Домашняя работа №1

Задача 1.1. *а) Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.*

Доказательство. Пусть Γ — множество ребер графа K_n; $\mathcal{Q}$ — какой-то свойство подмножеств Γ.

($\Rightarrow$) Покажем, что если свойство $\mathcal{Q}$ представимо как пересечение возрастающего и убывающего свойств, то оно является выпуклым.

Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, где $\mathcal{U}$ — возрастающее свойство, а $\mathcal{D}$ — убывающее.

Возьмём $G, H \in \mathcal{Q}$ такие, что $G \subseteq H$, и существует какой-то F т.ч. $G \subseteq F \subseteq H$.

Понятно, что $G \in \mathcal{U}$, а $\mathcal{U}$ возрастающее, то $F \in \mathcal{U}$.

Аналогично получим, что $H \in \mathcal{D}$ и $\mathcal{D}$ убывающее, то $F \in \mathcal{D}$.

Следовательно, $F \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} = \mathcal{Q}$. Таким образом, $\mathcal{Q}$ выпукло.

($\Leftarrow$) Пусть теперь $\mathcal{Q}$ выпукло, т.е. при $G, H \in \mathcal{Q}$ таких, что $G \subseteq H$ всякий «промежуточный» граф F, удовлетворяющий $G \subseteq F \subseteq H$, тоже лежит в $\mathcal{Q}$.

Покажем, что оно и есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.

Определим его верхнее и нижнее замыкания:

$$\mathcal{U} := \{F : \exists\, G \in \mathcal{Q}, G \subseteq F\}, \qquad \mathcal{D} := \{F : \exists\, H \in \mathcal{Q}, F \subseteq H\}.$$

Тогда $\mathcal{U}$ является возрастающим, а $\mathcal{D}$ — убывающим по построению.

Очевидно, что $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$ (любой граф из $\mathcal{Q}$ принадлежит и $\mathcal{U}$ и $\mathcal{D}$).

Обратно, пусть $F \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$. Тогда существуют графы $G, H \in \mathcal{Q}$ такие, что $G \subseteq F \subseteq H$ (по определению $\mathcal{U}$ и $\mathcal{D}$). Так как $\mathcal{P}$ выпукло, то $F \in \mathcal{P}$.

Следовательно, $\mathcal{U} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{Q}$, и значит $\mathcal{Q} = \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$. □

Следствие 1.1. b) Пусть $\mathcal{Q}$ — выпуклое свойство подмножеств Γ, и пусть $m_1 \leqslant m \leqslant m_2 \leqslant N$, $0 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant p_2 \leqslant 1$. Тогда выполняются неравенства:

$$\Pr(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(m_1) \models \mathcal{Q}) + \Pr(\Gamma(m_2) \models \mathcal{Q}) - 1,$$

$$\Pr(\Gamma(p) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(p_1) \models \mathcal{Q}) + \Pr(\Gamma(p_2) \models \mathcal{Q}) - 1.$$

Доказательство. Согласно предыдущему результату, всякое выпуклое свойство $\mathcal{Q}$ можно представить в виде пересечения

$$\mathcal{Q} = \mathcal{U} \cap \mathcal{D},$$

где $\mathcal{U}$ — возрастающее свойство, а $\mathcal{D}$ — убывающее.

Рассмотрим случайную структуру $\Gamma(m)$ — равномерное подмножество (или подграф) мощности m. Тогда

$$\Pr(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) = \Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}).$$

Так как $\mathcal{U}$ возрастающее, вероятность события $\{\Gamma(m) \in \mathcal{U}\}$ является неубывающей функцией от m. Аналогично, для убывающего $\mathcal{D}$ вероятность $\{\Gamma(m) \in \mathcal{D}\}$ является невозрастающей функцией от m. Следовательно,

$$\Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{U}) \geqslant \Pr(\Gamma(m_1) \in \mathcal{U}), \qquad \Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{D}) \geqslant \Pr(\Gamma(m_2) \in \mathcal{D}).$$

Теперь воспользуемся неравенством для пересечения событий:

$$\Pr(\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \geqslant \Pr(\mathcal{U}) + \Pr(\mathcal{D}) - 1.$$

