Основы модальной логики, лекция 1

Кудинов А.В.

4 сентября 2023 г.

Какие бывают логики?

1. Логика высказываний
2. Логика предикатов
3. Неклассические логики
    - Интуиционистская логика
    - Модальная логика
    - Дискрипционная логика
    - Многозначная
    - Нечеткая
    - Квантовая
    - Вероятностная
    - И т.д. и т.п.

Логика высказываний

Формула пропозициональной модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула.

Множество всех булевых формул обозначается $\mathcal{L}$.

Остальные логические связки мы будем считать сокращениями:

$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B, \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B).$$

Логика высказываний

Формула пропозициональной модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула.

Множество всех булевых формул обозначается $\mathcal{L}$.

Остальные логические связки мы будем считать сокращениями:

$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B, \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B).$$

Алгебраическая семантика на примере булевой алгебры подмножеств $(\mathcal{P}(W), \cap, \cup, -, \varnothing, W)$. Оценка $V : Prop \to \mathcal{P}(W)$ и продолжается на множество $\mathcal{L}$ по индукции:

$$V(\bot) = \varnothing;$$
$$V(A \to B) = (-V(A)) \cup V(B).$$

Язык модальной логики

Формула пропозициональной n-модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула;
4. Если A — формула, то $\Box A$.

Множество всех модальных формул обозначается $\mathcal{ML}$

Символ $\Box$ читается, как «бокс».

Коротко:

$$A ::= p \mid \bot \mid (A \to A) \mid \Box A.$$

Язык

Формула пропозициональной n-модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула;
4. Если A — формула, то $\Box A$ — формула.

Множество всех модальных формул обозначается $\mathcal{ML}$

Символ $\Box$ читается, как «бокс».

Коротко (в форме Бэкуса-Наура):

$$A ::= p \mid \bot \mid (A \to A) \mid \Box A.$$

$$\text{<формула>} ::= p \mid \bot \mid (\text{<формула>} \to \text{<формула>}) \mid \Box\text{<формула>}.$$

Язык

Остальные связки считаются сокращениями соответствующих формул:

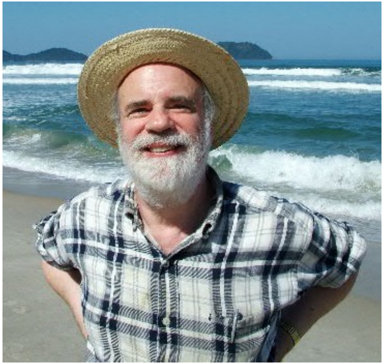
$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot, \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B), \quad \Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A.$$

Семантика

Шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.

Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$.



Сол Крипке

(источник: wikipedia.org)

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M,x \models p &\iff x \in V(p)\\
M,x &\not\models \bot\\
M,x \models A \to B &\iff M,x \not\models A \text{ или } M,x \models B\\
M,x \models \Box A &\iff \forall y(xRy \Rightarrow M,y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M,x \models A \vee B &\iff M,x \models A \text{ или } M,x \models B\\
M,x \models A \wedge B &\iff M,x \models A \text{ и } M,x \models B\\
M,x \models \Diamond A &\iff \exists y(xRy \;\&\; M,y \models A).
\end{aligned}
$$

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \ \& \ M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.
Формула A общезначима в классе шкал $\mathcal{C}$ (обозн. $\mathcal{C} \models A$), если $\forall F \in \mathcal{C} (F \models A)$.

Основы модальной логики, лекция 2

Кудинов А.В.

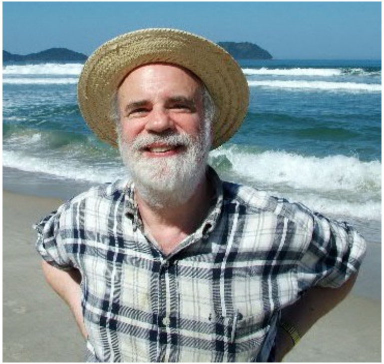
12 сентября 2023 г.

Семантика

Шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.

Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$.



Сол Крипке

(источник: wikipedia.org)

Семантика

Через отношение истинности

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Через продолжение оценки

$$
\begin{aligned}
V(\bot) &= \varnothing, \\
V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\
V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}.
\end{aligned}
$$

Предложение 2.1

Эти два определения эквивалентны.

Семантика

Через отношение истинности

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Через продолжение оценки

$$
\begin{aligned}
V(\bot) &= \varnothing, \\
V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\
V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}.
\end{aligned}
$$

Предложение 2.1

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Семантика

Через отношение истинности

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Через продолжение оценки

$$
\begin{aligned}
V(\bot) &= \varnothing, \\
V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\
V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}.
\end{aligned}
$$

Предложение 2.1

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.

Семантика

Через отношение истинности

$$\begin{aligned} M,x \models p &\iff x \in V(p) \\ M,x &\not\models \bot \\ M,x \models A \to B &\iff M,x \not\models A \text{ или } M,x \models B \\ M,x \models \Box A &\iff \forall y(xRy \Rightarrow M,y \models A). \end{aligned}$$

Через продолжение оценки

$$\begin{aligned} V(\bot) &= \varnothing, \\ V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\ V(\Box A) &= \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in V(A))\}. \end{aligned}$$

Предложение 2.1

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x(M,x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V(F,V) \models A$.

Формула A общезначима в классе шкал $\mathcal{C}$ (обозн. $\mathcal{C} \models A$), если $\forall F \in \mathcal{C}(F \models A)$.

Предложение 2.2

Формула $\Box p \to p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$, тогда и только тогда, когда $\forall x (xRx)$.

Предложение 2.2

Формула $\Box p \to p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$, тогда и только тогда, когда $\forall x(xRx)$.

Таким образом формула $\Box p \to p$ «задает» класс рефлексивных шкал Крипке.

Разбор ДЗ

1. В следующей шкале точки отмечены цифрами, а отношение стрелочками. Попробуйте для каждой точки написать формулу, которая истинна только в этой точке, не используйте переменные, только $\top$ и $\bot$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\
4 \arrow[u] \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

Разбор ДЗ (продолжение)

2. Попробуйте сделать тоже самое для следующей шкалы:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
4 & \longrightarrow & 3
\end{array}
$$

Попробуйте объяснить почему не получается.

Разбор ДЗ (продолжение)

3. В каких точках следующей модели верна формула $\Diamond\Box\Diamond p$?

$$\begin{tikzcd}
p,\, 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 2,\, p \arrow[l] \\
4 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Разбор ДЗ (продолжение)

4. Попробуйте описать какому свойству шкалы соответствует общезначимость формулы $\Box p \to \Box\Box p$ и формулы $p \to \Box\Diamond p$.

Логики и многообразия

Для класса шкал $\mathcal{C}$ логикой этого класса называется

$$Log(\mathcal{C}) \rightleftharpoons \{A \,|\, \forall F \in \mathcal{C}\, (F \models A)\}$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$. Многообразием этого множества формул называется класс шкал

$$Var(\Gamma) \rightleftharpoons \{F \,|\, \forall A \in \Gamma \; (F \models A)\}\,.$$

Класс шкал будем называть (модальным) многообразием, если существует множество модальных формул, многообразием которого является данный класс.

Про классы можно почитать здесь: https://ru.wikipedia.org/wiki/Класс_(математика)

Логики и многообразия (продолжение)

Лемма 2.3

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}' \Rightarrow Log(\mathcal{C}') \subseteq Log(\mathcal{C})$;
2. $\Gamma \subseteq \Sigma \Rightarrow Var(\Sigma) \subseteq Var(\Gamma)$;
3. $\Gamma \subseteq Log(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq Var(\Gamma)$.

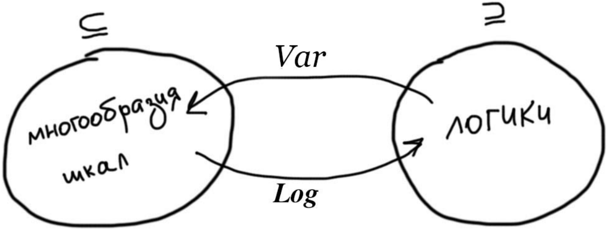
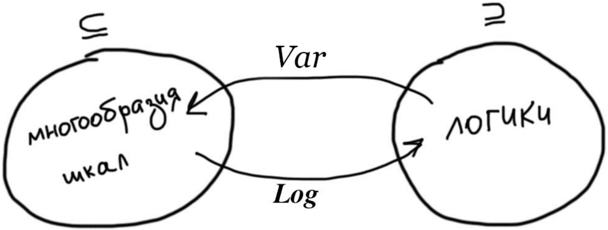


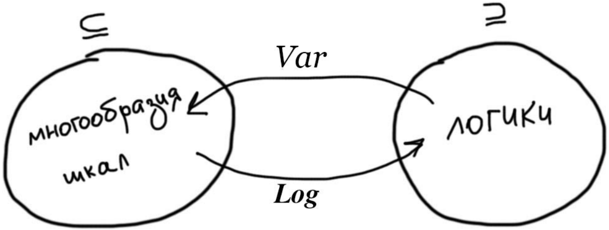
Рис.: Связь модальных логик и классов шкал.

Логики и многообразия (продолжение)



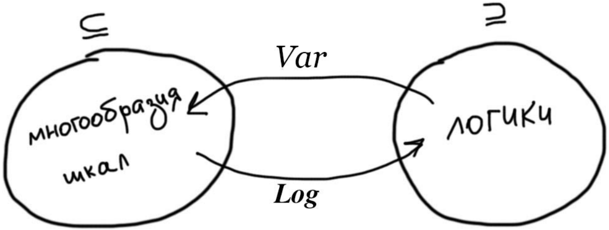
(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}' \Rightarrow Log(\mathcal{C}') \subseteq Log(\mathcal{C})$;

Логики и многобразия (продолжение)



(2) $\Gamma \subseteq \Sigma \Rightarrow Var(\Sigma) \subseteq Var(\Gamma)$;

Логики и многообразия (продолжение)



(3) $\Gamma \subseteq Log(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq Var(\Gamma)$.

Определимые свойства шкал

Свойство шкалы Крипке называется модально определимым, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

Часто, говоря о свойстве, мы имеем в виду класс шкал, удовлетворяющих этому свойству, и наоборот.

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x (xRx)$ (рефлексивность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x (xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y (xRy) \iff \forall x (R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \,\&\, xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \mathbin{\&} yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \mathbin{\&} xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x(|R(x)| \leq n)$;

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение 2.4

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x\exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \mathbin{\&} yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x\forall y\forall z(xRy \mathbin{\&} xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x(|R(x)| \leq n)$;
8. $F \models A2 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \iff \forall x\forall y\forall z\exists t(xRy \mathbin{\&} xRz \Rightarrow yRt \mathbin{\&} zRt)$ (свойство Черча-Россера).

Основы модальной логики, лекция 5-6

Кудинов А.В.

9 октября 2023 г.

