

Случайные графы. Лекция 16.09. Малые подграфы в случайном графе. Метод моментов

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

16.09.2025

Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели $G(n, p)$.

Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели $G(n, p)$. И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов $G(n, p)$, изоморфных фиксированному графу H .

Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели $G(n, p)$. И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов $G(n, p)$, изоморфных фиксированному графу H .

Замечание

Мы будем обсуждать только случай неиндуктированных и *unlabelled* подграфов, изоморфных H . Такие подграфы также будем называть копиями H в $G(n, p)$.

Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели $G(n, p)$. И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов $G(n, p)$, изоморфных фиксированному графу H .

Замечание

Мы будем обсуждать только случай неиндуктированных и *unlabelled* подграфов, изоморфных H . Такие подграфы также будем называть копиями H в $G(n, p)$.

Обозначим через $X_n(H) = X_n(H, p)$ число таких подграфов в $G(n, p)$.

Сформулируем основные вопросы, которые мы планируем исследовать:

- какова пороговая вероятность для свойства $G(n, p)$ содержит копию H ?
- каково предельное распределение случайной величины $X_n(H)$ при различных $p = p(n)$?

Изучение начнем с ответа на первый вопрос, с вопроса о пороговой вероятности вхождения H в $G(n, p)$.

Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

Метод первого момента. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных величин, принимающих значения в \mathbb{Z}_+ . Тогда

$$\mathbb{P}(X_n > 0) \leq \mathbb{E}X_n,$$

и если $\mathbb{E}X_n \rightarrow 0$, то $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ или $\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow 1$.

Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

Метод первого момента. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных величин, принимающих значения в \mathbb{Z}_+ . Тогда

$$\mathsf{P}(X_n > 0) \leqslant \mathsf{E}X_n,$$

и если $\mathsf{E}X_n \rightarrow 0$, то $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ или $\mathsf{P}(X_n = 0) \rightarrow 1$.

Метод второго момента. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных величин, принимающих значения в \mathbb{Z}_+ . Тогда по неравенству Чебышёва

$$\mathsf{P}(X_n = 0) \leqslant \mathsf{P}(|X_n - \mathsf{E}X_n| \geqslant \mathsf{E}X_n) \leqslant \frac{\mathsf{D}X_n}{(\mathsf{E}X_n)^2},$$

и если $\mathsf{D}X_n = o((\mathsf{E}X_n)^2)$, то $\mathsf{P}(X_n = 0) \rightarrow 0$.

Плотность графа

Пусть теперь H — некоторый фиксированный граф с v вершинами и e ребрами, $\epsilon > 0$.

Плотность графа

Пусть теперь H — некоторый фиксированный граф с v вершинами и e ребрами, $e > 0$.

Определение

Плотностью $\rho(H)$ графа H называется отношение числа его ребер к числу вершин:

$$\rho(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{e}{v}.$$

Через $m(H)$ обозначим максимальную плотность подграфов графа H :

$$m(H) = \max\{\rho(F) : F \subseteq H, |V(F)| > 0\}.$$

Плотность графа

Пусть теперь H — некоторый фиксированный граф с v вершинами и e ребрами, $e > 0$.

Определение

Плотностью $\rho(H)$ графа H называется отношение числа его ребер к числу вершин:

$$\rho(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{e}{v}.$$

Через $m(H)$ обозначим максимальную плотность подграфов графа H :

$$m(H) = \max\{\rho(F) : F \subseteq H, |V(F)| > 0\}.$$

Определение

Если $\rho(H) = m(H)$, то граф H называется сбалансированным.

Если $\rho(H) > \rho(F)$ для любого подграфа $F \subset H, F \neq H$, то граф H называется строго сбалансированным.

Примеры

Приведем некоторые примеры.

Примеры

Приведем некоторые примеры.

- ➊ Полный граф K_n — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{2}$.

Примеры

Приведем некоторые примеры.

- ① Полный граф K_n — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{2}$.
- ② Полный граф K_n с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$ меньше плотности K_n .

Примеры

Приведем некоторые примеры.

