



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

МОРОЗОВ
ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ И АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ	8
Введение в главу	8
Седловые точки	8
Антагонистическая игра	8
Лемма I (о значении в разных седловых точках)	9
Матричные игры.....	9
Условия существования антагонистической игры	10
Максиминная стратегия.....	10
Минимаксная стратегия.....	10
Лемма II (о связи нижнего и верхнего значения игры)	11
Седловая точка на произведении множеств	11
Метод нахождения всех седловых точек	12
ЛЕКЦИЯ 2. МАКСИМИННЫЕ И МИНИМАКСНЫЕ СТРАТЕГИИ.....	15
Условия существования максиминных и минимаксных стратегий при отсутствии седловых точек	15
Теорема о существовании максиминной стратегии и ее доказательство	15
Определение непрерывных игр	16
Следствия теоремы	16
Пример разрыва функции минимума	16
Выпуклое множество	17
Выпуклая (вогнутая) и строго выпуклая (вогнутая) функция	17
Теорема о достаточных условиях существования седловой точки и ее доказательство	17
Доказательство теоремы о седловой точки вогнуто-выпуклой функции.....	17
Прием: возмущенная функция	18
Утверждение 1 о существовании седловой точке функции через максиминную стратегию	18
Утверждение 2 седловая точка как решение минимаксной стратегии	18
ЛЕКЦИЯ 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ	21
Пример матрицы игры, не имеющей решения	21

Смешанная стратегия.....	21
Смешанная игра на отрезке.....	21
Смешанная игра на выпуклом компакте.....	22
Осреднение функции. Математическое ожидание	23
Смешанное расширение антагонистических игр.....	23
Основная теорема матричных игр.....	23
Смешанные стратегии и случаи их применения.....	23
Теория ожидаемой полезности	24
Физические смеси	24
Непрерывная игра на прямоугольнике.....	25
Функция распределения. Слабая сходимость	25
Теорема Хелли.....	25
Лемма о существовании максиминной и минимаксной стратегии в смешанной игре на прямоугольнике.....	26
Лемма о нижних и верхних значениях в двух антагонистических играх.....	26
Основная теорема непрерывных игр.....	27
Аппроксимация непрерывной функции.....	28
ЛЕКЦИЯ 4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ.....	29
Теорема 1.6 (о необходимом и достаточном условии существования решения в смешанной стратегии. Доказательство).....	29
Теорема 1.7 (аналог теоремы 1.6 для матричных игр)	30
Теорема 1.8 (о верхней и нижней грани смешанных стратегий в непрерывной игре).....	31
Следствие из Теоремы 1.8 для значений игры на прямоугольнике	31
Теорема 1.8* для матричной игры.....	31
Следствие 1.8* максиминных чистых стратегий	32
Спектр смешанной стратегии.....	32
Теорема 1.9 (Свойство дополняющей нежелательности)	33
Следствие из Теоремы 1.9	33
Теорема 1.10 (свойство дополняющей нежелательности для матричных игр).....	34
Следствие из Теоремы 1.10	34

ЛЕКЦИЯ 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР	37
Доминирование строк и столбцов	37
Теорема 1.11 (о доминировании строк)	37
Теорема 1.12 (о доминировании столбцов)	38
Аналитический метод решения матричной игры	38
Графический метод решения матричной игры	39
Графический метод. 2 строки- n столбцов.....	40
Графический метод. 2 столбца - m строк.....	41
Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования	44
Ввод вспомогательной переменной (от минимума к максимуму)	44
ЛЕКЦИЯ 6. ИГРЫ С ВЫПУКЛОЙ (ВОГНУТОЙ) ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША ..	46
Максимализация линейной функции	46
Свойство дополняющей нежесткости для оптимальных решений	47
§6 Игры с выпуклой (вогнутой) функцией выигрыша	47
Крайняя точка выпуклого множества	47
Утверждение о крайней точке выпуклого компакта	48
Теорема 1.13 (Каратеодори).....	49
Лемма 5 (о крайней точке-максимуме)	49
Игры с выпуклой (вогнутой) функцией выигрыша	50
Теорема 1.14 для игры с выпуклой функцией выигрыша.....	50
Теорема 1.14 для игры с вогнутой функцией выигрыша	51
ЛЕКЦИЯ 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ.....	53
Модель «нападение – защита»	53
Функция выигрыша.....	53
Исследование игры «нападение-защита»	53
Минимаксная и максиминная стратегия в игре «нападение-защита»	54
Решение в смешанных стратегиях.....	55
Модель «Дуэль»	56
Шумная дуэль.....	57

Бесшумная дуэль	58
ЛЕКЦИЯ 8. МНОГОШАГОВЫЕ (АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ) ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ	61
Антагонистические игры с полной информацией	61
Стратегия и ее определение	61
Некоторые стратегии. Функция Бемена.....	63
Теорема Цермело (T1.16).....	63
Применение теоремы Цермело. Игра «шахматы»	64
Применение теоремы Цермело на матричной игре	64
ЛЕКЦИЯ 9. НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ	67
Общая игра двух лиц.....	67
Ситуация равновесия. Равновесие по Нэшу	67
Биматричная игра	67
Оптимальная по Парето ситуация	68
Равновесие по Нэшу.....	69
Теорема 2.1 о существовании равновесия в игре многих лиц	70
Теорема Брауэра о неподвижной точке	70
Состояние равновесия в биматричной игре	71
Модель Дуополии Курно.....	73
ЛЕКЦИЯ 10. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.....	75
Биматричная игра	75
Ситуация равновесия	75
Свойство дополняющей нежесткости	76
Биматричная игра «Семейный спор»	76
Смешанная стратегия в биматричной игре с санкциями	77
Метод поиска равновесий	78
Теорема доминирования в биматричных играх	83
ЛЕКЦИЯ 11. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ	85
Иерархические игры. Первая иерархическая игра.....	85
Эпсилон оптимальная стратегия.....	85

Равновесие по Штакельберу	86
Вторая иерархическая игра	89
Минимизирующая стратегия. «Стратегия наказаний».....	90
Минимизирующая стратегия 2	91
Теорема Гермейера	92
ЛЕКЦИЯ 12. ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	93
Теорема Геймеера	93
Теория принятия решений. Многокритериальная/векторная оптимизация.....	95
Оптимальная по Парето стратегия	96
Оптимальная стратегия по Слейтеру	97
Теорема о множествах стратегий оптимальных по Парето и Слейтеру	98
Теорема о представлении стратегий оптимальных по Слейтеру	100
ЛЕКЦИЯ 13. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.....	102
Сравнение стратегий по Парето и Слейтеру	102
Допустимое или возможное направление вектора	103
Теорема 3.3. о неоптимальной стратегии	103
Общая задача принятия решений и бинарное отношение	105
Ядро бинарного отношения	106
ЛЕКЦИЯ 14. КРИТЕРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПЕРАЦИЙ.....	109
Отношения и критерии. Бинарное отношение	109
Бинарное отношение по Парето	109
Сужение векторных стратегий.....	111
Лемма о векторной оценке, связанной отношением Парето	111
Утверждение о бинарном отношении при равноценных критериях	112
Основные определения: операции и оперирующая сторона	114
Контролируемые и неконтролируемые факторы	114
Критерий эффективности	114
ЛЕКЦИЯ 15. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ОПЕРАЦИИ.....	116
Определения (информационная гипотеза, стратегия)	116
Подход Гермейра, принцип гарантированного результата.....	116

Оптимальная стратегия.....	117
Оценка эффективности стратегий	118
Смешанная стратегия. Оценка эффективности смешанной стратегии.....	118
Абсолютно оптимальные стратегии.....	119
Теорема 3.4 о существовании абсолютно оптимальной стратегии.....	119
Теорема 3.5 о наилучшем результате при достижении максимума	120
ЛЕКЦИЯ 16. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ОПЕРАЦИИ	123
§13 Необходимое условие для оптимальной максиминных стратегий	123
Теорема 3.6 о существовании производной по направлению	124
Следствие теоремы 3.6 максиминная стратегия	127
Теорема 3.7 максиминная стратегия на отрезке.....	128
Следствие теоремы 3.7 (на параллелепипеде).....	128
Алгоритм поиска максиминных стратегий.....	129
ЛЕКЦИЯ 17. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ.....	131
Общая постановка задачи оптимального распределения ресурсов (§15).....	131
Теорема 3.8. Принцип уравнивания	131
Достаточное условие оптимальности распределения	133
Алгоритм для нахождения оптимального распределения ресурсов	133
Теорема 3.9 (о значении эффекта)	134
Лемма Гиббса	136
ЛЕКЦИЯ 18. ЗАДАЧА ПОИСКА ОБЪЕКТА.....	139
Задача поиска объекта	139
Лемма о максимизации суммарной эффективности.....	140
Теорема 3.11 (Критерий Гросса).....	140
Алгоритм нахождения оптимального распределения ресурсов	141

Лекция 1. Седловые точки и антагонистические игры

Введение в главу

Курс относится к области теории принятия решений. Его основная идея заключается в исследовании методов нахождения оптимальных решений различных задач при помощи математических моделей. Часто нам будут встречаться игровые задачи с неопределенностями, связанными с наличием противника (антагониста), как, например, салонные или настольные игры. При этом противоборствующей стороной не обязательно будет человек – в ряде задач мы будем «сражаться» с природой. Позднее мы рассмотрим неантагонистические игры, когда интересы участников не сталкиваются (например, игры на равновесные цены). Далее мы познакомимся с иерархическими играми: взаимодействие между начальником и подчиненным и др. В заключение мы научимся решать задачи т.н. многокритериальной оптимизации, т.е. задачи, где нет возможности оптимизировать сразу все критерии; на последней лекции рассмотрим задачу на распределение ресурсов.

Седловые точки

Понятие седловой точки является центральным в теории антагонистических игр. Пусть $x \in X, y \in Y$. Рассмотрим $F(x, y)$, определенную на $X \times Y$.

Определение 1: $(x, y) \in X \times Y$ – седловая точка $X \times Y$, если выполняется неравенство:

$$F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Антагонистическая игра

В антагонистической игре участвует два игрока. Пусть первый игрок выбирает $x \in X$, где X – множество стратегий, а второй игрок – $y \in Y$, причем выбор происходит независимо друг от друга; $F(x, y)$ – функция выигрыша. Мы будем определять игру в «нормальной» форме, подразумевающей, что выборы x, y игроками происходят независимо друг от друга (каждый не знает, что выбирает противник). Цель первого игрока – максимизировать свой выигрыш, цель второго – минимизировать собственный проигрыш. Так, антагонистическая игра задается как набор следующих объектов:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$$

Определение 2: седловая точка – пара стратегий, в которой игрокам не выгодно отклоняться от своих стратегий.

Определение 3: говорят, что антагонистическая игра Γ имеет решение, если $F(x, y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$.

Решением игры называется тройка $(x_0, y_0, V = F(x_0, y_0))$, где (x_0, y_0) – седловая точка функции F .

V называется значением или ценой игры, (x_0, y_0) – оптимальная стратегия. Докажем лемму, показывающую корректность определения значения игры.

Лемма I (о значении в разных седловых точках)

Пусть функция F имеет две седловые точки $(x^0, y^0), (x^*, y^*)$. Тогда

$$F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} F(x, y^*) &\leq F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y \\ F(x^0, y^0) &\stackrel{(1)}{\leq} F(x^0, y^*) \stackrel{(2)}{\leq} F(x^*, y^*) \stackrel{(2)}{\leq} F(x^*, y^0) \stackrel{(1)}{\leq} F(x^0, y^0) \end{aligned}$$

На обоих концах неравенства стоят одинаковые члены, а значит справедливо и равенство

$$F(x^0, y^0) = F(x^0, y^*) = F(x^*, y^*) = F(x^*, y^0) = F(x^0, y^0)$$

Лемма доказана.

Матричные игры

Определение 4: антагонистическая игра называется матричной, если множество стратегий игроков конечно:

$$\begin{aligned} \Gamma: X &= \{1, \dots, m\}, \quad Y = \{1, \dots, n\} \\ i &\in X, \quad j \in Y, \quad F(i, j) = a_{ij} \\ A &= (a_{ij})_{m \times n} \end{aligned}$$

Определение 5: пара $(i^0, j^0) = a_{ij}$ – седловая точка матрицы A , если $a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0} \leq a_{i^0j}$.

Для матриц понятие седловой точки можно проиллюстрировать следующими способами:

Примеры:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, (i^0, j^0) = (1, 1), (2, 1); V = 0$$

Пример иллюстрирует, что если на некой паре реализуется значение игры $(F(x^0, y^0) = V)$, то импликация « (x^0, y^0) – седловая точка» не всегда верна.

2. «Орлянка»

Рассмотрим матрицу следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \leftarrow & 1 \\ \downarrow & 1 & -1 \\ & & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Один из игроков закладывает монету орлом или решкой, а второй пытается эту сторону отгадать. Если игрок отгадывает, то первый проиграл (выплачивает единицу второму), если не отгадывает – сам выплачивает единицу. Матрица такой игры не имеет седловой

точки. Что что делать игрокам в подобных играх? В следующих уроках мы рассмотрим понятие смешанной стратегии – окажется, что в таком случае игрокам стоит рандомизировать свой выбор.

Понятие седловой точки можно переписать следующим образом:

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \max_{y \in Y} F(x^0, y)$$

Упражнение: в условиях Леммы 1 $((x^*, y^*), (x^0, y^0))$ докажите, что пары $(x^*, y^0), (x^0, y^*)$ являются седловыми точками.

Условия существования антагонистической игры

Рассмотрим игровую ситуацию с позиции первого игрока. Допустим он выбрал следующую стратегию:

$$\Gamma: x \in X$$

Тогда можно утверждать, что

$$W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y)$$

является гарантированным выигрышем. Тогда наилучший гарантированный результат (нижнее значение игры):

$$\underline{V} = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$$

Максиминная стратегия

Определение 6: стратегия $x^0 \in X$ называется максиминной, если

$$\inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{V}$$

Рассмотрим игру с позиции второго игрока и проведем аналогичные действия. Так, с стратегией

$$\Gamma: y \in Y$$

гарантированным результатом будет

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x, y)$$

Наилучший гарантированный результат (верхнее значение игры):

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} W(y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

Минимаксная стратегия

Определение 7: стратегия $y^0 \in Y$ называется минимаксной, если

$$\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V}$$

Лемма II (о связи нижнего и верхнего значения игры)

Для любой антагонистической игры справедливо неравенство

$$\underline{V} \leq \bar{V}$$

Мнемоническое правило: «Лучше быть плохим среди хороших, чем хорошим среди плохих».

Доказательство:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y \quad \inf_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y) \Rightarrow W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y) \Rightarrow$$

$$\underline{V} \leq \sup_{x \in X} F(x, y) = M(y) \quad \forall y \in Y, \text{ значит, } \underline{V} \leq \bar{V} \text{ и лемма доказана.}$$

Седловая точка на произведении множеств

Теорема 1.1:

1. Для того, чтобы F на $X \times Y$ имела седловую точку, необходимо, чтобы

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \quad (\alpha)$$

Предполагается, что максимумы и минимумы достигаются.

