

# Случайные графы. Лекция 16.09. Малые подграфы в случайном графе. Метод моментов

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

16.09.2025

# Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели  $G(n, p)$ .

# Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели  $G(n, p)$ . И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов  $G(n, p)$ , изоморфных фиксированному графу  $H$ .

# Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели  $G(n, p)$ . И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов  $G(n, p)$ , изоморфных фиксированному графу  $H$ .

## Замечание

*Мы будем обсуждать только случай неиндуцированных и unlabelled подграфов, изоморфных  $H$ . Такие подграфы также будем называть копиями  $H$  в  $G(n, p)$ .*

# Малые подграфы

Во втором разделе мы начинаем изучение основной нашей модели случайного графа — биномиальной модели  $G(n, p)$ . И первый вопрос, который будет нас интересовать, — это распределение числа подграфов  $G(n, p)$ , изоморфных фиксированному графу  $H$ .

## Замечание

*Мы будем обсуждать только случай неиндуцированных и unlabelled подграфов, изоморфных  $H$ . Такие подграфы также будем называть копиями  $H$  в  $G(n, p)$ .*

Обозначим через  $X_n(H) = X_n(H, p)$  число таких подграфов в  $G(n, p)$ . Сформулируем основные вопросы, которые мы планируем исследовать:

- какова пороговая вероятность для свойства  $G(n, p)$  содержит копию  $H$ ?
- каково предельное распределение случайной величины  $X_n(H)$  при различных  $p = p(n)$ ?

Изучение начнем с ответа на первый вопрос, с вопроса о пороговой вероятности вхождения  $H$  в  $G(n, p)$ .

# Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

# Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

**Метод первого момента.** Пусть  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность случайных величин, принимающих значения в  $\mathbb{Z}_+$ . Тогда

$$P(X_n > 0) \leq EX_n,$$

и если  $EX_n \rightarrow 0$ , то  $X_n \xrightarrow{P} 0$  или  $P(X_n = 0) \rightarrow 1$ .

# Методы первого и второго моментов

В основе получения многих результатов о пороговых вероятностях лежат, так называемые, *методы первого и второго моментов*.

**Метод первого момента.** Пусть  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность случайных величин, принимающих значения в  $\mathbb{Z}_+$ . Тогда

$$P(X_n > 0) \leq EX_n,$$

и если  $EX_n \rightarrow 0$ , то  $X_n \xrightarrow{P} 0$  или  $P(X_n = 0) \rightarrow 1$ .

**Метод второго момента.** Пусть  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность случайных величин, принимающих значения в  $\mathbb{Z}_+$ . Тогда по неравенству Чебышёва

$$P(X_n = 0) \leq P(|X_n - EX_n| \geq EX_n) \leq \frac{DX_n}{(EX_n)^2},$$

и если  $DX_n = o((EX_n)^2)$ , то  $P(X_n = 0) \rightarrow 1$ .

# Плотность графа

Пусть теперь  $H$  — некоторый фиксированный граф с  $v$  вершинами и  $e$  ребрами,  $e > 0$ .

# Плотность графа

Пусть теперь  $H$  — некоторый фиксированный граф с  $v$  вершинами и  $e$  ребрами,  $e > 0$ .

## Определение

*Плотностью  $\rho(H)$  графа  $H$  называется отношение числа его ребер к числу вершин:*

$$\rho(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{e}{v}.$$

*Через  $m(H)$  обозначим максимальную плотность подграфов графа  $H$ :*

$$m(H) = \max\{\rho(F) : F \subseteq H, |V(F)| > 0\}.$$

# Плотность графа

Пусть теперь  $H$  — некоторый фиксированный граф с  $v$  вершинами и  $e$  ребрами,  $e > 0$ .

## Определение

Плотностью  $\rho(H)$  графа  $H$  называется отношение числа его ребер к числу вершин:

$$\rho(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{e}{v}.$$

Через  $m(H)$  обозначим максимальную плотность подграфов графа  $H$ :

$$m(H) = \max\{\rho(F) : F \subseteq H, |V(F)| > 0\}.$$

## Определение

Если  $\rho(H) = m(H)$ , то граф  $H$  называется сбалансированным.

Если  $\rho(H) > \rho(F)$  для любого подграфа  $F \subset H$ ,  $F \neq H$ , то граф  $H$  называется строго сбалансированным.

# Примеры

Приведем некоторые примеры.

Приведем некоторые примеры.

