Аксиомы (Шепли). Под вектором значений игры v мы будем понимать n-вектор $\varphi[v]$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

S1. Если S — любой носитель v, то

$$\sum_S \varphi_i[v] = v(S).$$

S2. Для любой перестановки π и $i \in N$

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

S3. Если u и v — две любые игры, то

$$\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v].$$

Таковы аксиомы Шепли. Примечательно, что этих аксиом оказывается достаточно для определения единственным образом значения φ для всех игр.

IX. 1.4. Теорема. *Существует единственная функция φ, определенная для всех игр и удовлетворяющая аксиомам* S1 — S3.

Доказательство теоремы IX. 1.4 дается следующей цепочкой лемм.

IX. 1.5. Лемма. *Пусть для любой коалиции S игра w_S определяется следующим образом:*

$$w_S(T) = \begin{cases} 0, & \text{если } S \not\subset T, \\ 1, & \text{если } S \subset T. \end{cases}$$

Тогда, если s — число игроков в S, то

$$\varphi_i[w_S] = \begin{cases} 1/s, & \text{если } i \in S, \\ 0, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Доказательство. Ясно, что S — носитель w_S, так же как и любое множество T, содержащее множество S. Тогда по аксиоме S1, если $S \subset T$, то

$$\sum_T \varphi_i[w_S] = 1.$$

Но это означает (так как возможно также равенство $S = T$), что $\varphi_i[w_S] = 0$ для $i \notin S$.

Далее, если π — любая перестановка, которая переводит S в себя, то ясно, что $\pi w_S = w_S$. Следовательно, в силу S2 для любых $i, j \in S$ будет $\varphi_i[w_S] = \varphi_j[w_S]$. Так как этих величин всего s, а сумма их равна 1, то $\varphi_i[w_S] = 1/s$, если $i \in S$.

IX. 1.6. Следствие. *Если $c > 0$, то*

$$\varphi_i[cw_S] = \begin{cases} c/s, & \text{если } i \in S, \\ 0, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

IX. 1.7. Лемма. *Если v — любая игра, то для $S \subset N$ существует $2^n - 1$ таких вещественных чисел c_S, что*

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S,$$

где w_S определена в лемме IX. 1.5.

Доказательство. Положим

$$c_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \tag{9.1.1}$$

(здесь t — число элементов в T). Мы покажем, что эти числа c_S удовлетворяют условиям леммы. Действительно, если U — любая коалиция, то

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(U) = \sum_{S \subset U} c_S = \sum_{S \subset U} \Big(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \Big) =$$

$$= \sum_{T \subset U} \Bigg(\sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} \Bigg) v(T).$$

Рассмотрим теперь величину в скобках в этом последнем выражении. Для каждого значения s между t и u имеется C_{u-t}^{u-s} таких множеств S с s элементами, что $T \subset S \subset U$. Следовательно, выражение в скобках можно заменить на

$$\sum_{s=t}^{u} C_{u-t}^{u-s} (-1)^{s-t}.$$

Но это — в точности биномиальное разложение $(1-1)^{u-t}$. Следовательно, для всех $t < u$ оно равно 0, а для $t = u$ оно равно 1. Поэтому для всех $U \subset N$

$$\sum_{S \subset U} c_S w_S(U) = v(U).$$

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы IX. 1.4. Действительно, лемма IX. 1.7 показывает, что любая игра может быть представлена в виде линейной комбинации игр w_S. По лемме IX. 1.5 для таких игр функция φ определяется единственным образом. Далее, некоторые из коэффициентов c_S отрицательны; однако из аксиомы S3 легко видеть, что если u, v и $u - v$ являются играми, то $\varphi[u - v] = \varphi[u] - \varphi[v]$. Тогда по аксиоме S3 функция φ для всех игр v определяется единственным образом. Для функции φ мы можем также дать явное выражение. Мы знаем, что

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$$

и, следовательно,

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subset N} c_S \varphi_i[w_S] = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} c_S \cdot (1/s).$$

Но c_S определены приведенной выше формулой (9.1.1); подставляя ее в это выражение, получаем

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} (1/s) \left\{ \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right\},$$

$$\varphi_i[v] = \sum_{T \subset N} \left\{ \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} (1/s) v(T) \right\}. \tag{9.1.2}$$

Положим

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t}/s. \tag{9.1.3}$$

Легко видеть, что если $i \notin T'$ и $T = T' \cup \{i\}$, то $\gamma_i(T') = -\gamma_i(T)$. Действительно, все члены в правой части (9.1.3) будут в обоих случаях одни и те же, за исключением того, что $t = t' + 1$, и, следовательно, будут отличаться лишь знаком. Значит, мы будем иметь

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \gamma_i(T) \{v(T) - v(T \setminus \{i\})\}.$$

Далее, если $i \in T$, то имеется ровно C_{n-t}^{s-t} таких коалиций S с s элементами, что $T \subset S$. Следовательно, мы имеем

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t}/s = \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} \int_0^1 x^{s-1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} x^{s-1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{t-1} \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} x^{s-t}\,dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t}\,dx.$$

Но это — хорошо известный определенный интеграл; имеем, таким образом,

$$\gamma_i(T) = (t-1)!\,(n-t)!/n!$$

и, следовательно,

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})]. \tag{9.1.4}$$

Формула (9.1.4) дает вектор Шепли в явном виде. Легко проверить, что это выражение удовлетворяет аксиомам S1—S3. Кроме того, легко видеть, что сумма коэффициентов $\gamma_i(T)$ равна 1. Действительно, числитель равен числу перестановок из N элементов, в которых элементу i предшествуют в точности элементы из T, а знаменатель равен общему числу перестановок. Ввиду супераддитивности выражение в квадратных скобках всегда не меньше $v(\{i\})$. Следовательно,

$$\varphi_i[v] \geqq v(\{i\}), \tag{9.1.5}$$

так что $\varphi[v]$ всегда является дележом.

Если отвлечься от аксиоматического определения, то вектору Шепли, выраженному формулой (9.1.4), можно дать следующее содержательное истолкование. Предположим, что игроки (элементы множества N) решили встретиться в определенном месте в определенное время. Естественно, что из-за случайных флуктуаций все они будут прибывать в различные моменты времени; однако предполагается, что все порядки прибытия игроков (т. е. их перестановки) имеют одну и ту же вероятность, а именно $1/n!$. Предположим, что если игрок i, прибывая, застает на месте членов коалиции $T\setminus\{i\}$ (и только их), то он получает величину $v(T) - v(T\setminus\{i\})$; иначе говоря, его выигрышем является предельная величина, которую он вносит в коалицию. Тогда компонента вектора Шепли $\varphi_i[v]$ представляет собой математическое ожидание выигрыша игрока i в условиях этой рандомизационной схемы.

В случае когда игра v проста, формула для вектора Шепли также становится особенно простой. Действительно, $v(T) - v(T\setminus\{i\})$ всегда будет либо 0, либо 1, причем это выражение равно 1, если T — выигрывающая коалиция, а коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей. Следовательно, мы должны иметь

$$\varphi_i[v] = \sum_T (t-1)!\,(n-t)!/n!,$$

где суммирование распространяется на все такие выигрывающие коалиции T, что коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей.

IX. 1.8. Пример. Рассмотрим корпорацию из четырех акционеров, обладающих соответственно 10, 20, 30 и 40 акциями. Предполагается, что любое решение может быть утверждено акционерами, имеющими простое большинство акций. Эта ситуация может рассматриваться как простая игра четырех лиц, в которой выигрывающими являются коалиции: $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$. Мы хотим найти вектор Шепли для этой игры.

Для того чтобы найти φ_1, заметим, что единственная выигрывающая коалиция T, такая, что коалиция $T\setminus\{1\}$ не является выигрывающей, есть коалиция $\{1, 2, 3\}$. Следовательно, так как $t = 3$,

$$\varphi_1 = 2!\,1!/4! = {}^1/_{12}.$$

Аналогично находим, что коалиции $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3, 4\}$ являются выигрывающими, но каждая из них перестает быть выигрывающей, если из нее устраняется игрок 2. Поэтому

$$\varphi_2 = {}^1/_{12} + {}^1/_{12} + {}^1/_{12} = {}^1/_4.$$

Точно таким же образом находим, что $\varphi_3 = {}^1/_4$, а $\varphi_4 = {}^5/_{12}$. Следовательно, вектор Шепли есть вектор $({}^1/_{12}, {}^1/_4, {}^1/_4, {}^5/_{12})$. Этот вектор не совпадает с «вектором голосования», который равен $({}^1/_{10}, {}^1/_5, {}^3/_{10}, {}^2/_5)$. Заметим, что компоненты вектора Шепли для игроков 2 и 3 равны, хотя игрок 3 имеет гораздо больше акций. Это неудивительно, так как у игрока 3 не больше возможностей для образования выигрывающей коалиции, чем у игрока 2; в игру, рассматриваемую как характеристическая функция, эти два игрока входят симметрично.

Точно так же ясно, что «сила» игрока 4 больше, чем доля его акций, а «сила» игрока 1 меньше его доли акций.

IX. 1.9. Пример. Рассмотрим игру, аналогичную предыдущей, за исключением того, что игроки имеют соответственно 10, 30, 30 и 40 акций. Можно показать, что любые два игрока из множества игроков 2, 3, 4 образуют выигрывающую коалицию, а игрок 1 не может ничего внести ни в какую коалицию. Таким образом, вектор Шепли равен $(0, {}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$: акции игрока 1 бесполезны, а избыточные акции игрока 4 не дают ему преимущества по сравнению с игроками 2 и 3.

IX. 2. УСТОЙЧИВЫЕ МНОЖЕСТВА

Одна из трудностей, связанных с понятиями, которые мы до сих пор изучали, состоит в том, что, вообще говоря, эти понятия, по-видимому, не объясняют того, что происходит в любой партии игры. НМ-решения определяют «нормы поведения»; вектор Шепли дает своего рода математическое ожидание. Устойчивое множество получается рассмотрением переговоров, которые фактически могут иметь место в продолжении партии игры. Таким образом, мы будем рассматривать возможные угрозы и контругрозы, выдвигаемые несколькими игроками.

IX.2.1. Определение. *Коалиционной структурой* в игре n лиц называется разбиение

$$\mathcal{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_m)$$

множества N.

Содержательно, коалиционная структура представляет собой разбиение множества N на взаимно непересекающиеся коалиции. Предположим, что такая структура достигнута. Мы предполагаем, что каждая из образованных коалиций T_k получит величину

$v(T_k)$, которую нужно разделить между членами этой коалиции. Но как будет делиться эта величина?

IX.2.2. Определение. *Конфигурацией* называется пара

$$(x;\ \mathcal{T}) = (x_1, \ldots, x_n;\ T_1, \ldots, T_m),$$

где $\mathcal{T}$ — коалиционная структура, а x представляет собой n-вектор, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i \in T_k} x_i = v(T_k) \tag{9.2.1}$$

для $k = 1, \ldots, m$.

Мы хотим теперь выяснить, какая конфигурация будет достигнута. Очевидным требованием будет требование индивидуальной рациональности, т. е. мы должны потребовать, чтобы для всех $i \in N$

$$x_i \geqq v(\{i\}). \tag{9.22}$$

Дальнейшее возможное требование может состоять в том, чтобы никакая коалиция T_k не могла образоваться, если хоть одна из ее подкоалиций может получить больше, чем дает ей дележ x. Следовательно,

$$\sum_{i \in S} x_i \geqq v(S) \quad \text{для} \quad S \subset T_k \in \mathcal{T}. \tag{9.2.3}$$

Ясно, конечно, что условие (9.2.3) сильнее условия (9.2.2). С другой стороны, необходимость условия (9.2.3) не столь ясна, как необходимость условия (9.2.2). Не вдаваясь здесь в доводы за и против условия (9.2.3), мы просто будем говорить, что конфигурация, удовлетворяющая условию (9.2.3), будет называться *коалиционно рациональной*, а удовлетворяющая только условию (9.2.2) — *индивидуально рациональной*. Прежде всего мы исследуем коалиционно рациональные конфигурации.

Предположим теперь, что достигнута некоторая коалиционно рациональная конфигурация. Когда она будет устойчива? Ясно, что если коалиционно рациональная конфигурация есть дележ, принадлежащий ядру игры, то она будет устойчива в том смысле, что никакая коалиция не будет иметь ни возможности, ни склонности изменить эту конфигурацию. Так как, однако, ядро часто оказывается пустым, отсюда следует, что мы не можем требовать, чтобы коалиционно рациональная конфигурация принадлежала ядру.

Рассмотрим, например, симметричную игру трех лиц, изученную ранее. Если образуется коалиция $\{1, 2\}$, то весьма вероятен дележ $(^1/_2, {}^1/_2, 0)$. Тем не менее любой из двух игроков этой коалиции мог бы потребовать от другого больше, угрожая присоединиться к игроку 3, если его требование не будет удовлетворено.