2. $F(\alpha)$ имеет седловую точку. Тогда

$$(x^0, y^0) - \text{седловая точка} \Leftrightarrow \begin{cases} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{V} \quad y \in Y \\ \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V} \quad x \in X \end{cases} \quad (\beta)$$

Доказательство:

1. Пусть (x^0, y^0) – седловая точка. Тогда должны выполняться (α) , (β) .

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(1)}{=} (x^0, y^0) \stackrel{(1)}{=} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \underline{V} \stackrel{Л.2}{\leq} \bar{V}$$

Концы неравенства совпадают, тогда оно обращается в равенство:

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(1)}{=} (x^0, y^0) \stackrel{(1)}{=} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \underline{V} \stackrel{Л.2}{=} \bar{V}$$

Условие (α) выполнено.

2. Пусть условие (α) выполнено. (x^0, y^0) удовлетворяют условию (β) . Докажем, что (x^0, y^0) – седловая точка F .

$$F(x^0, y^0) \leq \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(\beta)}{=} \bar{V} \stackrel{(\alpha)}{=} \underline{V} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0).$$

Концы неравенства совпадают, тогда оно обращается в равенство:

$$F(x^0, y^0) = \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(\beta)}{=} \bar{V} \stackrel{(\alpha)}{=} \underline{V} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \stackrel{(\beta)}{=} F(x^0, y^0) \text{ и } (x^0, y^0) - \text{седловая точка } F.$$

Метод нахождения всех седловых точек

1. Найти все максиминные стратегии: $X^0 = \{x^0 \in X \mid (\beta)\}$

2. Найти все минимаксные стратегии: $Y^0 = \{y^0 \in Y \mid (\beta)\}$

Тогда $X^0 \times Y^0$ – прямоугольное (!) множество всех седловых точек.

Примеры:

1.

$$F(x, y) = xy, \quad X = (-\infty, \infty), \quad Y = (-\infty, \infty)$$

$$(x^0, y^0) = (0, 0), \quad x \cdot 0 \equiv 0 \cdot 0 \equiv 0 \cdot y$$

$$\forall x \neq 0 \quad \inf_{y \in Y} xy = -\infty$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = 2, \quad i^0 = 2, 3 \quad \text{— строки, в которых это значение достигается}$$

Находим минимальные элементы в строках, а затем максимальные среди них.

$$\bar{V} = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 4} a_{ij} = 2, \quad j^0 = 2, 4$$

Так, искомые стратегии: $(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)$

3.

$$F(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 \quad X = [0, 1], \quad Y = [0, 1]$$

Найдем нижнее значение игры:

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{0 \leq y \leq 1} F(x, y)$$

$$W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x))$$

$$F'_y = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y = 0 \quad \bar{y} = \frac{3}{2}x$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим функцию:

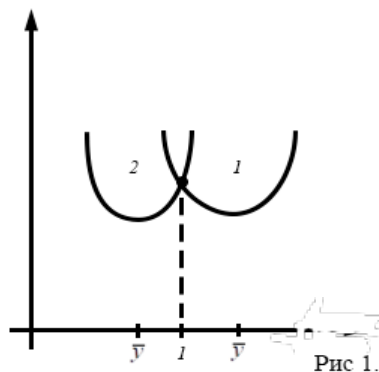


Рис. 1.1. Поведение функции $F(x, y)$

$$W(x) = F(x, y(x)) = \begin{cases} \overbrace{2x^2 - \frac{9x \cdot x}{2} + \frac{9x^2}{4}}^{\frac{x^2}{4}}, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 2x^2 - 3x + 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим функцию минимума:

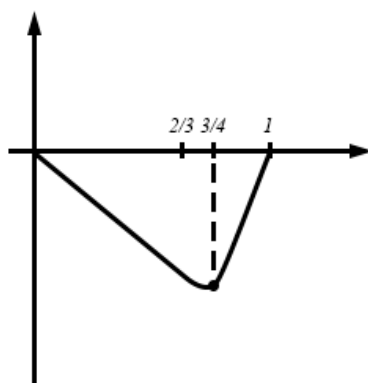


Рис. 1.2. График функции минимума

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq 1} W(x) = 0, \quad x^0 = 0, 1$$

Теперь найдем верхнее значение игры:

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y)$$

Обратим внимание, что функция принимает наибольшее значение на краях отрезка (можно обойтись без дифференцирования).

$$M(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = \max[F(0, y), F(1, y)]$$

$$F(0, y) = y^2, \quad F(1, y) = 2 - 3y + y^2$$

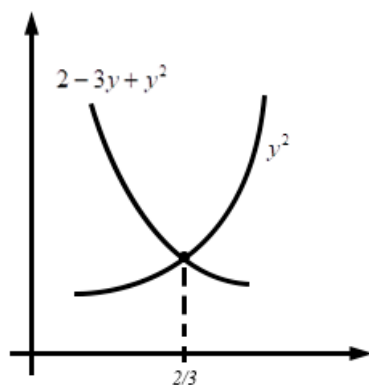


Рис. 1.3. Графическое изображение функций $F(0, y), F(1, y)$

Найдем точку пересечения:

$$y = \frac{2}{3}$$

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} M(y) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Лекция 2. Максиминные и минимаксные стратегии

Условия существования максиминных и минимаксных стратегий при отсутствии седловых точек

В конце прошлого занятия мы рассмотрели примеры нахождения максиминных и минимаксных стратегий нижнего и верхнего значений игры. При этом в последнем примере силовой точки не было, но максиминная и минимаксная стратегии существовали. Какие условия топологического характера следует сформулировать для того, чтобы эти стратегии существовали:

1. Множества X, Y должны быть компактными в метрических пространствах
2. Функция F должна быть непрерывна на произведении компактов

Пусть Z – подмножество метрического пространства.

Определение: Множество Z – компакт, если

$$\forall \{z^k\} \in Z \quad \exists \{z^{k_l}\} \rightarrow z^0 \in Z$$

Наиболее известный пример компактного множества – замкнутое ограниченное множество евклидова пространства.

Пусть на множестве Z задана $h(x)$. Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \operatorname{Argmax}_{z \in Z} h(z) &= \left\{ z' \in Z \mid h(z') = \max_{z \in Z} h(z) \right\}, \\ \operatorname{Argmin}_{z \in Z} h(z) &= \left\{ z' \in Z \mid h(z') = \min_{z \in Z} h(z) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall x \in X \quad Y(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in Y} f(x, y)$$

$$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} f(x, y)$$

Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема о существовании максиминной стратегии и ее доказательство

Теорема 1.2: пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где X, Y – компакты метрических пространств.¹ Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$ непрерывна на X
2. $\forall x \in X, Y(x) = \{y(x)\} \Rightarrow y(x)$ непрерывна

Доказательство:

Первое утверждение:

$F(x, y) \in C(X \times Y) \Rightarrow$ она равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x^0, y)| < \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

Покажем, что

$$|W(x) - W(x^0)| < \varepsilon$$

$$\forall y \in Y(x) \quad \forall y^0 \in Y(x^0)$$

¹ $F(x, y) \in C(X \times Y) \Leftrightarrow F$ - непрерывна на $X \times Y$

$$W(x) - W(x^0) = F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0) - F(x^0, y^0) < \varepsilon.$$

Теперь докажем второе утверждение. Воспользуемся непрерывностью по Гейне и рассмотрим последовательность:

$$x^k \rightarrow x^0 \in X$$

Покажем, что $y(x^k) \rightarrow y(x^0)$

Предположим, что $y(x^k) \not\rightarrow y(x^0)$. Это означает, что существует такая окрестность U точки $y(x^0)$, вне которой находится бесконечно много точек $y(x^k) \in Y \setminus U$ (Рис. 2.1).

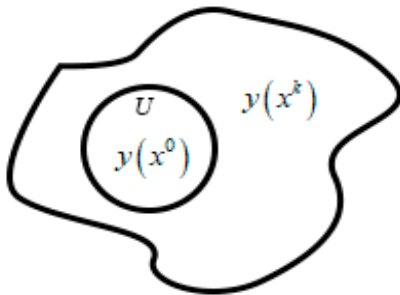


Рис. 2.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

Заметим, что $Y \setminus U$ – замкнутое (как дополнение к открытому множеству U), а замкнутое подмножество компакта – это компакт. Таким образом, $Y \setminus U$ – компакт. Выделим $y(x^{k_l}) \rightarrow y' \in Y \setminus U$, $y' \neq y(x^0)$. Фактически, мы докажем, что $y' \in Y(x^0)$ – это противоречие ввиду условия $Y(x) = \{y(x)\}$.

$$F(x^{k_l}, y(x^{k_l})) \leq F(x^{k_l}, y) \quad \forall y \in Y$$

Переходя к пределу, получим $F(x', y') \leq F(x^0, y) \quad \forall y \in Y$.

Упражнение (сформулируйте и докажите аналогичную теорему относительно функции максимума): $M(x) = \max_{y \in Y} F(x, y)$, подсказка: $M(x) = -\min_{y \in Y} (-F(x, y))$.

В качестве следствия теоремы рассмотрим ее применение к непрерывным играм.

Определение непрерывных игр

Антагонистическая игра Γ называется непрерывной, если множества X, Y – параллелепипеды евклидовых пространств, а $F \in C(X \times Y)$.

Следствия теоремы

Следствие 1 (т.1.2): в непрерывной игре всегда существуют максиминные стратегии первого игрока и минимаксные стратегии второго игрока.

Пример разрыва функции минимума

$$F(x, y) = (1 + y^2)(xy - 1)^2, \quad X = [-1, 1], \quad Y = (-\infty, \infty)$$

$$x = 0, y(0) = 0$$

$$x \neq 0, y(x) = \frac{1}{x}$$

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Функции разрывны. Достаточные условия существования седловой точки формулируются в терминах выпуклого анализа.

Выпуклое множество

Определение: пусть Z – множество в конечномерном евклидовом пространстве. Z – выпуклое множество, если $\forall z' \neq z'' \in Z \quad \forall \lambda \in (0,1)$ выполнено $\lambda z' + (1-\lambda)z'' \in Z$.

Выпуклая (вогнутая) и строго выпуклая (вогнутая) функция

Определение: Z – выпуклое множество, на котором определена функция $h(z)$. Тогда $h(z)$ – выпуклая (строго выпуклая) функция, если $\forall z' \neq z'' \in Z \quad \forall \lambda \in (0,1)$ выполняется следующее неравенство:

$$h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \stackrel{(<)}{\leq} \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'')$$

Аналогично $h(z)$ – вогнутая (строго вогнутая) функция, если выполняется:

$$h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \stackrel{(>)}{\geq} \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'')$$

Упражнение: докажите, что функция $h(z) = \sum_{i=1}^m z_i^2$ – строго выпуклая.

Упражнение: $h(z) \in C(Z)$, $h(z)$ – строго выпуклая. Докажите, что минимум достигается в единственной точке. Подсказка: возьмите две минимизирующие точки, их полусумма также будет минимизирующей – получаем противоречие при помощи определения строго выпуклой функции.

Теорема о достаточных условиях существования седловой точки и ее доказательство

Теорема 1.3: пусть $F(x, y)$ – определена и непрерывна на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad F(x, y) \cup_y \\ \forall y \in Y \quad F(x, y) \cap_x \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ седловая точка}$$

Доказательство: пусть $F(x, y)$ удовлетворяет всем условиям и строго выпукла, т.е.

$$W(r) = \min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x))$$

Вследствие Т1.2 $W(x)$, $y(x)$ – непрерывны. Возьмем максиминную стратегию x^* : $W(x^*) = \max_{x \in X} F(x, y)$. Докажем, что $(x^*, y(x^*))$ – седловая точка.

Доказательство теоремы о седловой точке вогнуто-выпуклой функции

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in (0,1) \quad tx + (1-t)x^* \in X$$

Обозначим

$$\tilde{y} = y(tx + (1-t)x^*)$$

$$\begin{aligned} W(x^*) &\geq W(tx + (1-t)x^*) = F(tx + (1-t)x^*, \tilde{y}) \geq tF(x, \tilde{y}) + (1-t)F(x^*, \tilde{y}) \geq \\ &\geq tF(x, \tilde{y}) + (1-t)W(x^*) \Rightarrow tF(x, \tilde{y}) \leq tW(x^*) \xrightarrow{t>0} F(x, \tilde{y}) \leq W(x^*) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in (0,1) \\ \tilde{y} &= y(tx + (1-t)x^*) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y(x^*) \end{aligned}$$

В результате предельного перехода получаем:

$$F(x, y(x^*)) \leq W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \leq F(x^*, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y,$$

что фактически является определением седловой точки.

Прием: возмущенная функция

Теперь рассмотрим общий случай (без предположения о строгости выпуклости).
Используем прием введения возмущенной функции:

$$F_\varepsilon(x, y) = \underbrace{F(x, y)}_{\text{Выпукла по } y} + \underbrace{\varepsilon \sum_{j=1}^n y_j^2}_{\text{Строго выпукла по } y}, \quad \varepsilon > 0$$

Пусть $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – седловая точка $F_\varepsilon(x, y)$. Тогда

$$F_\varepsilon(x, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Рассмотрим $\varepsilon_k \rightarrow 0+0$. Тогда $(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \in X \times Y$.

Выделим сходящуюся подпоследовательность:

$$(x^{\varepsilon_{k_l}}, y^{\varepsilon_{k_l}}) \rightarrow (x^0, y^0).$$

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_{k_l}}(x, y^\varepsilon) &\leq F_{\varepsilon_{k_l}}(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq F_{\varepsilon_{k_l}}(x^\varepsilon, y) \xrightarrow{\lim} \\ &\Rightarrow F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

Утверждение 1 о существовании седловой точки функции через максиминную стратегию

Утверждение 1: пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где $X \subset E^m$ – выпуклый компакт, Y – компакт некоторого метрического пространства. И пусть

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad Y(x) = \{y(x)\} \\ \forall y \in Y \quad F(x, y) \cap_x \end{cases} \Rightarrow F(x, y) \text{ имеет седловую точку } (x^*, y(x^*))$$

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Утверждение 2 седловая точка как решение минимаксной стратегии

Утверждение 2: пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где $Y \subset E^n$ – выпуклый компакт, X – компакт некоторого метрического пространства. И пусть

$$\begin{cases} \forall y \in Y \quad X(y) = \{x(y)\} \\ \forall x \in X \quad F(x, y) \cup_y \end{cases} \Rightarrow F(x, y) \text{ имеет седловую точку } (x(y^*), y^*)$$

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Примеры:

1. Пусть

$$F(x, y) = xy$$

$$X = [0, 1], \quad Y = [0, 1]$$

$$(x^0, y^0) = (0, 0)$$

$$x^0 = 0 \Rightarrow Y(0) = [0, 1] \Rightarrow y^* \in Y(0) \text{ и } (x^0, y^*) = (0, 1)$$

– не седловая точка.