Перевод в логику 1ого порядка

Рассмотрим структуры 1-ого порядка такого вида:

$$(W, R, P_1, P_2, \ldots),$$

где R — двуместный предикат, а P_i — одноместный предикат ($i \in \mathbb{N}$), то по модальной формуле A можно построить формулу 1ого порядка $A^\sharp(x)$ с одной свободной переменной x, такую, что она сохраняет истинность в моделях (не в шкалах) Крипке. Давайте проделаем это. Будем определять $A^\sharp(x)$ по индукции:

$$(\bot)^\sharp(x) = \bot;$$

$$(p_i)^\sharp(x) = P_i(x);$$

$$(A \to B)^\sharp(x) = A^\sharp(x) \to B^\sharp(x);$$

$$(\Box A)^\sharp(x) = \forall y(R(x,y) \to A^\sharp(y)).$$

Лемма о стандартном переводе

Лемма

Пусть $M = (W, R, V)$ — шкала крипке. Определим модель логики предикатов $\mathcal{M} = (W, R, P_1, P_2, \ldots)$, так что $P_i(w) = 1$ (истинно) тогда и только тогда, когда $w \in V(p_i)$. Тогда для любого $w \in W$ и любой модальной формулы A

$$M, w \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} A^\sharp(w);$$

$$M \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x).$$

Лемма о стандартном переводе

Лемма

Пусть $M = (W, R, V)$ — шкала крипке. Определим модель логики предикатов $\mathcal{M} = (W, R, P_1, P_2, \ldots)$, так что $P_i(w) = 1$ (истинно) тогда и только тогда, когда $w \in V(p_i)$. Тогда для любого $w \in W$ и любой модальной формулы A

$$M, w \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} A^\sharp(w);$$

$$M \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x).$$

Чтобы записать общезначимость в шкале пришлось бы записать формулу 2-ого порядка вида

$$\forall P_1 \ldots \forall P_k \forall x A^\sharp(x).$$

При условии, что формула A использует только переменные $p_1, \ldots, p_k$.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется **выполнимой**, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется **выполнимой**, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Теорема (о понижении мощности)

Если множество формул Γ выполнимо, то оно выполнимо на не более, чем счетной модели Крипке.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется **выполнимой**, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Теорема (о понижении мощности)

Если множество формул Γ выполнимо, то оно выполнимо на не более, чем счетной модели Крипке.

Следует из аналогичной теоремы (Левенгейма-Сколема) для логики первого порядка.

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Докажем обратное включение. Мы знаем, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)$. Пусть нашлась шкала F, т.ч. $F \models_{1ord} \varphi$ и $F \not\models A$.

Об элементарности логики $Var(A)$

Класс шкал называется элементарным, если он задается одной первопорядковой формулой.
Класс шкал называется Δ-элементарным, если он задается множеством первопорядковых формул.

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

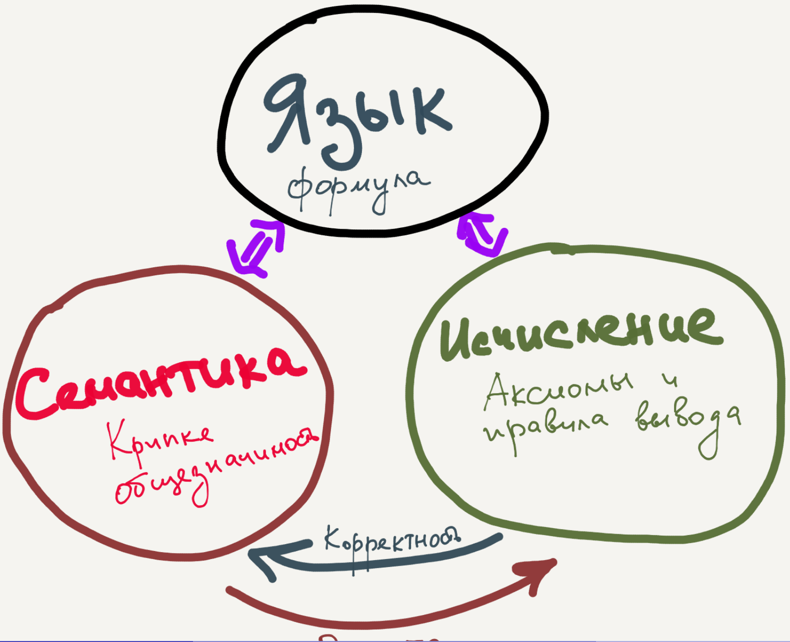
Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists (\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Докажем обратное включение. Мы знаем, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)$. Пусть нашлась шкала F, т.ч. $F \models_{1ord} \varphi$ и $F \not\models A$. Найдется модель M и u, т.ч. $M \not\models_{1ord} A^\sharp(u)$. Но $M \models_{1ord} \varphi$. Это противоречит тому, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)$. $\square$


Язык
формула
Семантика
Крипке
общезначимость
Исчисление
Аксиомы и
правила вывода
Корректность

Модальная логика

Нормальной модальной логикой называется подмножество формул $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{ML}$, если

1. L содержит все классические тавтологии;
2. L замкнуто относительно правил

$$\frac{A \to B,\ A}{B} \quad (MP) \qquad \text{Modus Ponens;}$$

$$\frac{A}{\Box A} \quad (\to \Box) \qquad \text{правило обобщения;}$$

$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub) \qquad \text{правило подстановки;}$$

3. L содержит модальные аксиомы нормальности:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \quad (AK)$$

Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком $\vdash$.

Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком $\vdash$.

$$
\begin{array}{cl}
p \to (p \vee q) & \text{тавтология} \\
\Box(p \to (p \vee q)) & (\to \Box) \\
\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) & (AK) \\
\Box(p \to (p \vee q)) \to (\Box p \to \Box(p \vee q)) & (Sub) \\
\Box p \to \Box(p \vee q) & (MP)
\end{array}
$$

Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком $\vdash$.

$$\begin{array}{cl} p \to (p \vee q) & \text{тавтология} \\ \Box(p \to (p \vee q)) & (\to \Box) \\ \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) & (AK) \\ \Box(p \to (p \vee q)) \to (\Box p \to \Box(p \vee q)) & (Sub) \\ \Box p \to \Box(p \vee q) & (MP) \end{array}$$

$$\vdash \Box p \to \Box(p \vee q)$$

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода.
Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Пример.
Возьмем $\Gamma = \{\Box\bot\}$

$\bot \to p$	тавтология
$\Box(\bot \to p)$	$(\to \Box)$
$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	(AK)
$\Box(\bot \to p) \to (\Box\bot \to \Box p)$	(Sub)
$\Box\bot \to \Box p$	(MP)
$\Box\bot$	$\in \Gamma$
$\Box p$	(MP)

Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез) Γ — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода.
Обозначение: $\Gamma \vdash A$.

Пример.
Возьмем $\Gamma = \{\Box\bot\}$

$$\begin{array}{cl}
\bot \to p & \text{тавтология} \\
\Box(\bot \to p) & (\to \Box) \\
\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) & (AK) \\
\Box(\bot \to p) \to (\Box\bot \to \Box p) & (Sub) \\
\Box\bot \to \Box p & (MP) \\
\Box\bot & \in \Gamma \\
\Box p & (MP)
\end{array}$$

$$\Gamma \vdash \Box p \quad \text{или} \quad \Box\bot \vdash \Box p$$

(фигурные скобки обычно опускаются)

Модальная логика — тоже множество формул.
Можно писать
$$\mathsf{L} \vdash A$$

Модальная логика — тоже множество формул.
Можно писать
$$\mathsf{L} \vdash A$$
Но, т.к. модальная логика замкнута относительно правил вывода и содержит необходимые аксиомы, то
$$\mathsf{L} \vdash A \iff A \in \mathsf{L}$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Заметим, что

$$\mathsf{L} + \Gamma = \{A \mid \mathsf{L} \cup \Gamma \vdash A\}$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Заметим, что
$$\mathsf{L} + \Gamma = \{A \mid \mathsf{L} \cup \Gamma \vdash A\}$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Заметим, что

$$\mathsf{L} + \Gamma = \{A \mid \mathsf{L} \cup \Gamma \vdash A\}$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Следствие

Пусть $\mathcal{C}$ — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Заметим, что

$$\mathsf{L} + \Gamma = \{A \mid \mathsf{L} \cup \Gamma \vdash A\}$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Следствие

Пусть $\mathcal{C}$ — класс шкал Крипке, тогда $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Логика L называется полной (по Крипке), если существует класс шкал $\mathcal{C}$, т.ч. $\mathsf{L} = Log(\mathcal{C})$.

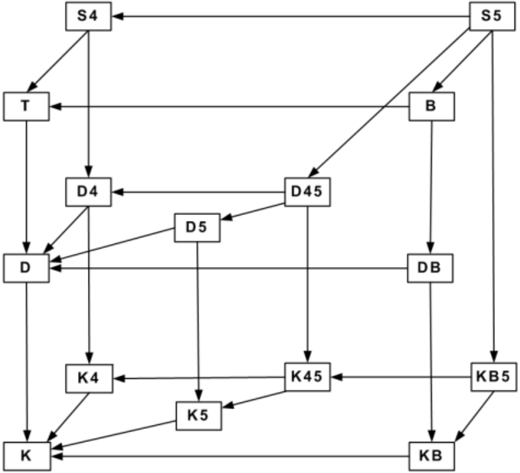
Примеры логик

Определим несколько логик:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4 \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4 \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB & \mathsf{L5} & \rightleftharpoons & \mathsf{L} + A5
\end{array}
$$

Предложение

Все включения на следующем рисунке верны и строги



Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L.

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A:
$S \rhd_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L, либо принадлежит S, либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.
Т. е. правила $(\to \Box)$ и (Sub) исключаются.

Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику L.

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул S (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы A:
$S \rhd_L A \iff$ существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики L, либо принадлежит S, либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.
Т. е. правила $(\to \Box)$ и (Sub) исключаются.

Т.к. мы ограничили себя только правилом MP, то можно доказать:

Лемма (о дедукции)

$S \cup \{A\} \rhd_L B \iff S \rhd_L A \to B.$

Заметим, что для модального $\vdash$ лемма о дедукции не верна.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

Доказательство.

1\. $\Leftrightarrow$ 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

Вспомогательные утверждения

Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $S \rhd_L A$;
2. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $S_0 \rhd_L A$;
3. существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$, т.ч. $L \vdash \bigwedge S_0 \to A$.

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow$ 2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

2. $\Leftrightarrow$ 3.

$$S_0 \rhd_L A \Leftrightarrow \rhd_L \bigwedge S_0 \to A \Leftrightarrow L \vdash \bigwedge S_0 \to A.$$

$\square$

L-полная теория

Теорией мы будем называть множество формул. Теория S называется L-противоречивой, если $S \rhd_L \bot$. Или, эквивалентно, если существует конечное подмножество формул $S_0 \subseteq S$ $L \vdash \neg \bigwedge S_0$. Соответственно, теория S называется L-непротиворечивой, если $S \not\rhd_L \bot$. И, эквивалентно, если для любого конечного подмножества формул $S_0 \subseteq S$ $L \nvdash \neg \bigwedge S_0$.
S — L-полное теория, если S — максимальная непротиворечивая теория.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.
5. $(A \vee B) \in S \Leftrightarrow (A \in S$ или $B \in S)$.
6. $(A \wedge B) \in S \Leftrightarrow (A \in S$ и $B \in S)$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\perp \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\perp \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   $\ldots$

Доказательство.

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\perp \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   $\ldots$

Доказательство.

Пункт 1 $\ldots$
Пункт 2 $\ldots$
Пункт 3. $\neg A = A \to \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   $\dots$

Доказательство.

Пункт 1 $\dots$
Пункт 2 $\dots$
Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\perp \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

$\ldots$

Доказательство.

Пункт 1 $\ldots$
Пункт 2 $\ldots$
Пункт 3. $\neg A = A \to \perp$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.
(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.
$\neg A \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$.

Лемма

Пусть S — L-полная теория, тогда

1. $\bot \notin S$.
2. $S \rhd_L A \Rightarrow A \in S$. В частности $L \subseteq S$.
3. $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$.
4. $(A \to B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S$ или $B \in S)$.

   ...

Доказательство.

Пункт 1 ...
Пункт 2 ...
Пункт 3. $\neg A = A \to \bot$. A и $\neg A$ не могут одновременно лежать в S.
Если $A \notin S$, то $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.
Пункт 4.
(i) Пусть $(A \to B) \in S$ и $A \in S \Rightarrow$
Modus Ponens $S \rhd_L B$ и по пункту 2 $B \in S$.
(ii) Пусть $A \notin S$, тогда $\neg A \in S$.
$\neg A \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$.
(iii) Пусть $B \in S$, $B \to (A \to B)$ — тавтология, по (MP) получаем $(A \to B) \in S$. $\square$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n.

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n.
S' — максимально,

Пополнение теории

Лемма (Линденбаум)

Пусть S — L-непротиворечива, тогда существует L-полное расширение этой теории S'.