- ① Полный граф K_n — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{2}$.
- ② Полный граф K_n с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$ меньше плотности K_n .
- ③ Цикл C_n — строго сбалансированный граф с плотностью 1.

Примеры

Приведем некоторые примеры.

- ① Полный граф K_n — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{2}$.
- ② Полный граф K_n с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$ меньше плотности K_n .
- ③ Цикл C_n — строго сбалансированный граф с плотностью 1.
- ④ Дерево на n вершинах — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{n}$.

Примеры

Приведем некоторые примеры.

- ① Полный граф K_n — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{2}$.
- ② Полный граф K_n с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$ меньше плотности K_n .
- ③ Цикл C_n — строго сбалансированный граф с плотностью 1.
- ④ Дерево на n вершинах — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{n-1}{n}$.
- ⑤ Унициклический граф на n вершинах, не являющийся циклом, является сбалансированным графом, но не строго сбалансированным.

Автоморфизмы графа

Определение

Пусть $H = (V, E)$ — граф, биекция $\sigma : V \rightarrow V$ называется автоморфизмом, если для любых $u, w \in V$ выполнено $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$.
Размер группы автоморфизмов графа H обозначается через $\text{aut}(H)$.

Автоморфизмы графа

Определение

Пусть $H = (V, E)$ — граф, биекция $\sigma : V \rightarrow V$ называется автоморфизмом, если для любых $u, w \in V$ выполнено $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$.

Размер группы автоморфизмов графа H обозначается через $\text{aut}(H)$.

Примеры.

Автоморфизмы графа

Определение

Пусть $H = (V, E)$ — граф, биекция $\sigma : V \rightarrow V$ называется автоморфизмом, если для любых $u, w \in V$ выполнено $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$.
Размер группы автоморфизмов графа H обозначается через $\text{aut}(H)$.

Примеры.

- 1 $\text{aut}(K_n) = n!$.

Автоморфизмы графа

Определение

Пусть $H = (V, E)$ — граф, биекция $\sigma : V \rightarrow V$ называется автоморфизмом, если для любых $u, w \in V$ выполнено $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$.
Размер группы автоморфизмов графа H обозначается через $\text{aut}(H)$.

Примеры.

① $\text{aut}(K_n) = n!$.

② $\text{aut}(K_{a,b}) = \begin{cases} a!b!, & \text{если } a \neq b, \\ 2(a!)^2, & \text{если } a = b. \end{cases}$

Автоморфизмы графа

Определение

Пусть $H = (V, E)$ — граф, биекция $\sigma : V \rightarrow V$ называется автоморфизмом, если для любых $u, w \in V$ выполнено $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$.
Размер группы автоморфизмов графа H обозначается через $\text{aut}(H)$.

Примеры.

- ① $\text{aut}(K_n) = n!$.
- ② $\text{aut}(K_{a,b}) = \begin{cases} a!b!, & \text{если } a \neq b, \\ 2(a!)^2, & \text{если } a = b. \end{cases}$
- ③ $\text{aut}(C_n) = 2n$.

Пороговая вероятность наличия копии H

Теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа H в случайный граф $G(n, p)$ доказали Эрдеш, Ренни (1960, для сбалансированных графов) и Боллобаш (1981, общий случай). Для доказательства теоремы мы применим методы первого и второго момента, а начнем с оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины $X_n(H)$.

Пороговая вероятность наличия копии H

Теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа H в случайный граф $G(n, p)$ доказали Эрдеш, Ренни (1960, для сбалансированных графов) и Боллобаш (1981, общий случай). Для доказательства теоремы мы применим методы первого и второго момента, а начнем с оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины $X_n(H)$.

Пусть график H имеет v_H вершин и e_H ребер.

Лемма (2.1)

$$\mathbb{E}X_n(H) = \frac{n(n-1)\dots(n-v_H+1)}{\text{aut}(H)} p^{e_H} = \Theta(n^{v_H} p^{e_H}).$$

Доказательство леммы 2.1

Достаточно заметить, что в полном графе K_n есть ровно

$$f(n, H) = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{\text{aut}(H)}$$

подграфов, изоморфных H , а вероятность вхождения каждого из них в $G(n, p)$ равна p^{e_H} .