2. Пусть

$$F(x, y) = -x^2 + y^3 + y^2x - 4y + 3, \quad X = [0, 1], \quad Y = [0, 1]$$

Проверим, что условия теоремы 1.3 выполнены:

$$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow \cap_x$$

$$F''_{yy} = 6y + 2x \geq 0 \Rightarrow \cup_y$$

$$M(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = F(x(y), y)$$

$$F'_x = 0 \Leftrightarrow 2x + y^2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{y^2}{2} \in [0, 1]$$

$$M(y) = F(x(y), y) = \frac{y^4}{4} + y^3 - 4y + 3$$

$$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 = 0$$

$$y_1 = 1, y_{2,3} = -2$$

Изобразим график функции $M(y)$.

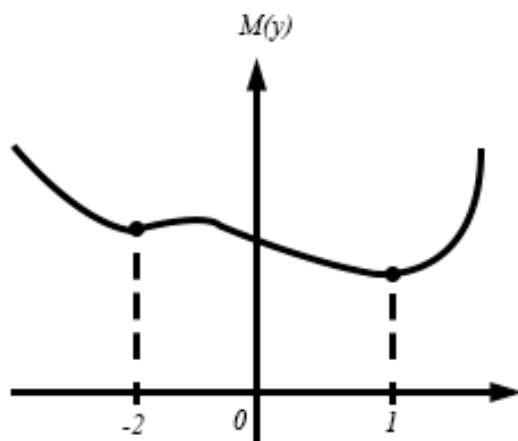


Рис. 2.2. Графическое изображение рассматриваемой функции
Седловая точка:

$$(x(y^*), y^*) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Упражнение: докажите, что $F(x, y): U_y, \cap_x$ имеет единственную седловую точку.

Лекция 3. Непрерывные игры

Пример матрицы игры, не имеющей решения

Вспомним пример матрицы, не имеющей решений:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{\leftarrow}{-1} & 1 & \overset{\uparrow}{-1} \\ \downarrow 1 & & -1 \\ & \rightarrow & \end{pmatrix}$$

В прошлый раз мы выяснили, что такая игра (Орлянка) не имеет решения: у матрицы нет седловой точки.

Смешанная стратегия

Пусть X – множество стратегий первого игрока.

Определение: смешанной стратегией первого игрока φ на X называется вероятностное распределение на множестве X .

Применить смешанную стратегию означает выбрать $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей распределение φ .

Примеры:

Пусть $X = \{1, \dots, m\}$. В этом случае вероятностным распределением является вероятностный вектор:

$$p = p(p_1, \dots, p_m) \in P = \{p \in E^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

Применить смешанную стратегию – выбрать чистую стратегию i с вероятностью p_i . В Орлянке такая стратегия может быть реализована бросанием монет:

$$p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Следующую стратегию можно реализовать подбрасыванием игральной кости (шестигранного кубика):

$$p = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

Подумайте, как реализовать с помощью подбрасывания двух игральных костей:

$$p = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

Смешанная игра на отрезке

Рассмотрим еще один пример: пусть $X = [a, b]$, $\varphi(x) = P(\xi \leq x)$ – функция распределения.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

неубывает и непрерывна справа

η – равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина. Что необходимо сделать для того, чтобы реализовать такую смешанную стратегию?

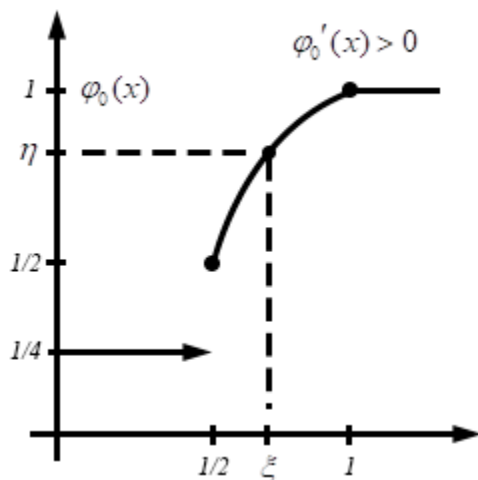


Рис. 3.1. Графическое изображение функции распределения рассматриваемого примера

Найдем обратную функцию:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \eta \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < \eta \leq \frac{1}{2} \\ \varphi^{-1}(\eta), & \frac{1}{2} < \eta \leq 1 \end{cases} \quad \text{– обратная функция}$$

Случайная величина ξ будет иметь распределение $\varphi_0(x)$:

$$P(\xi \leq x) = P(\eta \leq \varphi_0(x)) = \varphi_0(x), \quad \varphi_0'(x) > 0.$$

Пусть $h(x)$ – непрерывна. Тогда справедлива формула:

$$\int_0^1 h(x) d\varphi_0(x) = \frac{1}{4}h(0) + \frac{1}{4}h\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) d\varphi_0'(x) dx$$

Смешанная игра на выпуклом компакте

Следующий пример: пусть X – выпуклый компакт в конечномерном евклидовом пространстве. Рассмотрим $x^0 \in X$. Определим функцию

$$I_{x^0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^0 \\ 0, & x \neq x^0 \end{cases}$$

$$I_{x^0}(B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}, \quad \text{где } B \text{ – борелевское множество}$$

Организуем выпуклую комбинацию вырожденных распределений:

$$x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in X$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}, p \in P$$

Осреднение функций. Математическое ожидание

Пусть $h(x)$ определена на X . Тогда

$$\int_X h(x) d \left[\sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}} \right] = \sum_{i=1}^m p_i h(x^{(i)})$$

Смешанное расширение антагонистических игр

Матричная игра задается матрицей:

$$\Gamma: A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$p \in P$ – смешанная стратегия первого игрока. Аналогично этому второй игрок может использовать смешанные стратегии:

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in Q = \left\{ q \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \right\}$$

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

Тогда игра

$$\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$$

– смешанное расширение,

$$(p_0, q_0, V = A(p_0, q_0))$$

– ее решение, т.е. (p^0, q^0) образует седловую точку функции $A(p, q)$ на $P \times Q$.

$(p_0, q_0, V = A(p_0, q_0))$ называется решением игры Γ в смешанной стратегии, (p^0, q^0) – оптимальной смешанной стратегией.

Основная теорема матричных игр

Теорема 1.4: всякая матричная игра имеет решение в смешанной стратегии.

Доказательство: $A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$ – линейна, а значит можно считать, что она

вогнута по p и выпукла по q . Она определена на произведении выпуклых компактов. Тогда по Т1.3 $A(p, q)$ имеет седловую точку.

Смешанные стратегии и случаи их применения

Определение седловой точки:

$$A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0) \leq A(p^0, q) \quad \forall p \in P, \forall q \in Q$$

Когда можно использовать смешанную стратегию? Для первого игрока это оптимально, если

1. Игра повторяется много раз. Так, какую бы стратегию ни применял второй игрок, выигрыш первого игрока в среднем будет составлять

$$A(p, q^0) \geq V$$

2. Однократное повторение игры: выигрыши a_{ij} преобразуются в т.н. полезности этих выигрышей.

Теория ожидаемой полезности

Рассмотрим на примере то, как устанавливается полезность выигрыша.
Допустим, есть игра:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ – матрица полезности}$$

Как же найти полезность a ? Рассмотрим лотерею, где выигрыш 10 будет с вероятностью a , а выигрыш 0 с вероятностью $(1-a)$. Средний выигрыш тогда равен $10a$. Первому игроку задается вопрос: при каком a он согласен купить этот лотерейный билет? Если игрок согласен купить билет при:

1. $a = \frac{1}{2}$ – то это нейтральное отношение
2. $a > \frac{1}{2}$ – это осторожное отношение;
3. $a < \frac{1}{2}$ – это азарт

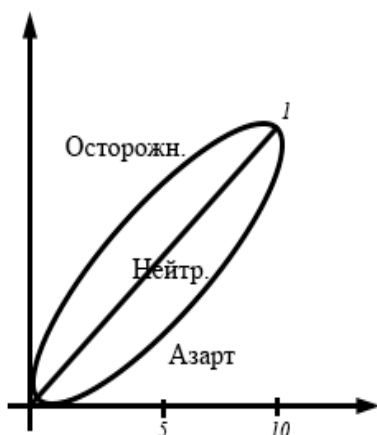


Рис 3.2. Графическое изображение рассматриваемых отношений игрока

Физические смеси

Последний случай, когда можно использовать смешанные стратегии, – это когда их можно реализовать в виде физические смеси. Рассмотрим пример «игры против природы». Стратегия фермера – посадить одну из трех культур на участке. Стратегия природы – «выбор» климатических условий года (нормальных, дождливых, засушливых).

$$H(h_{ij})_{3 \times 3} \text{ – функция урожайности}$$

$$A(a_{ij}) - \text{матрица выручки}$$

$$P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - \text{смешанная стратегия}$$

Вместо того, чтобы «подбрасывать монетку», фермер может разделить участок на три части (рис. 3.3).

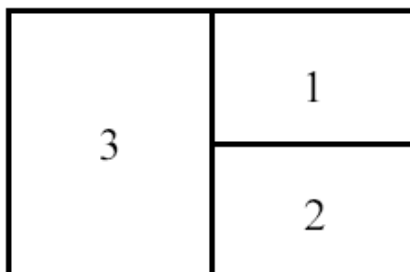


Рис. 3.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

Непрерывная игра на прямоугольнике

Рассмотрим смешанное расширение непрерывных игр. Пусть

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle, X = [a, b], Y = [c, d], F(x, y) \in C(X \times Y)$$

– непрерывная антагонистическая игра на прямоугольнике, $\varphi \in \{\varphi\}$, $\psi \in \{\psi\}$ – функции распределения.

Функция распределения. Слабая сходимость

Когда игроки используют смешанные стратегии, выигрыш первого игрока в исходной Γ следует усреднить:

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y) \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_c^d F(x, y) d\psi(y) = \int_a^b F(x, y) d\varphi(x)$$

$$F(x, \psi) = \int_c^d F(x, y) d\psi(y)$$

$$F(\varphi, y) = \int_a^b F(x, y) d\varphi(x)$$

Так мы определили смешанное расширение непрерывной игры Γ на прямоугольнике:

$$\bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$$

Решение исходной игры в смешанной стратегии:

$$(\varphi^0, \psi^0, V = F(\varphi^0, \psi^0)),$$

$$(\varphi^0, \psi^0) - \text{седловая точка } F(\varphi, \psi) \text{ на } \{\varphi\} \times \{\psi\}$$

Фактически, нам нужно доказать, что игра $\bar{\Gamma}$ имеет решение.

Терема Хелли

Определение: рассмотрим $\varphi^k \in \{\varphi\}$. Будем говорить, что $\varphi^k \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi^0$ сходится слабо, если

$$\forall h(x) \in C([a, b])$$

$$\int_a^b h(x) d\varphi^k(x) \rightarrow \int_a^b h(x) d\varphi^0(x)$$

Теорема Хелли: множество функций распределения $\{\varphi\}$ является слабым компактом,

т.е. $\forall \varphi^k \in \{\varphi\} \exists \varphi^{k_i} \xrightarrow{сл.} \varphi^0$.

Лемма о существовании максиминной и минимаксной стратегии в смешанной игре на прямоугольнике

Лемма 3: пусть Γ – непрерывная игра на прямоугольнике. Тогда в этой игре существуют максиминные и минимаксные смешанные стратегии.

Доказательство: рассмотрим смешанное расширение $\bar{\Gamma}$ и выпишем для него нижнее и верхнее значение игры.

$$\underline{V} = \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)$$

$$\bar{V} = \inf_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

Фактически, лемма утверждает, что \sup в первом выражении и \inf во втором достигаются на некоторых смешанных стратегиях φ^0 и ψ^0 соответственно. Докажем существование максиминной смешанной стратегии. По определению верхней грани, $\exists \varphi^k \in \{\varphi\} : \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^k, \psi) \rightarrow \underline{V}$. Используя т. Хелли, получим, что

$$\exists \varphi^{k_i} \xrightarrow{сл.} \varphi^0$$

Возьмем любую $\psi \in \{\psi\}$. Тогда

$$F(\varphi^{k_i}, \psi) = \int_a^b F(x, \psi) d\varphi^{k_i}(x) \rightarrow \int_a^b F(x, \psi) d\varphi^0(x)$$

в силу непрерывности по x $F(x, \psi)$.

$$\forall \psi \in \{\psi\} F(\varphi^{k_i}, \psi) \geq \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^{k_i}, \psi) \xrightarrow{\lim} F(\varphi^0, \psi) \geq \underline{V} \quad \forall \psi \Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^0, \psi) \geq \underline{V}$$

Осталось заметить, что строгое неравенство здесь невозможно, поскольку \underline{V} – верхняя грань от нижней грани. Утверждение доказано для максиминных стратегий. Доказательство для минимаксных стратегий аналогично.

Лемма о нижних и верхних значениях в двух антагонистических играх

Лемма 4: пусть функции $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ определены на $X \times Y$, ограничены и для них выполнено условие близости:

$$|F(x, y) - F_1(x, y)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \quad (A)$$

Тогда $|\bar{V} - \bar{V}_1| \leq \varepsilon$, $|\underline{V} - \underline{V}_1| \leq \varepsilon$.

Доказательство: пусть функции $h(z)$, $h_1(z)$ определены на Z , ограничены и для них выполнено условие близости:

$$|h(z) - h_1(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$h_1(z) - \varepsilon \leq h(z) \leq h_1(z) + \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$\inf_{z \in Z} h_1(z) - \varepsilon \leq \inf_{z \in Z} h(z) \leq \inf_{z \in Z} h_1(z) + \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$\left| \inf_{z \in Z} h(z) - \inf_{z \in Z} h_1(z) \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

То же верно и для верхних граней.

$$\forall x \in X \quad \left| \overbrace{\inf_{y \in Y} F(x, y)}^{W(x)} - \overbrace{\inf_{y \in Y} F_1(x, y)}^{W_1(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

что следует из изложенного выше.

$$\left| \overbrace{\sup_{x \in X} W(x)}^V - \overbrace{\sup_{x \in X} W_1(x)}^{V_1} \right| \leq \varepsilon$$

и первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично.

Основная теорема непрерывных игр

Теорема 1.5: всякая непрерывная игра Γ имеет решение в смешанной стратегии.