- 1 Полный граф  $K_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{2}$ .

Приведем некоторые примеры.

- 1 Полный граф  $K_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{2}$ .
- 2 Полный граф  $K_n$  с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность  $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$  меньше плотности  $K_n$ .

Приведем некоторые примеры.

- 1 Полный граф  $K_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{2}$ .
- 2 Полный граф  $K_n$  с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность  $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$  меньше плотности  $K_n$ .
- 3 Цикл  $C_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью 1.

Приведем некоторые примеры.

- 1 Полный граф  $K_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{2}$ .
- 2 Полный граф  $K_n$  с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность  $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$  меньше плотности  $K_n$ .
- 3 Цикл  $C_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью 1.
- 4 Дерево на  $n$  вершинах — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{n}$ .

Приведем некоторые примеры.

- 1 Полный граф  $K_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{2}$ .
- 2 Полный граф  $K_n$  с дополнительной висячей вершиной — несбалансированный граф, т.к. его плотность  $\frac{\binom{n}{2}+1}{n+1}$  меньше плотности  $K_n$ .
- 3 Цикл  $C_n$  — строго сбалансированный граф с плотностью 1.
- 4 Дерево на  $n$  вершинах — строго сбалансированный граф с плотностью  $\frac{n-1}{n}$ .
- 5 Унициклический граф на  $n$  вершинах, не являющийся циклом, является сбалансированным графом, но не строго сбалансированным.

## Определение

Пусть  $H = (V, E)$  — граф, биекция  $\sigma : V \rightarrow V$  называется автоморфизмом, если для любых  $u, w \in V$  выполнено  $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$ .  
Размер группы автоморфизмов графа  $H$  обозначается через  $\text{aut}(H)$ .

# Аutomорфизмы графа

## Определение

Пусть  $H = (V, E)$  — граф, биекция  $\sigma : V \rightarrow V$  называется автоморфизмом, если для любых  $u, w \in V$  выполнено  $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$ .  
Размер группы автоморфизмов графа  $H$  обозначается через  $\text{aut}(H)$ .

Примеры.

# Аutomорфизмы графа

## Определение

Пусть  $H = (V, E)$  — граф, биекция  $\sigma : V \rightarrow V$  называется автоморфизмом, если для любых  $u, w \in V$  выполнено  $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$ .  
Размер группы автоморфизмов графа  $H$  обозначается через  $\text{aut}(H)$ .

## Примеры.

❶  $\text{aut}(K_n) = n!$ .

## Определение

Пусть  $H = (V, E)$  — граф, биекция  $\sigma : V \rightarrow V$  называется автоморфизмом, если для любых  $u, w \in V$  выполнено  $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$ .  
Размер группы автоморфизмов графа  $H$  обозначается через  $\text{aut}(H)$ .

## Примеры.

❶  $\text{aut}(K_n) = n!$ .

❷  $\text{aut}(K_{a,b}) = \begin{cases} a!b!, & \text{если } a \neq b, \\ 2(a!)^2, & \text{если } a = b. \end{cases}$

## Определение

Пусть  $H = (V, E)$  — граф, биекция  $\sigma : V \rightarrow V$  называется автоморфизмом, если для любых  $u, w \in V$  выполнено  $(u, w) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(w)) \in E$ .  
Размер группы автоморфизмов графа  $H$  обозначается через  $\text{aut}(H)$ .

## Примеры.

- ❶  $\text{aut}(K_n) = n!$ .
- ❷  $\text{aut}(K_{a,b}) = \begin{cases} a!b!, & \text{если } a \neq b, \\ 2(a!)^2, & \text{если } a = b. \end{cases}$
- ❸  $\text{aut}(C_n) = 2n$ .

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа  $H$  в случайный граф  $G(n, p)$  доказали Эрдеш, Реньи (1960, для сбалансированных графов) и Боллобаш (1981, общий случай). Для доказательства теоремы мы применим методы первого и второго момента, а начнем с оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины  $X_n(H)$ .

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа  $H$  в случайный граф  $G(n, p)$  доказали Эрдеш, Реньи (1960, для сбалансированных графов) и Боллобаш (1981, общий случай). Для доказательства теоремы мы применим методы первого и второго момента, а начнем с оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины  $X_n(H)$ .

Пусть граф  $H$  имеет  $v_H$  вершин и  $e_H$  ребер.