Так, игрок 1 мог бы пригрозить образовать коалицию $\{1, 3\}$, предлагая, например, дележ $(3/4, 0, 1/4)$. Игрок 2, однако, может возразить на эту угрозу, указав, что в таком случае он попытается образовать коалицию $\{2, 3\}$, предлагая игроку 3 величину $1/2$ и получая, таким образом, дележ $(0, 1/2, 1/2)$. Таким образом, игрок 2 может выдвинуть контругрозу, которая «защищает» его долю $1/2$.

Для того чтобы сформулировать эту идею математически, мы начнем с определения понятия партнеров.

IX. 2. 3. Определение. Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ — коалиционная структура, а K — коалиция. Тогда *партнерами* коалиции K в $\mathcal{T}$ мы называем множество

$$P(K; \mathcal{T}) = \{i \mid i \in T_k, T_k \cap K \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, игрок i есть партнер K в $\mathcal{T}$, если он принадлежит той же самой коалиции T_k, что и какой-либо из членов K. (Заметим, что каждый член K также является партнером K.) Смысл этого определения состоит в том, что для того, чтобы члены K могли получить свою долю в коалиционно рациональной конфигурации $(x; \mathcal{T})$, им необходимо иметь согласие только своих партнеров.

IX. 2.4. Определение. Пусть $(x; \mathcal{T})$ — коалиционно рациональная конфигурация в игре v, а K и L — непустые непересекающиеся подмножества некоторой коалиции $T_k \in \mathcal{T}$. Тогда *угрозой* коалиции K против коалиции L называется коалиционно рациональная конфигурация $(y; \mathcal{U})$, удовлетворяющая условиям

$$P(K; \mathcal{U}) \cap L = \varnothing, \tag{9.2.4}$$

$$y_i > x_i \quad \text{для всех} \quad i \in K, \tag{9.2.5}$$

$$y_i \geqq x_i \quad \text{для всех} \quad i \in P(K; \mathcal{U}). \tag{9.2.6}$$

IX. 2.5. Определение. Пусть $(x; \mathcal{T})$ — коалиционно рациональная конфигурация, K, L — те же коалиции, что и в определении IX. 2.4, и пусть $(y; \mathcal{U})$ — угроза коалиции K против коалиции L. Тогда *контругрозой* коалиции L против коалиции K называется коалиционно рациональная конфигурация $(z; \mathcal{V})$, удовлетворяющая условиям

$$K \not\subset P(L; \mathcal{V}), \tag{9.2.7}$$

$$z_i \geqq x_i \quad \text{для} \quad i \in P(L; \mathcal{V}), \tag{9.2.8}$$

$$z_i \geqq y_i \quad \text{для} \quad i \in P(L; \mathcal{V}) \cap P(K; \mathcal{U}). \tag{9.2.9}$$

Коротко говоря, члены коалиции K, выдвигая угрозу против L, претендуют на то, что они смогут получить больше путем перехода к новой коалиционно рациональной конфигурации и что их новые парнеры будут согласны с этим. Члены коалиции L могут выдвинуть контругрозу, если они сумеют найти третью коалиционно рациональную конфигурацию, в которой они и все их партнеры получат не меньше своей первоначальной доли. Если для этого членам из L в качестве партнеров необходимы некоторые игроки из K, то этим игрокам они дают не меньше их доли в коалиционно рациональной конфигурации угрозы. Заметим, что коалиции L действительно может оказаться необходимым использовать в качестве партнеров некоторых игроков из K; однако L не может использовать их всех.

IX. 2.6. Определение. Коалиционно рациональная конфигурация $(x; \mathcal{T})$ называется *устойчивой*, если для каждой угрозы коалиции K против коалиции L коалиция L может выдвинуть контругрозу. Множество всех устойчивых коалиционно рациональных конфигураций называется *$\mathcal{M}$-устойчивым множеством*[1]).

Определение $\mathcal{M}$-устойчивого множества требует некоторого обсуждения. Действительно, это определение можно несколько модифицировать. Например, мы могли бы потребовать, чтобы только отдельные игроки могли выдвигать угрозы или чтобы было бы достаточно возможности контругрозы со стороны только одного члена L.

IX. 2.7. Определение. *$\mathcal{M}_1$-устойчивое множество* есть множество всех таких коалиционно рациональных конфигураций $(x; \mathcal{T})$, что всякий раз, как любая коалиция K выдвигает угрозу против коалиции L, хоть один член из L выдвигает контругрозу.

IX. 2.8. Определение. *$\mathcal{M}_2$-устойчивое множество* есть множество всех таких коалиционно рациональных конфигураций $(x; \mathcal{T})$, что если любой игрок i выдвигает угрозу против коалиции L, то L выдвигает контругрозу игроку i.

Легко видеть, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Соотношение между $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ неясно.

Наконец, можно предложить еще одну модификацию определения устойчивого множества. Она состоит в том, что вместо коалиционно рациональной конфигурации мы будем говорить об индивидуально рациональной конфигурации. Тогда мы придем к трем множествам $\mathcal{M}^{(i)}$, $\mathcal{M}_1^{(i)}$, $\mathcal{M}_2^{(i)}$, полученным соответственно из множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$.

Можно показать, что в противоположность ядру, которое часто бывает пустым, ни одно из указанных выше устойчивых множеств не является пустым. Действительно, если игра задана в (0,1)-редуцированной форме, то коалиционно рациональная конфигурация $(x; \mathcal{T})$, где $x = (0, \ldots, 0)$, а $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$, очевидно, устойчива. С другой стороны, эта конфигурация указывает иа

---

[1]) Это множество будет обозначаться той же буквой $\mathcal{M}$; аналогичное замечание относится и к дальнейшим определениям $\mathcal{M}_1$-, $\mathcal{M}_2$-, $\mathcal{M}^{(i)}$-, $\mathcal{M}_1^{(i)}$-, $\mathcal{M}_2^{(i)}$-устойчивых множеств. — *Прим. перев.*

полное отсутствие кооперирования. Поэтому мы хотели бы найти элементы в устойчивом множестве для несколько более интересных структур. Действительно, имеется следующий важный результат:

IX.2.9. Теорема. *Пусть v — игра n лиц, а $\mathscr{T}$ — любая коалиционная структура. Тогда существует по крайней мере один такой вектор x, что $(x; \mathscr{T}) \in \mathscr{M}_1^{(i)}$.*

Будем предполагать, что игра задана в (0,1)-редуцированной форме. Для данной коалиционной структуры $\mathscr{T}$ обозначим через $X(\mathscr{T})$ множество всех таких векторов x, что $(x; \mathscr{T})$ является индивидуально рациональной конфигурацией. Имеет место следующая лемма Б. Пелега:

IX.2.10. Лемма. *Пусть $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ — неотрицательные непрерывные вещественные функции, определенные для $x \in X(\mathscr{T})$. Если для каждого $x \in X(\mathscr{T})$ и каждого $S_j \in \mathscr{T}$ существует такой игрок $i \in S_j$, что $c_i(x) \geqq x_i$, то существует такая точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X(\mathscr{T})$, что $c_i(\xi) \geqq \xi_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство леммы. Для $x \in X(\mathscr{T})$ и $i \in N$ положим

$$d_i = \begin{cases} x_i - c_i(x), & \text{если} \quad x_i \geqq c_i(x), \\ 0, & \text{если} \quad x_i \leqq c_i(x), \end{cases}$$

и если $i \in S_j$, то

$$y_i = x_i - d_i + (1/s_j) \sum_{k \in S_j} d_k,$$

где s_j — число элементов в S_j.

Ясно, что y — непрерывная функция x. Кроме того, $y_i \geqq 0$, так как x_i, d_i и $c_i(x)$ все неотрицательны. Наконец, имеем

$$\sum_{i \in S_j} y_i = \sum_{i \in S_j} x_i = v(S_j),$$

так что $y \in X(\mathscr{T})$.

Предположим теперь, что $x_i > c_i(x)$. Это значит, что $d_i > 0$. Однако, по предположению, $x_k \leqq c_k(x)$ для некоторого $k \in S_j$ и, следовательно, $d_k = 0$. Поэтому

$$y_k \geqq x_k + d_i/s_j > x_k,$$

и, значит, x не является неподвижной точкой этого отображения. Но так как $X(\mathscr{T})$ выпукло, применима теорема Брауэра о неподвижной точке и, следовательно, должно существовать такое ξ, что $y(\xi) = \xi$. Мы видели, что это ξ должно удовлетворять условию $\xi_i \leqq c_i(\xi)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

IX.2.11. Определение. Будем говорить, что игрок i *сильнее* игрока k в $(x; \mathscr{T})$, если i может угрожать игроку k, а игрок k не располагает контругрозой. Этот факт мы будем обозначать через

$i \gg k$. Мы будем говорить, что i и k *одинаково сильны*, и обозначать этот факт через $i \sim k$, если ни $i \gg k$, ни $k \gg i$.

IX. 2.12. Определение. Пусть $(x; \mathscr{T})$ — индивидуально рациональная конфигурация, а C — коалиция. Тогда *эксцессом* коалиции C называется величина $e(C) = v(C) - \sum_{i \in C} x_i$.

IX. 2.13. Лемма. *Пусть $(x; \mathscr{T})$ — индивидуально рациональная конфигурация. Тогда отношение $\gg$ является ациклическим.*

Доказательство. Ясно, что если i и k принадлежат разным коалициям, то $i \sim k$. Предположим теперь, что коалиция S_j содержит игроков $1, 2, \ldots, t$ и что $1 \gg 2 \gg 3 \gg \ldots \gg t \gg 1$. Таким образом, игрок i $(i = 1, \ldots, t)$ может выдвинуть угрозу игроку $i + 1 (\mathrm{mod}\, t)$, которой соответствует коалиция C_i, причем на эту угрозу нет контругрозы. Пусть C_{i_0} — коалиция (из $C_1, \ldots, C_t$) с максимальным эксцессом. Покажем, что i_0 может выдвинуть игроку $i_0 - 1 (\mathrm{mod}\, t)$ контругрозу, которой соответствует коалиция C_{i_0}. Действительно, игрок $i_0 - 1\ (\mathrm{mod}\, t)$ имеет в своем распоряжении только величину $e(C_{i_0-1})$ для образования коалиции угрозы, игрок i_0, имеющий в своем распоряжении величину $e(C_{i_0}) \geqq e(C_{i_0-1})$, либо располагает контругрозой, либо же $i_0 - 1 (\mathrm{mod}\, t) \in C_{i_0}$. Повторяя это рассуждение, мы получим $t_0 - 2 (\mathrm{mod}\, t) \in C_{i_0}$ и т. д.; в конце концов мы получим $i_0 + 1 (\mathrm{mod}\, t) \in C_{i_0}$, а это, очевидно, невозможно.

IX. 2.14. Доказательство теоремы IX. 2.9. Пусть $(x; \mathscr{T})$ — индивидуально рациональная конфигурация. Обозначим через $(y^{S_j}, x^{N \setminus S_j}, \mathscr{T})$ индивидуально рациональную конфигурацию, которая получается фиксацией x_i для $i \in N \setminus S_j$ и заменой x_k на y_k для $k \in S_j$, где $y_k \geqq 0$ и $\sum_{k \in S_j} y_k = v(S_j)$.

Пусть $E_j^i(x)$ — множество таких точек y^{S_j}, что в индивидуально рациональной конфигурации $(y^{S_j}, x^{N \setminus S_j}, \mathscr{T})$ игрок i $(i \in S_j)$ не слабее любого другого игрока. Множество $E_j^i(x)$ замкнуто и содержит множество $x_i = 0$ (если $x_i = 0$, то i всегда располагает контругрозой как коалиция из одного игрока). Определим теперь функцию

$$C_i(x) = x_i + \max_{y^{S_j} \in E_j^i(x)} \min_{k \in S_j} (x_k - y_k),$$

где S_j — коалиция в $\mathscr{T}$, которая содержит i. Далее, легко видеть, что функция $C_i(x)$ непрерывна; кроме того, она неотрицательна, в чем можно убедиться, показав, что если $y_i = 0$ и $y_k \geqq x_k$ для всех $k \in S_j$, $k \neq i$, то $y^{S_j} \in E_j^i(x)$.

По лемме IX. 2.13 для любого $x \in X(\mathscr{T})$ и любого $S_j \in \mathscr{T}$ существует такой игрок $i \in S_j$, что i не слабее никакого $k \in S_j$.

Поэтому $x^{S_j} \in E_j^i(x)$ и, значит, $C_i(x) \geqq x_i$. Следовательно, по лемме IX.2.10 существует такое ξ, что $C_i(\xi) \geqq \xi_i$ для всех $i \in N$.

Далее, из равенства

$$\sum_{k \in S_j} x_k = \sum_{k \in S_j} y_k$$

следует, что $C_i(x) \geqq x_i$ для всех i. Итак, фактически мы имеем равенство $C_i(\xi) = \xi_i$ для всех j. Но это означает, что для любого i существует такое $y \in E_j^i(\xi)$, что $y_k = \xi_k$, а это в свою очередь означает, что $\xi^{S_j} \in E_j^i(\xi)$ для любых i и j. Следовательно, в конфигурацин $(\xi; \mathcal{T})$ ни один игрок не сильнее другого, а это, конечно, означает, что $(\xi; \mathcal{T}) \in \mathcal{M}_1^{(i)}$.