Применяя это к случайной структуре $\Gamma(m)$, получаем:

$$\Pr(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) = \Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \geqslant \Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{U}) + \Pr(\Gamma(m) \in \mathcal{D}) - 1.$$

Используя монотонность по m, имеем:

$$\Pr(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(m_1) \in \mathcal{U}) + \Pr(\Gamma(m_2) \in \mathcal{D}) - 1.$$

Так как $\Pr(\Gamma(m_i) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \leqslant \min\bigl(\Pr(\Gamma(m_i) \in \mathcal{U}), \Pr(\Gamma(m_i) \in \mathcal{D})\bigr)$, из последнего неравенства следует:

$$\Pr(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(m_1) \models \mathcal{Q}) + \Pr(\Gamma(m_2) \models \mathcal{Q}) - 1.$$

Доказана первая часть.

Аналогичное рассуждение проводится для случайного подмножества $\Gamma(p)$. Для возрастающих свойств вероятность $\Pr(\Gamma(p) \in \mathcal{U})$ является неубывающей функцией p, а для убывающих $\Pr(\Gamma(p) \in \mathcal{D})$ — невозрастающей. Следовательно,

$$\Pr(\Gamma(p) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(p_1) \models \mathcal{Q}) + \Pr(\Gamma(p_2) \models \mathcal{Q}) - 1.$$

Тем самым обе формулы доказаны. □

Задача 1.2. *Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma = \Gamma(n)$, некоторая последовательность $m = m(n) : 0 \leqslant m \leqslant N$ и фиксированная константа a: $0 \leqslant a \leqslant 1$. Если* *для любой функции* $p = p(n) \in [0,1]$ *с условием*

$$p = \frac{m}{N} + O\left(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}}\right)$$

выполнено $\Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}) \to a$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \to a \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{Q}$ — возрастающее свойство (для убывающего всё делается симметрично, заменяя $\mathcal{Q}$ на дополнение). Случаи краёв тривиальны: если $m = 0$, то $\Gamma(n,m) = \varnothing$ и $\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q})$ равна либо 0, либо 1 в зависимости от того, содержит ли $\mathcal{Q}$ пустое множество; предпосылка утверждения при $p = o(1/\sqrt{N})$ даёт тот же предел a. Аналогично, при $m = N$ имеем $\Gamma(n,m) = \Gamma$ и утверждение снова очевидно согласуется с предпосылкой при $1 - p = o(1/\sqrt{N})$.

Далее будем считать, что $1 \leqslant m \leqslant N-1$.

Положим, что:

$$p_0 = \frac{m}{N}, \qquad q_0 = 1 - p_0, \qquad p_+ = \min\left(p_0 + C\sqrt{\frac{p_0 q_0}{N}}, 1\right), \qquad p_- = \max\left(p_0 - C\sqrt{\frac{p_0 q_0}{N}}, 0\right),$$

где $C > 0$ — большая фиксированная константа. Обозначим через $X_\alpha := |\Gamma(n,\alpha)| \sim \mathrm{Bin}(N,\alpha)$ для $\alpha \in [0,1]$.

Как и в доказательстве леммы 1.2, разложение по числу выбранных элементов вместе с монотонностью (леммы 1.1) даёт

$$\begin{aligned}\Pr(\Gamma(n,p_+) \models \mathcal{Q}) &= \sum_{M'=0}^{N} \Pr(\Gamma(n,M') \models \mathcal{Q}) \Pr(X_{p_+} = M') \geqslant \sum_{M' \geqslant m} \Pr(\Gamma(n,M') \models \mathcal{Q}) \Pr(X_{p_+} = M') \\ &\geqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \Pr(X_{p_+} \geqslant m) \geqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) - \Pr(X_{p_+} < m),\end{aligned} \tag{a}$$

и аналогично

$$\Pr(\Gamma(n,p_-) \models \mathcal{Q}) \leqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) + \Pr(X_{p_-} > m). \tag{b}$$

Оценим хвосты. Так как $1 \leqslant m \leqslant N-1$, то

$$N p_0 q_0 = \frac{m(N-m)}{N} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Кроме того,

$$\mathbb{E}X_{p_+} - m = N(p_+ - p_0) = C\sqrt{Np_0q_0}, \qquad \mathrm{Var}(X_{p_+}) = Np_+(1-p_+) \leqslant Np_0q_0 + C\sqrt{Np_0q_0}.$$