## Лемма (2.1)

$$\mathbb{E}X_n(H) = \frac{n(n-1)\dots(n-v_H+1)}{\text{aut}(H)} p^{e_H} = \Theta(n^{v_H} p^{e_H}).$$

# Доказательство леммы 2.1

Достаточно заметить, что в полном графе  $K_n$  есть ровно

$$f(n, H) = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{\text{aut}(H)}$$

подграфов, изоморфных  $H$ , а вероятность вхождения каждого из них в  $G(n, p)$  равна  $p^{e_H}$ . □

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Для оценки дисперсии  $X_n(H)$  введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{EX_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0\}.$$

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Для оценки дисперсии  $X_n(H)$  введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{EX_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0\}.$$

Ясно, что по лемме 2.1

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F},$$

где  $v_F = |V(F)|$ ,  $e_F = |E(F)|$ .

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Для оценки дисперсии  $X_n(H)$  введем следующее обозначение:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{EX_n(F) : F \subset H, |E(F)| > 0\}.$$

Ясно, что по лемме 2.1

$$\Phi_H \asymp \min_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{v_F} p^{e_F},$$

где  $v_F = |V(F)|$ ,  $e_F = |E(F)|$ . Следующая лемма дает представление о порядке дисперсии случайной величины  $X_n(H)$  в терминах функции  $\Phi_H$ .

## Лемма (2.2)

$$\begin{aligned} DX_n(H) &\asymp (1-p) \sum_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} \asymp \\ &\asymp (1-p) \sum_{\substack{F \subset H, \\ e_F > 0}} \frac{(EX_n(H))^2}{EX_n(F)} \asymp (1-p) \frac{(EX_n(H))^2}{\Phi_H}. \end{aligned}$$

## Доказательство леммы 2.2

Пусть  $H'$  — подграф  $K_n$ , изоморфный  $H$ . Обозначим через  $I_{H'} = I\{H' \subset G(n, p)\}$ . Заметим, что если  $H'$  и  $H''$  не имеют общих ребер, то случайные величины  $I_{H'}$  и  $I_{H''}$  — независимы.

## Доказательство леммы 2.2

Пусть  $H'$  — подграф  $K_n$ , изоморфный  $H$ . Обозначим через  $I_{H'} = I\{H' \subset G(n, p)\}$ . Заметим, что если  $H'$  и  $H''$  не имеют общих ребер, то случайные величины  $I_{H'}$  и  $I_{H''}$  — независимы.

Для любого подграфа  $F \subseteq H$  существует  $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$  таких пар  $(H', H'')$ , что пересечение  $H' \cap H''$  изоморфно  $F$ . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subset K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

## Доказательство леммы 2.2

Пусть  $H'$  — подграф  $K_n$ , изоморфный  $H$ . Обозначим через  $I_{H'} = \mathbb{I}\{H' \subset G(n, p)\}$ . Заметим, что если  $H'$  и  $H''$  не имеют общих ребер, то случайные величины  $I_{H'}$  и  $I_{H''}$  — независимы.

Для любого подграфа  $F \subseteq H$  существует  $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$  таких пар  $(H', H'')$ , что пересечение  $H' \cap H''$  изоморфно  $F$ . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subseteq K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

$$\mathrm{D}X_n(H) = \mathrm{cov}(X_n(H), X_n(H)) = \sum_{H', H''} \mathrm{cov}(I_{H'}, I_{H''}) =$$

## Доказательство леммы 2.2

Пусть  $H'$  — подграф  $K_n$ , изоморфный  $H$ . Обозначим через  $I_{H'} = I\{H' \subset G(n, p)\}$ . Заметим, что если  $H'$  и  $H''$  не имеют общих ребер, то случайные величины  $I_{H'}$  и  $I_{H''}$  — независимы.

Для любого подграфа  $F \subseteq H$  существует  $\Theta(n^{v_F} n^{2(v_H - v_F)})$  таких пар  $(H', H'')$ , что пересечение  $H' \cap H''$  изоморфно  $F$ . Напомним также, что

$$X_n(H) = \sum_{H' \subset K_n} I_{H'}.$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} DX_n(H) &= \text{cov}(X_n(H), X_n(H)) = \sum_{H', H''} \text{cov}(I_{H'}, I_{H''}) = \\ &= \sum_{\substack{H', H'' \\ E(H') \cap E(H'') \neq \emptyset}} (EI_{H'} I_{H''} - EI_{H'} EI_{H''}) = \end{aligned}$$