□

Пороговая вероятность наличия копии H

Для оценки дисперсии $X_n(H)$ введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{E X_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0\}.$$

Пороговая вероятность наличия копии H

Для оценки дисперсии $X_n(H)$ введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{ \mathbb{E} X_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0 \}.$$

Ясно, что по лемме 2.1

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F},$$

где $v_F = |V(F)|$, $e_F = |E(F)|$.

Пороговая вероятность наличия копии H

Для оценки дисперсии $X_n(H)$ введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{ \mathbb{E}X_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0 \}.$$

Ясно, что по лемме 2.1

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F},$$

где $v_F = |V(F)|$, $e_F = |E(F)|$. Следующая лемма дает представление о порядке дисперсии случайной величины $X_n(H)$ в терминах функции Φ_H .

Лемма (2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{D}X_n(H) &\asymp (1-p) \sum_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} \asymp \\ &\asymp (1-p) \sum_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} \frac{(\mathbb{E}X_n(H))^2}{\mathbb{E}X_n(F)} \asymp (1-p) \frac{(\mathbb{E}X_n(H))^2}{\Phi_H}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.2

Пусть H' — подграф K_n , изоморфный H . Обозначим через $I_{H'} = \mathbb{I}\{H' \subset G(n, p)\}$. Заметим, что если H' и H'' не имеют общих ребер, то случайные величины $I_{H'}$ и $I_{H''}$ — независимы.

Доказательство леммы 2.2

Пусть H' — подграф K_n , изоморфный H . Обозначим через $I_{H'} = \mathbb{I}\{H' \subset G(n, p)\}$. Заметим, что если H' и H'' не имеют общих ребер, то случайные величины $I_{H'}$ и $I_{H''}$ — независимы.

Для любого подграфа $F \subseteq H$ существует $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$ таких пар (H', H'') , что пересечение $H' \cap H''$ изоморфно F . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subset K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

Доказательство леммы 2.2

Пусть H' — подграф K_n , изоморфный H . Обозначим через $I_{H'} = \mathbb{I}\{H' \subset G(n, p)\}$. Заметим, что если H' и H'' не имеют общих ребер, то случайные величины $I_{H'}$ и $I_{H''}$ — независимы.

Для любого подграфа $F \subseteq H$ существует $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$ таких пар (H', H'') , что пересечение $H' \cap H''$ изоморфно F . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subset K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

$$\mathrm{DX}_n(H) = \mathrm{cov}(X_n(H), X_n(H)) = \sum_{H', H''} \mathrm{cov}(I_{H'}, I_{H''}) =$$

Доказательство леммы 2.2

Пусть H' — подграф K_n , изоморфный H . Обозначим через $I_{H'} = \mathbb{I}\{H' \subset G(n, p)\}$. Заметим, что если H' и H'' не имеют общих ребер, то случайные величины $I_{H'}$ и $I_{H''}$ — независимы.

Для любого подграфа $F \subseteq H$ существует $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$ таких пар (H', H'') , что пересечение $H' \cap H''$ изоморфно F . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subset K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

$$\text{DX}_n(H) = \text{cov}(X_n(H), X_n(H)) = \sum_{H', H''} \text{cov}(I_{H'}, I_{H''}) =$$

$$= \sum_{\substack{H', H'' \\ E(H') \cap E(H'') \neq \emptyset}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) =$$

(перегруппируем сумму)

Доказательство леммы 2.2

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) =$$

Доказательство леммы 2.2

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) = \\ &= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p^{e_F}) \asymp \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.2

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) =$$

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p^{e_F}) \asymp$$

(пользуемся тем, что $1 - p^{e_F} \asymp 1 - p$)

$$\asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p) \asymp (1 - p) n^{2v_H} p^{2e_H} \frac{1}{\min_{F \subseteq H} n^{v_F} p^{e_F}} \asymp$$

$$\asymp (1 - p) \frac{(\mathbb{E} X_n(H))^2}{\Phi_H}.$$

□

Пороговая вероятность наличия копии H

Теперь мы готовы доказать теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа H в случайный граф $G(n, p)$. Всюду далее будем писать, что $G(n, p) \models H$, если в $G(n, p)$ нашелся подграф, изоморфный H .

Пороговая вероятность наличия копии H

Теперь мы готовы доказать теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа H в случайный граф $G(n, p)$. Всюду далее будем писать, что $G(n, p) \models H$, если в $G(n, p)$ нашелся подграф, изоморфный H .

Теорема (2.1)

Пусть H — непустой граф. Функция $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(H)}}$ является пороговой вероятностью для свойства наличия копии H в $G(n, p)$.

Доказательство теоремы 2.1

Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда возьмем такой подграф $F \subseteq H$, что $\rho(F) = m(H)$.

Доказательство теоремы 2.1

Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда возьмем такой подграф $F \subseteq H$, что $\rho(F) = m(H)$. Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models H) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \models F) = \mathbb{P}(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq \mathbb{E} X_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta((np^{m(H)})^{v_F}) = o(1). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.1

Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда возьмем такой подграф $F \subseteq H$, что $\rho(F) = m(H)$. Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models H) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \models F) = \mathbb{P}(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq \mathbb{E}X_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta((np^{m(H)})^{v_F}) = o(1). \end{aligned}$$

Пусть теперь $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда для любого подграфа $F \subseteq H$ по лемме 2.1 выполнено

$$\mathbb{E}X_n(F) \asymp n^{v_F} p^{e_F} = (np^{\rho(F)})^{v_F} \geq (np^{m(H)})^{v_F} \rightarrow +\infty.$$

Значит, и $\Phi_H \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.1

Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда возьмем такой подграф $F \subseteq H$, что $\rho(F) = m(H)$. Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models H) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \models F) = \mathbb{P}(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq \mathbb{E}X_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta((np^{m(H)})^{v_F}) = o(1). \end{aligned}$$

Пусть теперь $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(H)}})$. Тогда для любого подграфа $F \subseteq H$ по лемме 2.1 выполнено

$$\mathbb{E}X_n(F) \asymp n^{v_F} p^{e_F} = (np^{\rho(F)})^{v_F} \geq (np^{m(H)})^{v_F} \rightarrow +\infty.$$

Значит, и $\Phi_H \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно лемме 2.2 получаем

$$\mathbb{P}(G(n, p) \not\models H) = \mathbb{P}(X_n(H) = 0) \leq \frac{\mathbb{D}X_n(H)}{(\mathbb{E}X_n(H))^2} = O\left(\frac{1}{\Phi_H}\right) = o(1).$$

Примеры

Примеры. Пусть $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$ — пороговая вероятность появления H в случайному графе $G(n, p)$. Тогда

Примеры

Примеры. Пусть $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$ — пороговая вероятность появления H в случайном графе $G(n, p)$. Тогда

- ① если $H = K_m$, то $\hat{p} = n^{-2/(m-1)}$,
- ② если $H = C_m$, то $\hat{p} = n^{-1}$,
- ③ если $H = K_{a,b}$, то $\hat{p} = n^{-(a+b)/ab}$.

Примеры

Примеры. Пусть $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$ — пороговая вероятность появления H в случайному графе $G(n, p)$. Тогда

- ① если $H = K_m$, то $\hat{p} = n^{-2/(m-1)}$,
- ② если $H = C_m$, то $\hat{p} = n^{-1}$,
- ③ если $H = K_{a,b}$, то $\hat{p} = n^{-(a+b)/ab}$.

В целом, теорема показывает, что появление графа H в $G(n, p)$ происходит одновременно с его наиболее плотным подграфом.

Немного о функции Φ_H

Функция Φ_H играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа H в $G(n, p)$. В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

Немного о функции Φ_H

Функция Φ_H играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа H в $G(n, p)$. В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

Теорема (2.2)

Для любого непустого графа H выполнено

$$e^{-\Phi_H/(1-p)} \leq P(G(n, p) \not\models H) \leq e^{-\Theta(\Phi_H)}.$$

Немного о функции Φ_H

Функция Φ_H играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа H в $G(n, p)$. В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

Теорема (2.2)

Для любого непустого графа H выполнено

$$e^{-\Phi_H/(1-p)} \leq P(G(n, p) \not\models H) \leq e^{-\Theta(\Phi_H)}.$$

Доказательство теоремы довольно несложное, но требует некоторых вероятностных инструментов, которые мы будем изучать позднее в нашем курсе, поэтому мы оставим ее без доказательства.

Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$, например при $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение $X_n(H)$ является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$, например при $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение $X_n(H)$ является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

Теорема

Пусть H — строго сбалансированный граф и $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $X_n(H) \xrightarrow{d} \text{Pois}(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\text{aut}(H)}$.

Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$, например при $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение $X_n(H)$ является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

Теорема

Пусть H — строго сбалансированный граф и $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $X_n(H) \xrightarrow{d} \text{Pois}(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\text{aut}(H)}$.

Для доказательства теоремы нам понадобиться некоторые сведения из теории слабой сходимости.

Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

Определение

Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходятся по распределению к случайной величине X ($X_n \xrightarrow{d} X$), если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ выполнено

$$\mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X).$$

Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

Определение

Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходятся по распределению к случайной величине X ($X_n \xrightarrow{d} X$), если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ выполнено

$$\mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X).$$

Теорема

Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходятся по распределению к случайной величине X тогда и только тогда, когда для любой x — точки непрерывности функции распределения случайной величины X , выполнено

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

Определение

Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходятся по распределению к случайной величине X ($X_n \xrightarrow{d} X$), если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ выполнено

$$\mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X).$$

Теорема

Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходятся по распределению к случайной величине X тогда и только тогда, когда для любой x — точки непрерывности функции распределения случайной величины X , выполнено

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Из курса же теории вероятностей мы также знаем, что сходимость по распределению эквивалентна поточечной сходимости характеристических функций.

Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть (\mathcal{S}, ρ) — метрическое пространство.

Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть (\mathcal{S}, ρ) — метрическое пространство.

Определение

Борелевской сигма-алгеброй, $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, на (\mathcal{S}, ρ) называется минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества в \mathcal{S} .

Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть (\mathcal{S}, ρ) — метрическое пространство.

Определение

Борелевской сигма-алгеброй, $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, на (\mathcal{S}, ρ) называется минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества в \mathcal{S} .

Определение

Пусть задано метрическое пространство (\mathcal{S}, ρ) и последовательность $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ вероятностных мер на $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$. Будем говорить, что Q_n слабо сходятся к вероятностной мере Q на $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f: \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f(x) Q_n(dx) = \int_{\mathcal{S}} f(x) Q(dx).$$

Обозначение: $Q_n \xrightarrow{w} Q$.

Теорема Александрова

Теорема (А.Д. Александров)

Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ и Q — вероятностные меры на метрическом пространстве (\mathcal{S}, ρ) . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- ① $Q_n \xrightarrow{w} Q$,
- ② $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} Q_n(F) \leq Q(F)$ для любого замкнутого множества $F \subset \mathcal{S}$,
- ③ $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} Q_n(G) \geq Q(G)$ для любого открытого множества $G \subset \mathcal{S}$,
- ④ Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ такого, что $Q(\partial B) = 0$, выполнено $Q_n(B) \rightarrow Q(B)$ при $n \rightarrow \infty$.

Плотность и относительная компактность

Нам понадобятся еще два определения.

Нам понадобятся еще два определения.

Определение

Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на метрическом пространстве \mathcal{S} называется плотным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$, что для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$Q_\alpha(\mathcal{S} \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Плотность и относительная компактность

Нам понадобятся еще два определения.

Определение

Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на метрическом пространстве \mathcal{S} называется **плотным**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$, что для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$Q_\alpha(\mathcal{S} \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Определение

Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на метрическом пространстве \mathcal{S} называется **относительно компактным**, если из любой последовательности $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

Теорема (Ю.В. Прохоров)

Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на полном сепарабельном метрическом пространстве S является плотным тогда и только тогда, когда оно является относительно компактным.

Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

Теорема (Ю.В. Прохоров)

Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на полном сепарабельном метрическом пространстве \mathcal{S} является плотным тогда и только тогда, когда оно является относительно компактным.

Для доказательства слабой сходимости в конкретных задачах удобным является следующее следствие из теоремы Прохорова.

Следствие (2.1)

Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве \mathcal{S} . Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере Q , то $Q_n \xrightarrow{w} Q$.

Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удается считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удается считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

Определение

Пусть для случайной величины X определены все целые моменты $\mathbb{E}X^k, k \in \mathbb{N}$. Тогда распределение X однозначно определяется своими моментами, если из равенства $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, следует, что $X \stackrel{d}{=} Y$.

Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удается считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

Определение

Пусть для случайной величины X определены все целые моменты $\mathbb{E}X^k, k \in \mathbb{N}$. Тогда распределение X однозначно определяется своими моментами, если из равенства $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, следует, что $X \stackrel{d}{=} Y$.

Какие же распределения однозначно определяются своими моментами? Частичный ответ дает следующая лемма.

Лемма (2.3)

Пусть случайная величина X такова, что математическое ожидание $\mathbb{E}e^{tX}$ конечно в некоторой окрестности нуля $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда распределение X однозначно определяется своими моментами.

Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ как функцию комплексного переменного, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ как функцию комплексного переменного, $z \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^k}{k!} z^k.$$

Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ как функцию комплексного переменного, $z \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^k}{k!} z^k.$$

Пусть случайная величина Y имеет те же моменты, что и X . Проверим, что $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$ также конечна в при $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Заметим, что при вещественном $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$e^{zY} \leq 2 \cosh(zY) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zY)^{2k}}{(2k)!}.$$

Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ как функцию комплексного переменного, $z \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} X^k}{k!} z^k.$$

Пусть случайная величина Y имеет те же моменты, что и X . Проверим, что $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$ также конечна в при $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Заметим, что при вещественном $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$e^{zY} \leq 2 \cosh(zY) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zY)^{2k}}{(2k)!}.$$

По теореме о монотонной сходимости

$$\mathbb{E} \cosh(zY) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} Y^{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} X^{2k}}{(2k)!} z^{2k} < +\infty$$

для всех $|z| < \varepsilon$.

Доказательство леммы 2.3

Тогда $f_Y(z) = Ee^{zY}$ тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$.

Доказательство леммы 2.3

Тогда $f_Y(z) = Ee^{zY}$ тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Функции $f_X(z)$ и $f_Y(z)$ — аналитические, совпадающие на вещественной прямой в окрестности нуля. По теореме единственности они совпадают во всей полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ и, в частности, на прямой $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Доказательство леммы 2.3

Тогда $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$ тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$. Функции $f_X(z)$ и $f_Y(z)$ — аналитические, совпадающие на вещественной прямой в окрестности нуля. По теореме единственности они совпадают во всей полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ и, в частности, на прямой $\operatorname{Re}(z) = 0$. Следовательно,

$$\mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{itY}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. у X и Y совпадают характеристические функции. Стало быть, $X \stackrel{d}{=} Y$. \square

Примеры

Примеры распределений, однозначно определяемых своими моментами.

Примеры

Примеры распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- 1 Любой распределение с ограниченным носителем.

Примеры

Примеры распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- ① Любое распределение с ограниченным носителем.
- ② экспоненциальное, нормальное, гамма, пуассоновское и любые другие распределения с “экспоненциально убывающими хвостами”.

Примеры

Примеры распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- ① Любое распределение с ограниченным носителем.
- ② экспоненциальное, нормальное, гамма, пуассоновское и любые другие распределения с “экспоненциально убывающими хвостами”.

Не все распределения однозначно определяются своими моментами.

Примером распределения, для которого существует другое с теми же моментами, является распределение случайной величины ζ^3 , где ζ имеет стандартное нормальное распределение.

Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению.

Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению. Критерием же того, когда сходимость по распределению влечет сходимость математических ожиданий, является понятие равномерной интегрируемости.

