

Вопросы к экзамену по курсу “Случайные графы”

лектор — профессор Д.А. Шабанов

весенний семестр 2025

1. Равномерная и биномиальная модели случайных подмножеств. Асимптотическая эквивалентность моделей: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания свойством для случайных подмножеств в этих моделях. Две леммы и итоговое следствие для монотонных свойств.
2. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
3. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(H)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу H . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу H .
4. Метод моментов (б/д), распределения однозначно определяемые своими моментами. Многомерный метод моментов (б/д). Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу H . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы (б/д).
5. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу H .
6. Неравенство Чернова (б/д). Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
7. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона, уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д). Теорема о гигантской компоненте в случайном графе. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).

8. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа ℓ -компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.
9. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Теорема об ограниченности по вероятности максимальной сложности компонент. Свойства сложных компонент в $G_n(\lambda)$.
10. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k (б/д). Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.
11. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n, p)$. Лемма об одновременном наступлении связности и отсутствия изолированных вершин в графовом случайном процессе $(\tilde{G}(n, m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$.
12. Вершинная и реберная связность графа. Лемма о сепараторах. Теорема об одновременном наступлении k -связности и отсутствия вершин степени меньше k в графовом случайном процессе $(\tilde{G}(n, m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$.
13. Квазислучайные графы. Понятие (n, d, λ) -графа, его свойства. Теорема Чанг–Грэма–Уилсона, док-во пяти импликаций для случая регулярных графов.
14. Квазислучайные графы. Лемма о числе деревьев в регулярных графов. Теорема о фазовом переходе в случайных подграфах квазислучайных графов.
15. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ совершенного паросочетания.
16. Пути и маршруты в графах. Теорема о длине максимального пути в случайном графе $G(n, p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n, r, r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
17. Depth First Search алгоритм, его применение к доказательству существования длинного пути и длинного цикла в случайном графе.
18. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых подмножеств U в случайном графе $G(n, p)$. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \rightarrow +\infty$.
19. Неравенства концентрации в теории вероятностей. ФКГ–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него — разные оценки вероятности $P(X = 0)$.

20. Неравенства концентрации в теории вероятностей. Мартингалы. Неравенство Азумы–Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Следствие из него. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
21. Независимые множества в случайном графе. Число независимости $\alpha(G(n, p))$ и его асимптотическое поведение при $p = \text{const}$. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа $G(\mathbb{N}, p)$.
22. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n, p)$ с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа $\chi(G(n, p))$ для случая $p = \text{const}$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в общем случае (б/д).
23. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема о концентрации в двух значениях хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ при $p \leq n^{-6/7}$.
24. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема Аклиоптаса – Наора о явном виде значений концентрации в случае $p = c/n$, $c > 1$ (б/д). Оценки пороговой вероятности r -раскрашиваемости случайного графа вида $2r \ln r - \ln r \pm O(1)$. Доказательство нижней оценки с помощью метода второго момента (по модулю технической леммы).
25. Независимые множества $G(n, p)$ в случае $p = c/n$. Метод интерполяции и закон больших чисел для $\alpha(G(n, p))$.
26. Независимые множества $G(n, p)$ в случае $p = c/n$. Алгоритм Карпа–Сипсера для поиска независимого множества в графе, его применение к деревьям. Аппроксимация случайного графа случайным деревом и нахождение предельной константы для $\alpha(G(n, p))/n$ при фиксированном $c \leq 1$.
27. Свойства первого порядка в случайных графах. Критерий справедливости закона нуля или единицы. Закон нуля или единицы при условии $\min\{p, 1 - p\}n^\alpha \rightarrow \infty$ для $\forall \alpha > 0$.
28. Законы нуля или единицы в случайном графе при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Формулировка теоремы Спенсера–Шелаха, доказательство для всех α , кроме иррациональных из $(0, 1)$.
29. Расширения в случайных графах $G(n, n^{-\alpha})$, $\alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, их свойства. Теорема об ограниченности жестких цепей. Теорема о числе надежных расширений.
30. Теорема об универсальном расширении в $G(n, n^{-\alpha})$. Доказательство последнего пункта в теореме Спенсера–Шелаха, описание выигрышной стратегии Консерватора в игре Эренфойхта.

Список литературы

- [1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] A. Frieze, M. Karonski, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [4] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [5] T. Łuczak, B. Pittel, J. Wierman, “The structure of a random graph at the point of phase transition”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **341**:2 (1994), 721–748.
- [6] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.
- [7] A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, “The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs”, *Random Structures and Algorithms*, **24** (2004), 42–50.
- [8] J. Spencer, *The strange logic of random graphs*, Springer, Berlin Heidelberg, 2001.