Доказательство: нужно установить, что $F(\varphi, \psi)$ имеет седловую точку на $\{\varphi\} \times \{\psi\}$. Из

T1.1 это равносильно доказательству того, что $\underline{V} = \bar{V}$,

$$\underline{V} = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi), \quad \bar{V} = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

Изучим, как происходит аппроксимация непрерывной матричной игры (непрерывная функция будет аппроксимирована ступенчатой функцией). Рассмотрим разбиение отрезка на попарно непересекающиеся множества:

$$X = [a, b], \quad X = \bigcup_{i=1}^m X^i \quad (\text{рис. 3.4})$$

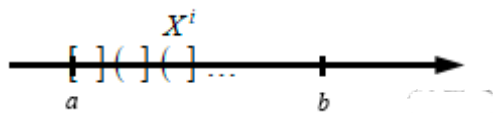


Рис. 3.4. Графическое изображение разбиения первого отрезка

$$Y = [c, d], \quad Y = \bigcup_{j=1}^n Y^j \quad (\text{рис. 3.5})$$

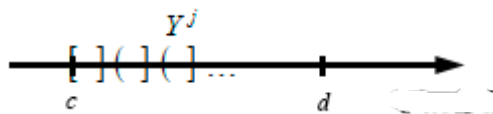


Рис. 3.5. Графическое изображение разбиения второго отрезка

Если изобразить прямоугольник полностью, то получится сетка:

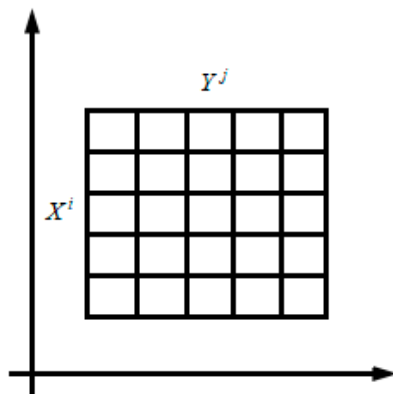


Рис. 3.6. Графическое изображение рассматриваемого случая
 $(x^i, y^j) \in X^i \times Y^j$

Определим ступенчатую функцию:

$$F_1(x, y) = F(x^i, y^j), (x, y) \in X^i \times Y^j$$

Аппроксимация непрерывной функции

Справедливо следующее неравенство:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |F(x, y) - F_1(x, y)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Только что мы аппроксимировали непрерывную игру матричной игрой.

$$A = (a_{ij} = F(x^i, y^j))_{m \times n}$$

Определим отображение $\varphi \rightarrow p: p_i = \int_{x_i} d\varphi(x) \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Таким образом можно определить $\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на } P^2}$

Аналогично для второго игрока:

$$\psi \rightarrow q: q_j = \int_{y_j} d\psi(y) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

$$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F_1(x, y) d\varphi(x) d\psi(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F(x^i, y^j) p_i q_j = A(p, q),$$

$$p_i q_j \in P(X^i \times Y^j)$$

Покажем, наконец, что $F(\varphi, \psi)$ и $F_1(\varphi, \psi)$ – близкие функции:

$$|F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)| = \left| \int_a^b \int_c^d (F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)) d\varphi(x) d\psi(y) \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \int_c^d \overbrace{|F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)|}^{\leq \varepsilon \text{ в силу (1)}} d\varphi(x) d\psi(y) \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

и условие (A) выполнено.

Лекция 4. Свойства решений в смешанных стратегиях

Завершаем доказательство теоремы. Из Л4 следует, что

$$\left| \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) - \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} \overbrace{F_1(\varphi, \psi)}^{\text{из (2)} = A(p, q)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \underbrace{\min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)}_{\bar{V}} - \underbrace{\min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F_1(\varphi, \psi)}_{\max_{q \in Q} \min_{p \in P} A(p, q)} \right| \leq \varepsilon$$

Осталось заметить, что по основной теореме матричных игр $A(p, q)$ имеет седловую точку, поэтому

$$\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} F_1(\varphi, \psi) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F_1(\varphi, \psi) \Rightarrow |\underline{V} - \bar{V}| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \underline{V} = \bar{V},$$

и Т1.5 полностью доказана.

Терема 1.6 (о необходимом и достаточном условии существования решения в смешанной стратегии. Доказательство)

Теорема: пусть Γ – непрерывная игра на прямоугольнике. Тогда для того, чтобы (φ^0, ψ^0, V) было решением в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\Leftrightarrow F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}. \quad (*)$$

Доказательство: пусть (φ^0, ψ^0, V) – решение в смешанных стратегиях. Выведем отсюда условие (*):

$$\begin{aligned} F(\varphi^0, \psi) \leq F(\varphi^0, \psi^0) = V \leq F(\varphi, \psi^0) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} &\Rightarrow \{\varphi = x, \psi = y\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} \\ (*) &\Rightarrow (\varphi^0, \psi^0, V) \end{aligned}$$

– решение в смешанных стратегиях. Осредним неравенство (*) по φ и по ψ :

$$\begin{aligned} F(\varphi, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, \psi) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} \\ \varphi = \varphi^0, \quad \psi = \psi^0 \\ F(\varphi^0, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, \psi^0) = V = F(\varphi^0, \psi^0) \end{aligned}$$

и достаточность также доказана.

Теорема 1.7 (аналог теоремы 1.6 для матричных игр)

Теорема: пусть имеется игра с матрицей A . Для того, чтобы (p^0, q^0, V) было решением в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства аналогичные неравенствам (*):

$$\Leftrightarrow A(i, q^0) \leq V \leq A(p^0, j) \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n}$$

Доказательство происходит аналогично Т1.6. Как осуществляется проверка? Допустим, есть матрица A :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1^0 & j & q_n^0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1^0 \\ i \\ p_n^0 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$A = (i, q^0) = \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j^0$$

– скалярное произведение i -ой строки на q^0 .

$$A = (p^0, j) = \sum_{i=1}^n p_i^0 a_{ij}$$

– скалярное произведение j -ого столбца на p^0 .

Пример:

1.

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & \dots & c_n & c_1 \end{pmatrix}$$

Интуитивно понятно, что первый игрок должен действовать следующим образом:

$$p^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

Второй игрок:

$$q^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

$$V = \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n}$$

2.

$$F(x, y) = (x - y)^2 - |x - y|, X = [0, 1], Y = [0, 1]$$

$$\varphi^0(x) = x, \psi^0(y) = y, V = -\frac{1}{6} - \text{показать самостоятельно.}$$

Теорема 1.8 (о верхней и нижней грани смешанных стратегий в непрерывной игре)

Для непрерывной игры Γ справедливы следующие утверждения:

1. $\forall \varphi \in \{\varphi\} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y)$
2. $\forall \psi \in \{\psi\} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max_{x \in X} F(x, \psi)$

Доказательство: возьмем $\forall \varphi \in \{\varphi\}, \forall \psi \in \{\psi\}$. Тогда можно записать следующее:

$$F(\varphi, \psi) = \int_c^d F(\varphi, y) d\psi(y) \geq \int_c^d \min_{y \in Y} F(\varphi, y) d\psi(y) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \geq \min_{y \in Y} F(\varphi, y) \geq \{Y \subset \{\psi\}\} \geq \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y)$$

Следствие из Теоремы 1.8 для значений игры на прямоугольнике

Для значения непрерывной игры Γ на прямоугольнике справедливо:

$$V = \inf_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi)$$

Доказательство: мы знаем, что непрерывная игра Γ имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. $F(\varphi, \psi)$ имеет седловую точку. Тогда, в силу Т1.1:

$$V = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi).$$

Далее, используя Т1.8, получим:

$$V = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi),$$

и следствие доказано.

Теорема 1.8* для матричной игры

Для матричной игры A справедливы следующие утверждения:

1. $\forall p \in P \min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j)$
2. $\forall q \in Q \max_{p \in P} A(p, q) = \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q)$

Доказательство теоремы происходит аналогично T1.8.

Следствие 1.8* максиминных чистых стратегий

Для значения матричной игры A справедливо:

$$V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q)$$

Доказательство происходит аналогично доказательству следствия из T1.8. Осталось сформулировать свойство дополняющей нежесткости. Для этого нам понадобится понятие спектра смешанной стратегии.

Спектр смешанной стратегии

Определение: будем говорить, что точка $x' \in Sp(\varphi)$ – спектр функции распределения, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists [a', b'] \subset [a, b] \ x' \in [a', b'] \ b' - a' < \varepsilon \underbrace{\varphi(b') - \varphi(a')}_{P([a', b'])} > 0$$

Рассмотрим, какие точки заведомо являются точками спектра:

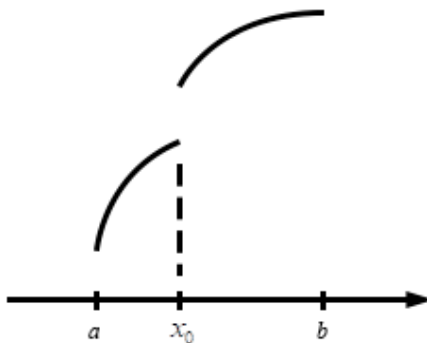


Рис. 4.1. Графическое изображение точек спектра смешанной стратегии

Пример: пусть в точке x_0 производная $\varphi'(x_0)$ существует и положительна. Тогда x_0 – точка спектра.

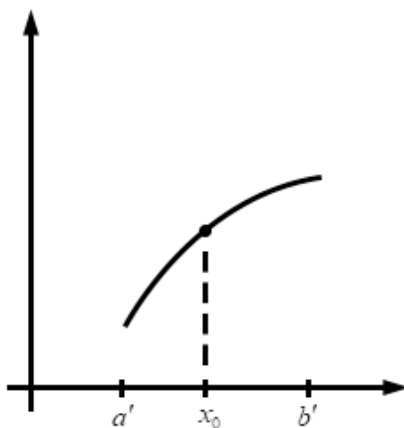


Рис. 4.2. Графическое изображение точек спектра смешанной стратегии рассматриваемого примера

Упражнение: докажите, что множество точек спектра на $[a, b]$ является замкнутым.

Теорема 1.9 (Свойство дополняющей нежелательности)

Пусть (φ^0, ψ^0, V) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ на прямоугольнике. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $\forall x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = V$
2. $\forall y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = V$

Доказательство: из (*) следует, что $F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y)$. Теорема утверждает, что для точек из спектра это неравенство обращается в равенство. Предположим, что утверждение неверно, т.е. что

$$\exists x' \in Sp(\varphi^0): F(x', \psi^0) < V$$

В силу непрерывности по x функции $F(x, \psi^0)$,

$$\exists [a', b'] \quad x' \in [a', b'] \quad b' - a' < \varepsilon \quad F(x, \psi^0) \leq V' < V \quad \forall x \in [a', b'].$$

Из определения спектра следует, что можно выбрать отрезок $[a', b']$ таким образом, что

$$\varphi^0(b') - \varphi^0(a') > 0$$

Придем к противоречию:

$$\begin{aligned} V = F(\varphi^0, \psi^0) &= \int_a^b F(x, \psi^0) d\varphi^0(x) = \int_{a'}^{b'} \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\leq V'} d\varphi^0(x) + \int_{X/[a', b']} \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\leq V} d\varphi^0(x) \leq \\ &\leq V' \int_{a'}^{b'} \overbrace{d\varphi^0(x)}^{>0} + V \int_{X/[a', b']} d\varphi^0(x) < V \int_{a'}^{b'} d\varphi^0(x) + V \int_{X/[a', b']} d\varphi^0(x) = 1 \cdot V = V \end{aligned}$$

Следствие из Теоремы 1.9

Пусть (φ^0, ψ^0, V) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ на прямоугольнике. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $F(x, \psi^0) < V \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0)$;
2. $F(\varphi^0, y) > V \Rightarrow y \notin Sp(\psi^0)$.

Теорема 1.10 (свойство дополняющей нежелательности для матричных игр)

Пусть (p^0, q^0, V) – решение матричной игры A . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1. \quad p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = V$$

$$2. \quad q_i^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = V$$

Доказательство происходит аналогично обоснованию Т1.9. Стоит заметить, что импликация

$$A(i, q^0) = V \Rightarrow p_i^0 > 0$$

неверна. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}, \quad V = a \quad \text{и все стратегии являются оптимальными. Такое}$$

экстравагантное название теоремы связано с тем, что

$$A(i, q^0) \leq V \Leftrightarrow p_i^0 \geq 0$$

$$p_i^0 > 0 \text{ ("нежестко")} \Rightarrow A(i, q^0) = V \text{ ("жестко")}$$

и наоборот,

$$A(i, q^0) < V \text{ ("нежестко")} \Rightarrow p_i^0 = 0 \text{ ("жестко").}$$

Следствие из Теоремы 1.10

Пусть (p^0, q^0, V) – решение матричной игры A . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1. \quad A(i, q^0) < V \Rightarrow p_i^0 > 0$$

$$2. \quad A(p^0, j) > V \Rightarrow q_j^0 > 0$$

Примеры:

1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V^0 = 0, \quad p^0 = q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_i & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Если положить $0 < a_i < 1$, то игра имеет следующую интерпретацию: играют полицейские и преступники. Задача полицейского – поймать преступника. Их стратегия – идти в n возможных мест. Если они «столкнутся» в i , то a_i – вероятность поймать преступника. Отметим, что эта игра в чистых стратегиях решения не имеет:

$$\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 0, \quad \text{но} \quad \bar{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} > 0.$$

Найдем решение в смешанных стратегиях. Предположим, что $p_i^0 > 0, q_j^0 > 0$. Тогда

$$A(i, q^0) = V, \quad i = \overline{1, n}$$

$$a_i q_i^0 = V, \quad i = \overline{1, n}$$

$$q_i^0 = \frac{V}{a_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

Сложим последнее равенство по всем i :

$$1 = V \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \Rightarrow V = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

$$q_i^0 = \frac{1}{a_i} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Для второго игрока поступаем аналогично.

$$q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = V, \quad j = \overline{1, n}$$

$$a_j p_j^0 = V, \quad j = \overline{1, n}$$

$$p_j^0 = \frac{1}{a_j} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Равенство $q_i^0 = p_j^0$ приводит нас к неочевидному выводу: полицейскому следует идти туда, где вероятность поймать преступника наименьшая (реализация выражения «чтобы поймать преступника, нужно мыслить, как преступник»). Фактически, нами была решена задача

$$V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} a_i p_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

3.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $a \approx 1 \Rightarrow V \approx \frac{1}{2}$, т.е. первый игрок, будучи не вполне рассудителен, бросает монетку и выбирает любую из двух строчек.

Лекция 5. Методы решения матричных игр

Допустим есть матричная игра с матрицей $A=(a_{ij})_{m \times n}$, то в первую очередь нужно проверить наличие решений игры в чистых стратегиях (есть ли у матрицы седловая точка). Как было выяснено ранее, для существования седловой точки необходимо, чтобы

$$\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij}.$$

Если седловой точки в чистых стратегиях нет, то решаем матричную игру в смешанных стратегиях. Вспомним условие (*) из Т1.7:

$$A(i, q^0) \leq V \leq A(p^0, j) \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n}$$

Доминирование строк и столбцов

Пусть даны векторы

$$a = (a_1, \dots, a_l), \quad b = (b_1, \dots, b_l).$$

Определение: будем говорить, что вектор a доминирует вектор b , если

$$a_i \geq b_i \quad \forall i = \overline{1, l}$$

Определение: будем говорить, что вектор a строго доминирует вектор b , если

$$a_i > b_i \quad \forall i = \overline{1, l}$$

Пусть дан набор векторов $a^{(i)}, i = \overline{1, m}$ некоторого евклидова пространства и пусть $p = (p_1, \dots, p_m)$ – вероятностный вектор, т.е.

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Определение: выпуклой комбинацией векторов $a^{(i)}$ с коэффициентами p_i называется $\sum_{i=1}^m p_i a^{(i)}$.

