

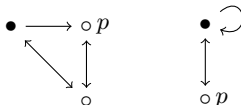
Основы модальной логики, лекция 4

Кудинов А.В.

6 октября 2025 г.

Разбор задания на дом

1. Постройте бисимуляцию между следующими моделями так, чтобы черные точки соединялись:

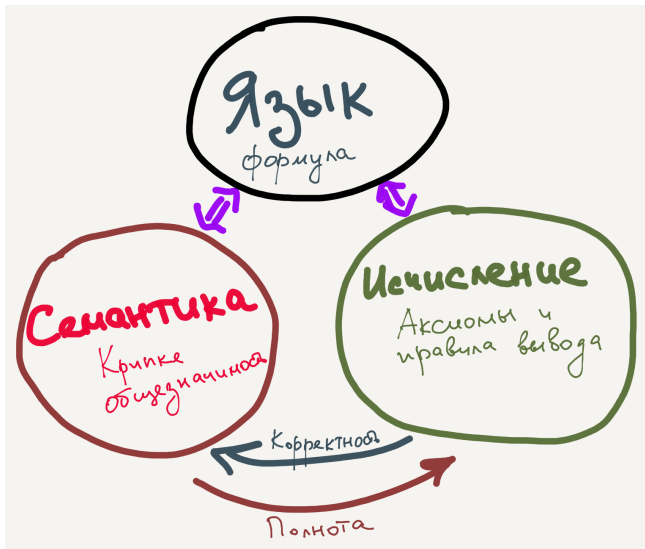


2. Докажите, что не существует бисимуляции, соединяющей черные точки, между следующими моделями



3. Докажите, что свойство «двудольности» (множество W разбивается на два подмножества таких, что нет стрелок внутри этих подмножеств) модально неопределимо.

4. Попробуйте написать формулу, выражающую, что шкала транзитивна и из любой точки видна рефлексивная точка, которая видит только себя.
5. Рассмотрим шкалы $F = (\mathbb{N}, <)$ и $G = (W, R)$, где $W = \{1, 2\}$ и $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Существует ли р-морфизм из F в G ?
6. Докажите, что логики шкал $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$ совпадают.
7. Докажите, что шкалы $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$ модально различимы (их логики отличаются).



Нормальной модальной логикой называется подмножество формул $L \subseteq \mathcal{ML}$, если

- ❶ L содержит все классические тавтологии;
- ❷ L замкнуто относительно правил

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B} \quad (MP) \quad \text{Modus Ponens;}$$

$$\frac{A}{\Box A} \quad (\rightarrow \Box) \quad \text{правило обобщения;}$$

$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub) \quad \text{правило подстановки;}$$

- ❸ L содержит модальные аксиомы нормальности:

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \quad (AK)$$

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком \vdash .

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком \vdash .

$p \rightarrow (p \vee q)$	тавтология
$\Box(p \rightarrow (p \vee q))$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(AK)
$\Box(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(p \vee q))$	(Sub)
$\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$	(MP)

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком \vdash .

$p \rightarrow (p \vee q)$	тавтология
$\Box(p \rightarrow (p \vee q))$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(AK)
$\Box(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(p \vee q))$	(Sub)
$\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$	(MP)
$\vdash \Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$	

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Пример.

Возьмем $\Gamma = \{\Box\bot\}$

$\bot \rightarrow p$	тавтология
$\Box(\bot \rightarrow p)$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(AK)
$\Box(\bot \rightarrow p) \rightarrow (\Box\bot \rightarrow \Box p)$	(Sub)
$\Box\bot \rightarrow \Box p$	(MP)
$\Box\bot$	$\in \Gamma$
$\Box p$	(MP)

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Пример.

Возьмем $\Gamma = \{\Box\perp\}$

$\perp \rightarrow p$	тавтология
$\Box(\perp \rightarrow p)$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(AK)
$\Box(\perp \rightarrow p) \rightarrow (\Box\perp \rightarrow \Box p)$	(Sub)
$\Box\perp \rightarrow \Box p$	(MP)
$\Box\perp$	$\in \Gamma$
$\Box p$	(MP)

$\Gamma \vdash \Box p$ или $\Box\perp \vdash \Box p$
(фигурные скобки обычно опускаются)

Модальная логика — тоже множество формул.
Можно писать

$$L \vdash A$$

Модальная логика — тоже множество формул.

Можно писать

$$L \vdash A$$

Но, т.к. модальная логика замкнута относительно правил вывода и содержит необходимые аксиомы, то

$$L \vdash A \iff A \in L$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K .

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K .

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $L \cup \Gamma$ обозначают $L + \Gamma$.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K .

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $L \cup \Gamma$ обозначают $L + \Gamma$.

Заметим, что

$$L + \Gamma = \{A \mid L \cup \Gamma \vdash A\}$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K .

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $L \cup \Gamma$ обозначают $L + \Gamma$.

Заметим, что

$$L + \Gamma = \{A \mid L \cup \Gamma \vdash A\}$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

1) Докажем, что $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

1) Докажем, что $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

1) Докажем, что $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

3) Пусть V — оценка, определим $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$ тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

1) Докажем, что $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

3) Пусть V — оценка, определим $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$ тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

Из этого следует, что если $F \not\models A$, то $F \not\models [B/p]A$.



Следствие

Пусть \mathcal{C} — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Следствие

Пусть \mathcal{C} — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Логика L называется **полной** (по Крипке), если существует класс шкал \mathcal{C} , т.ч. $L = Log(\mathcal{C})$.