IX.2.15. Пример. Рассмотрим простую игру пяти лиц в (0,1)-редуцированной форме, в которой минимальными выигрывающими коалициями являются $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$ и $\{2, 3, 4, 5\}$. Мы будем рассматривать два типа коалиционных структур: один, в котором имеется коалиция $\{1, 2\}$, и второй, в котором имеется коалиция $\{2, 3, 4, 5\}$.

Предположим, что образована коалиция $\{1, 2\}$. Неважно, что делают другие игроки, но мы будем предполагать, что они не образуют никаких коалиций. Следовательно, $\mathcal{T} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$. Множество всех индивидуально рациональных конфигураций будет состоять из таких $(x; \mathcal{T})$, что x представляет собой 5-вектор, удовлетворяющий условиям $x_1 + x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$. Далее, если $x_1 > 3/4$, то мы должны иметь $x_2 < 1/4$, и поэтому игрок 2 может угрожать дележом $(0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Легко видеть, что игрок 1 не располагает контругрозой. Если же, с другой стороны, $x_1 \leqq 3/4$, то мы найдем, что любая угроза со стороны игрока 2 даст одному из его партнеров величину, меньшую $1/4$. Пусть, например, $x_3 < 1/4$. Тогда игрок 1 может выдвинуть контругрозу дележом $(3/4, 0, 1/4, 0, 0)$. Аналогично, если $x_1 < 1/2$, то игрок 1 может угрожать, например, дележом $(1/2, 0, 1/2, 0, 0)$, и игрок 2 не может выдвинуть в ответ контругрозы. Однако если $x_1 \geqq 1/2$, то любая угроза игрока 1 даст игрокам 3, 4 и 5 в совокупности меньше, чем $1/2$. Следовательно, игрок 2 может выдвинуть контругрозу — дележ $z = (0, 1/2, y_3 + \varepsilon_3, y_4 + \varepsilon_4, y_5 + \varepsilon_5)$. Таким образом, для данной коалиционной структуры $\mathcal{T}$ конфигурация $(x; \mathcal{T})$ будет принадлежать множеству $\mathcal{M}_1^{(i)}$ тогда и только тогда, когда x удовлетворяет условиям

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{9.2.10}$$

$$x_1 \geqq 1/2, \tag{9.2.11}$$

$$x_2 \geqq 1/4, \tag{9.2.12}$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0. \tag{9.2.13}$$

Ввиду симметрии аналогичные результаты будут иметь место и в случаях, когда образованы коалиции {1, 3}, {1, 4} или {1, 5}.

Предположим теперь, что образована коалиция {2, 3, 4, 5}. Мы должны рассмотреть все индивидуально рациональные конфигурации $(x; \mathscr{T})$, где x — неотрицательный вектор, сумма компонент которого равна 1, $x_1 = 0$, а $\mathscr{T} = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$. Предположим, что $x_2 > x_3$. Тогда игрок 3 может угрожать игроку 2 дележом $(1 - x_3 - \varepsilon, 0, x_3 + \varepsilon, 0, 0)$, где $0 < \varepsilon < x_2 - x_3$. Легко видеть, что 2 не располагает контругрозой. Ввиду симметрии отсюда следует, что $(x; \mathscr{T})$ для этого $\mathscr{T}$ будет принадлежать $\mathscr{M}_1^{(i)}$ только для таких x, что

$$x_1 = 0, \tag{9.2.14}$$

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = {}^1/_4. \tag{9.2.15}$$

IX. 3. ψ-УСТОЙЧИВОСТЬ

Несколько отличный от изложенного подход к процессу переговоров приводит к понятию ψ-устойчивости. Как и в устойчивом множестве, исходом здесь является пара $(x; \mathscr{T})$, где x — вектор выигрышей, а $\mathscr{T}$ — коалиционная структура. Однако идея, лежащая в основе ψ-устойчивости, значительно проще; коротко говоря, рассматриваются только угрозы, а контругрозы в расчет не принимаются. Так как такое понимание устойчивости могло бы привести к тому, что множество устойчивых исходов оказалось бы слишком малым (пустым, за исключением ядра), мы уменьшаем число возможных угроз указанием того, что только некоторые коалиции могут угрожать данному исходу.

Говоря формально, дана функция ψ, которая каждому разбиению множества N ставит в соответствие некоторый набор подмножеств N. Так, если $\mathscr{T}$ — разбиение, то $\psi(\mathscr{T})$ — набор коалиций. Содержательно, $S \in \psi(\mathscr{T})$ тогда и только тогда, когда из данной коалиционной структуры $\mathscr{T}$ может образоваться подрывающая коалиция S.

IX. 3.1. Определение. Пусть ψ — функция, которая каждому разбиению $\mathscr{T}$ ставит в соответствие некоторый набор коалиций. Тогда мы будем говорить, что пара $(x; \mathscr{T})$, где x — дележ, *ψ-устойчива* в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\text{(i)} \quad \sum_{i \in S} x_i \geqq v(S) \quad \text{для всех} \quad S \in \psi(\mathscr{T}),$$

$$\text{(ii) если } \{i\} \notin \mathscr{T}, \quad \text{то} \quad x_i > v(\{i\}).$$

Условие (i) утверждает, конечно, что ни одна из «допустимых» коалиций не способна подорвать конфигурацию $(x; \mathscr{T})$. Условие (ii) утверждает, что ни один игрок не присоединится к нетривиальной коалиции, если он не получит больше своего минимаксного значения $v(\{i\})$.

Вообще говоря, главная трудность в ψ-устойчивости состоит в разумном выборе функции ψ. Если функция ψ достаточно ограничительна, то устойчивых пар может оказаться много. Если же ψ не слишком ограничительна, то может оказаться, что устойчивых пар вообще не существует или же что только ядро является ψ-устойчивым.

Одна из «разумных» возможностей выбора ψ могла бы состоять в так называемой k-устойчивости, где k — положительное целое число. В этом случае ψ определяется следующим образом: $S \in \psi(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда существует такое $T \in \mathcal{T}$, что множество $S \Delta T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$ имеет не более k элементов. Для таких функций ψ мы приведем без доказательства следующие результаты:

IX. 3.2. Теорема. *Любая игра n лиц с постоянной суммой $(n-2)$-неустойчива, т. е. множество $(n-2)$-устойчивых пар пусто.*

IX. 3.3. Определение. Говорят, что игра v для n лиц является игрой с *квотой*, если существует такой вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, что $\sum_i \omega_i = v(N)$ и для любых $i, j \in N$, $i \neq j$, имеет место равенство $v(\{i, j\}) = \omega_i + \omega_j$. В игре с квотой игрок i называется *слабым*, если $\omega_i < v(\{i\})$.

Легко видеть, что игра с квотой имеет самое большее одного слабого игрока, так как $v(\{i, j\}) \geqq v(\{i\} + v(\{j\})$. Имеет место теорема.

IX. 3.4. Теорема. *Пусть $(x; \mathcal{T})$ есть k-устойчивая пара в игре n лиц с квотой. Тогда, если n нечетно или если n четно и $k \geqq 2$, мы должны иметь $x = \omega$. Если n четно и $k = 1$, то каждое $T \in \mathcal{T}$ будет иметь четное число элементов и, кроме того,*

$$\sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} \omega_i.$$

Наконец, игра с квотой со слабым игроком k-неустойчива для любого k.

Задачи

1. Если v — игра с постоянной суммой, то вектор Шепли φ дается формулой

$$\varphi_i[v] = 2 \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \left[\frac{(n-s)!\,(s-1)!}{n!} v(S) \right] - v(N).$$

2. *Игрой n лиц с m-квотой* называется такая игра v, что существует вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, удовлетворяющий условиям $\sum_{i \in N} \omega_i = v(N)$; для каждой коалиции $M \subset N$ из m лиц $\sum_{i \in M} \omega_i = v(M)$, а для коалиции S из s $(s \neq m)$ лиц $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Говорят, что игрок i является *слабым*, если $\omega_i < v(\{i\})$. В такой игре коалиционная структура $\mathcal{T}$ называется *максимальной коалиционной структурой*, если она содержит максимально возможное число (т. е. $[n/m]$) коалиций из m лиц.

а) Пусть v — игра с m-квотой ω и без слабых игроков. Если $\mathcal{T}$ — максимальная коалиционная структура, то коалиционно рациональная конфигурация $(x; \mathcal{T})$ принадлежит устойчивому множеству $\mathcal{M}_0$ тогда и только тогда, когда $x_i = \omega_i$ для всех i, входящих в коалицию из m игроков, принадлежащую $\mathcal{T}$.

б) Пусть v — игра с m-квотой ω, а A — множество слабых игроков. Если $n = qm + r$, где $0 \leqq r < m$ и $q \geqq m + 1$, и если $\mathcal{T}$ — максимальная коалиционная структура, то коалиционно рациональная конфигурация $(x; \mathcal{T})$ принадлежит $\mathcal{M}_0$ тогда и только тогда, когда $x_i = v(\{i\})$ для всех $i \in A$ и $x_i \leqq \omega_i$ для $i \in N \setminus A$.

3. Для игры n лиц v и индивидуально рациональной конфигурации $(x; \mathcal{T})$ мы будем называть *максимальным эксцессом* игрока i против игрока j и обозначать через s_{ij} величину

$$s_{ij} = \max_D e(D),$$

где $e(D)$ — *эксцесс* D, а максимум берется по всем таким коалициям D, что $i \in D$, но $j \notin D$. Говорят, что игрок i *перевешивает* игрока j, если $s_{ij} > s_{ji}$ и $x_j > v(\{j\})$. Говорят, что два игрока i и j *находятся в равновесии*, если ни один из них не перевешивает другого.

Ядро $\mathcal{K}$ есть множество всех таких индивидуально рациональных конфигураций $(x; \mathcal{T})$, что любые два игрока, принадлежащие одной и той же коалиции, находятся в равновесии.

а) Для любой коалиционной структуры $\mathcal{T}$ существует такое x, что $(x; \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$.

б) $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_1^{(i)}$.

в) Если v — простая игра, а $\mathcal{T}$ имеет вид $\{S, T_1, \ldots, T_l\}$, где S — минимальная выигрывающая коалиция, то $(x; \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда для $i \in S$

$$x_i = \frac{v(S) - \sum_{j \in S} v(\{j\})}{s} + v(\{i\})$$

(где s — число элементов в S).

4. Доказать теорему IX. 3.2.

5. Доказать теорему IX. 3.4.

6. Доказать, что каждая игра четырех лиц с постоянной суммой представляет собой игру с квотой. Найти все k-устойчивые пары для $k = 1, 2, 3$.

7. Пусть v — та же игра, что и в задаче VIII. 7. Показать, что для любой нетривиальной коалиционной структуры $\mathcal{T}$ множество всех таких x, что $(x; \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$, пусто, а множество всех таких x, что $(x; \mathcal{T}) \in \mathcal{M}_1^{(i)}$, непусто.

Глава X

МОДИФИКАЦИИ ПОНЯТИЯ ИГРЫ

X.1. ИГРЫ С КОНТИНУУМОМ ИГРОКОВ

При попытке применить теорию игр n лиц к экономическому анализу становится совершенно ясно, что игры с небольшим числом игроков едва ли могут адекватно описать явления свободного рынка. Поэтому нам необходимы игры со столь большим числом игроков, что любой отдельный игрок будет иметь пренебрежимо малое влияние на выигрыши других игроков. Как велико должно быть это число? Столь же велико, как и число точек на прямой. (Обычно вместо прямой берется единичный интервал [0, 1].) Лучше всего определить такую игру следующим образом.

X.1.1. Определение. Под *игрой с континуумом игроков* мы будем понимать σ-алгебру ϑ подмножеств интервала [0, 1] вместе с вещественной функцией v, определенной на ϑ и удовлетворяющей условиям

(i) $v(\varnothing)=0$,

(ii) $v(A \cup B) \geqq v(A)+v(B)$, если $A \cap B = \varnothing$.

Отметим, что элементы ϑ называются, как и раньше, коалициями, а элементы интервала [0, 1] — игроками.