Доказательство.

$\mathcal{ML}$ счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \ L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если S' — противоречива, то противоречива S_n для некоторого n. Это противоречит построению S_n. S' — максимально, а значит полно. □

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$
\begin{array}{rcl}
M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\
W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\
xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\
V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}.
\end{array}
$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L.

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется канонической шкалой логики L.

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \;\&\; y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \;\&\; B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \;\&\; \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \;\&\; B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y).$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_Ly \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для логических связок очевиден.
Пусть $A = \Box B$, тогда

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y)$$

По определению, $\forall y(xR_L y \ \& \ \Box B \in x \Rightarrow B \in y)$ или

$$\exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y) \Rightarrow \Box B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\
&L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы о полноте

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash \Box(C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Доказательство теоремы о полноте

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \,|\, \Box C \in x\}\,.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}\,, \text{ т.ч.}\\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow\\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow\\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash \Box(C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя аксиому нормальности и MP получаем

$$\begin{aligned}
L &\vdash \Box C_1 \to \Box(C_2 \to \ldots(C_n \to B)\ldots)),\\
&\rhd_L \Box C_1 \to \Box(C_2 \to \ldots(C_n \to B)\ldots)),\\
\Box C_1 &\rhd_L \Box(C_2 \to \ldots(C_n \to B)\ldots)).
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы о полноте

Т.к. любая подстановка в аксиому AK лежит в L, то по (MP) мы получаем

$$L \vdash \Box\left(C_2 \to \ldots (C_n \to B) \ldots)\right) \to \left(\Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B))\right),$$
$$\Box C_1 \rhd_L \Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$
$$\Box C_1, \Box C_2 \rhd_L \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$

И так далее. В конце мы получим

$$\Box C_1, \ldots, \Box C_n \rhd_L \Box B.$$

Применив несколько раз лемму о дедукции мы получим

$$L \vdash \Box C_1 \to (\Box C_2 \to \ldots (\Box C_n \to \Box B) \ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.

Доказательство теоремы о полноте

Т.к. любая подстановка в аксиому AK лежит в L, то по (MP) мы получаем

$$L \vdash \Box(C_2 \to \ldots(C_n \to B)\ldots)) \to (\Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B))),$$

$$\Box C_1 \rhd_L \Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$

$$\Box C_1, \Box C_2 \rhd_L \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$

И так далее. В конце мы получим

$$\Box C_1, \ldots, \Box C_n \rhd_L \Box B.$$

Применив несколько раз лемму о дедукции мы получим

$$L \vdash \Box C_1 \to (\Box C_2 \to \ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_Ly \;\&\; B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.11.

Доказательство теоремы о полноте

Т.к. любая подстановка в аксиому AK лежит в L, то по (MP) мы получаем

$$L \vdash \Box\,(C_2 \to \dots (C_n \to B)\dots)) \to (\Box C_2 \to \Box(C_3 \dots (C_n \to B)))\,,$$
$$\Box C_1 \rhd_L \Box C_2 \to \Box(C_3 \dots (C_n \to B)),$$
$$\Box C_1, \Box C_2 \rhd_L \Box(C_3 \dots (C_n \to B)),$$

И так далее. В конце мы получим

$$\Box C_1, \dots, \Box C_n \rhd_L \Box B.$$

Применив несколько раз лемму о дедукции мы получим

$$L \vdash \Box C_1 \to (\Box C_2 \to \dots (\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_Ly \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.11.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

Доказательство теоремы о полноте

Т.к. любая подстановка в аксиому AK лежит в L, то по (MP) мы получаем

$$L \vdash \Box\,(C_2 \to \ldots (C_n \to B)\ldots)) \to (\Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)))\,,$$

$$\Box C_1 \rhd_L \Box C_2 \to \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$

$$\Box C_1, \Box C_2 \rhd_L \Box(C_3 \ldots (C_n \to B)),$$

И так далее. В конце мы получим

$$\Box C_1, \ldots, \Box C_n \rhd_L \Box B.$$

Применив несколько раз лемму о дедукции мы получим

$$L \vdash \Box C_1 \to (\Box C_2 \to \ldots (\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ. По определению

$$xR_L y \;\&\; B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ($\Rightarrow$) следует из пункта 2 леммы 0.11.
($\Leftarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полное множество x содержащее $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.
Что и требовалось доказать. :-)

Полнота для K

Теорема

Логика K равна логике все шкал Крипке.

Пусть C_{all} — класс всех шкал Крипке. Докажем, что

$$\mathsf{K} = Log(C_{all}).$$

Включение $\subseteq$ следует из теоремы о корректности.
Чтобы доказать обратное включение предположим, что $A \notin \mathsf{K}$. Тогда $\{\neg A\}$ K-непротиворечиво и в канонической шкале M_{K} есть точка x, т.ч. $A \notin x$. Значит по теореме о канонической модели $F_{\mathsf{K}} \not\models A$, и следовательно

$$A \notin Log(C_{all}).$$

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L & - & \text{множество всех } L\text{-полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L.

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Канонические логики

Логика L называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула A называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Канонические логики

Логика L называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула A называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Канонические логики

Логика L называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула A называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Доказательство.

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.

Канонические логики

Логика L называется канонической, если $F_L \models L$.

Формула A называется канонической, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Доказательство.

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.
Так как в A нет переменных, то ее истинность не зависит от оценки, значит $F_L \models A$. □

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Предложение

Все формулы из множества $\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ каноничны.

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Предложение

Все формулы из множества $\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ каноничны.

Теорема

Если логика L аксиоматизирована замкнутами формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

Док-во предложения о каноничности

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Док-во предложения о каноничности

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.

Док-во предложения о каноничности

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \mid \Box A \in t\}$$

Док-во предложения о каноничности

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \mid \Box A \in t\}$$

По определению R

$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \;\&\; \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Док-во предложения о каноничности

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \mid \Box A \in t\}$$

По определению R

$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \ \&\ \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Пусть $A \in \Gamma_x$, тогда $\Box A \in x$, но по Лемме о полной теории п.2, все формулы логики L тоже содержатся в x, в том числе формула $\Box A \to \Box\Box A$, как результат применения правила (Sub) к $A4$. В то же время, т.к. x — полная теория, то она замкнута относительно правила Modus Ponens. $\Box$

Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.

Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.

Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.

Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box\left(\bigwedge B_i\right) \to \Box\left(\neg \bigwedge C_j\right).$$

Док-во предложения о каноничности

Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \perp \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \perp \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box\left(\bigwedge B_i\right) \to \Box\left(\neg \bigwedge C_j\right).$$

Заметим, что $\Box \bigwedge B_i \in y$ и, значит (по MP), $\Box\neg \bigwedge C_j \in y$. Аналогично, $\Box \bigwedge C_i \in z$.
Из этого следует, что

$$x \models \Diamond\Box \bigwedge C_j \ \&\ x \models \Diamond\Box\neg \bigwedge C_j \Rightarrow x \models \Diamond\Box \bigwedge C_j \wedge \Diamond\Box\neg \bigwedge C_j.$$

$\Box$

Таким образом в x истинен постановочный вариант отрицания формулы $A2$. Пришли к противоречию, значит $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечива и существует требуемая точка t. $\square$

Полнота канонических логик

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$
Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, \\ \mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, \\ \mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, \\ \mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\ \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\ \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT, \end{array}$$

Полнота канонических логик

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$
Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, & \quad & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, & & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, & & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT, \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB, & & & &
\end{array}
$$

Но не все логики каноничны.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется логикой Гёделя-Лёба:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Основы модальной логики, лекция 8

Кудинов А.В.

23 октября 2023 г.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется **логикой Гёделя-Лёба**:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется логикой Гёделя-Лёба:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Для начала нужно исследовать некоторые свойства этой формулы.

Лемма

1. $F \models AL \Rightarrow R$ — транзитивно.
2. $F \models AL \Rightarrow R$ — нётерова, т. е. не существует бесконечной цепи: $x_1 R x_2,\ x_2 R x_3, \ldots$.
3. Если R — транзитивна и нётерова, то $F \models AL$.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется логикой Гёделя-Лёба:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Для начала нужно исследовать некоторые свойства этой формулы.

Лемма

1. $F \models AL \Rightarrow R$ — транзитивно.
2. $F \models AL \Rightarrow R$ — нётерова, т. е. не существует бесконечной цепи: $x_1 R x_2$, $x_2 R x_3$, … .
3. Если R — транзитивна и нётерова, то $F \models AL$.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется логикой Гёделя-Лёба:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Для начала нужно исследовать некоторые свойства этой формулы.

Лемма

1. $F \models AL \Rightarrow R$ — транзитивно.
2. $F \models AL \Rightarrow R$ — нётерова, т. е. не существует бесконечной цепи: $x_1 R x_2,\ x_2 R x_3, \ldots$.
3. Если R — транзитивна и нётерова, то $F \models AL$.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Следующая логика называется логикой Гёделя-Лёба:

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} + AL$$

Теорема

Логика GL не является канонической.

Для начала нужно исследовать некоторые свойства этой формулы.

Лемма

1. $F \models AL \Rightarrow R$ — транзитивно.
2. $F \models AL \Rightarrow R$ — нётерова, т. е. не существует бесконечной цепи: $x_1 R x_2,\ x_2 R x_3, \ldots$.
3. Если R — транзитивна и нётерова, то $F \models AL$.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\dots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A - \text{формула}\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A - \text{формула}\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A$ — формула$\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A$ — формула$\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

Покажем, что такого не может быть. Для этого достаточно предъявить GL-шкалу, в которой эта формула не общезначима.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A - \text{формула}\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

Покажем, что такого не может быть. Для этого достаточно предъявить GL-шкалу, в которой эта формула не общезначима.
Возьмем $F = (\{0, 1, \ldots, n\}, <)$.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A$ — формула$\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

Покажем, что такого не может быть. Для этого достаточно предъявить GL-шкалу, в которой эта формула не общезначима.
Возьмем $F = (\{0, 1, \ldots, n\}, <)$.
Заметим, что эта шкала транзитивна и нётерова. Предположим, что эта большая дизъюнкция общезначима в моделе $M = (F, V)$, тогда по принципу Дирихле хотя бы одна из формул вида $(\neg B_i \wedge \Box B_i)$ будет истинна сразу в двух точках.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A - \text{формула}\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

Покажем, что такого не может быть. Для этого достаточно предъявить GL-шкалу, в которой эта формула не общезначима.
Возьмем $F = (\{0, 1, \ldots, n\}, <)$.
Заметим, что эта шкала транзитивна и нётерова. Предположим, что эта большая дизъюнкция общезначима в моделе $M = (F, V)$, тогда по принципу Дирихле хотя бы одна из формул вида $(\neg B_i \wedge \Box B_i)$ будет истинна сразу в двух точках. Одна из точек достижима из другой, что приводит к противоречию.

В нётеровой шкале нет рефлексивных точек, т.к. иначе будет цепь $xRxRx\ldots$.
Докажем, что в канонической шкале F_{GL} есть рефлексивные точки.
Пусть $\Gamma = \{\Box A \to A \mid A - \text{формула}\}$. Если Γ непротиворечива в логике GL, то по лемме Линденбаума расширяем Γ до полной теории, которая будет рефлексивной точкой в канонической шкале.
Допустим, что существует $B_1, \ldots, B_n$, т.ч.

$$\mathsf{GL} \vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n} (\Box B_i \to B_i)$$

Из этого следует, что

$$(\neg B_1 \wedge \Box B_1) \vee \ldots \vee (\neg B_n \wedge \Box B_n) \in \mathsf{GL}.$$

Покажем, что такого не может быть. Для этого достаточно предъявить GL-шкалу, в которой эта формула не общезначима.
Возьмем $F = (\{0, 1, \ldots, n\}, <)$.
Заметим, что эта шкала транзитивна и нётерова. Предположим, что эта большая дизъюнкция общезначима в моделе $M = (F, V)$, тогда по принципу Дирихле хотя бы одна из формул вида $(\neg B_i \wedge \Box B_i)$ будет истинна сразу в двух точках. Одна из точек достижима из другой, что приводит к противоречию.
Тем не менее можно доказать, что GL полна по Крипке, но для этого нужны другие методы.