(перегруппируем сумму)

## Доказательство леммы 2.2

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) =$$

## Доказательство леммы 2.2

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) = \\ &= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p^{e_F}) \asymp \end{aligned}$$

## Доказательство леммы 2.2

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} \sum_{\substack{H', H'': \\ H' \cap H'' \cong F}} (\mathbb{E} I_{H'} I_{H''} - \mathbb{E} I_{H'} \mathbb{E} I_{H''}) \asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} (p^{2e_H - e_F} - p^{2e_H}) =$$

$$= \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p^{e_F}) \asymp$$

(пользуемся тем, что  $1 - p^{e_F} \asymp 1 - p$ )

$$\asymp \sum_{\substack{F \subseteq H, \\ e_F > 0}} n^{2v_H - v_F} p^{2e_H - e_F} (1 - p) \asymp (1 - p) n^{2v_H} p^{2e_H} \frac{1}{\min_{F \subseteq H} n^{v_F} p^{e_F}} \asymp$$

$$\asymp (1 - p) \frac{(\mathbb{E} X_n(H))^2}{\Phi_H}.$$

□

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Теперь мы готовы доказать теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа  $H$  в случайный граф  $G(n, p)$ . Всюду далее будем писать, что  $G(n, p) \models H$ , если в  $G(n, p)$  нашелся подграф, изоморфный  $H$ .

# Пороговая вероятность наличия копии $H$

Теперь мы готовы доказать теорему о пороговой вероятности вхождения фиксированного графа  $H$  в случайный граф  $G(n, p)$ . Всюду далее будем писать, что  $G(n, p) \models H$ , если в  $G(n, p)$  нашелся подграф, изоморфный  $H$ .

## Теорема (2.1)

Пусть  $H$  — непустой граф. Функция  $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(H)}}$  является пороговой вероятностью для свойства наличия копии  $H$  в  $G(n, p)$ .

# Доказательство теоремы 2.1

Пусть  $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда возьмем такой подграф  $F \subseteq H$ , что  $\rho(F) = m(H)$ .

# Доказательство теоремы 2.1

Пусть  $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда возьмем такой подграф  $F \subseteq H$ , что  $\rho(F) = m(H)$ . Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models H) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \models F) = \mathbb{P}(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq \mathbb{E}X_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta\left((np^{m(H)})^{v_F}\right) = o(1). \end{aligned}$$

# Доказательство теоремы 2.1

Пусть  $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда возьмем такой подграф  $F \subseteq H$ , что  $\rho(F) = m(H)$ . Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} P(G(n, p) \models H) &\leq P(G(n, p) \models F) = P(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq EX_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta((np^{m(H)})^{v_F}) = o(1). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда для любого подграфа  $F \subseteq H$  по лемме 2.1 выполнено

$$EX_n(F) \asymp n^{v_F} p^{e_F} = (np^{\rho(F)})^{v_F} \geq (np^{m(H)})^{v_F} \rightarrow +\infty.$$

Значит, и  $\Phi_H \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

# Доказательство теоремы 2.1

Пусть  $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда возьмем такой подграф  $F \subseteq H$ , что  $\rho(F) = m(H)$ . Согласно лемме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models H) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \models F) = \mathbb{P}(X_n(F) > 0) \leq \\ &\leq \mathbb{E}X_n(F) = \Theta(n^{v_F} p^{e_F}) = \Theta((np^{m(H)})^{v_F}) = o(1). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(H)}})$ . Тогда для любого подграфа  $F \subseteq H$  по лемме 2.1 выполнено

$$\mathbb{E}X_n(F) \asymp n^{v_F} p^{e_F} = (np^{\rho(F)})^{v_F} \geq (np^{m(H)})^{v_F} \rightarrow +\infty.$$

Значит, и  $\Phi_H \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно лемме 2.2 получаем

$$\mathbb{P}(G(n, p) \not\models H) = \mathbb{P}(X_n(H) = 0) \leq \frac{\mathbb{D}X_n(H)}{(\mathbb{E}X_n(H))^2} = O\left(\frac{1}{\Phi_H}\right) = o(1).$$



**Примеры.** Пусть  $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$  — пороговая вероятность появления  $H$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Тогда

**Примеры.** Пусть  $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$  — пороговая вероятность появления  $H$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Тогда

- ❶ если  $H = K_m$ , то  $\hat{p} = n^{-2/(m-1)}$ ,
- ❷ если  $H = C_m$ , то  $\hat{p} = n^{-1}$ ,
- ❸ если  $H = K_{a,b}$ , то  $\hat{p} = n^{-(a+b)/ab}$ .