Определение

Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha I\{|\xi_\alpha| > c\}|) = 0.$$

Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению. Критерием же того, когда сходимость по распределению влечет сходимость математических ожиданий, является понятие равномерной интегрируемости.

Определение

Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha I\{|\xi_\alpha| > c\}|) = 0.$$

Теорема (2.3)

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — случайные величины. Тогда если последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема, то $E\xi_n \rightarrow E\xi$.

Метод моментов

Доказательство теоремы 2.3 несложное и мы его оставляем читателю в качестве упражнения. Теперь мы готовы сформулировать и доказать метод моментов.

Метод моментов

Доказательство теоремы 2.3 несложное и мы его оставляем читателю в качестве упражнения. Теперь мы готовы сформулировать и доказать метод моментов.

Теорема (2.4)

Пусть распределение случайной величины Z однозначно определяется своими моментами, а последовательность случайных величин $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathbb{E}X_n^k \rightarrow \mathbb{E}Z^k$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} Z$.

Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через Q_n распределение X_n . Покажем, что последовательность $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ является плотной.

Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через Q_n распределение X_n . Покажем, что последовательность $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ является плотной.

Обозначим $M_k = \sup_n \mathbb{E} X_n^k$. Тогда для любого $R > 0$

$$Q_n(\mathbb{R} \setminus [-R, R]) = \mathbb{E} I\{|X_n| > R\} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{R} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|^2 + 1}{R} \leq \frac{M_2 + 1}{R} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$ равномерно по n . Значит, семейство плотное.

Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через Q_n распределение X_n . Покажем, что последовательность $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ является плотной.

Обозначим $M_k = \sup_n \mathbb{E} X_n^k$. Тогда для любого $R > 0$

$$Q_n(\mathbb{R} \setminus [-R, R]) = \mathbb{E} I\{|X_n| > R\} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{R} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|^2 + 1}{R} \leq \frac{M_2 + 1}{R} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$ равномерно по n . Значит, семейство плотное.

По следствию 2.1 из теоремы Прохорова достаточно проверить, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{Q_{n_s}\}$ сходится слабо к P_Z . Пусть $Q_{n_s} \xrightarrow{w} Q$, т.е. $X_{n_s} \xrightarrow{d} Y$, где Q — это распределение Y .

Доказательство теоремы 2.4

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ семейство $\{X_{n_s}^k\}$ является равномерно интегрируемым. Действительно, для любого s имеем

$$\mathbb{E}(|X_{n_s}^k| \mathbf{I}\{|X_{n_s}^k| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}|X_{n_s}^k|^2}{c} \leq \frac{M_{2k}}{c} \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.4

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ семейство $\{X_{n_s}^k\}$ является равномерно интегрируемым. Действительно, для любого s имеем

$$\mathbb{E}(|X_{n_s}^k| \mathbf{I}\{|X_{n_s}^k| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}|X_{n_s}^k|^2}{c} \leq \frac{M_{2k}}{c} \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$.

По теореме 2.3 о равномерной интегрируемости это означает, что моменты сходятся: $\mathbb{E}X_{n_s}^k \rightarrow \mathbb{E}Y^k$ при $s \rightarrow \infty$. Но по условию $\mathbb{E}X_{n_s}^k \rightarrow \mathbb{E}Z^k$.

Распределение Z однозначно определяется своими моментами, следовательно, $Y \stackrel{d}{=} Z$. □

Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

Определение

Пусть $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ — случайный вектор, а $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — мультииндекс. Тогда через Z^α мы обозначим

$$Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m}.$$

Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

Определение

Пусть $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ — случайный вектор, а $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — мультииндекс. Тогда через Z^α мы обозначим

$$Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m}.$$

Распределение случайного вектора $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ однозначно определяется своими моментами, если из равенства $EZ^\alpha = EY^\alpha$ для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ следует, что $Z \stackrel{d}{=} Y$.

Многомерный метод моментов

Теорема (2.5)

Пусть распределение случайного вектора $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ однозначно определяется своими моментами, а последовательность случайных векторов $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ выполнено $\mathbb{E} X_n^\alpha \rightarrow \mathbb{E} Z^\alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} Z$ при $n \rightarrow \infty$.