Финитная аппроксимируемость

Логика называется финитно аппроксимируемой, если она является логикой некоторого класса конечных шкал.

Финитная аппроксимируемость

Логика называется финитно аппроксимируемой, если она является логикой некоторого класса конечных шкал.

Логика называется разрешимой, если существует алгоритм, которому на вход подаются формулы, и он завершает работу на любом входе и выдает 1, если формула принадлежит данной логики, и 0 в противном случае.

Финитная аппроксимируемость

Логика называется финитно аппроксимируемой, если она является логикой некоторого класса конечных шкал.

Логика называется разрешимой, если существует алгоритм, которому на вход подаются формулы, и он завершает работу на любом входе и выдает 1, если формула принадлежит данной логики, и 0 в противном случае.

Теорема (Харроп)

Пусть логика L аксиоматизируется конечным набором аксиом и является финитно аппроксимируемой, тогда L разрешима.

Фильтрации

Финитная аппроксимируемость чаще всего доказывается с помощью метода фильтрации.

Фильтрации

Финитная аппроксимируемость чаще всего доказывается с помощью метода фильтрации.

Пусть Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул и M — модель Крипке. Определим отношение на M

$$x \equiv_\Psi y \iff \forall A \in \Psi(M, x \models A \Leftrightarrow M, y \models A).$$

Фильтрации

Финитная аппроксимируемость чаще всего доказывается с помощью метода фильтрации.

Пусть Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул и M — модель Крипке. Определим отношение на M

$$x \equiv_\Psi y \iff \forall A \in \Psi(M, x \models A \Leftrightarrow M, y \models A).$$

Предложение

Отношение $\equiv_\Psi$ является отношением эквивалентности.

Фильтрации

Финитная аппроксимируемость чаще всего доказывается с помощью метода фильтрации.

Пусть Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул и M — модель Крипке. Определим отношение на M

$$x \equiv_\Psi y \iff \forall A \in \Psi(M, x \models A \Leftrightarrow M, y \models A).$$

Предложение

Отношение $\equiv_\Psi$ является отношением эквивалентности.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул, тогда модель $M' = (W', R', V')$ называется фильтрацией M относительно Ψ, если

1. $W' = W/_{\equiv_\Psi} = \{[x] \mid x \in W\}$, где $[x]$ — класс эквивалентности x;
2. $xRy \Rightarrow [x]R'[y]$;
3. если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R'[y]$. то $M, y \models A$;
4. для любой переменной p из Ψ верно, что $x \in V(p) \Leftrightarrow [x] \in V'(p)$.

Лемма о фильтрации

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул, тогда модель $M' = (W', R', V')$ называется **фильтрацией M относительно Ψ**, если

1. $W' = W/_{\equiv_\Psi} = \{[x] \mid x \in W\}$, где $[x]$ — класс эквивалентности x;
2. $xRy \Rightarrow [x]R'[y]$;
3. если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R'[y]$. то $M, y \models A$;
4. для любой переменной p из Ψ верно, что $x \in V(p) \Leftrightarrow [x] \in V'(p)$.

Лемма (о фильтрации)

Пусть M' — фильтрация M относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Лемма о фильтрации

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул, тогда модель $M' = (W', R', V')$ называется **фильтрацией M относительно Ψ**, если

1. $W' = W/_{\equiv_\Psi} = \{[x] \mid x \in W\}$, где $[x]$ — класс эквивалентности x;
2. $xRy \Rightarrow [x]R'[y]$;
3. если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R'[y]$. то $M, y \models A$;
4. для любой переменной p из Ψ верно, что $x \in V(p) \Leftrightarrow [x] \in V'(p)$.

Лемма (о фильтрации)

Пусть M' — фильтрация M относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Если Ψ конечно, то количество классов эквивалентности конечно, и модель M' конечна.

Лемма о фильтрации

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул, тогда модель $M' = (W', R', V')$ называется **фильтрацией M относительно Ψ**, если

1. $W' = W/_{\equiv_\Psi} = \{[x] \mid x \in W\}$, где $[x]$ — класс эквивалентности x;
2. $xRy \Rightarrow [x]R'[y]$;
3. если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R'[y]$. то $M, y \models A$;
4. для любой переменной p из Ψ верно, что $x \in V(p) \Leftrightarrow [x] \in V'(p)$.

Лемма (о фильтрации)

Пусть M' — фильтрация M относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Если Ψ конечно, то количество классов эквивалентности конечно, и модель M' конечна.
Таким образом, если M' — «хорошая», то есть ФА.

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$;

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $\quad A = p$;

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $\quad A = p$; $\quad A = (B \to C)$.

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $\quad A = p$; $\quad A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $A = p$; $A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y(xRy \;\&\; M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y(xRy \;\&\; M', [y] \not\models B)$$
$$\overset{\text{опр}}{\implies} \exists y([x]R'[y] \;\&\; M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

$\square$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $A = p$; $A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y (xRy \,\&\, M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y (xRy \,\&\, M', [y] \not\models B)$$
$$\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} \exists y ([x] R' [y] \,\&\, M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

Теперь пусть $M, x \models \Box B \,\&\, M, [x] \not\models \Box B$, тогда

$\square$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $A = p$; $A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y(xRy \;\&\; M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y(xRy \;\&\; M', [y] \not\models B)$$

$$\overset{\text{опр}}{\implies} \exists y([x]R'[y] \;\&\; M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

Теперь пусть $M, x \models \Box B \;\&\; M, [x] \not\models \Box B$, тогда

$$\exists y([x]R'[y] \;\&\; M', [y] \not\models B)$$

$\square$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $A = p$; $A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y (xRy \;\&\; M', [y] \not\models B)$$
$$\overset{\text{опр}}{\implies} \exists y ([x]R'[y] \;\&\; M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

Теперь пусть $M, x \models \Box B \;\&\; M, [x] \not\models \Box B$, тогда

$$\exists y ([x]R'[y] \;\&\; M', [y] \not\models B) \overset{\text{инд}}{\implies} M, y \not\models B$$

$\square$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $\quad A = p$; $\quad A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y (xRy \;\&\; M', [y] \not\models B)$$
$$\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} \exists y ([x] R' [y] \;\&\; M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

Теперь пусть $M, x \models \Box B \;\&\; M, [x] \not\models \Box B$, тогда

$$\exists y ([x] R' [y] \;\&\; M', [y] \not\models B) \overset{\text{инд}}{\Longrightarrow} M, y \not\models B$$
$$\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} M, y \models B$$

$\Box$

Лемма о фильтрации (док-во)

Лемма (о фильтрации)

Пусть $M' = (W', R', V')$ — фильтрация $M = (W, R, V)$ относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi \, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Индукция по длине формулы.
Простые случаи: $A = \bot$; $A = p$; $A = (B \to C)$.
Пусть $A = \Box B$.

$$M, x \not\models \Box B \iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \not\models B) \overset{\text{инд}}{\iff} \exists y (xRy \;\&\; M', [y] \not\models B)$$
$$\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} \exists y ([x] R' [y] \;\&\; M', [y] \not\models B)) \iff M', [x] \not\models \Box B$$

Теперь пусть $M, x \models \Box B \;\&\; M, [x] \not\models \Box B$, тогда

$$\exists y ([x] R' [y] \;\&\; M', [y] \not\models B) \overset{\text{инд}}{\Longrightarrow} M, y \not\models B$$
$$\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} M, y \models B$$

Противоречие. $\square$

Основы модальной логики, лекция 9

Кудинов А.В.

30 октября 2023 г.

Фильтрации

Пусть Ψ — множество формул, замкнутых относительно подформул и $M = (W, R, V)$ — модель Крипке. Определим отношение на M

$$x \equiv_\Psi y \iff \forall A \in \Psi (M, x \models A \Leftrightarrow M, y \models A).$$

Модель $M' = (W', R', V')$ называется фильтрацией M относительно Ψ, если

1. $W' = W/_{\equiv_\Psi} = \{[x] \mid x \in W\}$, где $[x]$ — класс эквивалентности x;
2. $xRy \Rightarrow [x]R'[y]$;
3. если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R'[y]$. то $M, y \models A$;
4. для любой переменной p из Ψ верно, что $x \in V(p) \Leftrightarrow [x] \in V'(p)$.

Лемма (о фильтрации)

Пусть M' — фильтрация M относительно Ψ, тогда

$$\forall A \in \Psi\, \forall x \in W (M, x \models A \Leftrightarrow M', [x] \models A).$$

Минимальная фильтрация

Минимальной фильтрацией будем называть фильтрацию, в которой

$$[x]R'[y] \Leftrightarrow \exists x' \in [x]\, \exists y' \in [y]\, (x'Ry').$$

Оценка задается однозначно.

Минимальная фильтрация

Минимальной фильтрацией будем называть фильтрацию, в которой

$$[x]R'[y] \Leftrightarrow \exists x' \in [x]\, \exists y' \in [y]\, (x'Ry').$$

Оценка задается однозначно.

Лемма

Минимальная фильтрация является фильтрацией.

Минимальная фильтрация

Минимальной фильтрацией будем называть фильтрацию, в которой

$$[x]R'[y] \Leftrightarrow \exists x' \in [x]\, \exists y' \in [y]\, (x'Ry').$$

Оценка задается однозначно.

Лемма

Минимальная фильтрация является фильтрацией.

Все условия, кроме пункта 3 очевидны. Проверим пункт 3.

Минимальная фильтрация

Минимальной фильтрацией будем называть фильтрацию, в которой

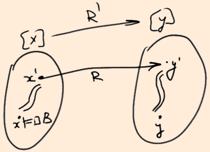
$$[x]R'[y] \Leftrightarrow \exists x' \in [x]\, \exists y' \in [y]\, (x'Ry').$$

Оценка задается однозначно.

Лемма

Минимальная фильтрация является фильтрацией.

Все условия, кроме пункта 3 очевидны. Проверим пункт 3.



□

ФА для K

Теорема

Логика K является финитно аппроксимируемой.

K полна по Крипке.

ФА для K

Теорема

Логика K является финитно аппроксимируемой.

K полна по Крипке.
Для любой формулы $A \notin \mathsf{K}$, есть модель и точка, т.ч. $M, x \models \neg A$.

ФА для K

Теорема

Логика K является финитно аппроксимируемой.

K полна по Крипке.
Для любой формулы $A \notin \mathsf{K}$, есть модель и точка, т.ч. $M, x \models \neg A$.
Пусть $\Psi = \{B \mid B$ — подформула $\neg A\}$ и M' — минимальная фильтрация M относительно Ψ.

ФА для K

Теорема

Логика K является финитно аппроксимируемой.

K полна по Крипке.
Для любой формулы $A \notin \mathsf{K}$, есть модель и точка, т.ч. $M, x \models \neg A$.
Пусть $\Psi = \{B \mid B$ — подформула $\neg A\}$ и M' — минимальная фильтрация M относительно Ψ.
M' конечна и по лемме о фильтрации $M', [x] \not\models A$. $\square$

ФА для D, T, KB и KBT

Лемма

Если модель M — сериальна (рефлексивна, симметрична), то ее минимальная фильтрация M' тоже сериальна (рефлексивна, симметрична).

Возьмем $M = (F, V)$, т.ч. F сериальна и $M' = (F', V')$ — фильтрация.

ФА для D, T, KB и KBT

Лемма

Если модель M — сериальна (рефлексивна, симметрична), то ее минимальная фильтрация M' тоже сериальна (рефлексивна, симметрична).

Возьмем $M = (F, V)$, т.ч. F сериальна и $M' = (F', V')$ — фильтрация.
Но надо убедиться, что F' — сериальна. Для произвольной точки $y \in W$, верно

$$\exists z(yRz) \Rightarrow [y]R'[z]$$

ФА для D, T, KB и KBT

Лемма

Если модель M — сериальна (рефлексивна, симметрична), то ее минимальная фильтрация M' тоже сериальна (рефлексивна, симметрична).