Здесь следует быть осторожнее, чем в случае конечных игр. Например, нужно изменить определение (0,1)-редуцированной формы: теперь уже недостаточно требовать, чтобы $v(\{x\}) = 0$ для любой точки $x \in [0, 1]$ и $v([0, 1]) = 1$; эти условия можно соблюсти, если в качестве v взять, например, меру Лебега. Но мера аддитивна, и, следовательно, такая игра несущественна. Вместо этого мы переопределим (0,1)-редуцированную форму условиями

$$v([0, 1]) = 1, \tag{10.1.1}$$

$$v(S) \geqq 0, \quad \text{если} \quad S \in \vartheta. \tag{10.1.2}$$

$$\text{Если} \quad \alpha - \text{мера на} \quad \vartheta \quad \text{и} \quad \alpha \leqq v, \quad \text{то} \quad \alpha \equiv 0. \tag{10.1.3}$$

Условию (10.1.3) можно дать другую формулировку. Именно, заметим, что если $v \geqq 0$, то функция множества

$$\alpha(S) = \inf \sum v(S_i), \tag{10.1.4}$$

где инфимум берется по всем таким последовательностям множеств S_i из ϑ, что $\bigcup S_i \supset S$, является внешней мерой. Но из супераддитивности v следует, что этот инфимум получается взятием «тонких» разбиений множества S, а это в свою очередь означает, что все элементы ϑ измеримы относительно α. Таким образом, α есть мера на ϑ. Далее легко видеть, что α — наибольшая мера, для которой $\alpha \leqq v$. Следовательно, (10.1.3) можно заменить условием:

$$\text{Если } \alpha \text{ определена формулой (10.1.4), то } \alpha = 0. \tag{10.1.5}$$

Нужно заметить, что даже если v не является неотрицательной, то можно определить меру α, принимающую значения любых знаков, хотя и несколько другим способом.

Вообще говоря, эта мера со знаком α будет заменять числа $v(\{i\})$. Поэтому дележ в игре v определяется как любая такая мера σ (со знаком), что

$$\sigma([0, 1]) = v([0, 1]), \tag{10.1.6}$$

$$\sigma(S) \geqq \alpha(S) \quad \text{для} \quad S \in \vartheta. \tag{10.1.7}$$

Если игра (0,1)-редуцирована, то, конечно, условие (10.1.7) заменяется утверждением, что σ должна быть просто мерой, а не мерой со знаком.

Отношение доминирования также нужно определить заново. Действительно, для того чтобы $\sigma \succ \tau$ по множеству S, несомненно должно быть выполнено соотношение $\sigma(S) \leqq v(S)$; однако нельзя требовать, чтобы для всех $A \subset S$ выполнялось неравенство $\sigma(A) > \tau(A)$, так как это условие, конечно, не будет выполнено, если S несчетно и все одноточечные множества принадлежат ϑ. С другой стороны, очевидно недостаточно требовать просто $\sigma(A) \geqq \tau(A)$ для $A \subset S$, так как это могло бы привести к отношению $\sigma \succ \sigma$. Мы налагаем компромиссное условие, требуя, чтобы неравенство $\sigma(A) > \tau(A)$ выполнялось для всех тех подмножеств A из ϑ, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{B \in \vartheta} \{v(A \cup B) - v(B)\} > 0.$$

Это условие позволяет нам, в сущности, пренебрегать «малыми» (например, конечными) множествами.

С этими определениями дележа и доминирования точно так же, как и для конечных игр, можно определить НМ-решения. Вообще говоря, в таких играх мало что известно о НМ-решениях — столь же мало, как и в играх n лиц для больших n, — за исключением частных случаев. В частности, в простых играх НМ-решения существуют: если S — минимальная выигрывающая коалиция, то множество всех таких дележей σ, что $\sigma \equiv 0$ на $[0,1] \setminus S$, будет НМ-решением. (Мы предполагаем здесь, что игра (0, 1)-редуцирована.)

Хотя НМ-решениям было посвящено немного работ, значительное число работ было посвящено обобщению вектора Шепли на игры с континуумом игроков.

Вообще говоря, аксиомы S1—S3 гл. IX, определяющие вектор Шепли, можно применить непосредственно с соответствующими изменениями. Однако возникает некоторая трудность с аксиомой S2 (аксиома симметрии); перестановки множества N, которые там рассматривались, теперь нужно заменить на взаимно однозначные измеримые отображения интервала [0,1] в себя. Хотя, на первый взгляд, такая замена не могла бы вызвать никаких трудностей, мы увидим, что в некоторых вырожденных случаях она приводит к противоречию.

Конечно, фактическое определение вектора Шепли для конкретной игры представляет значительную трудность, так как формула для этого вектора не применима в бесконечном случае.

Вообще говоря, для определения значения произвольной игры применяется метод, состоящий в разбиении интервала [0,1] на подмножества (необязательно являющиеся подинтервалами). Затем эти подмножества рассматриваются как игроки и для соответствующей конечной игры вычисляется вектор Шепли $\varphi[v]$. Далее берутся все более и более тонкие разбиения интервала [0,1], после чего $\varphi[v]$ (теперь это будет уже аддитивная функция множества, а не вектор) определяется как предел значений для этих конечных игр (если этот предел существует).

Предположим теперь, что существует мера μ, определенная на ϑ и такая, что $v(S)$ зависит просто от $\mu(S)$. Например, мы могли бы иметь $v(S) = [\mu(S)]^2$. Тогда по аксиоме симметрии если $\mu(S) = \mu(T)$, то $\varphi[v](S) = \varphi[v](T)$. Но так как $\varphi[v]$ — аддитивная функция множества, $\varphi[v]$ равна мере μ, деленной на постоянное число для того, чтобы обеспечить равенство $\varphi[v]([0, 1]) = v([0, 1])$.

X. 1.2. Пример. Пусть $\lambda(S)$ — мера Лебега, и пусть $\mu(S)$ задана формулой

$$\mu(S) = 2 \int_S x\,dx.$$

Тогда если v является функцией только λ, то $\varphi[v] = \lambda$; аналогично если v является функцией только μ, то $\varphi[v] = \mu$. Предположим теперь, что для всех $S \in \vartheta$

$$v(S) = \mu(S)\,\lambda(S). \tag{10.1.8}$$

Если мы положим $v_1 = \mu^2/2$, $v_2 = \lambda^2/2$, то будем иметь

$$v_3 = v + v_1 + v_2 = (\lambda + \mu)^2/2.$$

Далее, ввиду аддитивности

$$\varphi[v] = \varphi[v_3] - \varphi[v_1] - \varphi[v_2].$$

Так как λ, μ и $\lambda + \mu$ являются мерами, легко вычислить правую часть этого уравнения. Действительно, v_3 зависит только от $\lambda + \mu$;

так как $v_3([0, 1]) = 2$ и $[\lambda + \mu]([0, 1]) = 2$, имеем

$$\varphi[v_3] = \lambda + \mu. \tag{10.1.9}$$

Далее, v_1 зависит только от μ. Мы имеем $v_1([0, 1]) = 1/2$; поэтому

$$\varphi[v_1] = \mu/2 \tag{10.1.10}$$

и аналогично

$$\varphi[v_2] = \lambda/2. \tag{10.1.11}$$

Объединяя все эти выражения, получаем

$$\varphi[v] = (\lambda + \mu)/2, \tag{10.1.12}$$

где функция v определена формулой (10.1.8). Аналогичным образом мы можем найти $\varphi[v]$ для любой полиномиальиой функции v от μ и λ и, следовательно, от любой конечной системы мер.

Предположим теперь, однако, что v задана следующим образом:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda(S) < 1, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda(S) = 1. \end{cases}$$

Здесь, очевидно, v является функцией λ, так что мы должны иметь $\varphi[v] = \lambda$. Однако легко видеть, что $\mu(S) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda(S) = 1$. Следовательно, мы также имеем

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu(S) < 1, \\ 1, & \text{если} \quad \mu(S) = 1. \end{cases}$$

и поэтому мы должны иметь $\varphi[v] = \mu$. Это противоречие показывает, что в этой игре $\varphi[v]$ не может существовать. Оказывается, что описанный выше бесконечный процесс не имеет предела.

X. 2. ИГРЫ БЕЗ ПОБОЧНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ

Другим возможным обобщением игр, рассмотренных в гл. VIII и IX, являются игры без побочных платежей.

В этих двух главах мы, в сущности, предполагали, что полезность линейно трансферабельна. Важность этих побочных платежей состоит в том, что они значительно упрощают описание игры. Вместо рассмотрения всех возможных результатов, достижимых коалицией S, нам нужно только знать общую величину, которую коалиция S может получить, и указать, что эта величина может быть распределена между членами коалиции S совершенно произвольным образом. Теперь, когда побочные платежи не допускаются, вид характеристической функции становится значительно более сложным.

Вообще говоря, теперь характеристическая функция будет определена на подмножествах множества N, а ее значения также будут множествами. Прежде всего обозначим через u_i^* наибольшую полезность, которую может гарантировать себе игрок i, даже если против него объединились все остальные игроки. Тогда $v(N)$ является не числом, а множеством всех дележей, т. е. множеством всех n-векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, которые могут получить игроки из N, действуя совместно.

Тогда, в сущности, множество $v(S)$ будет состоять из всех таких векторов x, что коалиция S может гарантировать своим членам соответствующие компоненты x. (Например, множество $v(\{i\})$ будет состоять из всех таких векторов x, что $x_i \leqq u_i^*$.) В силу возможности лотерей ясно, что каждое множество $v(S)$ выпукло; не очевидно, что эти множества должны быть замкнуты, но мы сделаем также и это предположение, которое кажется вполне разумным.

X. 2.1. Определение. *Игрой n лиц без побочных платежей* мы называем пару (v, H), где H — компактное выпуклое подмножество R^n, а v — функция, которая каждому подмножеству S множества $N = \{1, \ldots, n\}$ ставит в соответствие подмножество из R^n, удовлетворяющее условиям

(i) $v(S)$ замкнуто и выпукло;

(ii) если $x \in v(S)$ и $y_i \leqq x_i$ для всех $i \in S$, то $y \in v(S)$;

(iii) если $S \cap T = \varnothing$, то $v(S) \cup v(T) \subset v(S \cup T)$;

(iv) $v(S) \neq \varnothing$ для всех $S \subset N$;

(v) $x \in v(N)$ тогда и только тогда, когда $x \leqq y$ для некоторого $y \in H$.

В этом определении условие (ii) есть условие монотонности: если коалиция S может гарантировать своим членам x, то она, конечно, гарантирует им меньшую величину y. Условие (iii) есть условие супераддитивности в новой терминологии. Условие (v) гарантирует, что множество $v(N)$ не будет слишком большим; это условие вместе с условием (iii) (если положить $T = N \setminus S$) гарантирует, что множество $v(S)$ не будет слишком большим.

Основываясь на этом определении дележей и характеристической функции, можно определить отношение доминирования. Так, $x \succ y$, если существует такая непустая коалиция S, что $x_i > y_i$ для $i \in S$ и $x \in v(S)$. НМ-решения и ядро определяются после этого точно так же, как и в случае побочных платежей.

Решениям в играх без побочных платежей было посвящено несколько работ. Стирнз [X. 14] показал, что все игры трех лиц имеют по крайней мере одно решение; кроме того, эти решения были классифицированы. Однако вопрос о существовании решений в произвольных играх был решен отрицательно: Стирнз [X. 15] привел пример игры семи лиц, не имеющей решений.

Ядру в играх без побочных платежей также было посвящено несколько работ. В сущности, вектор $x \in v(N)$ принадлежит ядру, если для каждой коалиции S и каждого $y \in v(S)$ существует такое $i \in S$, что $x_i \geqq y_i$.

Можно также рассматривать такие игры в нормальной форме, а не в форме характеристической функции. Рассматривая бескоалиционные игры, мы определяли ситуацию равновесия как такой набор n стратегий, что ни один игрок не мог выгадать односторонним изменением своей стратегии. Теперь мы можем определить *сильно равновесную ситуацию* как такой набор n стратегий (которые могут, если это необходимо, выбираться совместно), что не существует коалиции S, которая может увеличить полезность всех своих членов, если остальные игроки придерживаются своих первоначальных стратегий. Однако это определение слишком сильно; большинство игр не имеет сильно равновесных ситуаций. Ауманн [X. 1] рассматривал эти игры в предположении, что они разыгрываются повторно бесконечное число раз. Такой подход приводит к «сверхигре»; далее в этой сверхигре применяются такие стратегии, в которых, вообще говоря, фактический ход в каждой партии исходной игры зависит от исходов предыдущих игр. Затем, как только что было описано, в этой сверхигре определяются сильно равновесные ситуации. К сожалению, многие игры не имеют сильно равновесных ситуаций даже в этом более слабом смысле.

Наконец, для этих игр было определено понятие значения. Для этого было предложено несколько схем.

Шепли [X. 13] сначала находит вектор Шепли, сделав предположение, что могут производиться побочные платежи. Далее, если это значение можно получить без использования побочных платежей, то Шепли предлагает его в качестве значения исходной игры. На остальные игры значение обобщается введением требования, состоящего в том, что значение должно быть инвариантно относительно линейных преобразований функции полезности любого игрока. Этого оказывается достаточно, чтобы определить значение для любой игры.

Харшаньи [X. 4, X. 5] приводит две модели сделок (одна из которых является модификацией другой), основанных на обобщении аксиом Нэша для кооперативных игр двух лиц.

Исбелл [X. 6] предполагает, что пространство полезностей каждого игрока ограничено (имеет вид [0, 1]). Он использует схему сделок, которая сохраняет отношения полезностей.

Миясава [X. 10] также предлагает обобщение модели Нэша.

Селтен [X. 12] исследует с аксиоматической точки зрения несколько схем, определяющих значение.