Теорема 1.11 (о доминировании строк)

Пусть некоторая строка матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в некоторую оптимальную смешанную стратегию первого игрока, и ее можно вычеркнуть. Если указанное доминирование строгое, то доминируемая строка входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Доказательство: пусть строка i_1 доминируется выпуклой комбинацией остальных строк. Тогда

$$a_{ij} \leq \sum_{i \neq i_1}^m p_i a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{i \neq i_1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i \neq i_1$$

Вычеркнем в матрице A строку i_1 . Получим в результате матрицу \hat{A} с аналогичной исходной матрице нумерацией строк. (\hat{p}, q^0, V) – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей \hat{A} . В частности, для этой тройки выполнено условие (*). Расширим вектор \hat{p} следующим образом:

$$p^0 = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{i_1-1}, 0, \hat{p}_{i_1+1}, \dots, \hat{p}_m)$$

Утверждается, что (p^0, q^0, V) является решением игры с матрицей A . Проверим справедливость условия (*) для (p^0, q^0, V) .

1. $A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \stackrel{(*) \text{ для } \hat{A}}{\geq} V, j = \overline{1, n}$
2. $\forall i \neq i_1 \quad A(i, q^0) = \hat{A}(i, q^0) \stackrel{(*) \text{ для } \hat{A}}{\leq} V, i = \overline{1, m}$
3. $i = i_1 \quad A(i_1, q^0) = \sum_{j=1}^n a_{i_1 j} q_j^0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq i_1} (p_i q_{ij}) q_{j_0} = [p' = (p_i, i \neq i_1)] = \hat{A}(p', q^0) \leq V$

Докажем вторую часть теоремы. Приведенные выше неравенства в своем строгом варианте остаются справедливыми. Пусть p^* – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Тогда тройка (p^*, q^0, V) является решением в смешанных стратегиях игры с матрицей A . Используем следствие Т1.10:

$$A(i_1, q^0) < V \Rightarrow p_{i_1}^* = 0$$

Полезный пример: представим матрицу, содержащую в каждой ячейке элемент a :

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}$$

За счет нестрого доминирования, вычеркивая все строки, кроме первой, будет потеряно огромное количество оптимальных стратегий.

Теорема 1.12 (о доминировании столбцов)

Пусть некоторый столбец матрицы A доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в некоторую оптимальную смешанную стратегию второго игрока, и его можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминирующий столбец входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Доказательство теоремы схоже с доказательством Т1.11.

Аналитический метод решения матричной игры

Рассмотрим пример использования доминирования.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Видно, что четвертый столбец больше третьего. Вычеркиваем его:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ 2 & 2 & 1 & \cancel{2} \\ 2 & 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Аналогично третья строка больше четвертой строки. Вычеркиваем последнюю строку:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ 2 & 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Здесь уже не осталось доминируемых строк и доминирующих столбцов, поэтому используем доминирование при помощи выпуклых комбинаций:

$$\frac{1}{2}(\text{первая строка}) + \frac{1}{2}(\text{вторая строка}) \geq (\text{третья строка})$$

Тогда вычеркнем третью строку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Видно, что третий столбец доминирует второй.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 1 & 3 & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Осталась матрица

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \hat{q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad V = 2$$

Дополняя векторы нулями, получаем искомое решение:

$$p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right), \quad q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right), \quad V = 2$$

Упражнение: пусть дана матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$, имеющая решение в чистых стратегиях.

Покажите, что после вычеркивания доминируемых (-ющих) строк (столбцов), останется хотя бы одна седловая точка.

Графический метод решения матричной игры

Рассмотрим матрицу размеров $m \times 2$:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 1-p_1 & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1$$

$$V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \min_{1 \leq j \leq n} [a_{1j}p_1 + a_{2j}(1-p_1)],$$

$$k_j = a_{1j} - a_{2j}$$

– угловой коэффициент. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока:

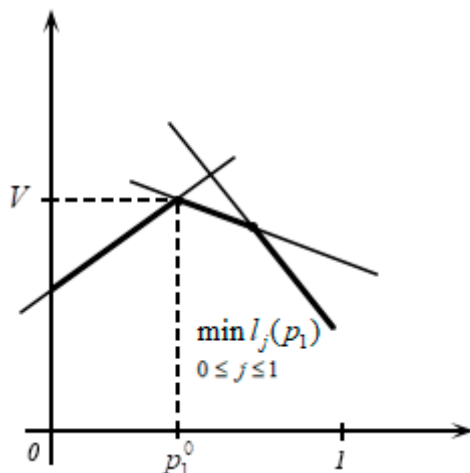


Рис. 5.1. Графическое изображение функции минимума

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока:

а. $0 < p_1^0 < 1$

$$\exists j_1: k_{j_1} \geq 0, l_{j_1}(p_1^0) = V$$

$$\exists j_2: k_{j_2} \leq 0, l_{j_2}(p_1^0) = V$$

Графический метод. 2 строки- n столбцов

Искать оптимальную стратегию будем в следующем виде:

$$q^0 = (0, \dots, 0, \underbrace{q^*}_{j_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1-q^*}_{j_2}, 0, \dots, 0),$$

$$k_{j_1}q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0, \quad 0 \leq q^* \leq 1$$

Решение этого уравнения $(q)^*$ всегда найдется. Это следует из противоположности знаков k_{j_1} и k_{j_2} . Покажем, что q^0 – искомая смешанная стратегия второго игрока.

$$\forall 1 \leq p_1 \leq 1 \quad A(p, q^0) \equiv V$$

$$A(p, q^0) = q^* \overbrace{l_{j_1}(p_1)}^{k_{j_1}} + (1-q^*) \overbrace{l_{j_2}(p_1)}^{k_{j_2}} = \text{const}, \quad l_{j_1}(p_1) = A(p, j_1)$$

$$l_{j_1}(p_1^0) = V = l_{j_2}(p_1^0) \Rightarrow \text{const} = V$$

б. $p_1^0 = 0$

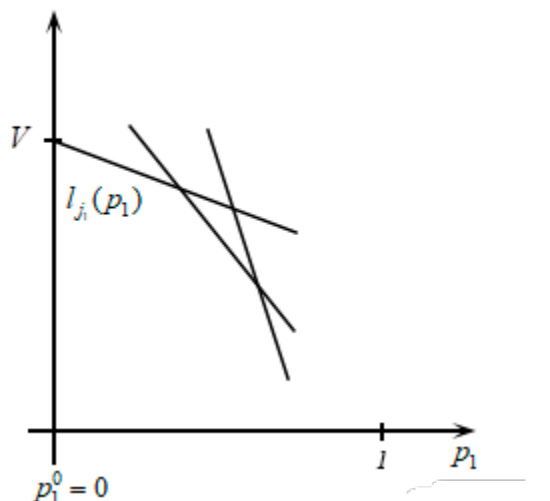


Рис 5.2. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\exists j_1: k_{j_1} \leq 0, l_{j_1}(0) = 0$$

$$A(p, j_1) = l_{j_1}(p_1) \leq V, \forall p_1 \in [0, 1]$$

Получим, что $(2, j_1)$ – седловая точка.

с. $p_1^0 = 1$

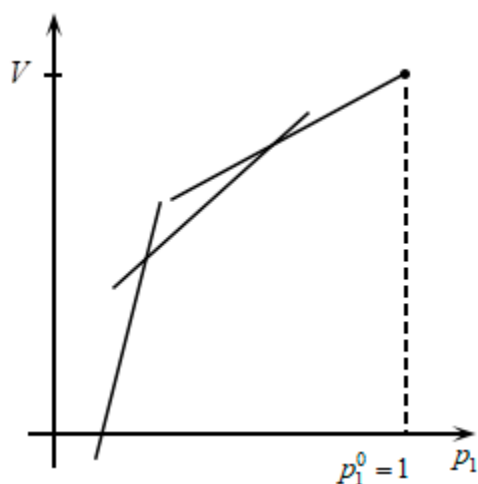


Рис 5.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

Наличие седловой точки показывается аналогично.

Графический метод. 2 столбца - m строк

Рассмотрим матрицу размеров $m \times 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq q_1 \leq 1,$$

Воспользуемся следствием теоремы 1.10:

$$V \stackrel{\text{Сл. Т1.10}}{=} \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \min_{0 \leq q_1 \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} \overbrace{[a_{i1}q_1 + a_{i2}(1 - q_1)]}^{l_i(q_1)}.$$

$$k_{i_1} \geq 0, l_{i_1}(q_1^0) = V$$

$$k_{i_2} \geq 0, l_{i_2}(q_1^0) = V$$

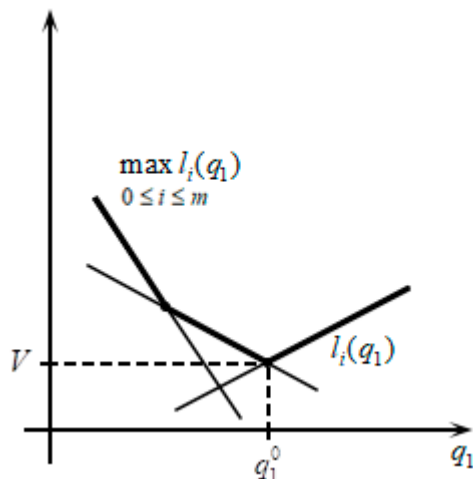


Рис 5.4. Графики линейных функций рассматриваемого случая

Аналогично строим оптимальную стратегию первого игрока.

$$p^0 = (0, \dots, 0, \underset{i_1}{p^*}, 0, \dots, 0, 1 - \underset{i_2}{p^*}, 0, \dots, 0),$$

$$k_{i_1} p^* + k_{i_2} (1 - p^*) = 0, \quad 0 \leq p^* \leq 1.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решим матричную игру с

Скалярное умножение столбца на столбец:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 - p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем следующие функции:

$$l_1(p_1) = -p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - p_1$$

$$l_2(p_1) = -2p_1 + 4(1 - p_1) = 4 - 6p_1$$

$$l_3(p_1) = 3p_1 + 1(1 - p_1) = 1 + 2p_1$$

Построим функции:

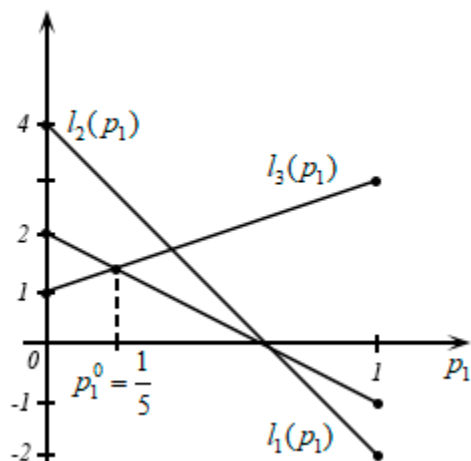


Рис 5.5. Графическое изображение рассматриваемого случая

Найдем точку максимума (точку пересечения):

$$l_1(p_1) = l_3(p_1) \Rightarrow 2 - 3p_1 = 1 + 2p_1 \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{5} \Rightarrow V = 1 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

$$p^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right), \quad q^0 = (q^*, 0, 1 - q^*)$$

Угловые коэффициенты:

$$k_1 = -3, \quad k_3 = 2$$

Составим уравнение:

$$-3q^* + 2(1 - q^*) = 0 \Rightarrow q^* = \frac{2}{5} \Rightarrow q^0 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5} \right)$$

Сделаем проверку условия (*).

1. Для первого игрока:

$$A(p^0, j) \geq V = \frac{7}{5} \quad \forall j$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(p^0, 1) = \frac{-1}{5} + \frac{8}{5} = \frac{7}{5}, \quad A(p^0, 2) = \frac{-2}{5} + \frac{16}{5} > \frac{7}{5}, \quad A(p^0, 3) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5};$$

2. Для второго игрока:

$$A(i, q^0) \leq V = \frac{7}{5} \quad \forall i$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(1, q^0) = \frac{-2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{7}{5}, \quad A(2, q^0) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

В качестве упражнения транспонируйте матрицу и решите соответствующую матричную игру.

Упражнение: пусть дана матрица $A_{2 \times 3}$. Выпишите все оптимальные смешанные стратегии двух игроков в обеих ситуациях (рис. 5.6).

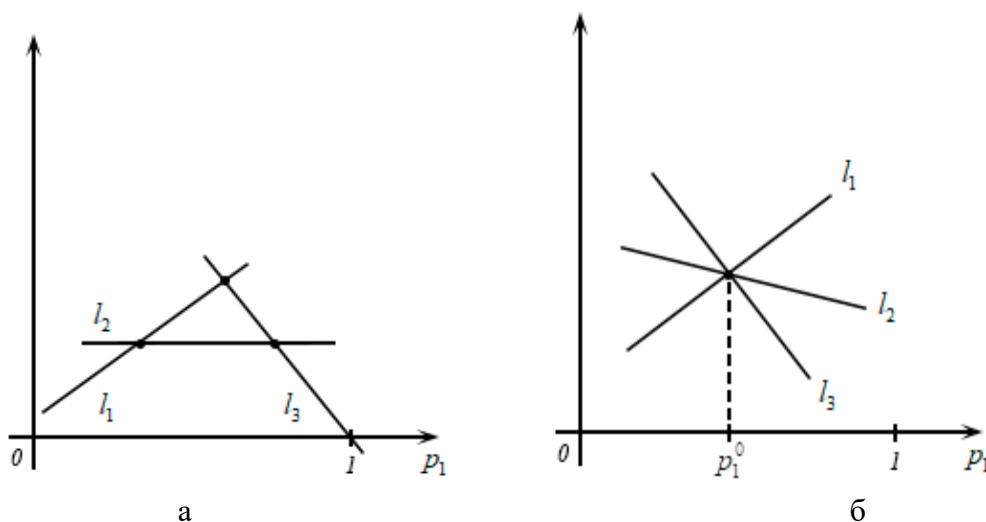


Рис 5.6. Графическое изображение рассматриваемого случая

Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования

Пусть есть игра с матрицей произвольного линейного программирования:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad V > 0$$

Что, если в матрице A есть отрицательные элементы? Предлагается ввести матрицу

$$B = (a_{ij} + C),$$

где C – некоторая достаточно большая константа. Тогда

$$V(B) = V(A) + C$$

и если $(p^0, q^0, V(A))$ – решение игры с матрицей A , то $(p^0, q^0, V(A) + C)$ – решение игры с матрицей B .

Упражнение: докажите, что это справедливо. Подсказка: используйте условие (*).

Ввод вспомогательной переменной (от минимума к максимуму)

Рассмотрим прием ввода вспомогательной переменной и перехода от минимума к максимуму.