Возьмем $M = (F, V)$, т.ч. F сериальна и $M' = (F', V')$ — фильтрация.
Но надо убедиться, что F' — сериальна. Для произвольной точки $y \in W$, верно

$$\exists z(yRz) \Rightarrow [y]R'[z]$$

(Рефлексивность) Для произвольной точки $y \in W$, верно

$$yRy \Rightarrow [y]R'[y]$$

ФА для D, T, KB и KBT

Лемма

Если модель M — сериальна (рефлексивна, симметрична), то ее минимальная фильтрация M' тоже сериальна (рефлексивна, симметрична).

Возьмем $M = (F, V)$, т.ч. F сериальна и $M' = (F', V')$ — фильтрация.
Но надо убедиться, что F' — сериальна. Для произвольной точки $y \in W$, верно

$$\exists z (yRz) \Rightarrow [y]R'[z]$$

(Рефлексивность) Для произвольной точки $y \in W$, верно

$$yRy \Rightarrow [y]R'[y]$$

(Симметричность)
$[x]R'[y] \Rightarrow \exists x' \exists y' \, (x \equiv_\Psi x' Ry' \equiv_\Psi y) \Rightarrow y' Rx' \Rightarrow [x] = [y']R'[x'] = [x]$ $\square$

ФА для D, T, KB и KBT

Теорема

Логики D, T, KB и KBT являются финитно аппроксимируемыми.

Фильтрация для транзитивных логик

Минимальная фильтрация для $\mathsf{K4}$ не пройдет.

Фильтрация для транзитивных логик

Минимальная фильтрация для $\mathsf{K4}$ не пройдет.

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

1) $W' = W/\equiv_\Psi$

$\square$

Фильтрация для транзитивных логик

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

1) $W' = W/\equiv_{\Psi}$
2) $xRy \Rightarrow [x]R'[y] \Rightarrow [x]R''[y]$, т.к. $R' \subseteq R''$.

$\square$

Фильтрация для транзитивных логик

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

1) $W' = W/\equiv_\Psi$
2) $xRy \Rightarrow [x]R'[y] \Rightarrow [x]R''[y]$, т.к. $R' \subseteq R''$.
3) если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R''[y]$. то $M, y \models A$;

$\square$

Фильтрация для транзитивных логик

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

1) $W' = W/\equiv_{\Psi}$
2) $xRy \Rightarrow [x]R'[y] \Rightarrow [x]R''[y]$, т.к. $R' \subseteq R''$.
3) если $\Box A \in \Psi$, $M, x \models \Box A$ и $[x]R''[y]$. то $M, y \models A$;
4) Очевидно выполняется. $\square$

Фильтрация для транзитивных логик

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

Доказана $\square$

Теорема

Логики $\mathsf{K4}, \mathsf{D4}, \mathsf{S4}$ и $\mathsf{S5}$ являются финитно аппроксимируемыми.

Фильтрация для транзитивных логик

Лемма

Пусть M_{L} — каноническая модель логики $\mathsf{L} \ni A4$. Пусть $M' = (W', R', V')$ — минимальная фильтрация модели $M_{\mathsf{L}} = (W, R, V)$ относительно Ψ. Возьмем $M'' = (W', R'', V')$, где $R'' = (R')^*$ (транзитивное замыкание), тогда M'' является фильтрацией M_{L} относительно Ψ.

Доказана $\square$

Теорема

Логики $\mathsf{K4}, \mathsf{D4}, \mathsf{S4}$ и $\mathsf{S5}$ являются финитно аппроксимируемыми.

Как быть с аксиомой $A2 = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ (свойство Чёрча-Россера)?

Фильтрация логик с $A2$

Пусть $\mathsf{K4.2} \subseteq \mathsf{L}$. (Транзитивность и свойство Чёрча-Россера.) Как устроены конусы такой логики?

Фильтрация логик с $A2$

Пусть $\mathsf{K4.2} \subseteq \mathsf{L}$. (Транзитивность и свойство Чёрча-Россера.) Как устроены конусы такой логики?

Лемма

Пусть $F = F^r$ — шкала с корнем в r и $F \models A4$, тогда

$$F \models A2 \iff \forall x \forall y \exists z (xRz \,\&\, yRz) \tag{1}$$

Фильтрация логик с $A2$

Пусть $\mathsf{K4.2} \subseteq \mathsf{L}$. (Транзитивность и свойство Чёрча-Россера.) Как устроены конусы такой логики?

Лемма

Пусть $F = F^r$ — шкала с корнем в r и $F \models A4$, тогда

$$F \models A2 \iff \forall x \forall y \exists z (xRz \;\&\; yRz) \tag{1}$$

Лемма

Свойство (1) сохраняется при фильтрации.

Фильтрация логик с $A2$

Пусть $\mathsf{K4.2} \subseteq \mathsf{L}$. (Транзитивность и свойство Чёрча-Россера.) Как устроены конусы такой логики?

Лемма

Пусть $F = F^r$ — шкала с корнем в r и $F \models A4$, тогда

$$F \models A2 \iff \forall x \forall y \exists z (xRz \ \& \ yRz) \qquad (1)$$

Лемма

Свойство (1) сохраняется при фильтрации.

Теорема

Логики K4.2, D4.2 и S4.2 являются ФА, а значит разрешимыми.

Полнота по Крипке для GL

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Теорема

Логика GL финитно аппроксимируема и, значит, разрешима.

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Теорема

Логика GL финитно аппроксимируема и, значит, разрешима.

Первая теорема следует из второй. Вторая доказывается с помощью селективной фильтрации канонической модели.

Селективной фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ относительно множества формул Ψ, замкнутого относительно подформул, называется подмодель $M' = (W', R', V')$ модели M, такая что

1. $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$, $V'(p) = V(p) \cap W'$;
2. для всех формул $\Box B \in \Psi$ и точек $x \in W'$, таких что $M, x \not\models \Box B$ верно

$$\exists y \in W'(xRy \ \& \ M, y \not\models B)$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.
Пусть $A = \Box B$. $(\Rightarrow)$
Пусть $M, x \models \Box B$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.
Пусть $A = \Box B$. $(\Rightarrow)$
Пусть $M, x \models \Box B$

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \not\models \Box B$

$\Box$

К сожалению, даже при конечном Ψ нет никакой гарантии, что W' конечно. При построении W' нам надо специально беспокоится о конечности.

К сожалению, даже при конечном Ψ нет никакой гарантии, что W' конечно. При построении W' нам надо специально беспокоится о конечности.

Предложение

Пусть M_{GL} — каноническая шкала логики GL и $A \notin \mathsf{GL}$. Тогда существует конечная селективная фильтрация M' опровергающая A такая, что $F' \models \mathsf{GL}$.

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

$\square$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$

$\Box$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$
- значит, найдется $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$

$\Box$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$
- значит, найдется $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$
- y не может быть рефлексивным

$\Box$

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.
Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.

$$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$

и добавляем y в W_{n+1}.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.

$$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$

  и добавляем y в W_{n+1}.
- y иррефлексивен

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.

$$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$

  и добавляем y в W_{n+1}.
- y иррефлексивен
- Θ_y строго меньше Θ_x. А т.к. Ψ конечно, то это процесс закончится.

Лемма

Шкала $(W', R') \models \mathsf{GL}$.

Основы модальной логики, лекция 10

Кудинов А.В.

13 ноября 2023 г.

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Теорема

Логика GL финитно аппроксимируема и, значит, разрешима.

Полнота по Крипке для GL

Теорема

Логика GL полна по Крипке.

Теорема

Логика GL финитно аппроксимируема и, значит, разрешима.

Первая теорема следует из второй. Вторая доказывается с помощью селективной фильтрации канонической модели.

Селективной фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ относительно множества формул Ψ, замкнутого относительно подформул, называется подмодель $M' = (W', R', V')$ модели M, такая что

1. $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$, $V'(p) = V(p) \cap W'$;
2. для всех формул $\Box B \in \Psi$ и точек $x \in W'$, таких что $M, x \not\models \Box B$ верно

$$\exists y \in W'(xRy \ \& \ M, y \not\models B)$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.

Пусть $A = \Box B$. $(\Rightarrow)$

Пусть $M, x \models \Box B$

Лемма

Для любой формулы $A \in \Psi$ и $x \in W'$ верно

$$M, x \models A \iff M', x \models A$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы A. База и случай $A = B \to C$ очевидны.
Пусть $A = \Box B$. $(\Rightarrow)$
Пусть $M, x \models \Box B$

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \not\models \Box B$

$\square$

К сожалению, даже при конечном Ψ нет никакой гарантии, что W' конечно. При построении W' нам надо специально беспокоится о конечности.

К сожалению, даже при конечном Ψ нет никакой гарантии, что W' конечно. При построении W' нам надо специально беспокоится о конечности.

Предложение

Пусть M_{GL} — каноническая шкала логики GL и $A \notin \mathsf{GL}$. Тогда существует конечная селективная фильтрация M' опровергающая A такая, что $F' \models \mathsf{GL}$.

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

$\square$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$

$\Box$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$
- значит, найдется $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$

$\Box$

Лемма

Пусть $M_{\mathsf{GL}} = (W, R, V)$ — каноническая шкала логики GL и $x \not\models \Box A$ для $x \in W$. Тогда существует иррефлексивный $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$.

- $x \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$
- значит, $x \not\models \Box(\Box A \to A)$
- значит, найдется $y \in R(x)$, такой что $y \not\models A$ и $y \models \Box A$
- y не может быть рефлексивным

$\Box$

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \land y \models \Box A)$.
Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.
Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.

  $$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$

  и добавляем y в W_{n+1}.

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.
$$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$
  и добавляем y в W_{n+1}.
- y иррефлексивен

Построение W'

Лемма: $x \not\models \Box A \Rightarrow \exists y \in R(x)(y \not\models A \wedge y \models \Box A)$.

Пусть Ψ — множество всех подформул формулы A.

- В канонической шкале найдется точка $x \not\models A$
- По лемме найдется иррефлексивная точка $x_0 \not\models A$. $W_0 = \{x_0\}$.
- Определим $\Theta_x = \{\Box B \in \Psi \mid x \not\models \Box B\}$.
- Пусть W_n уже определено. Если $\Theta_x = \varnothing$ для всех $x \in W_n$, то $W' = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$.
- Иначе для каждого $x \in W_n$ и каждой $\Box B \in \Theta_x$ мы выбираем y согласно Лемме, т.ч.

  $$y \models \Box B \text{ и } y \not\models B,$$

  и добавляем y в W_{n+1}.
- y иррефлексивен
- Θ_y строго меньше Θ_x. А т.к. Ψ конечно, то это процесс закончится.

Лемма

Шкала $(W', R') \models \mathsf{GL}$.

Шкалы-деревья

Будем говорить, что x предшественник y, если xRy. Деревом будем называть шкалу Крипке с корнем, в которой каждая точка, кроме корня, имеет в точности одного предшественника, а корень не имеет предшественников.

Шкалы-деревья

Будем говорить, что x предшественник y, если xRy. Деревом будем называть шкалу Крипке с корнем, в которой каждая точка, кроме корня, имеет в точности одного предшественника, а корень не имеет предшественников.

Теорема

Логика K полна относительно деревьев.

Развертка

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Путем из w_0 в шкале F будем называть последовательность $w_0 w_1 \ldots w_n$, т.ч. $w_i R w_{i+1}$ для всех $i < n$.

Развертка

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Путем из w_0 в шкале F будем называть последовательность $w_0 w_1 \dots w_n$, т.ч. $w_i R w_{i+1}$ для всех $i < n$.

Разверткой шкалы $F = (W, R)$ с корнем w_0 будем называть шкалу $F^\sharp = (W^\sharp, R^\sharp)$, где $W^\sharp$ — множество путей из w_0 и

$$\alpha R^\sharp \beta \iff \alpha = w_0 w_1 \dots w_n \text{ и } \beta = w_0 w_1 \dots w_n w_{n+1}.$$

Развертка

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Путем из w_0 в шкале F будем называть последовательность $w_0 w_1 \ldots w_n$, т.ч. $w_i R w_{i+1}$ для всех $i < n$.

