Случайные графы. Лекция 02.09. Модели случайных графов

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

02.09.2025

Организация курса

- Курс разбит на две части.

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.
- Осенний семестр — дифф. зачет, весенний семестр - экзамен (по всему курсу).

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.
- Осенний семестр — дифф. зачет, весенний семестр - экзамен (по всему курсу).
- Формат занятий: 2 астрономических часа, лекции или разборы задач.

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.
- Осенний семестр — дифф. зачет, весенний семестр - экзамен (по всему курсу).
- Формат занятий: 2 астрономических часа, лекции или разборы задач.
- Будет три списка задач домашнего задания, каждая решенная задача дает 0,5 балла к итоговой оценке.

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.
- Осенний семестр — дифф. зачет, весенний семестр - экзамен (по всему курсу).
- Формат занятий: 2 астрономических часа, лекции или разборы задач.
- Будет три списка задач домашнего задания, каждая решенная задача дает 0,5 балла к итоговой оценке.
- Решения надо сдавать в электронном виде.

Организация курса

- Курс разбит на две части.
- Курс не требует особых знаний по теории графов, но требует хороших знаний курса теории вероятностей.
- Осенний семестр — дифф. зачет, весенний семестр - экзамен (по всему курсу).
- Формат занятий: 2 астрономических часа, лекции или разборы задач.
- Будет три списка задач домашнего задания, каждая решенная задача дает 0,5 балла к итоговой оценке.
- Решения надо сдавать в электронном виде.
- В конце семестра зачет пройдет в формате письменного теста на знание основных понятий и формулировок, можно будет набрать максимум 4 балла. Но можно взять оценку и просто по задачам.

Основные темы курса

Осенний семестр.

- Общая теория случайных подмножеств.
- Малые подграфы в случайном графе.
- Эволюция случайного графа.
- Связность случайного графа.
- Квазислучайные графы.

Основные темы курса

Осенний семестр.

- Общая теория случайных подмножеств.
- Малые подграфы в случайном графе.
- Эволюция случайного графа.
- Связность случайного графа.
- Квазислучайные графы.

Весенний семестр.

- Совершенные паросочетания в случайном графе.
- Длинные пути и гамильтоновы циклы.
- Число независимости и хроматическое число случайного графа.
- Законы 0 или 1 в случайном графе.

Основная литература

- B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- A. Frieze, M. Karonski, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, М.:Бином. Лаборатория знаний, 2007.

Что такое случайный граф?

Что такое случайный граф?

Определение

Случайный граф — это случайный элемент, принимающий значения в некотором конечном множестве графов.

Что такое случайный граф?

Определение

Случайный граф — это случайный элемент, принимающий значения в некотором конечном множестве графов.

Классическими моделями случайных графов являются *равномерная* и *биномиальная*. Качественное изучение асимптотических свойств этих моделей началось на рубеже 50-60-х годов XX века в работах П. Эрдеша и А. Реньи, поэтому данные модели также иногда называют *моделями Эрдеша–Реньи*.

Что такое случайный граф?

Определение

Случайный граф — это случайный элемент, принимающий значения в некотором конечном множестве графов.

Классическими моделями случайных графов являются *равномерная* и *биномиальная*. Качественное изучение асимптотических свойств этих моделей началось на рубеже 50-60-х годов XX века в работах П. Эрдеша и А. Реньи, поэтому данные модели также иногда называют *моделями Эрдеша–Реньи*.

Всюду далее через K_n мы будем обозначать полный граф на n вершинах.

Равномерная модель

Пусть $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$, а $\mathcal{G}_m$ — множество всех остовных подграфов K_n, имеющих ровно m ребер.

Равномерная модель

Пусть $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$, а $\mathcal{G}_m$ — множество всех остовных подграфов K_n, имеющих ровно m ребер.

Определение

Случайным графом $G(n,m)$ называется случайный элемент, принимающий значения во множестве $\mathcal{G}_m$ и имеющий на нем равномерное распределение:

$$\mathsf{P}\left(G(n,m) = F\right) = \frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}} \text{ для любого } F \in \mathcal{G}_m.$$

Биномиальная модель

Пусть $p \in [0,1]$ — некоторое число, а $\mathcal{G}$ — множество всех остовных подграфов K_n.