Идея:

$$1 = \min(1, 3, 5) = \max_{\substack{u \leq 1 \\ u \leq 3 \\ u \leq 5}} u,$$

т.е. переход от минимума к максимуму состоит в том, чтобы ввести вспомогательную переменную u и наложить на нее соответствующие ограничения. Применим это к максиминной стратегии:

$$V \stackrel{m.1.8'}{=} \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \max_{u \leq A(p, j), j=1, n} u$$

Лекция 6. Игры с выпуклой (вогнутой) функцией выигрыша

Максимализация линейной функции

Продолжаем рассматривать задачу сведения к максимуму (I).

$$\begin{aligned}
 V &= \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \max_{u \leq A(p, j), j=1, n} u = \max_u \left\{ p, u : p \in P, A(p, j) = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq u, j = \overline{1, n} \right\} = \\
 &= \left[u > 0, z : z_i = \frac{p_i}{u} \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m z_i = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{u} = \frac{1}{u} \right] = \\
 &= \max_z \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i} \left\{ z : z_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m z_i a_{ij} \geq 1, j = \overline{1, n} \right\} = \\
 &= \frac{1}{\min_z \sum_{i=1}^m z_i} \left\{ z : z_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m z_i a_{ij} \geq 1, j = \overline{1, n} \right\}
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы свели задачу на максимум к задаче линейного программирования. Напомним, что она разрешима, так как существует максиминная стратегия исходной задачи.

Предположим, мы нашли оптимальное решение z_0 задачи (I). Тогда можно утверждать, что мы нашли решение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока:

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i^0}, \quad p^0 = V \cdot z^0$$

Теперь запишем минимаксную задачу (II).

$$\begin{aligned}
 V &= \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \dots = \frac{1}{\max_w \sum_{j=1}^n w_j} \left\{ w : w_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \geq 1, i = \overline{1, m} \right\} \\
 w^0 : \quad q^0 &= V \cdot w^0
 \end{aligned}$$

Задачи (I) и (II) – взаимно двойственные.

2 В фигурных скобках приводятся соответствующие ограничения.

Свойство дополняющей нежесткости для оптимальных решений

С помощью Т1.10 можно доказать свойство дополняющей нежесткости для оптимальных решений этих двух задач:

$$z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j^0 = 1, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j^0 < 1 \Rightarrow z_i^0 = 0$$

$$w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m z_i^0 a_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^m z_i^0 a_{ij} < 1 \Rightarrow w_j^0 = 0$$

Упражнение: попробуйте доказать это самостоятельно.

§6 Игры с выпуклой (вогнутой) функцией выигрыша

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Определение: будем говорить, что Γ – игра с выпуклой функцией выигрыша, если $F(x, y)$ – непрерывна на $X \times Y$ и выполнено:

$$\forall x \in X \quad F(x, y) \cup_y$$

$$\forall y \in Y \quad F(x, y) \cup_x$$

Определение: будем говорить, что Γ – игра с вогнутой функцией выигрыша, если $F(x, y)$ – непрерывна на $X \times Y$ и выполнено:

$$\forall x \in X \quad F(x, y) \cap_y$$

$$\forall y \in Y \quad F(x, y) \cap_x$$

Крайняя точка выпуклого множества

Пусть Z – выпуклое множество евклидова пространства.

Определение: $z^0 \in Z$ – крайняя точка, если

$$\nexists z' \neq z'' \in Z, \quad \nexists \lambda \in (0, 1): z^0 = \lambda z' + (1 - \lambda) z''$$

Не крайняя точка не может быть внутренней точкой отрезка, соединяющего две точки выпуклого множества (рис. 6.1).

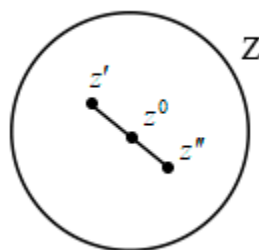
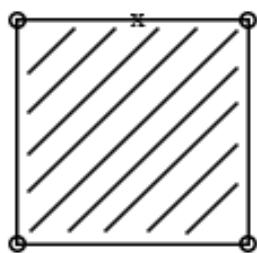


Рис. 6.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

Как видно из рис. 6.2а, точки в вершинах прямоугольника являются крайними, а, например, на ребрах – нет. Другой пример – на рис. 6.2б все точки дуги – крайние.



а



б

Рис. 6.2. Графическое изображение крайних точек

Утверждение о крайней точке выпуклого компакта

Любой выпуклый компакт в евклидовом пространстве имеет крайнюю точку:
 $Z^{ext} \neq \emptyset$.

Доказательство: $Z \subset E^m$. Рассмотрим

$$h(z) = \sum_{i=1}^n z_i^2$$

– строго выпуклую функцию (предполагается, что вы доказали это ранее).

Предположим противное:

$$\exists z' \neq z'' \in Z, \exists \lambda \in (0,1): z^0 = \lambda z' + (1-\lambda)z''$$

$$h(z_0) = h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') < \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'') \leq \lambda h(z^0) + (1-\lambda)h(z^0) = h(z^0)$$

– противоречие. Утверждение доказано.

Пример:

$$Z = \left\{ z \in E^n \mid \sum_{i=1}^n z_i = A, z_i \geq 0, i = \overline{1,n} \right\}$$

$$A > 0$$

$$z_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{A}, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{1,n}$$

Упражнение: докажите, что точки z_i и только они являются крайними.

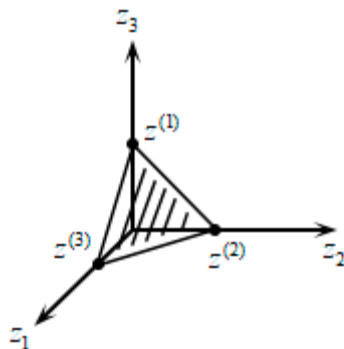


Рис 6.3. Множество Z для $n = 3$

Теорема 1.13 (Каратеодори)

Пусть $Z \subset E^m$. Тогда

$$\forall z \in Z \exists z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in Z^{ext}, \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \Rightarrow z = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}, k \leq m+1$$

(рис. 25) Теорему приведем без доказательства.

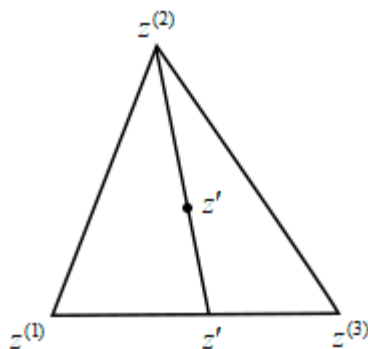


Рис. 6.4. Графическое изображение рассматриваемого случая

Лемма 5 (о крайней точке-максимуме)

Пусть выпуклая функция $h(z)$ – определена и непрерывна на некотором компакте евклидова пространства. Утверждается, что

$$\max_{z \in Z} h(z) = \max_{z \in Z^{ext}} h(z)$$

Доказательство:

$$\exists z^0 : h(z^0) = \max_{z \in Z} h(z)$$

Ввиду теоремы 1.13,

$$z^0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, z^{(i)} \in Z^{ext}$$

$$h(z^0) = h\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i h(z^{(i)}) \leq \max_{1 \leq i \leq k} h(z^{(i)}) \leq h(z^0) \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq k} h(z^{(i)}) = h(z^0)$$

и лемма доказана.

Игры с выпуклой (вогнутой) функцией выигрыша

Пусть Γ – игра с выпуклой функцией $F(x, y)$ по каждой переменной (но не обязательно по совокупности переменных), X – выпуклый компакт,

$$X^{ext} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$$

– конечное множество крайних точек. Также понадобится вектор

$$p = (p_1, \dots, p_k) \in P = \left\{ p \in E^k \mid \sum_{i=1}^k p_i = 1, p_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right\}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(p, y) = \sum_{i=1}^k p_i F(x^{(i)}, y) = \int_X F(x, y) d\varphi(x) = F(\varphi, y) \quad (1)$$

Она определена на $P \times Y$ и является линейной по P и выпуклой по Y . Тогда по теореме 1.3 она имеет седловую точку.

Теорема 1.14 для игры с выпуклой функцией выигрыша

Пусть Γ – игра с выпуклой функцией выигрыша $F(x, y)$,

$$X^{ext} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$$

– конечное множество крайних точек. Утверждается, что эта игра имеет решение в смешанных стратегиях вида:

$$(\varphi^0 = \sum_{i=1}^k p_i^0 I_{x^{(i)}}, y^0, \bar{V}),$$

где (p^0, y^0) – седловая точка функции $\Phi(p, y)$, y^0 – минимаксная чистая стратегия, значение игры:

$$V = \bar{V} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Доказательство: сначала покажем справедливость равенства

$$\forall y \in Y \max_{p \in P} \Phi(p, y) = \max_{x \in X} F(x, y) \stackrel{\text{Л. 5}}{=} \max_{1 \leq i \leq k} F(x^{(i)}, y) \quad (2)$$

$$\max_{p \in P} \Phi(p, y) = \max_{p \in P} \sum_{i=1}^k p_i F(x^{(i)}, y) \stackrel{\text{м. 1.7}}{=} \max_{1 \leq i \leq k} F(x^{(i)}, y) \stackrel{\text{Л. 5}}{=} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Пусть теперь (p^0, y^0) – седловая точка функции $\Phi(p, y)$. Тогда

$$\min_{y \in Y} \Phi(p^0, y) = \max_{p \in P} \min_{y \in Y} \Phi(p, y) \stackrel{m.1.1}{=} \min_{y \in Y} \max_{p \in P} \Phi(p, y) = \begin{cases} \max_{p \in P} \Phi(p, y^0) = \max_{x \in X} F(x, y^0) \\ \min_{y \in Y} \max_{p \in P} F(x, y) = \bar{V} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\min_{y \in Y} \Phi(p^0, y) \stackrel{(1)}{=} \min_{y \in Y} F(\varphi^0, y) = \bar{V} = \max_{x \in X} F(x, y^0) \Rightarrow$$

$$F(\varphi^0, y) \leq \bar{V} \leq F(x, y^0) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Это неравенство есть условие (*) из **T1.6** для тройки $(\varphi^0, y^0, \bar{V})$. Теорема доказана.

Пусть Γ – игра с вогнутой функцией выигрыша $F(x, y)$,

$$Y^{ext} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}\}$$

– конечное множество крайних точек. Рассмотрим вероятностный вектор

$$q = (q_1, \dots, q_k) \in Q$$

и функцию

$$\Phi_1(x, q) = \sum_{j=1}^k q_j F(x, y^{(j)})$$

являющуюся вогнутой по x и выпуклой по q .

Теорема 1.14 для игры с вогнутой функцией выигрыша

Эта игра имеет решение в смешанных стратегиях вида:

$$(x^0, \psi^0 = \sum_{j=1}^k q_j^0 I_{y^{(j)}}, y^0, \underline{V}),$$

где (x^0, q^0) – седловая точка функции $\Phi(x, q)$, x^0 – максиминная чистая стратегия, значение игры:

$$V = \bar{V} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$$

Доказательство можно провести по аналогии с T1.14.

Пример:

$$F(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, \quad X = [0, 1] \quad Y = [0, 1]$$

$$\left. \begin{aligned} F''_{xx}(x, y) &= 2 > 0 \\ F''_{yy}(x, y) &= 2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F - \text{ строго выпукла по обоим переменным}$$

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = \frac{4}{9}, \quad y^0 = \frac{2}{3}$$

$$\underline{V} = 0 \neq \bar{V}$$

Найдем $\varphi^0 = p_1^0 I_0 + (1 - p_1^0) I_1$.

$$\Phi(p_1, y) = p_1 F(0, y) + (1 - p_1) F(1, y) = p_1 y^2 + (1 - p_1)(2 - 3y + y^2)$$

$\Phi(p_1^0, y)$ достигает минимума в точке $y = y^0$

$$\Phi'(p_1^0, y) = 0$$

$$\Phi'(p_1^0, y) = 2p_1^0 y + (1 - p_1^0)(-3 + 2y) = 0$$

$$y^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2p_1^0 \cdot \frac{2}{3} + (1 - p_1^0)\left(-3 + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}p_1^0 + (1 - p_1^0)\left(-\frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow p_1^0 = \frac{5}{9}$$

$$\varphi^0 = \frac{5}{9} I_0 + \frac{4}{9} I_1$$

Лекция 7. Исследование игровых моделей

Модель «нападение – защита»

Пусть имеется n пунктов с номерами $i = \overline{1, n}$ возможного «прорыва» средств нападения сквозь защитные пункты. Нападение имеет $A > 0$ ресурсов (бесконечно делимых). Стратегией нападения является

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}$$

Защита, в свою очередь, имеет в распоряжении $B > 0$ средств, и распределяет средства защиты в соответствии с вектором

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in Y = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i = B, y_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}$$

Функция выигрыша

Рассмотрим, как измеряется эффективность средств защиты на i -ом пункте. Пусть μ_i – количество средств нападения, которое может уничтожить одно средство защиты. Пусть на пункт i выделяется x_i средств нападения и y_i средств защиты. Тогда возможны два случая:

1. $x_i \geq \mu_i y_i \Rightarrow x_i - \mu_i y_i \geq 0$ – количество сил, которое прорывается
2. $x_i < \mu_i y_i \Rightarrow$ не прорывается никого

Объединяя, получаем, что на i -ом пункте прорывается $\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$.

$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$ – функция выигрыша.

В результате мы ввели антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ в нормальной форме³. Заметим, что $F(x, y)$ – выпуклая функция как сумма линейных (а значит, выпуклых) функций. Без потери общности будем считать, что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$. Исследуем эту модель.

Исследование игры «нападение-защита»

Покажем, что $\underline{V} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max [A - \mu_n B, 0]$ и $x^{(0)} = x^{(n)} = (0, \dots, 0, A)$,

т.е. все силы направляются на слабейший n -ый пункт.

3 Игроки выбирают стратегии независимо друг от друга.

$$\forall x \in X \quad i_0 : \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \leq B < \sum_{i=1}^{i_0} \frac{x_i}{\mu_i} \quad 4$$

Определим стратегию для защиты:

$$y(x) : y_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = \overline{1, i_0-1} \\ B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = i_0 \\ 0, & i > i_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \min_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y(x)) = x_{i_0} - \mu_{i_0} \left(B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \right) + \sum_{i=i_0+1}^n x_i = \sum_{i=i_0}^n x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} \overbrace{\frac{\mu_{i_0}}{\mu_i}}^{\leq 1} x_i - \mu_{i_0} B \leq \\ &\leq \sum_{i=i_0}^n x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i - \mu_{i_0} B = A - \mu_{i_0} B \leq A - \mu_n B \leq \max[A - \mu_n B, 0] = \min_{y \in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] = \\ &= \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y) = W(x^{(n)}) \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$\begin{aligned} W(x) &\leq W(x^{(n)}) \quad \forall x \in X \\ \min_{y \in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] &= \max[A - \mu_n B, 0] \end{aligned}$$

Минимаксная и максиминная стратегия в игре «нападение-защита»

Покажем, что

$$\bar{V} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right] \text{ и } y^0 : y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

т.е. чем меньше сил защита направляет на пункт, тем меньше он защищен. Если $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n > 0$, то $y_i^0 = \frac{B}{n}$, $\forall i = \overline{1, n}$. Отметим, что у множества X , крайними точками являются стратегии

$$x^{(i)} = (0, \dots, 0, A, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{1, n}$$

4 Если $i_0 = 1$, то первое неравенство отсутствует, если же $i_0 = n + 1$, то отсутствует второе неравенство.

$$\forall y \in Y \quad \max_{y \in Y} F(x, y) \stackrel{11.5}{=} \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) \stackrel{(1)}{=} \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) = \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} [A - \mu_i y_i, 0] = \\ &= \min_{y \in Y} \max [A - \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i y_i, 0] = \max [A - \max_{y \in Y} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i y_i, 0] = \max [A - B \max_{y \in Y} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \frac{y_i}{B}, 0] = \\ &= \left[p : p_i = \frac{y_i}{B} \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{B} = 1 \right] = \max [A - B \max_{p \in P} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i p_i, 0] = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{см. лекцию IV, пример 2} \\ \text{про полицейского и} \\ \text{преступника} \end{array} \right] = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right] \end{aligned}$$

И

$$y^0 = Bp^0, \quad y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Рассмотрим случай: $B \geq A \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$, т.е. защита имеет достаточно много сил.

$$\bar{V} = \max \left[\overbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}}^{\leq 0 \text{ в силу нер-ва}}, 0 \right] = 0 \geq \underline{V} \geq 0 \Rightarrow \bar{V} = \underline{V} = 0$$

Теперь рассмотрим случай, когда $B < A \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$. Покажем, что для него седловой точки в чистых стратегиях не существует.

$$\bar{V} = \max \left[\overbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}}^{> 0}, 0 \right] = A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}} > A - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} = A - \mu_n B > 0 \Rightarrow \bar{V} > \max [A - \mu_n B] = \underline{V}$$

Ввиду этого обстоятельства, исследуем игру в смешанных стратегиях.