X. 3. ИГРЫ, ЗАДАННЫЕ В ФОРМЕ ФУНКЦИИ РАЗБИЕНИЯ

Одно из предположений, сделанных в самом начале нашего определения характеристической функции фон Неймана—Моргенштерна, состояло в том, что когда образуется коалиция S, мы должны рассматривать наихудший для нее исход. Таким образом, мы допускаем возможность того, что образуется дополнительная коалиция $N \setminus S$. Хотя это предположение разумно с точки зрения принципа минимакса, тем не менее ясно, что во многих случаях коалиция $N \setminus S$ образована не будет из-за трудностей общения, личных антипатий между игроками, отсутствия побудительных мотивов или же по многим другим причинам. Что произойдет тогда в предположении, что коалиция $N \setminus S$ не будет образована? Ясно, что величина, которую коалиция S может получить, будет зависеть от конкретной коалиционной структуры. Так, в игре голосования коалиция, имеющая меньше абсолютного большинства голосов, выиграет, потому что ее противники не смогут прийти к соглашению, а некоторые могут вовсе не голосовать. Эти соображения приводят нас к идее об игре в форме функции разбиения.

X.3.1. Определение. *Игра в форме функции разбиения* есть функция v, которая каждому разбиению $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_k)$ множества N ставит в соответствии k-вектор $v^{\mathcal{P}} = (v^{\mathcal{P}}(P_1), v^{\mathcal{P}}(P_2), \ldots, v^{\mathcal{P}}(P_k))$.

Таким образом, функция разбиения задает величину, которую получит каждая коалиция в $\mathcal{P}$ в предположении, что достигнуто разбиение (коалиционная структура) $\mathcal{P}$. Однако, как и в теории фон Неймана — Моргенштерна, мы интересуемся максимальной величиной, которую может гарантировать себе коалиция S, что бы ни делали остальные игроки. Эта величина определяется формулой

$$u(S) = \min_{S \in \mathcal{P}} v^{\mathcal{P}}(S). \tag{10.3.1}$$

Нужно заметить, что функция множества u необязательно супераддитивна. Этот факт объясняется тем, что в некоторых случаях коалиции между антагонистическими группами фактически могут ослаблять эти группы.

Понятие дележа должно быть модифицировано:

X.3.2. Определение. *Дележ* в игре n лиц, заданной в форме функции разбиения v, есть n-вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям

(i) $x_i \geqq u(\{i\})$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{S \in \mathcal{P}} v^{\mathcal{P}}(S)$ для некоторого $\mathcal{P}$.

Таким образом, в этих играх компоненты дележа не всегда имеют одну и ту же сумму. Понятие доминирования также несколько меняется.

X. 3.3. Определение. Говорят, что дележ x *доминирует* дележ y по коалиции S (обозначение: $x \succ_S y$), если выполнены условия

(i) $x_i > y_i$ для $i \in S$;

(ii) $\sum_{i \in S} x_i \leqq u(S)$;

(iii) существует такое $\mathscr{P}$, что $S \in \mathscr{P}$ и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{T \in \mathscr{P}} v^{\mathscr{P}}(T).$$

Первые два условия те же самые, что и раньше; третье, новое условие, называется условием *реализуемости.*

Мы могли бы сказать, что в общем случае каждое разбиение $\mathscr{P}$ дает различное значение сумме

$$\sum_{S \in \mathscr{P}} v^{\mathscr{P}}(S) = \|\mathscr{P}\|.$$

Тогда игры фон Неймана — Моргенштерна могут рассматриваться как вырожденный специальный случай, в котором при образовании любой коалиционной структуры сумма полезностей, получаемых игроками, всегда одна и та же. Далее, мы видели, что игры фон Неймана — Моргенштерна очень часто имеют значительное число НМ-решений. Оказывается, что эта неоднозначность НМ-решений есть следствие именно вырожденности характеристической функции.

Действительно, мы имеем следующую теорему.

X. 3.4. Теорема. *Если v — такая игра четырех лиц, что для всех разбиений числа $\|\mathscr{P}\|$ различны, то v имеет единственное решение.*

Эту теорему мы докажем ниже. Однако нам необходимо прежде всего заложить фундамент доказательства. Мы будем говорить, что коалиция S *эффективна* для дележа x, если

$$\sum_{i \in S} x_i \leqq u(S),$$

и *строго эффективна*, если

$$\sum_{i \in S} x_i < u(S).$$

X. 3.5. Лемма. *Никакой дележ x не может доминировать другой дележ y по коалиции $\{i\}$, состоящей из одного игрока.*

Доказательство. Если $x \succ_{\{i\}} y$, то мы должны иметь $y_i < x_i \leqq u(\{i\})$. Но это означает, что y не является дележом.

X. 3.6. Лемма. *Если $x \succ_S y$ и $y_i \geqq z_i$ для всех $i \in S$, то $x \succ_S z$.*

Доказательство очевидно.

X. 3.7. Лемма. *В игре четырех лиц, в которой все числа $\|\mathscr{P}\|$ различны, для любого дележа x существует не более одной коалиции, которая является строго эффективной для x и может реализовать x.*

Доказательство. Так как все числа $\|\mathscr{P}\|$ различны, существует только одно разбиение $\mathscr{P}$, которое может реализовать x. Следовательно, дележ x реализуем только для коалиций этого разбиения. Но коалиция из одного игрока не может быть строго эффективна ни для какого дележа, а единственные разбиения, состоящие более чем из одной коалиции (причем каждая коалиция содержит более одного элемента), имеют вид $\{\{i, j\}, \{k, l\}\}$. Предположим, что $\mathscr{P}$ имеет такой вид и что коалиция $\{i, j\}$ строго эффективна для x. Тогда имеем

$$v^{\mathscr{P}}(\{i, j\}) \geqq u(\{i, j\}) > x_i + x_j.$$

Но так как дележ x реализуем разбиением $\mathscr{P}$, имеем также

$$x_i + x_j + x_k + x_l = \|\mathscr{P}\| = v^{\mathscr{P}}(\{i, j\}) + v^{\mathscr{P}}(\{k, l\})$$

и, следовательно,

$$x_k + x_l > v^{\mathscr{P}}(\{k, l\}) \geqq u(\{k, l\}).$$

Таким образом, коалиция $\{k, l\}$ *не* является эффективной для x.

Переходим теперь к доказательству теоремы X. 3.4. Игра четырех лиц имеет 15 разбиений $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_{15}$; перенумеруем их в порядке убывания норм:

$$\|\mathscr{P}_j\| > \|\mathscr{P}_{j+1}\| \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, 14.$$

Обозначим через E_j множество всех таких дележей x, что $\sum_i x_i = \|\mathscr{P}_j\|$; это даст нам множество $E = \bigcup_{j=1}^{15} E_j$. Затем для $j = 1, \ldots, 15$ введем срезанные ядра

$$C_j = \left\{ x \in E \,\Big|\, \sum_{i \in M} x_i \geqq u(M) \quad \text{для всех} \quad M \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathscr{P}_k \right\}$$

и положим $C_0 = E$. Легко видеть, что $C_j \subset C_{j-1}$. Пусть m — такое наименьшее целое j, что $C_j \cap E_{j+1} = \varnothing$. Если $C_j \cap E_{j+1} \neq \varnothing$ при $j = 1, \ldots, 14$, то положим $m = 15$. Заметим, что $m > 0$, так как $C_0 \cap E = E_1 \neq \varnothing$. Наконец, определим множество

$$Q = \bigcup_{j=1}^{m} (E_j \cap C_{j-1}).$$

X. 3.8. Лемма. *Пусть R — такое подмножество Q, что каждый дележ $x \in Q \setminus R$ доминируется некоторым дележом $y \in R$. Тогда каждый $x \in E \setminus R$ доминируется некоторым $y \in R$.*

Доказательство. Если $x \in E \setminus Q$, то $x \in E_t$ для некоторого t, и существует некоторое $M \in \mathscr{P}_j$, где $j \leqq \min(m, t-1)$, которое строго эффективно для x. Выберем $M_0 \in \mathscr{P}_s$ так, чтобы s было минимально, т. е. $M_0 \in \mathscr{P}_s$ строго эффективно для x, но если $M \in \mathscr{P}_j$, где $j \leqq s-1$, то M не строго эффективно для x. Выберем так $z \in E_s$, чтобы M_0 было эффективно для z и чтобы для всех $i \in N$ выполнялось неравенство $z_i > x_i$. Тогда $z \in E_s \cap C_{s-1} \subset Q$. Если $z \in R$, то $z \succ x$ по M_0 и z есть искомый y. Если же $z \notin R$, то некоторый $y \in R$ доминирует z, и по лемме X. 3.6 $y \succ x$. Следовательно, в любом случае x доминируется некоторым $y \in R$.

X. 3.9. Лемма. *Если R — решение, то $R \subset Q$.*

Доказательство. Пусть $x \in E \setminus Q$. Как и в лемме X. 3.8, существует такой $z \in Q$, что $z \succ x$, и если $y \succ z$, то мы должны иметь $y \succ x$. Тогда, если $z \in R$, то мы не можем иметь $x \in R$; если же $z \notin R$, то существует такой $y \in R$, что $y \succ z$. Но тогда $y \succ x$ и, следовательно, $x \notin R$.

X. 3.10. Доказательство теоремы X. 3.4. Ввиду предыдущих лемм достаточно доказать, что Q содержит единственное решение. Мы докажем это утверждение, построив для $j = 1, \ldots, m$ подмножества $R_j \subset E_j \cap C_{j-1}$ и показав, что $\bigcup_{j=1}^{m} R_j = R$ является решением.

Прежде всего предположим, что K_m содержит все элементы множества $E_m \cap C_{m-1}$, максимальные по отношению $\succ$. Так как $\succ_M$ есть отношение частичного упорядочения и множество $E_m \cap C_{m-1}$ компактно, из леммы Цорна следует, что для любого $x \in E_m \cap C_{m-1}$, не являющегося максимальным по отношению $\succ_M$, существует такой y, максимальный по этому отношению, что $y \succ_M x$. Но это означает, что M эффективно для y и строго эффективно для x. Следовательно, $M \in \mathscr{P}_m$, поскольку $x \in C_{m-1}$ и, значит, y реализуем для M.

Далее, не существует такого $z \in E_m \cap C_{m-1}$, что $z \succ y$. Действительно, предположим, что $z \succ y$ по S. Это означает, что S строго эффективно для y и что z, а следовательно, и y реализуемы для S. Но $S \neq M$, и поэтому в силу леммы X. 3.7 M не может быть эффективно для y. Следовательно, y максимален в $E_m \cap C_{m-1}$ по отношению $\succ$, и, значит, $y \in R_m = K_m$. Итак, мы видим, что любой $x \in E_m \cap C_{m-1} \setminus R_m$ доминируется некоторым $y \in R_m$. Кроме того, ввиду максимальности по отношению $\succ$, никакой $x \in R_m$ не доминирует никакого $y \in R_m$.

Продолжим построение множеств $K_{m-1}, K_{m-2}, \ldots, K_1$ следующим образом. Предположим, что множества $K_m, K_{m-1}, \ldots, K_{j+1}$ мы уже построили. Пусть $R_{j+1} = \bigcup_{j+1}^{m} K_l$. Тогда пусть G_j — подмножество $E_j \cap C_{j-1}$, состоящее из дележей, которые не доминируются никаким элементом из R_{j+1}. Пусть K_j — подмножество G_j, состоящее из максимальных (в G_j) по отношению $\succ$ элементов. Снова заметим, что G_j компактно, и поэтому каждый $x \in G_j \setminus K_j$ доминируется некоторым $y \in K_j$ и, следовательно, каждый $x \in E_j \cap C_{j-1} \setminus K_j$ доминируется некоторым $y \in R_j = \bigcup_{j}^{m} K_l$.

Примем теперь в качестве предположения индукции, что никакой элемент из R_{j+1} не доминирует никакого другого элемента из R_{j+1} и что если

$$x \in \bigcup_{j+1}^{m} (E_l \cap C_{l-1}) \setminus R_{j+1},$$

то существует такое $y \in R_{j+1}$, что $y \succ x$. Предположим, что как x, так и y принадлежат R_j. Так как $R_j = R_{j+1} \cup K_j$, имеется четыре возможности:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && x \in R_{j+1}, && y \in R_{j+1}; \\ &\text{(ii)} && x \in R_{j+1}, && y \in K_j; \\ &\text{(iii)} && x \in K_j, && y \in R_{j+1}; \\ &\text{(iv)} && x \in K_j, && y \in K_j. \end{aligned}$$

В случае (i) по предположению индукции мы не можем иметь $x \succ y$. В случае (ii) мы не можем иметь $x \succ y$, так как $y \in G_j$ и $x \in R_{j+1}$. В случае (iii) мы не можем иметь $x \succ y$, так как это означало бы, что некоторое $M \in \mathscr{P}_j$ строго эффективно для y; но $y \in C_j$, так что это невозможно. Наконец, в случае (iv) мы не можем иметь $x \succ y$, потому что как x, так и y максимальны в G_j по отношению $\succ$. Таким образом, если x и y принадлежат R_j, то мы не можем иметь $x \succ y$.