Разверткой шкалы $F = (W, R)$ с корнем w_0 будем называть шкалу $F^\sharp = (W^\sharp, R^\sharp)$, где $W^\sharp$ — множество путей из w_0 и

$$\alpha R^\sharp \beta \iff \alpha = w_0 w_1 \ldots w_n \text{ и } \beta = w_0 w_1 \ldots w_n w_{n+1}.$$

Лемма

Определим функцию $f : W^\sharp \to W$ следующим образом: $f(w_0 w_1 \ldots w_n) = w_n$. Тогда $f : F^\sharp \twoheadrightarrow F$.

Развертка

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Путем из w_0 в шкале F будем называть последовательность $w_0 w_1 \dots w_n$, т.ч. $w_i R w_{i+1}$ для всех $i < n$.

Разверткой шкалы $F = (W, R)$ с корнем w_0 будем называть шкалу $F^\sharp = (W^\sharp, R^\sharp)$, где $W^\sharp$ — множество путей из w_0 и

$$\alpha R^\sharp \beta \iff \alpha = w_0 w_1 \dots w_n \text{ и } \beta = w_0 w_1 \dots w_n w_{n+1}.$$

Лемма

Определим функцию $f : W^\sharp \to W$ следующим образом: $f(w_0 w_1 \dots w_n) = w_n$. Тогда $f : F^\sharp \twoheadrightarrow F$.

Для доказательства нужно проверить все свойства p-морфизма, что в данном случае является простым упражнением.

Развертка

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Путем из w_0 в шкале F будем называть последовательность $w_0 w_1 \dots w_n$, т.ч. $w_i R w_{i+1}$ для всех $i < n$.

Разверткой шкалы $F = (W, R)$ с корнем w_0 будем называть шкалу $F^\sharp = (W^\sharp, R^\sharp)$, где $W^\sharp$ — множество путей из w_0 и

$$\alpha R^\sharp \beta \iff \alpha = w_0 w_1 \dots w_n \text{ и } \beta = w_0 w_1 \dots w_n w_{n+1}.$$

Лемма

Определим функцию $f : W^\sharp \to W$ следующим образом: $f(w_0 w_1 \dots w_n) = w_n$. Тогда $f : F^\sharp \twoheadrightarrow F$.

Для доказательства нужно проверить все свойства p-морфизма, что в данном случае является простым упражнением.

Заметим, что развертка любой шкалы с корнем является деревом.

Полнота относительно деревьев

Теорема

Логика K полна относительно деревьев.

Для доказательства рассмотрим формулу $A \notin \mathsf{K}$, тогда в силу полноты для некоторой шкалы Крипке $F \not\models A$. Без ограничения общности можно считать, что $F = F^{w_0}$, т.е. что F является шкалой с корнем. Тогда $F^\sharp$ будет деревом с одной стороны и $F^\sharp \not\models A$ с другой стороны (по лемме о p-морфизме). $\square$

Полнота относительно деревьев (продолжение)

Теорема

Логика D полна относительно сериальных деревьев.

Сделаем все то же самое, как в предыдущей теореме, то есть возьмем $F \models \mathsf{D}$ и $F \not\models A$. Нужно проверить, что $F^\sharp \models \mathsf{D}$. Т.е. нужно проверить, что развертка сериальной шкалы сериальна. Действительно, если $\alpha = w_0 \dots w$, тогда по сериальности найдется v такая, что wRv и для $\beta = w_0 \dots wv$ будет $\alpha R^\sharp \beta$, т.е. $F^\sharp$ сериальна. $\square$

Полнота относительно деревьев (продолжение)

Пусть $R \subseteq W \times W$, тогда $R^r = R \cup Id_W$ — рефлексивное замыкание.

Полнота относительно деревьев (продолжение)

Пусть $R \subseteq W \times W$, тогда $R^r = R \cup Id_W$ — рефлексивное замыкание.
Напомним, что $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ — транзитивное замыкание.
И $R^* = R^r \cup R^+$ — рефлексивное и транзитивное замыкание.

Шкала $F = (W, R)$ называется рефлексивным (транзитивным, рефлексивно-транзитивным) деревом, если $R = S^r$ ($R = S^+$, $R = S^*$) для некоторого дерева (W, S).

Теорема

Логика T (K4, S4) полна относительно рефлексивных (транзитивных, рефлексивно-транзитивных) деревьев.

Полнота относительно деревьев (продолжение)

Пусть $R \subseteq W \times W$, тогда $R^r = R \cup Id_W$ — рефлексивное замыкание.
Напомним, что $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ — транзитивное замыкание.
И $R^* = R^r \cup R^+$ — рефлексивное и транзитивное замыкание.

Шкала $F = (W, R)$ называется рефлексивным (транзитивным, рефлексивно-транзитивным) деревом, если $R = S^r$ ($R = S^+$, $R = S^*$) для некоторого дерева (W, S).

Теорема

Логика T ($\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$) полна относительно рефлексивных (транзитивных, рефлексивно-транзитивных) деревьев.

Все то же самое, только нужно взять $F' = (W^\sharp, R')$, где $R' = (R^\sharp)^r$ — рефлексивное замыкание $R^\sharp$. Нужно только проверить, что та же функция f будет p-морфизмом из F' на F.

Полнота относительно деревьев (продолжение)

Пусть $R \subseteq W \times W$, тогда $R^r = R \cup Id_W$ — рефлексивное замыкание.
Напомним, что $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ — транзитивное замыкание.
И $R^* = R^r \cup R^+$ — рефлексивное и транзитивное замыкание.

Шкала $F = (W, R)$ называется рефлексивным (транзитивным, рефлексивно-транзитивным) деревом, если $R = S^r$ ($R = S^+$, $R = S^*$) для некоторого дерева (W, S).

Теорема

Логика T (K4, S4) полна относительно рефлексивных (транзитивных, рефлексивно-транзитивных) деревьев.

Все то же самое, только нужно взять $F' = (W^\sharp, R')$, где $R' = (R^\sharp)^r$ — рефлексивное замыкание $R^\sharp$. Нужно только проверить, что та же функция f будет p-морфизмом из F' на F.
Аналогично надо поступить с транзитивным и рефлексивно-транзитивным замыканиями. $\square$

Конечные деревья

Допустим мы хотим доказать полноту K относительно конечных деревьев. Как это сделать?

Конечные деревья

Допустим мы хотим доказать полноту K относительно конечных деревьев. Как это сделать?

Можно взять фильтрацию. Получим конечную шкалу F, потом развертку $F^\sharp$.

Конечные деревья

Допустим мы хотим доказать полноту K относительно конечных деревьев. Как это сделать?

Можно взять фильтрацию. Получим конечную шкалу F, потом развертку $F^\sharp$.

Всегда ли $F^\sharp$ будет конечной?

Модальная глубина

Пусть A — модальная формула. Определим её модальную глубину по индукции

$$d(\bot) = d(p) = 0$$
$$d(B \to C) = \max(d(B), d(C))$$
$$d(\Box B) = d(B) + 1$$

Конечные деревья

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Определим

$$R^{\leq n} = \bigcup_{k=0}^{n} R^k$$

$F^w_{\leq n} = (W', R \cap W' \times W')$, где $W' = R^{\leq n}(w)$. Для оценки V на W, $V|_{W'}$ — оценка на W', т.ч. $V|_{W'}(p) = V(p) \cup W'$.

Лемма

Пусть A — формула, F — шкала и V — оценка. Если $n = d(A)$, то

$$F, V, w \models A \iff F^w_{\leq n}, V|_{R^{\leq n}(w)}, w \models A.$$

Полнота K относительно конечных деревьев

Заметим, что, если F — конечна, то $(F^\sharp)^w_{\leq n}$ — тоже конечна.

Полнота K относительно конечных деревьев

Заметим, что, если F — конечна, то $(F^\sharp)^w_{\leq n}$ — тоже конечна.

Теорема

Логика K полна относительно конечных деревьев.

Полнота K относительно конечных деревьев

Заметим, что, если F — конечна, то $(F^\sharp)^w_{\leq n}$ — тоже конечна.

Теорема

Логика K полна относительно конечных деревьев.

С какими из известных вам логик пройдет это доказательство?

Основы модальной логики, лекция 11

Кудинов А.В.

20 ноября 2023 г.

Определим несколько аксиом и логик:

$$
\begin{aligned}
A3 &= \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p) \\
A3^{+} &= \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p) \\
\mathsf{D4.3} &= \mathsf{D4} + A3 \\
\mathsf{S4.3} &= \mathsf{S4} + A3 = \mathsf{S4} + A3^{+}
\end{aligned}
$$

Шкала (W, R) ветвится в будущем в мире x, если

$$\exists y \exists z (xRy \,\&\, xRz \,\&\, y \neq z \,\&\, \neg yRz \,\&\, \neg zRy).$$

Заметим, что это свойство, в некотором смысле, противоположно линейности.

Лемма

$F = (W, R) \models A3 \Leftrightarrow F$ не ветвится в будущем (ни в одной точке).

Теорема

Формула $A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$ каноническая, т.е. $A3 \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_\Lambda \models A3$.

Теорема

Формула $A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$ каноническая, т.е. $A3 \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_\Lambda \models A3$.

Пусть $F_\Lambda = (W, R)$ Допустим, что

$$\exists x \exists y \exists z (xRy \,\&\, xRz \,\&\, y \neq z \,\&\, \neg yRz \,\&\, \neg zRy).$$

Тогда, найдутся формулы:

$$A \text{ такая, что } A \in y \;\&\; A \notin z$$
$$B \text{ такая, что } \Box B \in y \;\&\; B \notin z$$
$$C \text{ такая, что } \Box C \in z \;\&\; C \notin y$$

Теорема

Формула $A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$ каноническая, т.е. $A3 \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_\Lambda \models A3$.

Пусть $F_\Lambda = (W, R)$ Допустим, что

$$\exists x \exists y \exists z (xRy \,\&\, xRz \,\&\, y \neq z \,\&\, \neg yRz \,\&\, \neg zRy).$$

Тогда, найдутся формулы:

$$\begin{aligned} &A \text{ такая, что } A \in y \;\&\; A \notin z \\ &B \text{ такая, что } \Box B \in y \;\&\; B \notin z \\ &C \text{ такая, что } \Box C \in z \;\&\; C \notin y \end{aligned}$$

Обозначим: $\quad P = B \vee A; \qquad Q = C \vee \neg A.$

Тогда, $\quad y \models P \wedge \Box P \wedge \neg Q$ и $z \models Q \wedge \Box Q \wedge \neg P.$

Теорема

Формула $A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$ каноническая, т.е. $A3 \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_\Lambda \models A3$.

Пусть $F_\Lambda = (W, R)$ Допустим, что

$$\exists x \exists y \exists z (xRy \,\&\, xRz \,\&\, y \neq z \,\&\, \neg yRz \,\&\, \neg zRy).$$

Тогда, найдутся формулы:

$$A \text{ такая, что } A \in y \;\&\; A \notin z$$
$$B \text{ такая, что } \Box B \in y \;\&\; B \notin z$$
$$C \text{ такая, что } \Box C \in z \;\&\; C \notin y$$

Обозначим: $P = B \vee A$; $Q = C \vee \neg A$.
Тогда, $y \models P \wedge \Box P \wedge \neg Q$ и $z \models Q \wedge \Box Q \wedge \neg P$.
Следовательно, $x \not\models A3[P/p, Q/q]$. $\Box$

Квазипорядком называется множество с отношением (W, R), если R — транзитивное и рефлексивное.

Теорема

1. S4.3 — логика всех линейных квазипорядков.
2. K4.3 — логика всех линейных транзитивных шкал.
3. D4.3 — логика всех линейных транзитивных сериальных шкал.

Основы модальной логики, лекция 12

Кудинов А.В.