Определение

Случайным графом $G(n,p)$ *называется случайный элемент, принимающий значения во множестве* $\mathcal{G}$ *и имеющий на нем следующее распределение:*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) = F\right) = p^{|E(F)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(F)|} \text{ для любого } F \in \mathcal{G}.$$

Биномиальная модель

Пусть $p \in [0, 1]$ — некоторое число, а $\mathcal{G}$ — множество всех остовных подграфов K_n.

Определение

Случайным графом $G(n, p)$ называется случайный элемент, принимающий значения во множестве $\mathcal{G}$ и имеющий на нем следующее распределение:

$$\mathsf{P}\left(G(n, p) = F\right) = p^{|E(F)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(F)|} \text{ для любого } F \in \mathcal{G}.$$

Легко видеть, что ребра K_n включаются в $G(n, p)$ независимо друг от друга с вероятностью p (схема Бернулли на ребрах K_n).

Плюсы и минусы моделей

В равномерной модели

“+” число ребер постоянно;

“−” как правило, распределение других характеристик графа сложнее. Например, степень каждой вершины имеет гипергеометрическое распределение.

Плюсы и минусы моделей

В равномерной модели

"+" число ребер постоянно;

"–" как правило, распределение других характеристик графа сложнее. Например, степень каждой вершины имеет гипергеометрическое распределение.

В биномиальной модели

"+" ребра включаются независимо, с независимыми случайными величинами удобно работать. Например, степень каждой вершины имеет биномиальное распределение.

"–" число ребер случайно и может иметь большой разброс, класс возможных графов–значений очень большой.

Другие модели

Безусловно, классическими моделями $G(n, m)$ и $G(n, p)$ известные случайные графы не ограничиваются. Первое естественное обобщение — брать случайный подграф не в полном графе K_n, а в произвольном графе G на n вершинах. Второе естественное обобщение для равномерной модели — выбирать случайный подграф с равномерным распределением на некотором фиксированном множестве графов. Приведем некоторые яркие примеры таких моделей.

Другие модели

Безусловно, классическими моделями $G(n, m)$ и $G(n, p)$ известные случайные графы не ограничиваются. Первое естественное обобщение — брать случайный подграф не в полном графе K_n, а в произвольном графе G на n вершинах. Второе естественное обобщение для равномерной модели — выбирать случайный подграф с равномерным распределением на некотором фиксированном множестве графов. Приведем некоторые яркие примеры таких моделей.

Примеры.

1. Пусть K_{n_1,n_2} — полный двудольный граф с размерами долей n_1 и n_2. Тогда $G(n_1, n_2, p)$, случайный подграф K_{n_1,n_2}, получающийся независимым включением ребер с вероятностью p, называется *случайным двудольным графом*.

Другие модели

Безусловно, классическими моделями $G(n, m)$ и $G(n, p)$ известные случайные графы не ограничиваются. Первое естественное обобщение — брать случайный подграф не в полном графе K_n, а в произвольном графе G на n вершинах. Второе естественное обобщение для равномерной модели — выбирать случайный подграф с равномерным распределением на некотором фиксированном множестве графов. Приведем некоторые яркие примеры таких моделей.

Примеры.

1. Пусть K_{n_1,n_2} — полный двудольный граф с размерами долей n_1 и n_2. Тогда $G(n_1, n_2, p)$, случайный подграф K_{n_1,n_2}, получающийся независимым включением ребер с вероятностью p, называется *случайным двудольным графом*.
2. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех d-регулярных графов на n вершинах. Тогда случайный граф $G_r(n, d)$, имеющий равномерное распределение на множестве $\mathcal{F}$, называется *случайным d-регулярным графом*.

Случайные процессы на графах

Во многих стохастических моделях на графах возникают *графовые случайные процессы*. Естественными обобщениями классических моделей являются следующие процессы.

Случайные процессы на графах

Во многих стохастических моделях на графах возникают *графовые случайные процессы*. Естественными обобщениями классических моделей являются следующие процессы.

1. Графовый случайный процесс с дискретным временем. Процесс $\left(\widetilde{G}(n,m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2}\right)$ строится индуктивно. В начальный момент времени $\widetilde{G}(n,0)$ — это пустой граф на n вершинах.