С другой стороны, пусть $x \in \bigcup_{j}^{m} (E_l \cap C_{l-1}) \setminus R_j$. Тогда либо

$$\text{(i)} \quad x \in \bigcup_{j+1}^{m} (E_l \cap C_{l-1}) \setminus R_{j+1},$$

либо

$$\text{(ii)} \quad x \in E_j \cap C_{j-1} \setminus K_j.$$

В случае (i) по предположению индукции существует такой $y \in R_{j+1}$, что $y \succ x$. В случае (ii) мы видели, что существует такой

$y \in K_j$, что $y \succ x$. Итак, в любом случае существует такой $y \in R_j$, что $y \succ x$.

Продолжая таким образом, мы придем к множеству $R = R_1$, которое удовлетворяет условиям леммы X. 3.8 и, очевидно, внутренне устойчиво. Следовательно, R будет решением.

Теперь мы должны показать, что R — единственное решение. Доказательство этого факта нетрудно провести, и оно предлагается в качестве задачи (задача X. 3).

Доказательство теоремы X. 3.4 использует лемму Цорна, но в такой незначительной степени, что практически является конструктивным. Ниже мы приведем пример того, как это доказательство можно использовать для нахождения решения. В силу того, что множество всех дележей есть объединение большого числа симплексов, мы будем рассматривать только игры трех лиц. Далее, в то время как игры четырех лиц имеют 15 разбиений, игры трех лиц имеют только 5 разбиений. Следовательно, игра трех лиц гораздо проще. Можно показать, что теорема X. 3.4 верна также и для игр трех лиц.

X. 3.11. Пример. Рассмотрим игру трех лиц, где $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\mathcal{P}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{P}_4 = \{\{1, 2, 3\}\}$, $\mathcal{P}_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, а

$$\begin{aligned}
&v^{\mathcal{P}_1}(\{1, 2\}) = 5, && v^{\mathcal{P}_1}(\{3\}) = 5,\\
&v^{\mathcal{P}_2}(\{1, 3\}) = 5, && v^{\mathcal{P}_2}(\{2\}) = 3,\\
&v^{\mathcal{P}_3}(\{2, 3\}) = 6, && v^{\mathcal{P}_3}(\{1\}) = 0,\\
&v^{\mathcal{P}_4}(\{1, 2, 3\}) = 4, && v^{\mathcal{P}_5}(\{i\}) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем $\|\mathcal{P}_1\| = 10$, $\|\mathcal{P}_2\| = 8$, $\|\mathcal{P}_3\| = 6$, $\|\mathcal{P}_4\| = 4$, $\|\mathcal{P}_5\| = 0$ и $u(\{1, 2\}) = u(\{1, 3\}) = 5$, $u(\{2, 3\}) = 6$, $u(\{i\}) = 0$. Легко видеть, что $E_3 \cap C_2 \neq \varnothing$, а $E_4 \cap C_3 = \varnothing$, так что $m = 3$. Построим R следующим образом.

Заметим прежде всего, что E_3 — симплекс неотрицательных векторов, сумма компонент которых равна 6; множество $E_3 \cap C_2$ будет состоять из тех элементов E_3, которые удовлетворяют неравенствам

$$x_1 + x_2 \geqq 5, \quad x_1 + x_3 \geqq 5,$$

или, что эквивалентно,

$$x_2 \leqq 1, \quad x_3 \leqq 1.$$

Далее, доминирование в E_3 может иметь место только по коалиции $\{2, 3\}$. Следовательно, K_3 состоит из тех элементов $E_3 \cap C_2$, которые максимальны по отношению $\succ$ по коалиции $\{2, 3\}$. Теперь, если $x_2 < 1$ и $x_3 < 1$, то $y \succ x$, где $y = (4, 1, 1)$. С другой стороны, если либо $x_2 = 1$, либо $x_3 = 1$, то x не может доминироваться в $E_3 \cap C_2$. Следовательно, K_3 есть объединение двух сегментов

$$x_2 = 1, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 1 \tag{10.3.2}$$

и

$$x_3 = 1, \quad 0 \leqq x_2 \leqq 1. \tag{10.3.3}$$

Рассмотрим теперь множество $E_2 \cap C_1$. Множество E_2 состоит из неотрицательных векторов, сумма компонент которых равна 8; $E_2 \cap C_1$ состоит из тех элементов E_2, которые удовлетворяют также неравенству $x_1 + x_2 \geqq 5$, или, что эквивалентно, $x_3 \leqq 3$. Чтобы получить G_2, мы должны исключить из $E_2 \cap C_1$ те элементы, которые доминируются элементами K_3. Но единственная коалиция, которая может реализовать дележи из K_3, есть коалиция $\{2, 3\}$; из вида K_3 следует, что из $E_2 \cap C_1$ мы должны исключить те элементы, для которых $x_2 < 1$ и $x_3 < 1$. Таким образом, G_2 задается условиями

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_3 \leqq 3,$$
$$x_2 \geqq 1 \quad \text{или} \quad x_3 \geqq 1.$$

Далее, нам нужны элементы в G_2, максимальные по отношению $\succ$. Так как $\{1, 3\}$ — реализующая коалиция, то любой такой x, что $x_1 + x_3 < 5$, $x_3 < 3$, будет доминироваться некоторым $y \in G_2$. Тогда легко показать, что K_2 есть объединение трех множеств

$$0 \leqq x_2 \leqq 1, \quad 1 \leqq x_3 \leqq 3, \tag{10.3.4}$$

$$1 \leqq x_2 \leqq 3, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 3 \tag{10.3.5}$$

и

$$x_3 = 3. \tag{10.3.6}$$

Рассмотрим теперь множество $E_1 \cap C_0 = E_1$. Оно состоит из всех неотрицательных векторов, сумма компонент которых равна 10. Чтобы получить G_1, нам необходимо из E_1 исключить все дележи, которые доминируются элементами из $R_2 = K_2 \cup K_3$. Но дележи, которые доминируются элементами из K_3, задаются неравенствами $x_2 < 1$, $x_3 < 1$, а дележи, доминируемые элементами из K_2 — неравенствами $x_1 + x_3 < 5$, $x_3 < 3$. Таким образом, G_1 задается условиями

$$x_2 \geqq 1 \quad \text{или} \quad x_3 \geqq 1,$$
$$x_2 \leqq 5 \quad \text{или} \quad x_3 \geqq 3.$$

Далее, можно показать, что G_1 содержит все дележи из E, для которых $x_3 = 5$. Следовательно, если $y_3 < 5$, то y будет доминироваться некоторым $x \in G_1$ по коалиции $\{1, 2\}$. Все остальные элементы G_1 будут принадлежать K_1, которое, следовательно, задается как объединение следующих множеств:

$$0 \leqq x_2 \leqq 1, \quad 1 \leqq x_3 \leqq 5, \tag{10.3.7}$$

$$1 \leqq x_2 \leqq 5, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 5, \tag{10.3.8}$$

$$x_2 \geqq 5, \quad x_3 \geqq 3. \tag{10.3.9}$$

Условия (10.3.2)—(10.3.9) определяют три множества K_1, K_2, K_3. Множество $R = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ есть единственное устойчивое множество (решение) в нашей игре (см. рис. X. 3.1).

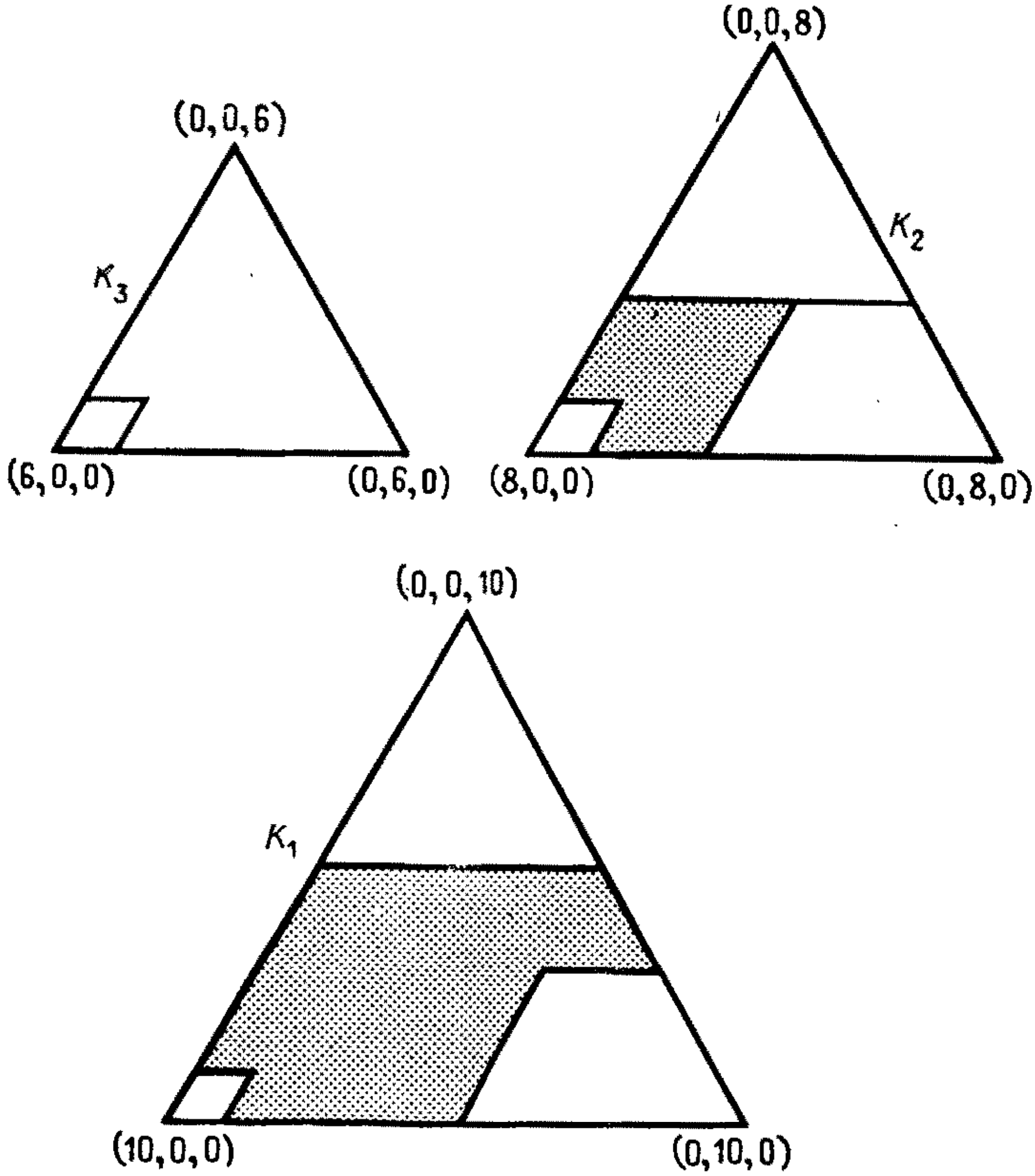

Рис. X. 3.1.

Задачи

1. Сумма любого числа мер также является мерой. Показать, что если $P(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — полином от мер μ_i, то P можно представить в виде $P = c_1 v_1^{n_1} + c_2 v_2^{n_2} + \ldots + c_k v_k^{n_k}$, где c_j — константы, v_j — меры, а n_j — положительные целые числа.

2. Для $S \subset [0, 1]$ положим $v(S) = \lambda^3(S)\mu(S)$, где λ — мера Лебега, а $\mu(S) = \int\limits_S x\,dx$. Найти функцию Шепли $\varphi[v]$ этой игры.

3. Завершить доказательство теоремы X. 3.4 (т. е. показать, что построенное в этом доказательстве множество R есть единственное решение). Для этого показать по индукции, что все K_m, K_{m-1}, ..., K_1 должны быть подмножествами некоторого устойчивого множества.

4. Игра n лиц без побочных платежей может и не иметь решения. Рассмотреть для этого простую игру v семи лиц, где H — выпуклая оболочка пяти точек

$$c = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 1), \quad p_1 = (1, 1, 2, 0, 0, 0, 0),$$
$$p_2 = (0, 0, 1, 1, 2, 0, 0), \quad p_3 = (2, 0, 0, 0, 1, 1, 0),$$
$$0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

а минимальными выигрывающими коалициями являются $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{5, 6, 7\}$. Любая выигрывающая коалиция может навязать любой дележ, а остальные коалиции являются эффективными только для таких дележей, в которых члены этих коалиций получают 0. Тогда игра v не имеет устойчивых множеств (решений).

а) Ядро v есть просто $\{c\}$.

б) Если L_i — отрезок $\{p_i, c\}$, то множество дележей, не доминируемых точкой c, есть $L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Если V устойчиво, то оно должно содержать по крайней мере по одной точке $q_i \neq c$ из каждого L_i.

