Основы модальной логики, лекция 2

Кудинов А.В.

23 сентября 2025 г.

Разбор ДЗ

1. В следующей шкале точки отмечены цифрами, а отношение стрелочками. Попробуйте для каждой точки написать формулу, которая истинна только в этой точке, не используйте переменные, только $\top$ и $\perp$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 4 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Разбор ДЗ (продолжение)

2. Попробуйте сделать тоже самое для следующей шкалы:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Попробуйте объяснить почему не получается.

Разбор ДЗ (продолжение)

3. В каких точках следующей модели верна формула $\Diamond\Box\Diamond p$?

$$
\begin{tikzcd}
p,\ 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 2,\ p \arrow[l] \\
4 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

Разбор ДЗ (продолжение)

4. Попробуйте описать какому свойству шкалы соответствует общезначимость формулы $\Box p \to \Box\Box p$ и формулы $p \to \Box\Diamond p$.

Логики и многообразия

Для класса шкал $\mathcal{C}$ логикой этого класса называется

$$Log(\mathcal{C}) \rightleftharpoons \{A \,|\, \forall F \in \mathcal{C}\, (F \models A)\}$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$. Многообразием этого множества формул называется класс шкал

$$Var(\Gamma) \rightleftharpoons \{F \,|\, \forall A \in \Gamma\ (F \models A)\}\,.$$

Класс шкал будем называть (модальным) многообразием, если существует множество модальных формул, многообразием которого является данный класс.

Про классы можно почитать здесь: https://ru.wikipedia.org/wiki/Класс_(математика)

Логики и многообразия (продолжение)

Лемма 2.1

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}' \Rightarrow Log(\mathcal{C}') \subseteq Log(\mathcal{C})$;
2. $\Gamma \subseteq \Sigma \Rightarrow Var(\Sigma) \subseteq Var(\Gamma)$;
3. $\Gamma \subseteq Log(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq Var(\Gamma)$.

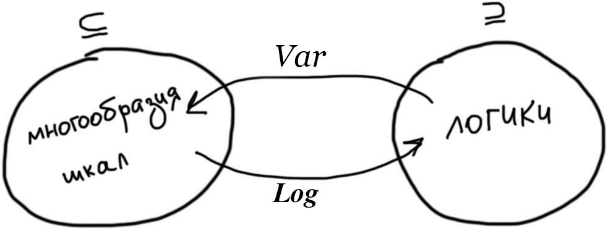
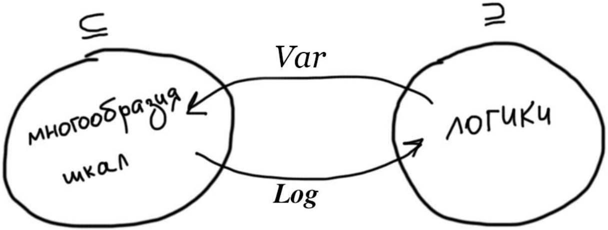


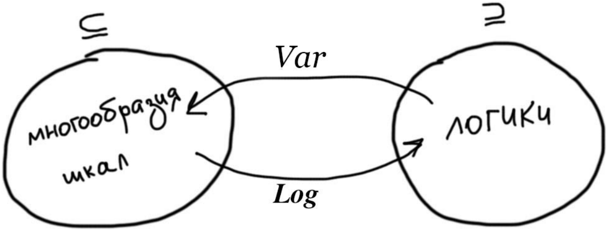
Рис.: Связь модальных логик и классов шкал.

Логики и многообразия (продолжение)



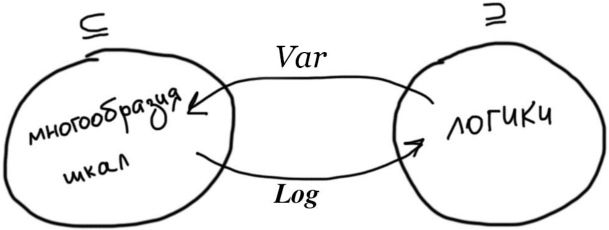
(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}' \Rightarrow Log(\mathcal{C}') \subseteq Log(\mathcal{C})$;

Логики и многообразия (продолжение)



(2) $\Gamma \subseteq \Sigma \Rightarrow Var(\Sigma) \subseteq Var(\Gamma)$;

Логики и многообразия (продолжение)



(3) $\Gamma \subseteq Log(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq Var(\Gamma)$.

Определимые свойства шкал

Свойство шкалы Крипке называется **модально определимым**, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

Часто, говоря о свойстве, мы имеем в виду класс шкал, удовлетворяющих этому свойству, и наоборот.

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x (xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond \top \iff \forall x \exists y (xRy) \iff \forall x (R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x\exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \,\&\, xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x (xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y (xRy) \iff \forall x (R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z (xRy \mathbin{\&} yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z (xRy \mathbin{\&} xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x (|R(x)| \leq n)$;

Некоторые определимые свойства

Предложение 2.2

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x(|R(x)| \leq n)$;
8. $F \models A2 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \iff \forall x \forall y \forall z \exists t(xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRt \ \& \ zRt)$ (свойство Черча-Россера).

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — **бисимуляция**, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \ \& \ w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2 \ (v_1 E v_2 \ \& \ w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \ \& \ w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1 \ (v_1 E v_2 \ \& \ w_1 R_1 v_1)$.

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — **бисимуляция**, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1)$.

Лемма 2.3 (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — бисимуляция, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1)$.

Лемма 2.3 (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Бисимуляция

Свойство шкалы Крипке называется модально определимым, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

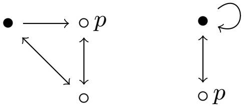
Предложение 2.4

Следующие свойства модально неопределимы.

1. иррефлексивность,
2. антисимметричность,
3. связность.

ДЗ

1. Постройте бисимуляцию между следующими моделями так, чтобы черные точки соединялись:



2. Докажите, что не существует бисимуляции, соединяющей черные точки, между следующими моделями

3. Докажите, что свойство «двудольности» (множество W разбивается на два подмножества таких, что нет стрелок внутри этих подмножеств) модально неопределимо.