По неравенству Чебышёва

$$\Pr(X_{p_+} < m) = \Pr\big(|X_{p_+} - \mathbb{E}X_{p_+}| \geqslant C\sqrt{Np_0q_0}\big) \leqslant \frac{Np_0q_0 + C\sqrt{Np_0q_0}}{C^2Np_0q_0} \leqslant \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}.$$

Точно так же

$$\Pr(X_{p_-} > m) \leqslant \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}.$$

Обозначим

$$\delta(C) := \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C} \xrightarrow[C\to\infty]{} 0.$$

Из (a)–(b) получаем для каждой фиксированной C:

$$\Pr(\Gamma(n,p_-) \models \mathcal{Q}) - \delta(C) \ \leqslant\ \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}). \tag{1.1}$$

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \ \leqslant\ \Pr(\Gamma(n,p_+) \models \mathcal{Q}) + \delta(C). \tag{1.2}$$

Теперь используем предпосылку о сходимости в модели $\Gamma(n,p)$. Переходя к пределу по n и пользуясь предпосылкой $\Pr(\Gamma_p \in Q) \to a$, заключаем

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\Gamma(n,p_-) \models \mathcal{Q}) = \lim_{n\to\infty} \Pr(\Gamma(n,p_+) \models \mathcal{Q}) = a. \tag{1.3}$$

Объединяя (1.1) и (1.3), получаем

$$a - \delta(C) \ \leqslant\ \liminf_{n\to\infty} \Pr(\Gamma_M \in Q).$$

Авсолютно аналогично, что объединяя (1.2) и (1.3), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \Pr(\Gamma_M \in Q) \ \leqslant\ a + \delta(C).$$

Так как $C > 0$ произволен, устремляя $C \to \infty$ (а значит $\delta(C) \to 0$), приходим к

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \ \longrightarrow\ a \qquad (n \to \infty).$$

$\square$

Задача 1.3. *Пусть $\mathcal{Q}$ — свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $|\Gamma(n)| = N$. Докажите, что тогда* *для $p = m/N$ и $m > 0$, выполняется неравенство*

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \leqslant 10\sqrt{m} \cdot \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}).$$

Доказательство. Пусть $N = \binom{n}{2}$ и $p = m/N$.

Так как при фиксированном числе рёбер $|E_{n,p}| = k$ все подграфы с k рёбрами равновероятны, а это в точности определение модели $G_{n,k}$. Следовательно по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
\Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}) &= \sum_{k=0}^{N} \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q} \mid |E_{n,p}| = k) \Pr(|E_{n,p}| = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Pr(\Gamma(n,k) \models \mathcal{Q}) \Pr(|E_{n,p}| = k) \\
&\geqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \Pr(|E_{n,p}| = m).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \ \leqslant \ \frac{1}{\Pr(|E_{n,p}| = m)} \ \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}). \tag{1.4}$$

Оценим $\Pr(X = m)$ снизу при $X \sim \mathrm{Bin}(N,p)$ и $p = m/N$. Для $1 \leqslant m \leqslant N-1$ имеем

$$\Pr(X = m) = \binom{N}{m}\left(\frac{m}{N}\right)^m \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{N-m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} \frac{m^m (N-m)^{N-m}}{N^N}.$$

Применяя неравенства Стирлинга:

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leqslant n! \leqslant e\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n \geqslant 1),$$

получаем

$$\Pr(X = m) \ \geqslant \ \frac{\sqrt{2\pi}\, N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N}}{e^2\, m^{m+\frac{1}{2}} (N-m)^{N-m+\frac{1}{2}} e^{-m} e^{-(N-m)}} \cdot \frac{m^m (N-m)^{N-m}}{N^N} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} \sqrt{\frac{N}{m(N-m)}}.$$

Так как $N - m \leqslant N$, то $\sqrt{\frac{N}{m(N-m)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{m}}$, и, следовательно,

$$\Pr(X = m) \ \geqslant \ \frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \ \geqslant \ \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

(Последнее верно, поскольку $\sqrt{2\pi}/e^2 \approx 0.339 > 1/10$.)

Подставляя это в (1.4), для $1 \leqslant m \leqslant N-1$ получаем

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \ \leqslant\ 10\sqrt{m}\ \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}).$$

Граничные случаи: условие задачи требует $m > 0$. Если $m = N$, то $p = 1$ и $\Gamma(n,p) = \Gamma(n,N)$ детерминированна, поэтому $\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \in \{0,1\}$, а правая часть равна $10\sqrt{N} \cdot \Pr(\Gamma(n,1) \models \mathcal{Q}) \geqslant 0$, так что неравенство тривиально верно. □

Задача 1.4. *Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n), |\Gamma(n)| = N$. Пусть $p = m/N$ и $m = m(n)$ таково, что $m \to \infty$ и $N(1-p)/\sqrt{m} \to \infty$. Докажите, что выполняется неравенство*

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \leqslant 3 \cdot \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонно возрастающее свойство и $p = m/N$, где $N = \binom{n}{2}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}) &= \sum_{k=0}^{N} \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q} \mid |E_{n,p}| = k) \Pr(|E_{n,p}| = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \Pr(\Gamma(n,k) \models \mathcal{Q}) \Pr(|E_{n,p}| = k),\end{aligned}$$

Так как $\mathcal{Q}$ возрастает, по лемме о монотонности (Lemma 1.1) для всех $k \geqslant m$ имеем

$$\Pr(\Gamma(n,k) \models \mathcal{Q}) \geqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}) &\geqslant \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \sum_{k=m}^{N} \Pr(|E_{n,p}| = k) \\ &= \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \sum_{k=m}^{N} u_k, \qquad (*)\end{aligned}$$

где

$$u_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

По формуле Стирлинга

$$k! = (1+o(1)) \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k},$$

и, следовательно,

$$u_m = (1+o(1))\frac{N^N p^m (1-p)^{N-m}}{m^m (N-m)^{N-m} (2\pi m)^{1/2}} = \frac{1+o(1)}{(2\pi m)^{1/2}}.$$

Пусть $k = m + t$, так как $N - m = C \cdot \sqrt{m}$ при C - достаточно большая, а $k <= N$, то $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{m}$.

Тогда

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(N-k)p}{(k+1)(1-p)} = \frac{N-k}{N} \cdot \frac{m}{k+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{m}{N}} = \frac{(N-m-t)\cdot m}{(N-m)\cdot(m+t+1)} = \frac{1-\frac{t}{N-m}}{1+\frac{t+1}{m}}$$

Воспользуемся следующими неравенствами для разложения в экспоненту

$$1) 1 + x \leqslant e^x, \forall x; \qquad 2) 1 - x \geqslant e^{-x/(1-x}, 0 \leqslant x < 1$$

И получим:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant \exp\left\{-\frac{t}{N-m-t} - \frac{t+1}{m}\right\}.$$

При $0 \leqslant t \leqslant m^{1/2}$ и $m = o(N)$:

$$u_{m+t} \geqslant u_m \cdot \exp\left\{-\sum_{s=0}^{t-1}\left(\frac{s}{N-m-s} + \frac{s+1}{m}\right)\right\} \geqslant \frac{1+o(1)}{(2\pi m)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2m} - o(1)\right).$$

Суммируем от $t = 0$ до $t = m^{1/2}$:

$$\sum_{k=m}^{m+m^{1/2}} u_k \geqslant \frac{1-o(1)}{(2\pi m)^{1/2}} \sum_{t=0}^{m^{1/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2m}\right) \approx \frac{1-o(1)}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx.$$

Так как $\int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx > 0.3$, имеем

$$\sum_{k=m}^{m+m^{1/2}} u_k \geqslant \frac{1}{3}$$

для всех достаточно больших n.

Из (*) и оценки выше следует

$$\Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}) \geqslant \frac{1}{3} \Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}),$$

или, эквивалентно,

$$\Pr(\Gamma(n,m) \models \mathcal{Q}) \leqslant 3 \Pr(\Gamma(n,p) \models \mathcal{Q}),$$

что и требовалось доказать. □