в) Точки q_i должны удовлетворять условию $q_1^7 = q_2^7 = q_3^7$. Следовательно, V содержит только по одной точке из каждого L_i, отличной от c. Значит, V неустойчиво и v не имеет решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П. 1. ВЫПУКЛОСТЬ

Во всей этой книге широко использовалось понятие выпуклости. Ниже мы приведем некоторые свойства выпуклых функций; другие свойства их были указаны в основном тексте, а именно в гл. II и IV.

П. 1.1. Определение. Вещественная функция $f(x)$, определенная в вещественном линейном пространстве, называется *выпуклой*, если для любых значений x, y независимой переменной и любого такого r, что $0 \leqq r \leqq 1$,

$$f(rx + (1-r)y) \leqq rf(x) + (1-r)f(y). \tag{1.1}$$

Функция f называется *строго выпуклой*, если при $x \neq y$ и $0 < r < 1$ неравенство (1.1) будет строгим неравенством.

П. 1.2. Определение. Функция f называется *вогнутой* (*строго вогнутой*), если функция $-f$ выпукла (строго выпукла).

Следующая теорема указывает на очевидные свойства выпуклых функций. Доказательство этой теоремы не приводится.

П. 1.3. Теорема. *Пусть f и g — выпуклые функции, а $c \geqq 0$. Тогда функции $f+g$, cf и* $\max\{f, g\}$ *также выпуклы.*

Аналогично, если f и g вогнуты, то вогнутыми являются функции $f+g$, cf и $\min\{f, g\}$.

Легко показать, что линейная функция одновременно вогнута и выпукла. Обратно, если функция одновременно вогнута и выпукла, то она линейна.

П. 1.4. Определение. Множество $S \subset V$, где V — вещественное линейное пространство, называется *выпуклым*, если из x, $y \in S$ и $0 \leqq r \leqq 1$ следует, что

$$rx + (1-r)y \in S. \tag{1.2}$$

Таким образом, множество S выпукло, если отрезок, соединяющий две точки из S, целиком принадлежит S. Для сравнения отметим, что функция выпукла, если хорда, соединяющая две точки графика этой функции, целиком лежит над графиком. Таким образом, множество точек, находящихся над графиком выпуклой функции, является выпуклым (этот факт часто берется в качестве определения выпуклой функции). Эта связь между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями отражается в следующей теореме которая в некотором смысле аналогична теореме П. 1.3. Доказательство этой теоремы тривиально.

П. 1.5. Теорема. *Пусть для* $\alpha \in A$ *множества* S_α *выпуклы* (*A — некоторое множество индексов*). *Тогда* $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ *также выпукло.*

Очень часто нам дано невыпуклое множество K, а мы хотим использовать некоторую теорему, применимую только для выпуклых множеств. В таком случае нам необходимо связать с K некоторое выпуклое множество $H(K)$.

П. 1.6. Определение. Пусть K — произвольное множество. Тогда его *выпуклой оболочкой* $H(K)$ называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих K.

По теореме П. 1.5 выпуклая оболочка любого множества выпукла; ясно также, что если множество выпукло, то оно совпадает со своей выпуклой оболочкой. Существует, однако, другое определение выпуклой оболочки, а именно через выпуклые линейные комбинации.

П. 1.7. Определение. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^p$ суть p точек в некотором вещественном линейном пространстве. Тогда говорят, что точка y есть *выпуклая линейная комбинация* точек $x^1, x^2, \ldots, x^p$, если существуют вещественные числа $c_1, \ldots, c_p$, удовлетворяющие условиям

$$\text{(i)}\quad c_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$\text{(ii)}\quad \sum c_j = 1,$$

$$\text{(iii)}\quad y = \sum c_j x^j.$$

Связь между выпуклыми линейными комбинациями и выпуклой оболочкой указана в следующей теореме.

П. 1.8. Теорема. *Для любого множества K выпуклая оболочка $H(K)$ совпадает с множеством S всех точек y, являющихся выпуклыми линейными комбинациями элементов из K.*

Доказательство. Легко видеть, что $K \subset S$. Далее, S выпукло; действительно, предположим, что

$$y = \sum_{j=1}^{p} c_j x^j, \quad x^1, \ldots, x^p \in K$$

и

$$y' = \sum_{j=p+1}^{p+q} c_j x^j, \quad x^{p+1}, \ldots, x^{p+q} \in K,$$

так что y, $y' \in S$, причем $(c_1, \ldots, c_p)$ и $(c_{p+1}, \ldots, c_{p+q})$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) определения П. 1.7. Тогда если $0 \leqq r \leqq 1$, то

$$y'' = ry + (1-r)y' = \sum_{j=1}^{p} (rc_j)\, x^j + \sum_{j=p+1}^{p+q} (1-r)\, c_j x^j.$$

и числа $(rc_1, \ldots, rc_p, (1-r)c_{p+1}, \ldots, (1-r)c_{p+q})$ удовлетворяют условиям П. 1.7 (i), (ii). Следовательно, $y'' \in S$, так что S выпукло. Отсюда следует, что $H(K) \subset S$.

Обратно, пусть $y = \sum_{j=1}^{p} c_j x^j$, где $x^j \in K$, а c_j удовлетворяют тем же условиям, что и выше. Индукцией по p докажем, что $y \in H(K)$. Действительно, $y = x^1$ для $p = 1$, так что $y \in K \subset H(K)$. Предположим теперь, что это утверждение верно для $p-1$. Не умаляя общности, мы можем предположить, что $c_1 > 0$, так что $r = \sum_{j=1}^{p-1} c_j > 0$. Тогда имеем

$$y = ry' + (1-r)\, x^p,$$

где

$$y' = \sum_{j=1}^{p-1} (c_j/r)\, x^j.$$

Ясно, что $y' \in S$, так что по предположению индукции $y' \in H(K)$. Но $x^p \in H(K)$. Ввиду выпуклости отсюда следует, что $y \in H(K)$. Значит, $S \subset H(K)$. Это включение доказывает теорему.

Понятие выпуклой оболочки позволяет нам каждому множеству поставить в соответствие некоторое выпуклое множество. С другой стороны, иногда важно иметь представление выпуклого множества в виде выпуклой оболочки некоторого своего подмножества.

П. 1.9. Определение. Пусть S — выпуклое множество, а $x \in S$.

Мы будем называть x *крайней точкой* S, если не существует двух таких точек x', x'' из S, что $x' \neq x''$ и

$$x = (x' + x'')/2.$$

Следующая важная теорема была использована в основном тексте этой книги.

П. 1.10. Теорема. *Компактное выпуклое подмножество S n-мерного евклидова пространства является выпуклой оболочкой своих крайних точек. Кроме того, любая точка $y \in S$ может быть представлена как выпуклая линейная комбинация не более $n+1$ крайней точки из S.*

Доказательство. Ясно, что из второй части теоремы следует первая. Поэтому мы докажем только вторую часть. Доказательство ее мы проведем индукцией по n. Действительно, для $n = 1$ единственными компактными выпуклыми множествами является пустое множество $\varnothing$, одноточечные множества и интервалы $[a, b]$. Для пустого множества $\varnothing$ и одноточечных множеств теорема тривиальна; для интервалов $[a, b]$ ясно, что a и b являются крайними точками и любая точка $y \in [a, b]$ есть выпуклая линейная комбинация a и b.

Предположим теперь, что теорема верна для $n - 1$. Ясно тогда, что теорема будет верна для всех $(n - 1)$-мерных множеств, даже если они являются подмножествами пространства более высокой размерности. Пусть множество S удовлетворяет условиям теоремы, и пусть $y \in S$.

Возьмем любую прямую, проходящую через y. Ввиду замкнутости и выпуклости пересечение этой прямой и S есть замкнутый отрезок с концами y' и y''.

Рассмотрим точку y'. Она является граничной точкой S, и поэтому (см. задачу II.1) существует такая гиперплоскость P, проходящая через y', что множество S целиком лежит в этой гиперплоскости или по одну сторону от нее. Множество P, очевидно, замкнуто и выпукло, поэтому $S \cap P$ — компактное выпуклое множество размерности не более $n - 1$. Так как $y' \in S \cap P$, она может быть представлена как выпуклая линейная комбинация не более n крайних точек множества $S \cap P$.

Предположим, что $x \in S \cap P$ и что $x = (x' + x'')/2$, где $x', x'' \in S$. Множество P может быть задано уравнением $L(x) = \alpha$, где L — линейный функционал, причем мы знаем, что $L(x) \geqq \alpha$ для всех $x \in S$. Ввиду линейности мы должны иметь $L(x') = L(x'') = \alpha$, так что $x', x'' \in P$. А это означает, что если точка x — крайняя в $S \cap P$, то она является крайней в S.

Таким образом, мы показали, что y — выпуклая линейная комбинация точки y'' и не более чем n крайних точек S. Но y'' была получена выбором произвольной прямой, проходящей через y; эту прямую всегда можно выбрать так, что точка y'' будет крайней. Тогда y будет выпуклой линейной комбинацией не более $n + 1$ крайних точек S.

П.2. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Ниже мы приведем без доказательства две теоремы, которые были использованы в основном тексте. Доказательства этих теорем весьма длинны, и их можно найти в соответствующих работах (см. список литературы).

П.2.1. Теорема (теорема Брауэра о неподвижной точке). *Пусть S — компактное выпуклое подмножество n-мерного евкли-*

дова пространства, а f — непрерывная функция, отображающая S в себя. Тогда существует по крайней мере одна такая точка $x \in S$, что $f(x) = x$.

Эта теорема носит топологический характер и поэтому применима к любому множеству, топологически эквивалентному множеству S. (Очень часто эта теорема формулируется в предположении, что S представляет собой n-мерный симплекс.) В общем случае доказательство этой теоремы весьма длинно и требует существенной топологической подготовки, хотя для $n = 1$ эта теорема есть непосредственное следствие теоремы о промежуточном значении (в этом случае теорема о неподвижной точке сводится к доказательству того, что уравнение $f(x) - x = 0$ имеет корень в заданном интервале). Ее обобщением, которое оказалось весьма полезным в теории игр, является приводимая ниже теорема Какутани о неподвижной точке.

П.2.2. Определение. Пусть f — такая функция, заданная в топологическом пространстве X, что $f(x)$ для $x \in X$ есть подмножество некоторого топологического пространства Y. Тогда функция f называется *полунепрерывной сверху* в точке x_0, если для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$, сходящейся к x_0, и любой такой последовательности точек $y_1, y_2, \ldots$, что $y_i \in f(x_i)$, предел последовательности $\{y_n\}$ (если она сходится) принадлежит $f(x_0)$. Функция f полунепрерывна сверху, если она полунепрерывна сверху в каждой точке X.

П.2.3. Теорема (Какутани). *Пусть S — компактное выпуклое подмножество n-мерного евклидова пространства, и пусть f — полунепрерывная сверху функция, которая каждому $x \in S$ ставит в соответствие замкнутое выпуклое подмножество множества S. Тогда существует такое $x \in S$, что $x \in f(x)$.*

ЛИТЕРАТУРА [1])

Общие работы

Следующие книги и статьи содержат материал, представляющий общий интерес; работы, которые непосредственно относятся к той или иной главе настоящей книги, помещены в списках литературы, относящихся к главам.

[A] Advances in Game Theory (Dresher M., Shapley L. S., Tucker A. W., eds.), Ann. of Math. Studies, № 52, Princeton, 1964.

[B] Contributions to the Theory of Games, III (Dresher M., Tucker A. W., Wolfe P., eds.), Ann. of Math. Studies, № 39, Princeton, 1957.

[C] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., «Мир», 1964 (1959) [2]).

[D] Contributions to the Theory of Games, I (Kuhn H. W., Tucker A. W., eds.), Ann. of Math. Studies, № 24, Princeton, 1950.

[E] Contributions to the Theory of Games, II (Kuhn H. W., Tucker A. W., eds.), Ann. of Math. Studies, № 28, Princeton, 1953.

[F] Линейные неравенства и смежные вопросы, под ред. Г. Куна и А. Таккера (с приложением перевода книги С. Вайда «Теория игр и линейное программирование»), М., ИЛ, 1959 (1956).

[G] Льюс Р. Д., Райфа Х., Игры и решения, М., ИЛ, 1961 (1957).

[H] Contributions to the Theory of Games, IV (Tucker A. W., Luce R. D., eds.), Ann. of Math. Studies, № 40, Princeton, 1959.

[I] фон Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, М., «Наука», 1970 (1947).

[J*] «Матричные игры», под ред. Н. Н. Воробьева, М., Физматгиз, 1961.

[K*] «Бесконечные антагонистические игры», под ред. Н. Н. Воробьева, М., Физматгиз, 1963.

[L*] «Позиционные игры», под ред. Н. Н. Воробьева, И. Н. Врублевской, М., «Наука», 1967.

[M*] «Применение теории игр в военном деле», под ред. В. О. Ашкеназы, М., «Сов. радио», 1961.

[N*] Дрешер М., Стратегические игры. Теория и приложения, М., «Сов. радио», 1964.

[O*] Воробьев Н. Н., Современное состояние теории игр, *УМН*, 25, № 2 (1970), 81—140.