20 ноября 2023 г.

Определим несколько аксиом и логик:

$$A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$$
$$A3^{+} = \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$$
$$\mathsf{D4.3} = \mathsf{D4} + A3$$
$$\mathsf{S4.3} = \mathsf{S4} + A3 = \mathsf{S4} + A3^{+}$$

Шкала (W, R) ветвится в будущем в мире x, если

$$\exists y \exists z (xRy \,\&\, xRz \,\&\, y \neq z \,\&\, \neg yRz \,\&\, \neg zRy).$$

Заметим, что это свойство, в некотором смысле, противоположно линейности.

Лемма

$F = (W, R) \models A3 \Leftrightarrow F$ не ветвится в будущем (ни в одной точке).

Теорема

Формула $A3 = \Box\left((p \wedge \Box p) \to q\right) \vee \Box\left((q \wedge \Box q) \to p\right)$ каноническая, т.е. $A3 \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_\Lambda \models A3$.

Квазипорядком называется множество с отношением (W, R), если R — транзитивное и рефлексивное.

Теорема

1. S4.3 — логика всех квазипорядков без ветвлений.
2. K4.3 — логика всех транзитивных шкал без ветвлений.
3. D4.3 — логика всех транзитивных сериальных шкал без ветвлений.

$$A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$$

Теорема

Логики K4.3, D4.3 и S4.3 финитно аппроксимируемы и, следовательно, разрешимы.

$$A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$$

Теорема

Логики K4.3, D4.3 и S4.3 финитно аппроксимируемы и, следовательно, разрешимы.

Используем фильтрацию конуса. Благодаря транзитивности, если $F = F^{x_0}$, то $W = R(x_0) \cup \{x_0\}$.

$$A3 = \Box((p \wedge \Box p) \to q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \to p)$$

Теорема

Логики K4.3, D4.3 и S4.3 финитно аппроксимируемы и, следовательно, разрешимы.

Используем фильтрацию конуса. Благодаря транзитивности, если $F = F^{x_0}$, то $W = R(x_0) \cup \{x_0\}$.
Проверим, что отсутствие ветвления сохраняется при фильтрации. $\Box$

Теорема

1. S4.3 — логика линейных нестрогих порядков.
2. K4.3 — логика линейных строгих порядков.
3. D4.3 — логика линейных строгих порядков без максимального элемента.

Заметим, что S4 не полна относительно конечных линейных нестрогих порядков.

Теорема

1. S4.3 — логика линейных нестрогих порядков.
2. K4.3 — логика линейных строгих порядков.
3. D4.3 — логика линейных строгих порядков без максимального элемента.

Заметим, что S4 не полна относительно конечных линейных нестрогих порядков.

Теорема

1. S4.3 — логика линейных нестрогих порядков.
2. K4.3 — логика линейных строгих порядков.
3. D4.3 — логика линейных строгих порядков без максимального элемента.

Заметим, что S4 не полна относительно конечных линейных нестрогих порядков.

Теорема

1. S4.3 — логика линейных нестрогих порядков.
2. K4.3 — логика линейных строгих порядков.
3. D4.3 — логика линейных строгих порядков без максимального элемента.

Заметим, что S4 не полна относительно конечных линейных нестрогих порядков.

Теорема

1. S4.3 — логика линейных нестрогих порядков.
2. K4.3 — логика линейных строгих порядков.
3. D4.3 — логика линейных строгих порядков без максимального элемента.

Заметим, что S4 не полна относительно конечных линейных нестрогих порядков.

Аналогично, K4.3 (D4.3) не полна относительно конечных строгих линейных порядков (без максимального элемента).

Пусть $F = (W, R)$ — транзитивная шкала, тогда

1. если C — сгусток $\Rightarrow \alpha_C = (C', <)$ — строгий порядок на копии C;
2. $\beta = (U, <)$ — произвольный строгий линейный порядок без наибольшего элемента.

Пусть $F = (W, R)$ — транзитивная шкала, тогда

1. если C — сгусток $\Rightarrow \alpha_C = (C', <)$ — строгий порядок на копии C;
2. $\beta = (U, <)$ — произвольный строгий линейный порядок без наибольшего элемента.

Лексикографическим произведением двух порядков называется

$$\alpha \cdot \beta = (A, <_\alpha) \cdot (B, <_\beta) = (A \times B, <), \text{ где}$$
$$(a, b) < (a', b') \Leftrightarrow b <_\beta b' \text{ или } (b = b' \text{ и } a <_\alpha a').$$

Теорема (бульдозерная теорема)

Если F — транзитивная шкала без ветвлений вперед, то существует строгий линейный порядок $F^{\setminus} = (W^{\setminus}, <)$, такой что $F^{\setminus} \twoheadrightarrow F$.

Теорема (бульдозерная теорема)

Если F — транзитивная шкала без ветвлений вперед, то существует строгий линейный порядок $F^\natural = (W^\natural, <)$, такой что $F^\natural \twoheadrightarrow F$.

Доказательство.

Упорядоченная сумма порядков...

Теорема (бульдозерная теорема)

Если F — транзитивная шкала без ветвлений вперед, то существует строгий линейный порядок $F^\setminus = (W^\setminus, <)$, такой что $F^\setminus \twoheadrightarrow F$.

Доказательство.

Упорядоченная сумма порядков...

$$F^\setminus = \sum_{C \in W/\sim_R} \alpha'_C,$$

где $\alpha'_C = \alpha_C$, если C — вырожденный сгусток и $\alpha'_C = \alpha_C \cdot \beta$ иначе.

Теорема (бульдозерная теорема)

Если F — транзитивная шкала без ветвлений вперед, то существует строгий линейный порядок $F^{\setminus} = (W^{\setminus}, <)$, такой что $F^{\setminus} \twoheadrightarrow F$.

Доказательство.

Упорядоченная сумма порядков...

$$F^{\setminus} = \sum_{C \in W/\sim_R} \alpha'_C,$$

где $\alpha'_C = \alpha_C$, если C — вырожденный сгусток и $\alpha'_C = \alpha_C \cdot \beta$ иначе.
$g : F^{\setminus} \to F$ — «проекция» является р-морфизмом. $\square$

Теорема

1. $\mathsf{K4.3} = Log$(все строгие лин. порядки);
2. $\mathsf{D4.3} = Log$(все строгие лин. порядки без наиб. эл.);
3. $\mathsf{S4.3} = Log$(все нестрогие лин. порядки);

Теорема

1. $\mathsf{K4.3} = Log$(все строгие лин. порядки);
2. $\mathsf{D4.3} = Log$(все строгие лин. порядки без наиб. эл.);
3. $\mathsf{S4.3} = Log$(все нестрогие лин. порядки);
4. $\mathsf{D4.3} = Log(\{n \cdot \omega \mid n \in \omega\})$;

Теорема

1. $\mathsf{K4.3} = Log$(все строгие лин. порядки);
2. $\mathsf{D4.3} = Log$(все строгие лин. порядки без наиб. эл.);
3. $\mathsf{S4.3} = Log$(все нестрогие лин. порядки);
4. $\mathsf{D4.3} = Log(\{n \cdot \omega \,|\, n \in \omega\})$;
5. $\mathsf{S4.3} = Log(\{(n \cdot \omega, \leqslant) \,|\, n \in \omega\}) = Log(\mathbb{Q}, \leqslant) = Log(\mathbb{R}, \leqslant)$.

Основы модальной логики, лекция 13

Кудинов А.В.

27 ноября 2023 г.

Добавляя модальности

n-шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \ldots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$. **Моделью Крипке** называется пара $M = (F, V)$. Истинность в модели:

$$M, x \models \Box_i A \iff \forall y (x R_i y \Rightarrow M, y \models A).$$

Всё остальное без изменений.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$
$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$
$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \ ?$$

Добавляя модальности

n-шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \ldots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$
$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$
$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \ ?$$

Во временной логике обычно рассматривают 2 модальности, соответствующие «будущему» и «прошлому».

Добавляя модальности

n**-шкалой Крипке** (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \dots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \dots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$
$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$
$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \ ?$$

Во временной логике обычно рассматривают 2 модальности, соответствующие «будущему» и «прошлому».
В эпистемической логике часто рассматривают несколько агентов и для каждого заводят свою модальность «знания», кроме того часто добавляют модальности всеобщего знания, груповые знания и проч.

Мультимодальные логики

Нормальной n-модальной логикой называется подмножество формул $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{ML}_n$, если

1. L содержит все классические тавтологии;
2. L замкнуто относительно правила Modus Ponens
$$\frac{A \to B,\ A}{B} \quad (MP);$$
3. L замкнуто относительно правила добавления $\Box_i$ для всех i
$$\frac{A}{\Box_i A} \quad (\to \Box_i);$$
4. L замкнуто относительно правила подстановки
$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub);$$
5. L содержит модальные аксиомы нормальности: $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q) \quad (AK_i)$

Минимальная n-модальная логика обозначается $\mathsf{K_n}$.

Основы модальной логики, лекция 15

Кудинов А.В.

4 декабря 2023 г.

Добавляя модальности

n-шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \ldots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.
Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$. Истинность в модели:

$$M, x \models \Box_i A \iff \forall y (x R_i y \Rightarrow M, y \models A).$$

Всё остальное без изменений.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$

$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$

$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \text{ ?}$$

Добавляя модальности

n-шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \ldots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$
$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$
$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \ ?$$

Во временной логике обычно рассматривают 2 модальности, соответствующие «будущему» и «прошлому».

Добавляя модальности

n-шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R_1, \dots, R_n)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R_1, \dots, R_n \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Дополнительные модальности сильно обогащают язык. Что выражают слудующие формулы?

$$\Box_1 p \to \Box_2 p,$$
$$\Box_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Box_1 p,$$
$$\Diamond_1 \Box_2 p \to \Box_2 \Diamond_1 p \ ?$$

Во временной логике обычно рассматривают 2 модальности, соответствующие «будущему» и «прошлому».
В эпистемической логике часто рассматривают несколько агентов и для каждого заводят свою модальность «знания», кроме того часто добавляют модальности всеобщего знания, груповые знания и проч.

Мультимодальные логики

Нормальной n-модальной логикой называется подмножество формул $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{ML}_n$, если

1. L содержит все классические тавтологии;
2. L замкнуто относительно правила Modus Ponens
$$\frac{A \to B,\ A}{B} \quad (MP);$$
3. L замкнуто относительно правила добавления $\Box_i$ для всех i
$$\frac{A}{\Box_i A} \quad (\to \Box_i);$$
4. L замкнуто относительно правила подстановки
$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub);$$
5. L содержит модальные аксиомы нормальности:
$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q) \quad (AK_i)$

Минимальная n-модальная логика обозначается $\mathsf{K_n}$.

Универсальная модальность

Универсальной модальностью будем называть специальную модальность, которая обозначается так же как квантор всеобщности.
Таким образом множество формул расширяется модальностью $\forall$:

$$A ::= p \mid \bot \mid A \to A \mid \Box_i A \mid \forall A.$$

Универсальная модальность

Универсальной модальностью будем называть специальную модальность, которая обозначается так же как квантор всеобщности.
Таким образом множество формул расширяется модальностью $\forall$:

$$A ::= p \mid \bot \mid A \to A \mid \Box_i A \mid \forall A.$$

Эта модальность будет иметь специальную семантику: в модели Крипке M и точке w

$$M, w \models_u \forall A \iff \forall w' \in W (M, w' \models_u A).$$

Двойственную модальность к $\forall$ будем обозначть $\exists$.