Решение в смешанных стратегиях

$F(x, y)$ – выпуклая и, в соответствии с **Т1.14**, мы можем заключить, что

$$V = \bar{V}, \quad y^0: \quad y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Докажем, что оптимальной смешанной стратегией является:

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^n p_i^0 I_{x_i}, \quad p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = \overline{1, n}$$

Так, нам нужно доказать, что $F(\varphi^0, y) \stackrel{(*)}{\geq} \bar{V}, \quad \forall y \in Y$. Приведем очевидное вспомогательное неравенство. Для некоторых $a_i, \quad i = \overline{1, n}$ справедливо:

$$\sum_{i=1}^n \max[a_i, 0] \geq \max\left[\sum_{i=1}^n a_i, 0\right]$$

$$\begin{aligned} F(\varphi^0, y) &= \sum_{i=1}^n p_i^0 F(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^n p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] = \sum_{i=1}^n \max\left[\overbrace{A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i}^{a_i}, 0\right] \geq \\ &\geq \max\left[\sum_{i=1}^n (A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i), 0\right] = \max\left[A - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] = \max\left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] = \bar{V} \end{aligned}$$

Модель «Дуэль»

Пусть расстояние между игроками равно d_0 , каждый дуэлянт имеет в своем распоряжении по одному выстрелу. По команде они начинают сближаться и могут произвести выстрел в любой момент времени. В нашей модели нет барьера между игроками, который бы ограничивал расстояние. Дуэлянты характеризуются функциями меткости: $p_i(d), \quad i = 1, 2$.⁶ Будем считать, что эти функции обладают следующими свойствами: они непрерывны, определены на $[0, d_0]$ и убывают, причем

$$p_i(0) = 1, \quad i = 1, 2$$

$$p_i(d_0) = 0, \quad i = 1, 2$$

⁵ Чем менее защищен пункт, тем по нему предпочтительнее нанести удар.

⁶ По сути, вероятность того, что игрок поразит противника, стреляя с расстояния d .

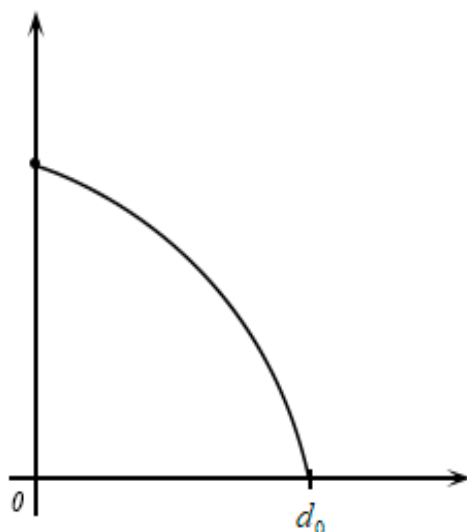


Рис. 7.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

Шумная дуэль

Сформулируем модель шумной дуэли.⁷ Стратегия первого дуэлянта: $x \in X = [0, d_0]$ – расстояние, с которого он намеревается сделать выстрел. Аналогично для второго игрока: $y \in Y = [0, d_0]$. Выпишем функцию выигрыша для первого дуэлянта. Будем считать главной его целью – поражение противника⁸ с наибольшей вероятностью.

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases}$$

(Отметим, что дуэльная ситуация встречается и в экономике. Пусть объявлен некий проект, за который борются две фирмы. Его нужно подать не позднее времени T . Логично, что чем меньше потрачено времени на выполнение проекта, тем больше вероятность, что его отклонят. Поэтому эта игра с выбором момента времени.)

$$d^* : p_1(d) = 1 - p_2(d)$$

Установим, что решение игры – $(d^*, d^*, V = p_1(d^*))$.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) = \max_{0 \leq x \leq d_0} \min[p_1(x), 1 - p_2(x)] = p_1(d^*)$$

⁷ Дуэлянты слышат выстрелы друг друга.

⁸ А не, например, сохранить жизнь.

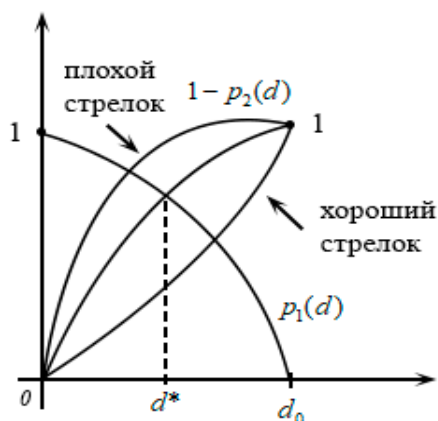


Рис. 7.2. Оптимальная стратегия шумной модели

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq d_0} \sup_{0 \leq x \leq d_0} F(x, y) = \min_{0 \leq y \leq d_0} \max[p_1(y), 1 - p_2(y)] = p_1(d^*)$$

Мы получили, что $\bar{V} = \underline{V} = p_1(d^*)$. В случае, если

$$p_1(d) \equiv p_2(d):$$

$$d^*: p_1(d) = 1 - p_2(d) \Rightarrow p_1(d) = 1 - p_1(d) \Rightarrow p_1(d) = \frac{1}{2}$$

Бесшумная дуэль

Теперь рассмотрим модель бесшумной дуэли.

$$x \in X = [0, d_0], \quad y \in Y = [0, d_0]$$

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ (1 - p_2(y))p_1(x), & x < y \end{cases}$$

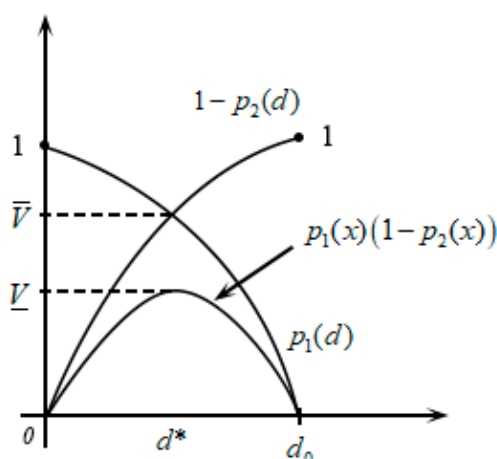


Рис. 7.3. Оптимальная стратегия бесшумной модели

Покажем, что в этой модели нет седловой точки в чистых стратегиях.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) = \max_{0 \leq x \leq d_0} [p_1(x)(1 - p_2(x))]$$

$$\bar{V} = p_1(d^*)$$

Справедливость этих равенств почти очевидна. Проверьте самостоятельно. Итак, мы получили, что $\underline{V} < \bar{V}$.

Рассмотрим пример:

$$d_0 = 1, \quad p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq y \\ y(1 - x), & x < y \end{cases}$$

Подробное исследование можно посмотреть в зеленой книге (нет, не в фильме ☹), здесь же приведем результаты.

$$V = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$$

Функции распределения оптимальной смешанной стратегии для обоих дуэлянтов:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1 \right), & 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{2} \\ 1, & 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi_0(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1 \right), & 0 \leq y \leq 2 - \sqrt{2} \\ 1, & 2 - \sqrt{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим графики распределения и проанализируем поведение дуэлянтов:

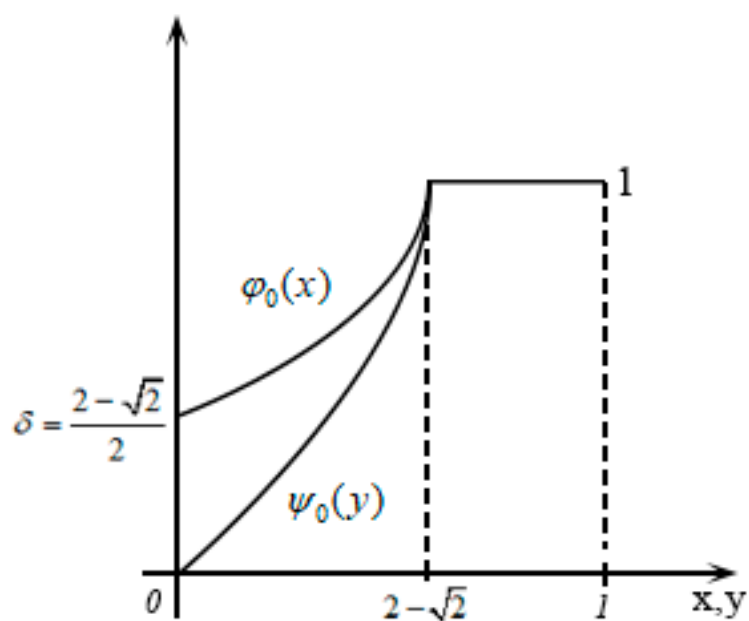


Рис. 7.4. Графическое изображение рассматриваемого случая

Упражнение: проверьте выполнение неравенств (*):

$$F(\varphi^0, y) \geq V = \sqrt{2} - 1 \geq F(x, \psi^0), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Лекция 8. Многошаговые (антагонистические) игры с полной информацией

Антагонистические игры с полной информацией

До этого момента мы рассматривали модель антагонистической игры без динамики: противники не знали о шагах друг друга. В настоящей лекции речь пойдет об играх с полной информацией.

Пусть игра повторяется T шагов, $t = \overline{1, T}$ – номер каждого из шагов. На каждом шаге у игроков есть т.н. контролируемый фактор, x_t и y_t . Игроки выбирают альтернативы (значения) контролируемых факторов. Опишем процесс многошаговой игры с полной информацией. Игроки выбирают альтернативы (значения) контролируемых факторов. Опишем процесс многошаговой игры с полной информацией.

Шаг 1: первый игрок выбирает стратегию $x_1 \in U_1$, второй игрок, зная выбор оппонента, выбирает стратегию

$$y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot).$$

Пусть игроки выбрали стратегии x_1, \dots, x_{t-1} и y_1, \dots, y_{t-1} соответственно. Введем обозначение:

$$\bar{x}_t = (x_1, \dots, x_t), \quad \bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$$

Шаг t : Первый игрок выбирает альтернативу x_t , при этом ему известны выборы

$$(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}), x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) = U_t(\cdot).$$

Второму игроку известны уже $(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$, он выбирает

$$y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) = V_t(\cdot).$$

Так игра продолжается, пока не будет пройдено T шагов, (\bar{x}_T, \bar{y}_T) называется партией игры. Для любой партии определен выигрыш первого игрока: $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$.

Стратегия и ее определение

Рассмотрим пример: игроки по очереди берут одну либо две спички. Условие таково: кто последний взял спичку, тот проиграл. Первый игрок, очевидно, проигрывает при $n = 3k + 1$, $k = 0, 1, \dots$ спичек и выигрывает при $n \neq 3k + 1$. Какова же стратегия первого игрока?

Предположим, $n = 23 = 3 \cdot 7 + 2$. Первый игрок берет в этом случае одну спичку, так как стремится свести число спичек к $n = 3k + 1$.

Упражнение: имеются числа от 1 до 9, первый игрок выбирает одно из этих чисел. Второй – прибавляет к этому число любое из набора. Таким образом на каждом шаге игроки добавляют по числу из набора к сумме. Проигрывает тот, кто первым достиг или превысил 100. Какова здесь оптимальная стратегия?

Неформальное определение стратегии – выбор контролируемых факторов в зависимости от поступающей информации. Формализуем его.

Рассмотрим произвольный шаг t , функцию

$$x_t = \tilde{x}_t(\widetilde{x_{t-1}}, \widetilde{y_{t-1}}), \quad \tilde{x}_t \in \widetilde{U}_t$$

можно подготовить до игры и применять на каждом шаге непосредственной подстановкой. Аналогично для второго игрока:

$$y_t = \tilde{y}_t(\widetilde{x_{t-1}}, \widetilde{y_{t-1}}), \quad \tilde{y}_t \in \widetilde{V}_t$$

Тогда стратегией первого игрока называется

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = \overline{1, T}) \in \tilde{X} = \times \prod_{t=1}^T \widetilde{U}_t$$

Стратегия второго игрока тогда:

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = \overline{1, T}) \in \tilde{Y} = \times \prod_{t=1}^T \widetilde{V}_t$$

Осталось определить функцию $F(\tilde{x}, \tilde{y})$. Заметим, что паре стратегий первого игрока соответствует некоторая партия игры: $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\overline{x_T}, \overline{y_T})$. Это соответствие устанавливается следующим образом:

$$\underline{1 \text{ шаг:}} \quad \tilde{x}_1 = x_1 \quad y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$$

$$\underline{2 \text{ шаг:}} \quad x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1) \quad y_2 = \tilde{y}_2(x_2, y_1)$$

...

Тогда $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\overline{x_T}, \overline{y_T})$ и $\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$. Рассмотрим частные случаи:

1. Γ' , в котором множества $U_t(\cdot)$ и $V_t(\cdot)$ – конечные
2. Γ'' , $U_t(\cdot) \equiv U_t$, $V_t(\cdot) \equiv V_t$, где U_t, V_t – компакты метрического пространства

$$F(\overline{x_T}, \overline{y_T}) \left(\times \prod_{t=1}^T \widetilde{U}_t \right) \times \left(\times \prod_{t=1}^T \widetilde{V}_t \right)$$

$\mathbf{9} \times \prod$ означает прямое произведение.

непрерывна на произведении всех этих компактов. Нужно показать, что игры Γ' , Γ'' имеют решения.