Случайные процессы на графах

Во многих стохастических моделях на графах возникают *графовые случайные процессы*. Естественными обобщениями классических моделей являются следующие процессы.

1. Графовый случайный процесс с дискретным временем. Процесс $\left(\widetilde{G}(n,m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2}\right)$ строится индуктивно. В начальный момент времени $\widetilde{G}(n,0)$ — это пустой граф на n вершинах. Далее, к уже построенному графу $\widetilde{G}(n,m)$ с m ребрами мы добавляем одно случайное ребро, выбрав его равномерно среди оставшихся $\binom{n}{2} - m$ ребер, и получаем граф $\widetilde{G}(n,m+1)$.

Случайные процессы на графах

Во многих стохастических моделях на графах возникают *графовые случайные процессы*. Естественными обобщениями классических моделей являются следующие процессы.

1. Графовый случайный процесс с дискретным временем. Процесс $\left(\widetilde{G}(n,m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2}\right)$ строится индуктивно. В начальный момент времени $\widetilde{G}(n,0)$ — это пустой граф на n вершинах. Далее, к уже построенному графу $\widetilde{G}(n,m)$ с m ребрами мы добавляем одно случайное ребро, выбрав его равномерно среди оставшихся $\binom{n}{2} - m$ ребер, и получаем граф $\widetilde{G}(n,m+1)$. В последний момент времени $\binom{n}{2}$ получаем полный граф.

Случайные процессы на графах

Во многих стохастических моделях на графах возникают *графовые случайные процессы*. Естественными обобщениями классических моделей являются следующие процессы.

1. Графовый случайный процесс с дискретным временем. Процесс $\left(\widetilde{G}(n,m), m=0,\ldots,\binom{n}{2}\right)$ строится индуктивно. В начальный момент времени $\widetilde{G}(n,0)$ — это пустой граф на n вершинах. Далее, к уже построенному графу $\widetilde{G}(n,m)$ с m ребрами мы добавляем одно случайное ребро, выбрав его равномерно среди оставшихся $\binom{n}{2}-m$ ребер, и получаем граф $\widetilde{G}(n,m+1)$. В последний момент времени $\binom{n}{2}$ получаем полный граф.

Легко видеть, что $\widetilde{G}(n,m) \stackrel{d}{=} G(n,m)$.

2. Графовый случайный процесс с непрерывным временем. Пусть для каждого ребра e графа K_n задана некоторая неотрицательная случайная величина T_e с непрерывным распределением, причем случайные величины T_e по всем ребрам e независимы в совокупности.

Случайные процессы на графах

2. Графовый случайный процесс с непрерывным временем. Пусть для каждого ребра e графа K_n задана некоторая неотрицательная случайная величина T_e с непрерывным распределением, причем случайные величины T_e по всем ребрам e независимы в совокупности. Тогда для каждого $t > 0$ случайный граф $\widetilde{G}_T(n,t)$ состоит из всех ребер e таких, что $T_e \leqslant t$. Получается графовый случайный процесс $\widetilde{G}_T(n) = (\widetilde{G}_T(n,t), t \geqslant 0)$.

2. Графовый случайный процесс с непрерывным временем. Пусть для каждого ребра e графа K_n задана некоторая неотрицательная случайная величина T_e с непрерывным распределением, причем случайные величины T_e по всем ребрам e независимы в совокупности. Тогда для каждого $t > 0$ случайный граф $\widetilde{G}_T(n,t)$ состоит из всех ребер e таких, что $T_e \leqslant t$. Получается графовый случайный процесс $\widetilde{G}_T(n) = (\widetilde{G}_T(n,t), t \geqslant 0)$.

Например, если все с.в. T_e одинаково распределены, то

$$\widetilde{G}_T(n,t) \stackrel{d}{=} G(n,p), \text{ где } p = \mathsf{P}(T_e \leqslant t).$$

Удобно брать величины T_e, имеющие экспоненциальное распределение или равномерное на $[0,1]$.

Случайные процессы на графах

Изучение графовых случайных процессов позволяет лучше осознать асимптотическое поведение случайных графов. Например, в них можно рассматривать первые моменты появления разных свойств. Для процесса с дискретным временем $\left(\widetilde{G}(n,m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2}\right)$ введем случайные моменты времени

$$\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\widetilde{G}(n,m)) \geqslant 1\},$$

$$\sigma_1(n) = \min\{m : \widetilde{G}(n,m) \text{ связен}\},$$

$$\tau_2(n) = \min\{m : \delta(\widetilde{G}(n,m)) \geqslant 2\},$$

$$\sigma_2(n) = \min\{m : \widetilde{G}(n,m) \text{ гамильтонов}\}.$$

Случайные процессы на графах

Следующие две теоремы показывают тесную связь отсутствия в случайном графе изолированных вершин со связностью, а отсутствия вершины степени меньше двух — с гамильтоновостью.

Теорема (Б. Боллобаш, Э. Томасон, 1985)

$$\mathsf{P}\left(\tau_1(n) = \sigma_1(n)\right) \to 1 \text{ *при* } n \to \infty.$$

Теорема (Б. Боллобаш, 1984)

$$\mathsf{P}\left(\tau_2(n) = \sigma_2(n)\right) \to 1 \text{ *при* } n \to \infty.$$

Triangle–free process

Еще одним замечательным приложением графовых случайных процессов в комбинаторике является поиск с их помощью графов, обладающих разными ограничениями. Например, можно рассмотреть графовый случайный процесс, не содержащий подграфов, изоморфных фиксированному графу H. В этом случае, на каждом шаге мы случайно добавляем одно ребро к графу, выбирая его равномерно среди тех ребер, добавление которых не образует H–подграфов. Так с помощью *triangle-free* процесса было доказано существование графа без треугольников на n вершинах с числом независимости $O(\sqrt{n \ln n})$, что позволило обосновать правильную по порядку нижнюю оценку числа Рамсея $R(3, t)$:

$$R(3, t) \geqslant const \, \frac{t^2}{\ln t}.$$

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

1. линейное число ребер по числу вершин (ребер $\sim mn$ на n вершинах, где m "невелико");

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

1. линейное число ребер по числу вершин (ребер $\sim mn$ на n вершинах, где m “невелико”);
2. ограниченный диаметр (принцип “6 рукопожатий”);

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

1. линейное число ребер по числу вершин (ребер $\sim mn$ на n вершинах, где m “невелико”);
2. ограниченный диаметр (принцип “6 рукопожатий”);
3. доля вершин степени d подчиняется степенном закону, их количество примерно равно
$$\sim c \cdot n \cdot d^{-\alpha},$$
где $\alpha = 2.9\ldots$;

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

1. линейное число ребер по числу вершин (ребер $\sim mn$ на n вершинах, где m "невелико");
2. ограниченный диаметр (принцип "6 рукопожатий");
3. доля вершин степени d подчиняется степенном закону, их количество примерно равно
$$\sim c \cdot n \cdot d^{-\alpha},$$
где $\alpha = 2.9\ldots$;
4. кластерный коэффициент является достаточно большим.

Preferential attachment models

В 1999 появилась известная статья Барабаши и Альберт, в которой они описали графовые свойства существовавшего на тот момент интернета, а также предложили модель случайного графа, которая по их мнению вполне соответствовала выявленным свойствам.

Перечисленные свойства были следующими:

1. линейное число ребер по числу вершин (ребер $\sim mn$ на n вершинах, где m "невелико");
2. ограниченный диаметр (принцип "6 рукопожатий");
3. доля вершин степени d подчиняется степенном закону, их количество примерно равно
$$\sim c \cdot n \cdot d^{-\alpha},$$
где $\alpha = 2.9\ldots$;
4. кластерный коэффициент является достаточно большим.

Барабаши и Альберт был предложен принцип "предпочтительного присоединения" для построения модели, которая бы отвечала данным характеристикам.

Preferential attachment models

Суть принципа можно описать следующим образом. Если граф G_n на n вершинах построен, то следующий граф G_{n+1} получается присоединением к G_n одной новой вершины v_{n+1} и проведением из нее случайного ребра в одну из вершин G_n. С вероятностью

$$\frac{d_n(i)}{\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1}$$

ребро проводится в вершину v_i, $i = 1, \ldots, n$, а с вероятностью $1/(\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1)$ проводится петля в вершине v_{n+1}. Здесь $d_n(i)$ — степень вершины i в G_n.

Preferential attachment models

Суть принципа можно описать следующим образом. Если граф G_n на n вершинах построен, то следующий граф G_{n+1} получается присоединением к G_n одной новой вершины v_{n+1} и проведением из нее случайного ребра в одну из вершин G_n. С вероятностью

$$\frac{d_n(i)}{\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1}$$

ребро проводится в вершину v_i, $i = 1, \ldots, n$, а с вероятностью $1/(\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1)$ проводится петля в вершине v_{n+1}. Здесь $d_n(i)$ — степень вершины i в G_n.

Далее, возможны вариации. Например,

- Можно проводить m независимых ребер из v_{n+1}.
- Можно проводить их по-одному, пересчитывая степени каждый раз.
- Можно добавить некоторые веса.

Preferential attachment models

Суть принципа можно описать следующим образом. Если граф G_n на n вершинах построен, то следующий граф G_{n+1} получается присоединением к G_n одной новой вершины v_{n+1} и проведением из нее случайного ребра в одну из вершин G_n. С вероятностью

$$\frac{d_n(i)}{\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1}$$

ребро проводится в вершину v_i, $i = 1, \ldots, n$, а с вероятностью $1/(\sum_{j=1}^{n} d_n(j) + 1)$ проводится петля в вершине v_{n+1}. Здесь $d_n(i)$ — степень вершины i в G_n.

Далее, возможны вариации. Например,

- Можно проводить m независимых ребер из v_{n+1}.
- Можно проводить их по-одному, пересчитывая степени каждый раз.
- Можно добавить некоторые веса.

Позднее было показано, что подобные модели удовлетворяют свойствам 1-3, но кластерный коэффициент в них слишком мал.

Общие модели случайных подмножеств

Пусть Γ — это некоторое множество мощности N.

Общие модели случайных подмножеств

Пусть Γ — это некоторое множество мощности N.

Определение

Случайным подмножеством $\Gamma(p)$, $p \in [0,1]$, *называется случайный элемент, принимающий значения во множестве подмножеств* Γ *и имеющий следующее распределение:*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p) = F\right) = p^{|F|}(1-p)^{N-|F|} \text{ для любого } F \subset \Gamma.$$

Общие модели случайных подмножеств

Пусть Γ — это некоторое множество мощности N.

Определение

Случайным подмножеством $\Gamma(p)$, $p \in [0,1]$, *называется случайный элемент, принимающий значения во множестве подмножеств* Γ *и имеющий следующее распределение:*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p) = F\right) = p^{|F|}(1-p)^{N-|F|} \text{ для любого } F \subset \Gamma.$$

Определение

Случайным подмножеством $\Gamma(m)$, $m = 0, \ldots, N$, *называется случайный элемент, принимающий значения во множестве подмножеств* Γ *мощности* m *и имеющий на нем равномерное распределение:*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m) = F\right) = \frac{1}{\binom{N}{m}} \text{ для любого } F \subset \Gamma \text{ с условием } |F| = m.$$

Общие модели случайных подмножеств

Ясно, что модели $G(n,p)$ и $G(n,m)$ — это общая модель случайных подмножеств с Γ равным множеству ребер полного графа K_n. Совершенно аналогично вводится случайный процесс $(\widetilde{\Gamma}(m), m = 0, \ldots, N)$.

Общие модели случайных подмножеств

Ясно, что модели $G(n, p)$ и $G(n, m)$ — это общая модель случайных подмножеств с Γ равным множеству ребер полного графа K_n. Совершенно аналогично вводится случайный процесс $(\widetilde{\Gamma}(m), m = 0, \ldots, N)$.

В случае асимптотических вопросов мы будем считать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задано множество $\Gamma(n)$ растущего размера $N = N(n) \to \infty$.

Монотонные свойства

Пусть Γ — некоторое множество мощности N.

Монотонные свойства

Пусть Γ — некоторое множество мощности N.

Определение

Семейство подмножеств $\mathcal{Q}$ множества Γ, т.е. $\mathcal{Q} \subset 2^{\Gamma}$, называется возрастающим, если из того, что $A \in \mathcal{Q}$ и $A \subset B$, следует, что $B \in \mathcal{Q}$. Семейство подмножеств $\mathcal{Q}$ множества Γ называется убывающим, если из того, что $A \in \mathcal{Q}$ и $B \subset A$, следует, что $B \in \mathcal{Q}$.

Монотонные свойства

Пусть Γ — некоторое множество мощности N.

Определение

Семейство подмножеств $\mathcal{Q}$ *множества* Γ, *т.е.* $\mathcal{Q} \subset 2^{\Gamma}$, *называется возрастающим, если из того, что* $A \in \mathcal{Q}$ *и* $A \subset B$, *следует, что* $B \in \mathcal{Q}$.
Семейство подмножеств $\mathcal{Q}$ *множества* Γ *называется убывающим, если из того, что* $A \in \mathcal{Q}$ *и* $B \subset A$, *следует, что* $B \in \mathcal{Q}$.

Семейства $\mathcal{Q}$ подмножеств Γ мы будем называть “свойством” подмножеств. Заметим, что свойство $\mathcal{Q}$ является возрастающим тогда и только тогда, когда его дополнение $2^{\Gamma} \setminus \mathcal{Q}$ является убывающим. Для обладания свойством $\mathcal{Q}$ введем специальное обозначение:

$$G \models \mathcal{Q} \Leftrightarrow G \in \mathcal{Q}.$$

Возрастающие и убывающие свойства называются *монотонными*.

Примеры

Пусть Γ — множество ребер графа K_n. Следующие свойства являются возрастающими:

Примеры

Пусть Γ — множество ребер графа K_n. Следующие свойства являются возрастающими:

1. граф связен,
2. граф содержит треугольник (или другой заданный граф в качестве подграфа),
3. хроматическое число графа не меньше k.

Примеры

Пусть Γ — множество ребер графа K_n. Следующие свойства являются возрастающими:

1. граф связен,
2. граф содержит треугольник (или другой заданный граф в качестве подграфа),
3. хроматическое число графа не меньше k.

Следующие свойства являются убывающими:

Примеры

Пусть Γ — множество ребер графа K_n. Следующие свойства являются возрастающими:

1. граф связен,
2. граф содержит треугольник (или другой заданный граф в качестве подграфа),
3. хроматическое число графа не меньше k.

Следующие свойства являются убывающими:

1. граф планарен,
2. граф двудольный,
3. граф ацикличен.

Монотонность вероятности

Монотонность свойств полностью оправдывается леммой.

Лемма (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство подмножеств Γ. Тогда для любых $p_1 \leqslant p_2$ и $m_1 \leqslant m_2$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right),$$

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Монотонность вероятности

Монотонность свойств полностью оправдывается леммой.

Лемма (1.1)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— возрастающее свойство подмножеств* Γ*. Тогда для любых* $p_1 \leqslant p_2$ *и* $m_1 \leqslant m_2$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right),$$

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Для доказательства леммы воспользуемся следующим простым упражнением.

Упражнение (1.1)

Пусть $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$, а $\Gamma(p_1)$ и $\Gamma(p_2)$ — независимые случайные подмножества Γ. Тогда

$$\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p_2) \stackrel{d}{=} \Gamma(p).$$

Доказательство леммы 1.1

Положим $p_0 = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$. Рассмотрим $\Gamma(p_0)$ и $\Gamma(p_1)$ — независимые случайные подмножества Γ. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant |\text{возрастание } \mathcal{Q}| \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p_0) \vDash \mathcal{Q}\right) =$$

$$= |\text{упр. } 1.1| = \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Доказательство леммы 1.1

Положим $p_0 = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$. Рассмотрим $\Gamma(p_0)$ и $\Gamma(p_1)$ — независимые случайные подмножества Γ. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \left|\text{возрастание } \mathcal{Q}\right| \leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p_0) \vDash \mathcal{Q}\right) =$$

$$= \left|\text{упр. } 1.1\right| = \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Для равномерной модели рассмотрим случайный процесс $(\widetilde{\Gamma}(m), m = 0, \ldots, N)$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) = \mathsf{P}\left(\widetilde{\Gamma}(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant \left|\text{возрастание } \mathcal{Q}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\widetilde{\Gamma}(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right) = \mathsf{P}\left(\Gamma(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

$\square$

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Определение

Свойство $\mathcal{Q}$ подмножеств Γ называется выпуклым, если из того, что $A, B \in \mathcal{Q}$ и $A \subset C \subset B$, следует, что $C \in \mathcal{Q}$.