[P*] Воробьев Н. Н., Некоторые методологические проблемы теории игр, *Вопр. философии*, № 1 (1966), 93—103.

[Q*] Klaus G., Spieltheorie in philosophischer Sicht, Berlin, 1968.

Глава I

[1] Berge C., Topological games with perfect information, сборник [B], 165—178.

[2] Gale D., Stewart F. M., Infinite games with perfect information, сборник [E], 245—266.

---

[1]) Литература, добавленная при переводе, отмечена звездочкой. — *Прим. перев.*

[2]) Для переводов в скобках указан год выхода оригинала. — *Прим. ред.*

[3] Kuhn H. W., A simplified two-person poker, сборник [D], 97—103.
[4] Кун Г. У., Позиционные игры и проблема информации, сборник [L*], 13—40.
[5] Nash J., Shapley L. S., A simple three-person poker game, сборник [D].
[6*] Воробьев Н. Н., Конечные бескоалиционные игры, *УМН*, **14**, № 4, (1959), 21—56.
[7*] Врублевская И. Н., Эквивалентность смешанных стратегий и стратегий поведения в счетной позиционной структуре, сборник [L*], 246—250.
[8*] Петросян Л. А., Сигнальные стратегии и стратегии поведения в одном классе бесконечных позиционных игр, сборник [L*], 221—229.
[9*] Петросян Л. А., Еще одно обобщение теоремы Куна, сборник [L*], 230—245.

Глава II

[1] Brown G. W., von Neumann J., Solutions of games by differential equations, сборник [D], 73—79.
[2] Dresher M., Karlin S., Solutions of convex games as fixed points, сборник [E], 75—86.
[3] Farkas J., Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, 124 (1902), 1—27.
[4] Гейл Д., Кун Г. У., Таккер А. У., О симметричных играх, сборник [J*], 62—71.
[5] Моцкин Т. С., Райфа Х., Томпсон Дж. Л., Тролл Р. М., Метод двойного описания, сборник [J*], 81—109.
[6] Робинсон Дж., Итеративный метод решения игр, сборник [J*], 110—117.
[7] Shapley L. S., Snow R. N., Basic solutions of discrete games, сборник [D], 27—36.
[8] Weyl H., Elementary proof of a minimax theorem due to von Neumann, сборник [D].

Глава III

[1] Данциг Дж. Б., Форд Л. Р., Фулкерсон Д. Р., Алгорифм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования, сборник [F], 277—286.
[2] Данциг Дж. Б., Фулкерсон Д. Р., Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе в сетях, сборник [F], 318—324.
[3] Гасс С. И., Линейное программирование, М., Физматгиз, 1961 (1958).
[4] Голдман А. Дж., Таккер А. У., Теория линейного программирования, сборник [F], 172—213.
[5] Таккер А. У., Двойственные системы однородных линейных соотношений, сборник [F], 127—141.
[6] Вайда С., Теория игр и линейное программирование, сборник [F], 11—108.
[7] Вулф Ф., Определенность полиэдральных игр, сборник [F], 298—301.
[8*] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, М., «Прогресс», 1966 (1963).
[9*] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения, М., «Наука», 1969.

Глава IV

[1] Боненбласт Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С., Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша, сборник [K*], 337—352.
[2] Боненбласт Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С., Решения дискретных игр двух лиц, сборник [J*], 17—44.

[3] Borel E., Sur le jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs, Eléments de la Théorie des Probabilités, 3 ed., Paris, 1924.
[4] Дрешер М., Карлин С., Шепли Л. С., Полиномиальные игры, сборник [K*], 154—180.
[5] Даффин Дж. Р., Бесконечные программы, сборник [F], 263—276.
[6] Гросс О., Рациональная игра на квадрате, сборник [K*], 414—418.
[7] Карлин С., Операторное истолкование принципа минимакса, сборник [K*], 47—76.
[8] Карлин С., Об одном классе игр, сборник [K*], 353—371.
[9] Карлин С., Сведение некоторых классов игр к интегральным уравнениям, сборник [K*], 249—294.
[10] Restrepo R., Tactical problems involving several actions, сборник [B], 313—335.
[11] Шифман М., Игры с выбором момента времени, сборник [K*], 218—248.
[12] Сайон М., Вулф Ф., Об игре, не обладающей значением, сборник [L*], 290—299.
[13*] Яновская Е. Б., Об одном классе игр на единичном квадрате с неограниченной функцией выигрыша, сборник [K*], 77—84.

Глава V

[1] Berkovitz L. D., Fleming W. H., On differential games with integral payoff, сборник [B], 413—435.
[2] Berkovitz L. D., A variational approach to differential games, сборник [A], 127—194.
[3] Berkovitz L. D., A differential game without pure strategy solutions on an open set, сборник [A], 174—194.
[4] Blackwell D., Multi-component attrition games, *Naval Res. Logistics Quart.*, **1** (1954), 327—332.
[5] Дубинс Л. Э., Дискретная игра на уклонение от преследования, сборник [M*], 275—302.
[6] Everett H., Recursive games, сборник [B], 47—78.
[7] Fleming W. H., The convergence problem for differential games, II, сборник [A], 195—210.
[8] Айзекс Р., Дифференциальные игры, М., «Мир», 1967 (1965).
[9] Исбелл Дж. Р., Финитарные игры, сборник [L*], 132—154.
[10] Milnor J., Shapley L. S., On games of survival, сборник [B], 15—45.
[11] Mycielski J., Continuous games of perfect information, сборник [A], 103—112.
[12] Ryll-Nardzewski C., A theory of pursuit and evasion, сборник [A], 113—126.
[13] Scarf H. E., On differential games with survival payoff, сборник [B], 393—406.
[14] Shapley L. S., Stochastic games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 327—332.
[15*] Fleming W. H., A note on differential games of prescribed duration, сборник [B], 407—416.
[16*] Fleming W. H., The convergence problem for differential games, *Math. Anal. and Appl.*, **3** (1961), 102—116.
[17*] Зеликин М. И., Тынянский Н. Т., Детерминированные дифференциальные игры, *УМН*, **20**, № 4 (1965), 151—157.
[18*] Петросян Л. А., Обобщенные решения дифференциальных игр на выживание, *Экономика и математические методы*, **3**, № 3 (1967), 420—425.
[19*] Понтрягин Л. С., К теории дифференциальных игр, *УМН*, **21**, № 4 (1966), 219—274.

Глава VI

[1] Arrow K. J., Social choice and individual values, New York, 1951.
[2] Davidson D., Siegel S., Suppes P., Some experiments and related theory on the measurement of utility and subjective probability, Appl. Math. and Statist. Lab., Techn. Rep. 1, Stanford Univ., 1955.
[3] Hausner M., Multi-dimensional utilities, сборник Decision processes (Thrall R. M., Coombs C. H., Davis R. L., eds.), New York, 1954.
[4] Herstein J. N., Milnor J., An axiomatic approach to measurable utility, *Econometrica*, 21 (1953), 291—297.
[5] Isbell J., Absolute games, сборник [H].
[6] Luce R. D., A probabilistic theory of utility, Techn. Rep. 14, Behavioral Models Project, Columbia Univ., 1956.
[7] Suppes P., Winet M., An axiomatization of utility based on the notion of utility differences, *Manag. Sci.*, **1** (1955), 259—270.

Глава VII

[1] Braithwaite R. B., Theory of games as a tool for the moral philosopher, Cambridge, 1955.
[2] Harsanyi J. C., Approaches to the bargaining problem before and after the theory of games: a critical discussion of Zeuthen's, Hicks' and Nash's theories, *Econometrica*, 24 (1956), 144—157.
[3] Harsanyi J. C., A general solution for finite non-cooperative games based on risk-dominance, сборник [A], 651—679.
[4] Lemke C. E., Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Manag. Sci.*, **11** (May 1965).
[5] Nash J., Equilibrium points in n-person games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 48—49.
[6] Nash J., The bargaining problem, *Econometrica*, **18** (1950), 155—162.
[7] Nash J., Non-cooperative games, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 286—295.
[8] Raiffa H., Arbitration schemes for generalized two-person games, сборник [E], 361—388.
[9] Shapley L. S., Some topics in two-person games, сборник [A], 1—23.
[10] Zeuthen F., Problems of monopoly and economic welfare, London, 1930.
[11*] Воробьев Н. Н., Коалиционные игры, *Теория вероятностей и ее применения*, 12, № 2 (1967), 289—306.
[12*] Воробьев Н. Н., Ситуации равновесия в биматричных играх, *Теория вероятностей и ее применения*, 3, № 3 (1958), 318—331.
[13*] Kuhn H. W., An algorithm for equilibrium points in bimatrix games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 47, № 10 (1961), 1657—1662.

Глава VIII

[1] Bott R., Symmetric solutions to majority games, сборник [E], 319—324.
[2] Gillies D. B., Solutions to general non-zero-sum games, сборник [H], 47—86.
[3] Gurk H., Isbell J., Simple solutions, сборник [H].
[4] Kalisch G. K., Nering E. D., Countably infinitely many person games, сборник [H].
[5] McKinsey J. C. C., Isomorphism of games and strategic equivalence, сборник [D].
[6] Owen G., Tensor composition of non-negative games, сборник [A], 307—326.
[7] Owen G., Discriminatory solutions of n-person games, *Proc. Am. Mat. Soc.*, **17** (1966), 653—657.
[8] Shapley L. S., Quota solutions of n-person games, сборник [E].

[9] Shapley L. S., A solution containing an arbitrary closed component, сборник [H].
[10] Shapley L. S., Solution of compound simple games, сборник [A].
[11] Shubik M., Edgeworth market games, сборник [H].
[12*] Бондарева О. Н., Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр, Проблемы кибернетики, Вып. 10, М., Физматгиз, 1963, 119—140.
[13*] Кулаковская Т. Е., Достаточные условия существования ядра-решения, *Лит. мат. сб.*, **9**, № 2 (1969).

Глава IX

[1] Aumann R. J., Maschler M., The bargaining set for cooperative games, сборник [A], 443—476.
[2] Luce R. D., ψ-stability: a new equilibrium concept for n-person game theory, Mathematical models of human behavior, Proceedings of symposium, Stanford, 1955, 32—44.
[3] Luce R. D., k-stability of symmetric and quota games, *Ann. of Math.*, **62** (1955), 517—527.
[4] Maschler M., The inequalities that determine the bargaining set $\mathscr{M}_{1}^{(i)}$, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, Res. Mem. 17, Hebrew Univ. Jerusalem, Jan. 1966.
[5] Maschler M., Peleg B., A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of game, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 289—328.
[6] Milnor J., Reasonable outcomes for n-person games, RM-916 RAND Corporation, 1952.
[7] Peleg B., On bargaining set $\mathscr{M}_0$ of m-quota games, сборник [A], 501—502.
[8] Peleg B., Existence theorem for bargaining set $\mathscr{M}_{1}^{(i)}$ *Bull. Am. Math. Soc.*, **69** (1963), 109—110.
[9] Shapley L. S., A value for n-person games, сборник [E], 307—317.

Глава X

[1] Aumann R. J., Acceptable points in general cooperative n-person games, сборник [H].
[2] Aumann R. J., Markets with continuum of traders, *Econometrica*, **32** (1964), 443—476.
[3] Davis M., Symmetric solutions to symmetric games with a continuum of players, Recent Advances in Game Theory, Proceedings of a Conference at Princeton University, 1961.
[4] Harsanyi J. C., A bargaining model for the cooperative n-person game, сборник [H].
[5] Harsanyi J. C., A simplified bargaining model for the n-person cooperative games, *Int. Econ. Review*, 4, May (1963).
[6] Isbell J., Absolute games, сборник [H].
[7] Kannai Y., Values of games with continuum of players, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, Res. Mem. 11, Hebrew Univ. Jerusalem, August 1964.
[8] Lucas W. F., Solutions for four-person games in partition function form, *J. SIAM*, 13 (1965), 118—128.
[9] Milnor J., Shapley L. S., Values of large games II: Oceanic games, RM-2699, RAND Corporation, February 1961.
[10] Miyasawa K., The n-person bargaining games, сборник [A], 547—576.
[11] Nering E. D., Coalition bargaining in n-person games, сборник [A], 531—546.
[12] Selten R., Valuation of n-person games, сборник [A], 577—626.

[13] Shapley L. S., A value for n-person game without side payments, Proceedings of a Conference at Princeton University, April 1965.

[14] Stearns R. E., Three-person cooperative games without side payments, сборник [A], 377—406.

[15] Stearns R. E., On the axioms for a cooperative game without side payments, Rep. 62-RL-3130E, General Electric Lab., Schenectady, September 1962.

Приложение

[1] Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, B. 3, № 1, Berlin, 1934; New York, 1948.

[2] Gale D., Convex polyhedral cones and linear inequalities, сборник Activity Analysis of Production and Allocation (T. C. Koopmans, ed.), New York, 1951.

[3] Kakutani S., A generalization of Brower's fixed point theorem, *Duke J. Math.*, 8 (1941), 457—459.

[4] Вейль Г., Элементарная теория выпуклых многогранников, сборник [J*], 254—273.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление