Задачи по курсу случайных графов. Часть 1

1. а) Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.

   б) Пусть $\mathcal{Q}$ — выпуклое свойство подмножеств Γ и $m_1 \leqslant m \leqslant m_2 \leqslant N$, $0 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant p_2 \leqslant 1$. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) + \mathsf{P}\left(\Gamma(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right) - 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) + \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right) - 1,$$

2. Докажите лемму 1.3 из лекции.

   Лемма 1. *Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $a \in [0,1]$ — фиксированная константа, а $m = m(n) \in \overline{[0,N]}$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием $p = m/N + O\left(\sqrt{m(N-m)/N^3}\right)$ выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \longrightarrow a \text{ при } n \to \infty,$$

   то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \longrightarrow a \text{ при } n \to \infty.$$

3. Пусть $\mathcal{Q}$ — свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $|\Gamma(n)| = N$. Докажите, что тогда для $p = m/N$, $m > 0$, выполняется неравенство

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant 10\sqrt{m} \cdot \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

4. Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $|\Gamma(n)| = N$. Пусть $p = m/N$ и $m = m(n)$ таково, что $m \to \infty$ и $N(1-p)/\sqrt{m} \to \infty$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant 3 \cdot \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

5. В случайном процессе $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}(m), m = 0, \ldots, N)$ для возрастающего свойства $\mathcal{Q}$ определим $m^*_{\mathcal{Q}} = \min\{m : \widetilde{\Gamma}(m) \vDash \mathcal{Q}\}$.

   1) Докажите, что функция $\widehat{m}$ является пороговой функцией для $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда $m^*_{\mathcal{Q}} = \Theta_{\mathsf{P}}(\widehat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \to \infty$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{w(n)}\widehat{m} \leqslant m^*_{\mathcal{Q}} \leqslant w(n)\widehat{m}\right) \longrightarrow 1.$$

2) Докажите, что если в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\mathcal{Q}$ выполнено $m(1/2;n) \to +\infty$, то точная пороговая функция для $\mathcal{Q}$ существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{m^*_{\mathcal{Q}}}{m(1/2;n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1.$$

6. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\mathcal{Q}$ существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ выполнено

$$\frac{p(\varepsilon;n)}{p(1/2;n)} \longrightarrow 1.$$

СРОК СДАЧИ вторник, 07 октября, до 12:20.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на shabanov.da@mipt.ru.