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Определение

Свойство $\mathcal{Q}$ подмножеств Γ называется выпуклым, если из того, что $A, B \in \mathcal{Q}$ и $A \subset C \subset B$, следует, что $C \in \mathcal{Q}$.

Примеры. Пусть Γ — множество ребер графа K_n.

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Определение

Свойство $\mathcal{Q}$ подмножеств Γ называется выпуклым, если из того, что $A, B \in \mathcal{Q}$ и $A \subset C \subset B$, следует, что $C \in \mathcal{Q}$.

Примеры. Пусть Γ — множество ребер графа K_n.

1. любое монотонное свойство является выпуклым;

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Определение

Свойство $\mathcal{Q}$ *подмножеств* Γ *называется выпуклым, если из того, что* $A, B \in \mathcal{Q}$ *и* $A \subset C \subset B$*, следует, что* $C \in \mathcal{Q}$.

Примеры. Пусть Γ — множество ребер графа K_n.

1. любое монотонное свойство является выпуклым;
2. свойство $\{$*граф содержит ровно* k *изолированных вершин*$\}$ является выпуклым, но не монотонным;

Выпуклые свойства

Помимо монотонных свойств в теории случайных подмножеств интерес представляют *выпуклые* свойства.

Определение

Свойство $\mathcal{Q}$ подмножеств Γ называется выпуклым, если из того, что $A, B \in \mathcal{Q}$ и $A \subset C \subset B$, следует, что $C \in \mathcal{Q}$.

Примеры. Пусть Γ — множество ребер графа K_n.

1. любое монотонное свойство является выпуклым;
2. свойство $\{$*граф содержит ровно k изолированных вершин*$\}$ является выпуклым, но не монотонным;
3. свойство $\{$*максимальная связная компонента в графе является деревом*$\}$ не является ни монотонным, ни выпуклым.

Асимптотическая эквивалентность моделей

Оказывается, что при $n \to \infty$ и $m \sim Np$ асимптотическое поведение вероятностей вида $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right)$ и $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right)$ является одним и тем же, и это во многих случаях позволяет ограничиваться рассмотрением только одной из моделей. Разберем этот феномен более детально.

Асимптотическая эквивалентность моделей

Оказывается, что при $n \to \infty$ и $m \sim Np$ асимптотическое поведение вероятностей вида $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right)$ и $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right)$ является одним и тем же, и это во многих случаях позволяет ограничиваться рассмотрением только одной из моделей. Разберем этот феномен более детально.

Итак, пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ задано множество $\Gamma(n)$ из $N = N(n)$ элементов, причем $N \to \infty$ при $n \to \infty$, и свойство $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(n)$ подмножеств $\Gamma(n)$. Пусть также заданы функции $p = p(n) \in [0,1]$ и $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$. Нас будет интересовать вопрос: при каких условиях из того, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty$$

вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty$$

и наоборот? Всюду далее для удобства мы будем опускать зависимость от n у последовательностей $\mathcal{Q}$, N, m, p.

Первая лемма об эквивалентности

Первый результат в этом направлении сформулирован в следующей лемме.

Лемма (1.2)

Пусть $\mathcal{Q}$ *— произвольное свойство подмножеств* $\Gamma(n)$ *и* $a \in [0,1]$ *— фиксированная константа. Пусть также задана функция* $p = p(n) \in (0,1)$*. Если для любой последовательности* $m = m(n)$ *такой, что* $m = Np + O(\sqrt{Npq})$*, где* $q = 1 - p$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство леммы 1.2

Пусть $C > 0$ — некоторая большая константа, тогда введем для каждого n множество

$$\mathcal{M}(C) = \left\{ m : |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq} \right\}.$$