**Примеры.** Пусть  $\hat{p} = n^{-1/m(H)}$  — пороговая вероятность появления  $H$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Тогда

- ❶ если  $H = K_m$ , то  $\hat{p} = n^{-2/(m-1)}$ ,
- ❷ если  $H = C_m$ , то  $\hat{p} = n^{-1}$ ,
- ❸ если  $H = K_{a,b}$ , то  $\hat{p} = n^{-(a+b)/ab}$ .

В целом, теорема показывает, что появление графа  $H$  в  $G(n, p)$  происходит одновременно с его наиболее плотным подграфом.

# Немного о функции $\Phi_H$

Функция  $\Phi_H$  играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа  $H$  в  $G(n, p)$ . В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

# Немного о функции $\Phi_H$

Функция  $\Phi_H$  играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа  $H$  в  $G(n, p)$ . В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

## Теорема (2.2)

*Для любого непустого графа  $H$  выполнено*

$$e^{-\Phi_H/(1-p)} \leq \mathbb{P}(G(n, p) \not\supset H) \leq e^{-\Theta(\Phi_H)}.$$

# Немного о функции $\Phi_H$

Функция  $\Phi_H$  играет важную роль при изучении вероятности наличия копии графа  $H$  в  $G(n, p)$ . В частности, в общем случае можно доказать следующую теорему.

## Теорема (2.2)

*Для любого непустого графа  $H$  выполнено*

$$e^{-\Phi_H/(1-p)} \leq P(G(n, p) \not\supset H) \leq e^{-\Theta(\Phi_H)}.$$

Доказательство теоремы довольно несложное, но требует некоторых вероятностных инструментов, которые мы будем изучать позднее в нашем курсе, поэтому мы оставим ее без доказательства.

# Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае  $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$ , например при  $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$ ? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение  $X_n(H)$  является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

# Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае  $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$ , например при  $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$ ? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение  $X_n(H)$  является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

## Теорема

Пусть  $H$  — строго сбалансированный граф и  $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $X_n(H) \xrightarrow{d} \text{Pois}(\lambda)$ , где  $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\text{aut}(H)}$ .

# Пуассоновская предельная теорема

Мы разобрались с пороговой вероятностью вхождения фиксированного графа в случайный. Естественно задаться вопросом, а что происходит в случае  $p = \Theta(n^{-1/m(H)})$ , например при  $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$ ? Оказывается, что в этом случае асимптотическое распределение  $X_n(H)$  является пуассоновским, что сформулировано в следующей теореме.

## Теорема

Пусть  $H$  — строго сбалансированный граф и  $np^{m(H)} \rightarrow c > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $X_n(H) \xrightarrow{d} \text{Pois}(\lambda)$ , где  $\lambda = \frac{c^{v_H}}{\text{aut}(H)}$ .

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые сведения из теории слабой сходимости.

# Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

## Определение

Случайные величины  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходятся по распределению к случайной величине  $X$  ( $X_n \xrightarrow{d} X$ ), если для любой ограниченной непрерывной функции  $f(x)$  выполнено

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X).$$

# Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

## Определение

Случайные величины  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходятся по распределению к случайной величине  $X$  ( $X_n \xrightarrow{d} X$ ), если для любой ограниченной непрерывной функции  $f(x)$  выполнено

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X).$$

## Теорема

Случайные величины  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходятся по распределению к случайной величине  $X$  тогда и только тогда, когда для любой  $x$  — точки непрерывности функции распределения случайной величины  $X$ , выполнено

$$P(X_n \leq x) \longrightarrow P(X \leq x) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

# Сходимость по распределению

Сначала напомним определение сходимости по распределению.

## Определение

Случайные величины  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходятся по распределению к случайной величине  $X$  ( $X_n \xrightarrow{d} X$ ), если для любой ограниченной непрерывной функции  $f(x)$  выполнено

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X).$$

## Теорема

Случайные величины  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходятся по распределению к случайной величине  $X$  тогда и только тогда, когда для любой  $x$  — точки непрерывности функции распределения случайной величины  $X$ , выполнено

$$P(X_n \leq x) \longrightarrow P(X \leq x) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Из курса же теории вероятностей мы также знаем, что сходимость по распределению эквивалентна поточечной сходимости характеристических функций.

# Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть  $(\mathcal{S}, \rho)$  — метрическое пространство.

# Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть  $(S, \rho)$  — метрическое пространство.

## Определение

*Борелевской сигма-алгеброй,  $\mathcal{B}(S)$ , на  $(S, \rho)$  называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества в  $S$ .*

# Слабая сходимость

Сходимость по распределению случайных величин и векторов эквивалентна слабой сходимости вероятностных мер. Пусть  $(S, \rho)$  — метрическое пространство.

## Определение

Борелевской сигма-алгеброй,  $\mathcal{B}(S)$ , на  $(S, \rho)$  называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества в  $S$ .

## Определение

Пусть задано метрическое пространство  $(S, \rho)$  и последовательность  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  вероятностных мер на  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Будем говорить, что  $Q_n$  слабо сходятся к вероятностной мере  $Q$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$ , если для любой ограниченной непрерывной функции  $f: S \mapsto \mathbb{R}$  выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(x) Q_n(dx) = \int_S f(x) Q(dx).$$

Обозначение:  $Q_n \xrightarrow{w} Q$ .

# Теорема Александрова

## Теорема (А.Д. Александров)

Пусть  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  и  $Q$  — вероятностные меры на метрическом пространстве  $(S, \rho)$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1  $Q_n \xrightarrow{w} Q$ ,
- 2  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq Q(F)$  для любого замкнутого множества  $F \subset S$ ,
- 3  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Q_n(G) \geq Q(G)$  для любого открытого множества  $G \subset S$ ,
- 4 Для любого борелевского множества  $B \in \mathcal{B}(S)$  такого, что  $Q(\partial B) = 0$ , выполнено  $Q_n(B) \rightarrow Q(B)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

# Плотность и относительная компактность

Нам понадобятся еще два определения.

Нам понадобятся еще два определения.

## Определение

Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  на метрическом пространстве  $\mathcal{S}$  называется плотным, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой компакт  $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ , что для любого  $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$Q_\alpha(\mathcal{S} \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

# Плотность и относительная компактность

Нам понадобятся еще два определения.

## Определение

Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  на метрическом пространстве  $\mathcal{S}$  называется *плотным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой компакт  $K_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ , что для любого  $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$Q_\alpha(\mathcal{S} \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

## Определение

Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  на метрическом пространстве  $\mathcal{S}$  называется *относительно компактным*, если из любой последовательности  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

# Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

# Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

## Теорема (Ю.В. Прохоров)

*Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  на полном сепарабельном метрическом пространстве  $\mathcal{S}$  является плотным тогда и только тогда, когда оно является относительно компактным.*

# Теорема Прохорова

Как правило, проверить, что семейство вероятностных мер является плотным несложно, но, на первый взгляд, бесполезно, в то время как относительную компактность проверять сложно, но польза от этого свойства несомненна. Однако, как в свое время доказал Ю.В. Прохоров, эти два свойства просто эквивалентны.

## Теорема (Ю.В. Прохоров)

*Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  на полном сепарабельном метрическом пространстве  $\mathcal{S}$  является плотным тогда и только тогда, когда оно является относительно компактным.*

Для доказательства слабой сходимости в конкретных задачах удобным является следующее следствие из теоремы Прохорова.

## Следствие (2.1)

*Пусть  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве  $\mathcal{S}$ . Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере  $Q$ , то  $Q_n \xrightarrow{w} Q$ .*

# Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удастся считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

# Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удастся считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

## Определение

*Пусть для случайной величины  $X$  определены все целые моменты  $EX^k, k \in \mathbb{N}$ . Тогда распределение  $X$  однозначно определяется своими моментами, если из равенства  $EX^k = EY^k$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ , следует, что  $X \stackrel{d}{=} Y$ .*

# Метод моментов

В задачах вероятностной комбинаторики, как правило, удастся считать моменты случайных величин. Метод же моментов показывает, что в некоторых случаях сходимость моментов обеспечивает и сходимость по распределению. Однако, как несложно понять, это возможно только в случае, когда предельное распределение однозначно определяется моментами.

## Определение

*Пусть для случайной величины  $X$  определены все целые моменты  $EX^k, k \in \mathbb{N}$ . Тогда распределение  $X$  однозначно определяется своими моментами, если из равенства  $EX^k = EY^k$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ , следует, что  $X \stackrel{d}{=} Y$ .*

Какие же распределения однозначно определяются своими моментами? Частичный ответ дает следующая лемма.