Примеры логик

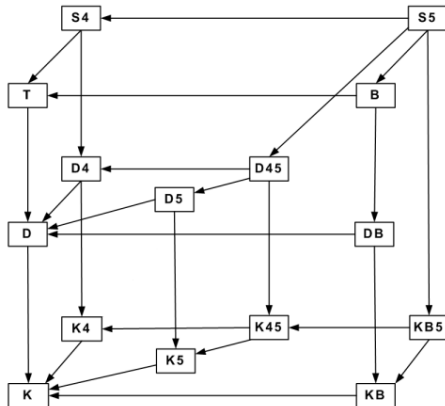
Определим несколько логик:

$$\begin{aligned}T &\Rightarrow K + AT \\D &\Rightarrow K + \Diamond T \\KB &\Rightarrow K + AB \\S5 &\Rightarrow S4 + AB\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K4 &\Rightarrow K + A4 \\D4 &\Rightarrow D + A4 \\S4 &\Rightarrow K4 + AT \\L5 &\Rightarrow L + A5\end{aligned}$$

Предложение

Все включения на следующем рисунке верны и строги



Наша дальнейшая цель доказать теорему о канонической модели, из которой будет следовать полнота.

Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L .

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A :

$S \triangleright_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L , либо принадлежит S , либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.

Т. е. правила $(\rightarrow \Box)$ и (Sub) исключаются.

Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L .

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A :

$S \triangleright_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L , либо принадлежит S , либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.

Т. е. правила $(\rightarrow \Box)$ и (Sub) исключаются.

Т.к. мы ограничили себя только правилом MP, то можно доказать:

Лемма (о дедукции)

$$S \cup \{A\} \triangleright_L B \iff S \triangleright_L A \rightarrow B.$$

Заметим, что для модального \vdash лемма о дедукции не верна.

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ❶ $S \triangleright_L A$;
- ❷ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \triangleright_L A$;
- ❸ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$.

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ❶ $S \triangleright_L A$;
- ❷ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \triangleright_L A$;
- ❸ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$.

Доказательство.

1. \Leftrightarrow 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ❶ $S \triangleright_L A$;
- ❷ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \triangleright_L A$;
- ❸ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$.

Доказательство.

1. \Leftrightarrow 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

2. \Leftrightarrow 3.

$$S_0 \triangleright_L A \Leftrightarrow \triangleright_L \bigwedge S_0 \rightarrow A \Leftrightarrow L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A.$$



L -полная теория

Опр

Теорией мы будем называть множество формул. Теория S называется **L -противоречивой**, если $S \supset_L \perp$. Или, эквивалентно, если существует конечное подмножество формул $S_0 \subseteq S$ $L \vdash \neg \bigwedge S_0$.

Соответственно, теория S называется **L -непротиворечивой**, если $S \not\supset_L \perp$. И, эквивалентно, если для любого конечного подмножества формул $S_0 \subseteq S$ $L \not\vdash \neg \bigwedge S_0$.

S — **L -полная теория**, если S — максимальная непротиворечивая теория.

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \supset_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.
- ❺ $(A \vee B) \in S \Leftrightarrow (A \in S \text{ или } B \in S)$.
- ❻ $(A \wedge B) \in S \Leftrightarrow (A \in S \text{ и } B \in S)$.

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \rightarrow \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S .

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ❶ $\perp \notin S$.
- ❷ $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ❸ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ❹ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \rightarrow \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S .

Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ① $\perp \notin S$.
- ② $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ③ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ④ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \rightarrow \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S .

Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть $(A \rightarrow B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens $S \triangleright_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ① $\perp \notin S$.
- ② $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ③ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ④ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \rightarrow \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S .

Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть $(A \rightarrow B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens $S \triangleright_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.

(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \rightarrow B) \in S$.

Лемма

Пусть S — L -полная теория, тогда

- ① $\perp \notin S$.
- ② $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
- ③ $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
- ④ $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$.

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \rightarrow \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S .

Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть $(A \rightarrow B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens $S \triangleright_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.

(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \rightarrow B) \in S$.

(iii) Пусть $B \in S$, $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ — тавтология, по (MP) получаем

$(A \rightarrow B) \in S$.



Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n . Это противоречит построению S_n .

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n . Это противоречит построению S_n .

S' — максимально,

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L -непротиворечива, тогда существует L -полное расширение этой теории S' .

\mathcal{ML} счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n . Это противоречит построению S_n .

S' — максимально, а значит полно. □

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{множество всех полных теорий,} \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{множество всех полных теорий,} \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L .

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{множество всех полных теорий,} \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L .

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

- ❶ $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
- ❷ $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \text{ \& } y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \text{ \& } B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \text{ \& } \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \text{ \& } B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

$$\triangleright_L C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow (\neg B \rightarrow \perp)) \dots) \Leftrightarrow$$

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y (x R_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

$$\triangleright_L C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow (\neg B \rightarrow \perp) \dots) \Leftrightarrow$$

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$, то по (МР) $\Box B \in x$ — противоречие.

Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L -полное множество y содержащее Γ . По определению

$$x R_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. (\Rightarrow) следует из пункта 2 леммы 0.8.

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$, то по (МР) $\Box B \in x$ — противоречие.

Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L -полное множество y содержащее Γ . По определению

$$x R_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. (\Rightarrow) следует из пункта 2 леммы 0.8.

(\Leftarrow) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L -полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$, то по (МР) $\Box B \in x$ — противоречие.

Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L -полное множество y содержащее Γ . По определению

$$x R_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. (\Rightarrow) следует из пункта 2 леммы 0.8.

(\Leftarrow) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L -полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

Что и требовалось доказать. :-)