Универсальная модальность

Универсальной модальностью будем называть специальную модальность, которая обозначается так же как квантор всеобщности.
Таким образом множество формул расширяется модальностью $\forall$:

$$A ::= p \mid \bot \mid A \to A \mid \Box_i A \mid \forall A.$$

Эта модальность будет иметь специальную семантику: в модели Крипке M и точке w

$$M, w \models_u \forall A \iff \forall w' \in W (M, w' \models_u A).$$

Двойственную модальность к $\forall$ будем обозначть $\exists$.
Легко показать, что рассмотрение такой модальности в шкале $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$ эквивалентно добавлению еще одного отношения для модальности $\forall$:

$$F_\forall = (W, R_1, \ldots, R_n, W \times W)$$

Универсальная модальность

Универсальной модальностью будем называть специальную модальность, которая обозначается так же как квантор всеобщности.
Таким образом множество формул расширяется модальностью $\forall$:

$$A ::= p \mid \bot \mid A \to A \mid \Box_i A \mid \forall A.$$

Эта модальность будет иметь специальную семантику: в модели Крипке M и точке w

$$M, w \models_u \forall A \iff \forall w' \in W (M, w' \models_u A).$$

Двойственную модальность к $\forall$ будем обозначть $\exists$.
Легко показать, что рассмотрение такой модальности в шкале $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$ эквивалентно добавлению еще одного отношения для модальности $\forall$:

$$F_\forall = (W, R_1, \ldots, R_n, W \times W)$$

Случай $n = 0$

Отношение $W \times W$ называется универсальным отношением.
Если $n = 0$, то в языке только универсальная модальность.

Случай $n = 0$

Отношение $W \times W$ называется универсальным отношением.
Если $n = 0$, то в языке только универсальная модальность.

Лемма

Если $F = (W, W \times W)$, то $F \models \mathsf{S5}$.

Достаточно проверить, что универсальное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Случай $n = 0$

Отношение $W \times W$ называется универсальным отношением.
Если $n = 0$, то в языке только универсальная модальность.

Лемма

Если $F = (W, W \times W)$, то $F \models \mathsf{S5}$.

Достаточно проверить, что универсальное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема

Логикой всех шкал вида $(W, W \times W)$ является $\mathsf{S5}$.

Случай $n = 0$

Отношение $W \times W$ называется универсальным отношением.
Если $n = 0$, то в языке только универсальная модальность.

Лемма

Если $F = (W, W \times W)$, то $F \models \mathsf{S5}$.

Достаточно проверить, что универсальное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема

Логикой всех шкал вида $(W, W \times W)$ является $\mathsf{S5}$.

Мы знаем, что $\mathsf{S5}$ полна по Крипке. Класс шкал и класс конусов этих шкал имеют одну и ту же логику. А конусы рефлексивных, симметричных и транзитивных шкал имеют нужный вид.

Случай $n = 0$

Отношение $W \times W$ называется универсальным отношением.
Если $n = 0$, то в языке только универсальная модальность.

Лемма

Если $F = (W, W \times W)$, то $F \models \mathsf{S5}$.

Достаточно проверить, что универсальное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема

Логикой всех шкал вида $(W, W \times W)$ является $\mathsf{S5}$.

Мы знаем, что $\mathsf{S5}$ полна по Крипке. Класс шкал и класс конусов этих шкал имеют одну и ту же логику. А конусы рефлексивных, симметричных и транзитивных шкал имеют нужный вид.

Теорема

Логика $\mathsf{S5}$ финитно аппроксимируема, а значит $\mathsf{S5}$ — логика класса всех конечных шкал вида $(W, W \times W)$.

Случай $n = 1$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L}_\forall = Log(\{F_\forall \mid F \models \mathsf{L}\}).$$

Случай $n = 1$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L}_\forall = Log(\{F_\forall \mid F \models \mathsf{L}\}).$$

Лемма

Пусть L — модальная логика и $\mathsf{S5}[\forall]$ — логика $\mathsf{S5}$, где $\Box$ заменен $\forall$, тогда $\mathsf{S5}[\forall] \subset \mathsf{L}_\forall$.

Следует из последней теоремы об $\mathsf{S5}$.

Случай $n = 1$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L}_\forall = Log(\{F_\forall \mid F \models \mathsf{L}\}).$$

Лемма

Пусть L — модальная логика и $\mathsf{S5}[\forall]$ — логика $\mathsf{S5}$, где $\Box$ заменен $\forall$, тогда $\mathsf{S5}[\forall] \subset \mathsf{L}_\forall$.

Следует из последней теоремы об $\mathsf{S5}$.

Лемма

$F_\forall \models \forall p \to \Box p$.

Случай $n = 1$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L}_\forall = Log(\{F_\forall \mid F \models \mathsf{L}\}).$$

Лемма

Пусть L — модальная логика и $\mathsf{S5}[\forall]$ — логика $\mathsf{S5}$, где $\Box$ заменен $\forall$, тогда $\mathsf{S5}[\forall] \subset \mathsf{L}_\forall$.

Следует из последней теоремы об $\mathsf{S5}$.

Лемма

$F_\forall \models \forall p \to \Box p.$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L.U} = \mathsf{K}_2 + \mathsf{L} + \mathsf{S5}[\forall] + \forall p \to \Box p.$$

Случай $n = 1$

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L}_\forall = Log(\{F_\forall \mid F \models \mathsf{L}\}).$$

Лемма

Пусть L — модальная логика и $\mathsf{S5}[\forall]$ — логика $\mathsf{S5}$, где $\Box$ заменен $\forall$, тогда $\mathsf{S5}[\forall] \subset \mathsf{L}_\forall$.

Следует из последней теоремы об $\mathsf{S5}$.

Лемма

$F_\forall \models \forall p \to \Box p$.

Пусть L — модальная логика в языке с одной модальностью. Определим

$$\mathsf{L.U} = \mathsf{K}_2 + \mathsf{L} + \mathsf{S5}[\forall] + \forall p \to \Box p.$$

Изучим формулу $\forall p \to \Box p$.

Случай $n = 1$ (продолжение)

Лемма

Для шкалы $F = (W, R, R_u)$, где R соответствует модальности $\Box$, а R_u — модальности $\forall$.

$$F \models \forall p \to \Box p \iff R \subseteq R_u.$$

Лемма

$\mathsf{L.U} \subseteq \mathsf{L}_\forall$.

Лемма

Если L — аксиматизирована каноническими формулами, то $\mathsf{L.U}$ — каноническая.

Лемма

Если L — аксиматизирована каноническими формулами, то $\mathsf{L.U}$ — каноническая.

Аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности действительно канонические это мы уже доказывали.

Лемма

Если L — аксиматизирована каноническими формулами, то $\mathsf{L.U}$ — каноническая.

Аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности действительно канонические это мы уже доказывали.
Достаточно показать, что если L_2 содержит $\forall p \to \Box p$, то в канонической шкале $F_{\mathsf{L}_2} = (W, R, R_u)$ верно включение $R \subseteq R_u$.

$$xRy \iff \{A \mid \Box A \in x\} \subseteq y$$

Лемма

Если L — аксиматизирована каноническими формулами, то $\mathsf{L.U}$ — каноническая.

Аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности действительно канонические это мы уже доказывали.
Достаточно показать, что если L_2 содержит $\forall p \to \Box p$, то в канонической шкале $F_{\mathsf{L}_2} = (W, R, R_u)$ верно включение $R \subseteq R_u$.

$$xRy \iff \{A \mid \Box A \in x\} \subseteq y$$

И так как все подстановочные варианты формулы $\forall p \to \Box p$ лежат в логике L_2, то они лежат и в x, а x замкнут относительно MP, поэтому

$$\{A \mid \forall A \in x\} \subseteq \{A \mid \Box A \in x\} \subseteq y.$$

Следовательно, xR_uy. $\square$

$(n=1)$. Полнота $\mathsf{L.U}$

Теорема

Если L каноническая, то $\mathsf{L}_\forall = \mathsf{L.U}$.

Действительно, если L каноническая, то $\mathsf{L.U}$ тоже каноническая.

$(n = 1)$. Полнота $\mathsf{L.U}$

Теорема

Если L каноническая, то $\mathsf{L}_\forall = \mathsf{L.U}$.

Действительно, если L каноническая, то $\mathsf{L.U}$ тоже каноническая. Возьмем каноническую шкалу логики $\mathsf{L.U}$, тогда для любой формулы $A \notin \mathsf{L.U}$ найдется точка x в канонической шкале, в которой A опровергается.

$(n = 1)$. Полнота $\mathsf{L.U}$

Теорема

Если L каноническая, то $\mathsf{L}_\forall = \mathsf{L.U}$.

Действительно, если L каноническая, то $\mathsf{L.U}$ тоже каноническая. Возьмем каноническую шкалу логики $\mathsf{L.U}$, тогда для любой формулы $A \notin \mathsf{L.U}$ найдется точка x в канонической шкале, в которой A опровергается.
Возьмем подшкалу F в канонической шкале порожденной точкой x. Тогда F будет иметь вид $F = (W, R, W \times W)$.

$(n = 1)$. Полнота $\mathsf{L.U}$

Теорема

Если L каноническая, то $\mathsf{L}_\forall = \mathsf{L.U}$.

Действительно, если L каноническая, то $\mathsf{L.U}$ тоже каноническая.
Возьмем каноническую шкалу логики $\mathsf{L.U}$, тогда для любой формулы $A \notin \mathsf{L.U}$ найдется точка x в канонической шкале, в которой A опровергается.
Возьмем подшкалу F в канонической шкале порожденной точкой x. Тогда F будет иметь вид $F = (W, R, W \times W)$.
Действительно, если $y \in W$, то из x можно дойти до y по R или по R_u достаточно показать, что xR_uy.

$(n = 1)$. Полнота $\mathsf{L.U}$

Теорема

Если L каноническая, то $\mathsf{L}_\forall = \mathsf{L.U}$.

Действительно, если L каноническая, то $\mathsf{L.U}$ тоже каноническая. Возьмем каноническую шкалу логики $\mathsf{L.U}$, тогда для любой формулы $A \notin \mathsf{L.U}$ найдется точка x в канонической шкале, в которой A опровергается.
Возьмем подшкалу F в канонической шкале порожденной точкой x. Тогда F будет иметь вид $F = (W, R, W \times W)$.
Действительно, если $y \in W$, то из x можно дойти до y по R или по R_u достаточно показать, что xR_uy.
Действительно, если $x'Ry'$, то $x'R_uy'$, и в силу транзитивности R_u все шаги можно сократить до одного, что и требовалось. $\square$

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется связной, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется связной, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

В языке с одним $\Box$ это свойство не выражается. Почему?

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется связной, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

В языке с одним $\Box$ это свойство не выражается. Почему?
Модальные формулы сохраняют истинность при дизъюнктной сумме, а связность при этом нарушается.

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется связной, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

В языке с одним $\Box$ это свойство не выражается. Почему?
Модальные формулы сохраняют истинность при дизъюнктной сумме, а связность при этом нарушается.
Рассмотрим формулу в языке с универсальной модальностью:

$$AC = \forall(\Box p \vee \Box\neg p) \to (\forall p \vee \forall\neg p).$$

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется **связной**, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

В языке с одним $\Box$ это свойство не выражается. Почему?
Модальные формулы сохраняют истинность при дизъюнктной сумме, а связность при этом нарушается.
Рассмотрим формулу в языке с универсальной модальностью:

$$AC = \forall(\Box p \vee \Box\neg p) \to (\forall p \vee \forall\neg p).$$

Лемма

Если $F \models \Box p \to p$, то $F_\forall \models AC$ тогда и только тогда, когда F — связна.

Аксиома связности

Шкала $F = (W, R)$ называется **связной**, если по отношению $\sim_R = (R \cup R^{-1})^*$ в W есть только один класс эквивалентности.

В языке с одним $\Box$ это свойство не выражается. Почему?
Модальные формулы сохраняют истинность при дизъюнктной сумме, а связность при этом нарушается.
Рассмотрим формулу в языке с универсальной модальностью:

$$AC = \forall(\Box p \vee \Box\neg p) \to (\forall p \vee \forall\neg p).$$

Лемма

Если $F \models \Box p \to p$, то $F_\forall \models AC$ тогда и только тогда, когда F — связна.

Теорема (Шехтман, 1999)

Логика $\mathsf{S4.U} + AC$ полна относительно связных транзитивных рефлексивных шкал со вторым универсальным отношением.