## Лемма (2.3)

*Пусть случайная величина  $X$  такова, что математическое ожидание  $Ee^{tX}$  конечно в некоторой окрестности нуля  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Тогда распределение  $X$  однозначно определяется своими моментами.*

## Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим  $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$  как функцию комплексного переменного,  $z \in \mathbb{C}$ .

## Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим  $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$  как функцию комплексного переменного,  $z \in \mathbb{C}$ . Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^k}{k!} z^k.$$

## Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим  $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$  как функцию комплексного переменного,  $z \in \mathbb{C}$ . Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^k}{k!} z^k.$$

Пусть случайная величина  $Y$  имеет те же моменты, что и  $X$ . Проверим, что  $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$  также конечна в при  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Заметим, что при вещественном  $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$e^{zY} \leq 2 \cosh(zY) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zY)^{2k}}{(2k)!}.$$

## Доказательство леммы 2.3

Рассмотрим  $f_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$  как функцию комплексного переменного,  $z \in \mathbb{C}$ . Легко видеть, что это аналитическая функция в полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Значит, она разлагается в степенной ряд в окрестности нуля

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^k}{k!} z^k.$$

Пусть случайная величина  $Y$  имеет те же моменты, что и  $X$ . Проверим, что  $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$  также конечна в при  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Заметим, что при вещественном  $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$e^{zY} \leq 2 \cosh(zY) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zY)^{2k}}{(2k)!}.$$

По теореме о монотонной сходимости

$$\mathbb{E} \cosh(zY) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}Y^{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}X^{2k}}{(2k)!} z^{2k} < +\infty$$

для всех  $|z| < \varepsilon$ .

## Доказательство леммы 2.3

Тогда  $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$  тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ .

## Доказательство леммы 2.3

Тогда  $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$  тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Функции  $f_X(z)$  и  $f_Y(z)$  — аналитические, совпадающие на вещественной прямой в окрестности нуля. По теореме единственности они совпадают во всей полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$  и, в частности, на прямой  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

## Доказательство леммы 2.3

Тогда  $f_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$  тоже разлагается в тот же самый ряд в окрестности нуля и, значит, она тоже аналитическая в области  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$ . Функции  $f_X(z)$  и  $f_Y(z)$  — аналитические, совпадающие на вещественной прямой в окрестности нуля. По теореме единственности они совпадают во всей полосе  $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon$  и, в частности, на прямой  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Следовательно,

$$\mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{itY}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. у  $X$  и  $Y$  совпадают характеристические функции. Стало быть,  $X \stackrel{d}{=} Y$ .  $\square$

**Примеры** распределений, однозначно определяемых своими моментами.

**Примеры** распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- 1 Любое распределение с ограниченным носителем.

**Примеры** распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- 1 Любое распределение с ограниченным носителем.
- 2 экспоненциальное, нормальное, гамма, пуассоновское и любые другие распределения с “экспоненциально убывающими хвостами”.

**Примеры** распределений, однозначно определяемых своими моментами.

- 1 Любое распределение с ограниченным носителем.
- 2 экспоненциальное, нормальное, гамма, пуассоновское и любые другие распределения с “экспоненциально убывающими хвостами”.

Не все распределения однозначно определяются своими моментами. Примером распределения, для которого существует другое с теми же моментами, является распределение случайной величины  $\xi^3$ , где  $\xi$  имеет стандартное нормальное распределение.

# Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению.

# Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению. Критерием же того, когда сходимость по распределению влечет сходимость математических ожиданий, является понятие равномерной интегрируемости.

## Определение

Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{E} (|\xi_\alpha| I\{|\xi_\alpha| > c\}) = 0.$$

# Равномерная интегрируемость

Метод моментов состоит в том, что если моменты сходятся и распределение предельной случайной величины однозначно определяется своими моментами, то тогда есть и сходимость по распределению. Критерием же того, когда сходимость по распределению влечет сходимость математических ожиданий, является понятие равномерной интегрируемости.

## Определение

Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{E} (|\xi_\alpha| I\{|\xi_\alpha| > c\}) = 0.$$

## Теорема (2.3)

Пусть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$  — случайные величины. Тогда если последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  равномерно интегрируема, то  $\mathbf{E}\xi_n \rightarrow \mathbf{E}\xi$ .

# Метод моментов

Доказательство теоремы 2.3 несложное и мы его оставляем читателю в качестве упражнения. Теперь мы готовы сформулировать и доказать метод моментов.