Доказательство леммы 1.2

Пусть $C > 0$ — некоторая большая константа, тогда введем для каждого n множество

$$\mathcal{M}(C) = \left\{ m : |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq} \right\}.$$

Обозначим

$$m_* = \arg \min_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right),$$

$$m^* = \arg \max_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

Доказательство леммы 1.2

Пусть $C > 0$ — некоторая большая константа, тогда введем для каждого n множество

$$\mathcal{M}(C) = \left\{ m : |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq} \right\}.$$

Обозначим

$$m_* = \arg \min_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right),$$

$$m^* = \arg \max_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right).$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q}\right) = \sum_{m=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q} \middle| |\Gamma(n, p)| = m\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, p)| = m\right) = |\text{упр.}|$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n, p)| = m\right) \geqslant$$

Доказательство леммы 1.2

$$\geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \geqslant$$

Доказательство леммы 1.2

$$\geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) =$$

Доказательство леммы 1.2

$$\geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right).$$

Доказательство леммы 1.2

$$\geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right).$$

По условию леммы $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a$ при $n \to \infty$. Оцените второй множитель.

Доказательство леммы 1.2

$$\geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \sum_{m \in \mathcal{M}(C)} \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right).$$

По условию леммы $\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m_*) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a$ при $n \to \infty$. Оценим второй множитель. Для этого заметим, что $|\Gamma(n,p)|$ имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}(N,p)$, поэтому по неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \notin \mathcal{M}(C)\right) = \mathsf{P}\left(\left||\Gamma(n,p)| - Np\right| \geqslant C\sqrt{Npq}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathsf{D}(|\Gamma(n,p)|)}{C^2(Npq)} = \frac{1}{C^2}.$$

Доказательство леммы 1.2

Значит,

$$\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right) \geqslant 1 - \frac{1}{C^2}.$$

Отсюда,

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a\left(1 - \frac{1}{C^2}\right).$$

Доказательство леммы 1.2

Значит,

$$\mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right) \geqslant 1 - \frac{1}{C^2}.$$

Отсюда,

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant a\left(1 - \frac{1}{C^2}\right).$$

Совершенно аналогично получаем оценку сверху:

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) = \sum_{m=0}^{N} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| = m\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m^*) \vDash \mathcal{Q}\right) \cdot \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \in \mathcal{M}(C)\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \notin \mathcal{M}(C)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m^*) \vDash \mathcal{Q}\right) + \mathsf{P}\left(|\Gamma(n,p)| \notin \mathcal{M}(C)\right).$$

Доказательство леммы 1.2

Отсюда,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) \leqslant a + \frac{1}{C^2}.$$

Доказательство леммы 1.2

Отсюда,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant a + \frac{1}{C^2}.$$

В силу произвольности $C > 0$ получаем искомое соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) = a.$$

$\square$

Обратные соотношения

К сожалению, в обратную сторону (от биномиальной к равномерной модели) подобного утверждения в общем случае доказать нельзя.

Обратные соотношения

К сожалению, в обратную сторону (от биномиальной к равномерной модели) подобного утверждения в общем случае доказать нельзя. В качестве контрпримера можно взять свойство

$$\mathcal{Q} = \{\text{подмножество состоит ровно из } m \text{ элементов}\}$$

при фиксированном m. Действительно, в этом случае

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}\right) = 1,$$

а при любом фиксированном $c > 0$ и $p \sim c/N$ будет выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}\right) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} \sim \frac{c^m}{m!} e^{-c} < 1.$$

Обратные соотношения

Если же ограничиться только монотонными свойствами, то можно доказать следующее утверждение (само доказательство схоже с доказательством леммы 1.2 и мы оставляем его слушателям в качестве упражнения в домашнем задании).

Обратные соотношения

Если же ограничиться только монотонными свойствами, то можно доказать следующее утверждение (само доказательство схоже с доказательством леммы 1.2 и мы оставляем его слушателям в качестве упражнения в домашнем задании).

Лемма (1.3)

Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $a \in [0,1]$ — фиксированная константа, а $m = m(n) \in \overline{[0,N]}$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием $p = m/N + O\left(\sqrt{m(N-m)/N^3}\right)$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \text{ при } n \to \infty.$$