Доказательство теоремы 2.3 несложное и мы его оставляем читателю в качестве упражнения. Теперь мы готовы сформулировать и доказать метод моментов.

## Теорема (2.4)

*Пусть распределение случайной величины  $Z$  однозначно определяется своими моментами, а последовательность случайных величин  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  такова, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  выполнено  $EX_n^k \rightarrow EZ^k$ . Тогда  $X_n \xrightarrow{d} Z$ .*

## Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через  $Q_n$  распределение  $X_n$ . Покажем, что последовательность  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  является плотной.

# Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через  $Q_n$  распределение  $X_n$ . Покажем, что последовательность  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  является плотной.

Обозначим  $M_k = \sup_n EX_n^k$ . Тогда для любого  $R > 0$

$$Q_n(\mathbb{R} \setminus [-R, R]) = \mathbb{E}I\{|X_n| > R\} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{R} \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|^2 + 1}{R} \leq \frac{M_2 + 1}{R} \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow +\infty$  равномерно по  $n$ . Значит, семейство плотное.

## Доказательство теоремы 2.4

Обозначим через  $Q_n$  распределение  $X_n$ . Покажем, что последовательность  $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$  является плотной.

Обозначим  $M_k = \sup_n EX_n^k$ . Тогда для любого  $R > 0$

$$Q_n(\mathbb{R} \setminus [-R, R]) = E\mathbb{I}\{|X_n| > R\} \leq \frac{E|X_n|}{R} \leq \frac{E|X_n|^2 + 1}{R} \leq \frac{M_2 + 1}{R} \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow +\infty$  равномерно по  $n$ . Значит, семейство плотное.

По следствию 2.1 из теоремы Прохорова достаточно проверить, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность  $\{Q_{n_s}\}$  сходится слабо к  $P_Z$ . Пусть  $Q_{n_s} \xrightarrow{w} Q$ , т.е.  $X_{n_s} \xrightarrow{d} Y$ , где  $Q$  — это распределение  $Y$ .

## Доказательство теоремы 2.4

Заметим, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  семейство  $\{X_{n_s}^k\}$  является равномерно интегрируемым. Действительно, для любого  $s$  имеем

$$\mathbb{E}(|X_{n_s}^k| \mathbb{I}\{|X_{n_s}^k| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}|X_{n_s}^k|^2}{c} \leq \frac{M_{2k}}{c} \rightarrow 0$$

при  $c \rightarrow \infty$ .

## Доказательство теоремы 2.4

Заметим, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  семейство  $\{X_{n_s}^k\}$  является равномерно интегрируемым. Действительно, для любого  $s$  имеем

$$\mathbb{E}(|X_{n_s}^k| \mathbb{I}\{|X_{n_s}^k| > c\}) \leq \frac{\mathbb{E}|X_{n_s}^k|^2}{c} \leq \frac{M_{2k}}{c} \rightarrow 0$$

при  $c \rightarrow \infty$ .

По теореме 2.3 о равномерной интегрируемости это означает, что моменты сходятся:  $\mathbb{E}X_{n_s}^k \rightarrow \mathbb{E}Y^k$  при  $s \rightarrow \infty$ . Но по условию  $\mathbb{E}X_{n_s}^k \rightarrow \mathbb{E}Z^k$ .

Распределение  $Z$  однозначно определяется своими моментами, следовательно,  $Y \stackrel{d}{=} Z$ . □

# Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

# Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

## Определение

Пусть  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  — случайный вектор, а  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$  — мультииндекс. Тогда через  $Z^\alpha$  мы обозначим

$$Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m}.$$

# Многомерный метод моментов

Метод моментов применим и в многомерном случае.

## Определение

Пусть  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  — случайный вектор, а  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$  — мультииндекс. Тогда через  $Z^\alpha$  мы обозначим

$$Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m}.$$

Распределение случайного вектора  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  однозначно определяется своими моментами, если из равенства  $EZ^\alpha = EY^\alpha$  для любого мультииндекса  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$  следует, что  $Z \stackrel{d}{=} Y$ .

## Теорема (2.5)

Пусть распределение случайного вектора  $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$  однозначно определяется своими моментами, а последовательность случайных векторов  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  такова, что для любого  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$  выполнено  $EX_n^\alpha \rightarrow EZ^\alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $X_n \xrightarrow{d} Z$  при  $n \rightarrow \infty$ .