Некоторые стратегии. Функция Бемана

Определим стратегию $\bar{x}^0 = (\bar{x}_t^0, t = \overline{1, T})$, $\bar{y}^0 = (\bar{y}_t^0, t = \overline{1, T})$. Начнем с последнего выбора: \bar{y}_T^0 . Обозначим

$$\bar{y}_T^0 = \bar{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}): F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, \bar{y}_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\square)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) = \overbrace{F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1})}^{\text{функция Беллмана}}$$

$$\bar{x}_T^0 = \bar{x}_T^0(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}): F(\bar{x}_{T-1}, \bar{x}_T^0, \bar{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\square)} F(\bar{x}_{T-1}, x_T, \bar{y}_{T-1}) = F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$$

Положим, что уже определены функции

$$\bar{y}_T^0, \bar{x}_T^0, \dots, \bar{y}_{t+1}^0, \bar{x}_{t+1}^0,$$

функция Беллмана при этом равна $F(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ и функции \bar{y}_t^0, \bar{x}_t^0 определяются по аналогии с вышеизложенными равенствами. Таким образом определены все функции вплоть до \bar{y}_1^0, \bar{x}_1^0

$$\bar{x}_1^0: F(\bar{x}_1^0) = \max_{x_1 \in U_1(\square)} F(x_1)$$

Следует отметить, что эти определения корректны для игр Γ' и Γ'' в том смысле, что все максимумы и минимумы достигаются: в игре Γ' оттого, что все множества конечны, а в игре Γ'' ввиду непрерывности цепочки функций минимума и максимума. Определим значение игры (\tilde{V}):

$$\max_{x_1 \in U_1(\bullet)} F(x_1) = \max_{x_1 \in U_1(\bullet)} \min_{y_1 \in V_1(\bullet)} F(x_1, y_1) = \dots = \max_{x_1 \in U_1(\bullet)} \min_{y_1 \in V_1(\bullet)} \dots \max_{x_T \in U_T(\bullet)} \min_{y_T \in V_T(\bullet)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$$

Теорема Цермело (Т1.16)

Всякая многошаговая игра с полной информацией Γ' (или Γ'') имеет решение в чистых стратегиях:

$$(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \tilde{V})$$

Доказательство: нужно показать справедливость следующих утверждений

$$1. F(\bar{x}^0, \bar{y}) \geq \tilde{V}, \forall \bar{y} \in \tilde{Y}$$

$$2. F(\tilde{x}, \tilde{y}^0) \geq \tilde{V}, \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

Докажем первое утверждение:

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}^0, \tilde{y}) &= F(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}, \tilde{y}_T) \geq \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}, y_T) = F(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}^0_1, \dots, \tilde{x}^0_{T-1}, x_T, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) = F(\tilde{x}^0_1, \dots, \tilde{x}^0_{T-1}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \geq \\ &\geq \dots F(\tilde{x}^0_1, \tilde{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\tilde{x}^0_1, y_1) = F(\tilde{x}^0_1) = \max_{x_1 \in V_1} F(x_1) = \tilde{V} \end{aligned}$$

и первое утверждение доказано. Второе доказывается подобным образом.

Применение теоремы Цермело. Игра «шахматы»

Примеры:

- Шахматы. Белые – первый игрок, черные – второй. Ход $x_t \in U_t(\overline{x_{t-1}}, \overline{y_{t-1}})$ делают белые, $y_t \in V_t(\overline{x_t}, \overline{y_{t-1}})$ – черные. Функция выигрыша определяется так:

$$F(\overline{x_T}, \overline{y_T}) = \begin{cases} 1, & \text{выиграли белые;} \\ 0, & \text{выиграли черные;} \\ 1/2, & \text{ничья.} \end{cases}$$

Так, шахматы – игра с полной информацией вида Γ' и для нее справедлива теорема Цермело.

Применение теоремы Цермело на матричной игре

- Матричная игра.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Разобьем строки и столбцы на следующие множества:

$$M_1 = \{1, 2\}, \quad M_2 = \{3, 4\}, \quad M_\alpha, \quad \alpha = 1, 2^{10}$$

10 $\{1, 2\}$ – строки(столбцы) 1 и 2

$$N_1 = \{1,2\}, \quad N_2 = \{3,4\}, \quad N_\beta, \quad \beta = 1,2$$

Рассмотрим двухшаговую игру.

1. Первый игрок выбирает α , т.е. то множество M_α , откуда он будет выбирать строки. Второй игрок выбирает β , зная о выборе α .
2. Первый игрок выбирает $i \in M_\alpha$ – номер строки, второй игрок выбирает $j \in N_\beta$ – номер столбца, зная о выборе i .

Наша задача – выписать решения игры и все оптимальные стратегии игроков. Построим дерево этой игры (рис. 7.1).

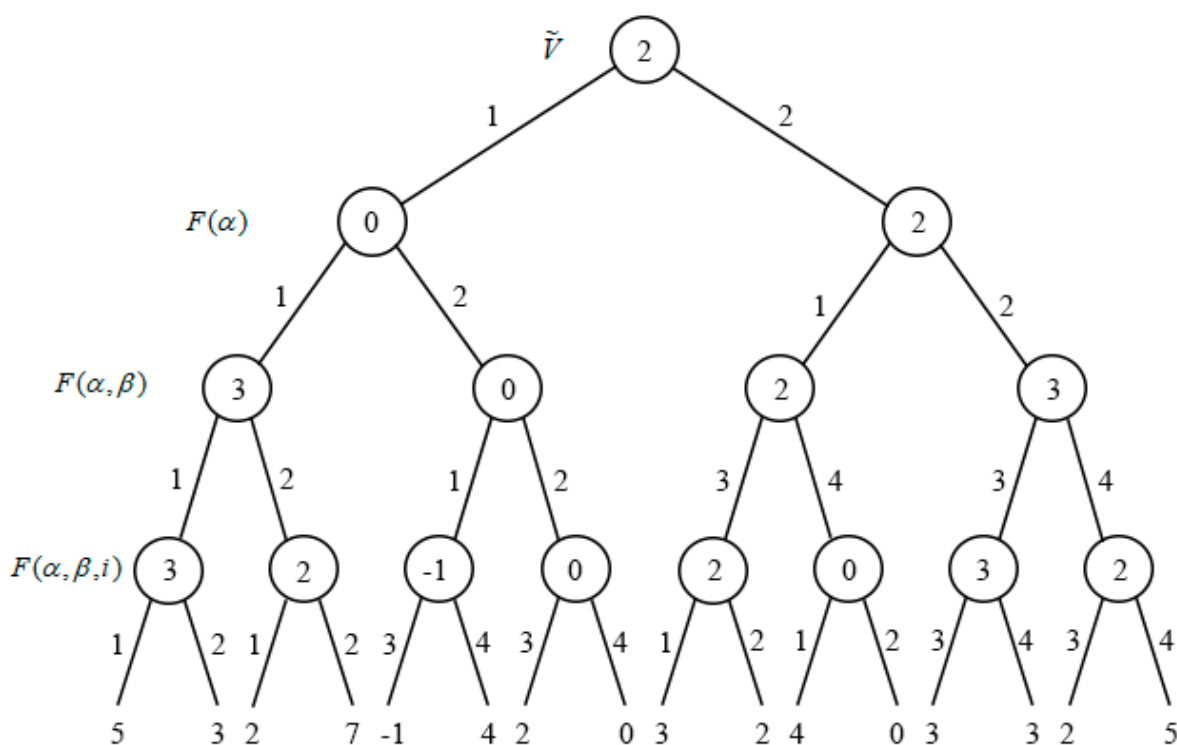


Рис. 8.1. Дерево рассматриваемой игры

Выпишем последовательно функции Беллмана:

$$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$$

$$F(\alpha, \beta, i) = \max_{j \in N_\beta} F(\alpha, \beta, i, j)$$

$$F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$$

$$F(\alpha) = \min_{\beta=1,2} F(\alpha, \beta)$$

$$\tilde{V} = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha)$$

Найдем оптимальные стратегии:

$$(a^0, i^0(\alpha, \beta)), \quad (\tilde{\beta}^0(\alpha), j^0(\alpha, \beta, i))$$

$$F(a^0) = \tilde{V} = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha) = 2$$

Найдем $i^0(\alpha, \beta)$. Так как мы знаем, что первый игрок выберет $\alpha = 2$, можно рассмотреть $i^0(2, \beta)$.

$$i^0(2, 1) = 3, \quad i^0(2, 2) = 3 \text{ или } 4$$

$$b^0(1) = 2, \quad b^0(2) = 1 \quad (*)$$

Теперь найдем $j^0(\alpha, \beta, i)$. Здесь также можно миновать годы монотонные вычисления, используя (*).

$$j^0(1, 2, i) \Rightarrow j^0(1, 2, 1) = 3, \quad j^0(1, 2, 2) = 3 \text{ или } 4$$

$$j^0(2, 1, i) \Rightarrow j^0(2, 1, 3) = 2, \quad j^0(2, 1, 4) = 2$$

Упражнение: попробуйте решить с той же матрицей следующую задачу:

1. Второй игрок выбирает β , первый игрок выбирает α , зная о выборе β
2. Второй игрок выбирает $j \in N_\beta$, второй игрок выбирает $i \in M_\alpha$, зная о выборе j

Задача: пусть задана функция

$$F(x, y) = (x - y)^2, \quad X = [0, 1], \quad Y = [0, 1]$$

Рассмотрим одношаговую игру с полной информацией: первый игрок выбирает x , второй – y , зная об x ; выигрыш определяется по функции F . (Подсказка: максимин). Другой вариант этой задачи – когда игроки меняются местами. (Подсказка: минимакс).

Лекция 9. Неантагонистические игры

Общая игра двух лиц

Пусть $x \in X$ – стратегия первого игрока, $y \in Y$ – второго, и пусть задана ситуация $(x, y) \in X \times Y$. Функция выигрыша первого игрока – $F(x, y)$, второго игрока – $G(x, y)$ и оба игрока стремятся максимизировать эти функции. Тогда общая игра двух лиц в нормальной форме –

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$$

Отметим, что в частном случае $G(x, y) = -F(x, y)$ Γ является антагонистической игрой.

Ситуация равновесия. Равновесие по Нэшу

Определение: (x^0, y^0) называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу¹¹, если

$$\begin{cases} F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0), \quad \forall x \in X \\ G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0), \quad \forall y \in Y \end{cases}$$

В частности, если $G \equiv -F$, ситуация равновесия – это седловая точка. Проверьте это самостоятельно.

Биматричная игра

Определение: Γ называется биматричной, если для

$$i \in X = \{1, \dots, m\}, \quad j \in Y = \{1, \dots, n\}$$

справедливо представление:

$$F(i, j) = a_{ij}, \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$G(i, j) = b_{ij}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

Определение: (x^0, y^0) – ситуация равновесия в биматричной игре, если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0 j^0}, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$b_{i^0 j} \leq b_{i^0 j^0}, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Судите сами: в матрице A элемент a_{ij} является максимальным в j_0 -ом столбце, а в матрице B элемент b_{ij} является максимальным в i_0 -ой строке.

$$A = {}^{i_0} \begin{pmatrix} & j_0 & \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad B = {}^{i_0} \begin{pmatrix} & j_0 & \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

11 Джон Форбс Нэш-младший (1928 – 2015) – американский математик, работавший в области теории игр и дифференциальной геометрии.

Для того, чтобы продемонстрировать недостатки ситуации равновесия, рассмотрим примеры.

1. «Семейный спор».

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{жена}}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{муж}}$$

Спорят они о том, куда идти: на футбол(Ф) или в театр(Т).

$$A = \begin{matrix} & \text{Ф} & \text{Т} \\ \text{Ф} & 1 & 0 \\ \text{Т} & 0 & 2 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \text{Ф} & \text{Т} \\ \text{Ф} & 2 & 0 \\ \text{Т} & 0 & 1 \end{matrix}$$

Жена получает одну единицу удовольствия от похода на футбол, муж – две. С театром, напротив, жена – две, муж – одну. От похода порознь они, очевидно, удовольствия не получают.

Ситуаций равновесия здесь две: (ФФ) и (ТТ), и в каждой из них игроки получают разные выигрыши. В таких случаях говорят, что для реализации ситуации равновесия необходимо заблаговременно договориться. Игры с приведенным сценарием поведения называют бескоалиционными.

2. «Дилемма заключенного».

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}}_{1 \text{ заключенный}}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{2 \text{ заключенный}}$$

У каждого из арестантов есть две возможности: сознаться(Д) или нет(Н).

$$A = \begin{matrix} & \text{Д} & \text{Н} \\ \text{Д} & -5 & -1 \\ \text{Н} & -10 & -2 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \text{Д} & \text{Н} \\ \text{Д} & -5 & -10 \\ \text{Н} & -1 & -2 \end{matrix}$$

Тогда имеются три возможности: либо один сознается, а второй нет (тогда первый получит 10 лет, а другой – 1 год тюрьмы), либо они оба не сознаются и получают по 2 года тюрьмы, либо оба сознаются и получают по 5 лет тюрьмы. Единственная ситуация равновесия здесь – (ДД). Она обладает следующим недостатком: существует ситуация (НН), где заключенные оказываются в более выигрышном положении. В связи с этим можно ввести понятие оптимальности по Парето¹².

Оптимальная по Парето ситуация

Определение: (x^*, y^*) называется оптимальной по Парето, если

$$\nexists (x, y): \begin{cases} F(x, y) \geq F(x^*, y^*) \\ G(x, y) \geq G(x^*, y^*) \end{cases} \text{ и хотя бы одно из этих неравенств строгое .}$$

12 Вильфредо Федерико Дамасо Парето (1848 – 1923) – итальянский инженер, экономист и социолог. Один из основоположников теории элит.

Упражнение: покажите, что в антагонистической игре любая ситуация является оптимальной по Парето. Подсказка: выигрыши на плоскости будут находиться на прямой $G + F = 0$.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(1,1) – единственная ситуация равновесия. Ее недостаток состоит в том, что ее равновесные стратегии не являются максиминными.

$$W(1) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} = 0$$

$$W(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2 \quad \text{– максиминная стратегия}$$

Аналогично можно показать, что для второго игрока равновесная стратегия максиминной не является. Таким образом, фактически, один игрок может безопасно для себя отклониться так, чтобы навредить второму. Пусть $I = \{1, \dots, s\}, s \geq 2$ – множество игроков, $x_k \in X_k$ – стратегия k -го игрока. При этом возникает набор стратегий

$$x = (x_1, \dots, x_s) \in X = \times_{k=1}^s X_k,$$

называемый ситуацией¹³. Функция выигрыша k -го игрока – $F_k(x)$, все игроки стремятся максимизировать свой выигрыш. Тогда игра многих лиц в нормальной форме –

$$\Gamma = \langle X_k, Y_k, F_k(x), k \in I \rangle$$

Введем полезное обозначение. Пусть x – некоторая ситуация, у k -го игрока есть стратегия $y_k \in X_k$. Тогда

$$x \| y_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$$

Равновесие по Нэшу

Определение: ситуация $x^0 \in X$ называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу, если

$$\max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \| x_k) = F_k(x^0), \quad k = \overline{1, s}$$

Зафиксируем стратегию $x_l, l \neq k$ и определим множество наилучших ответов:

$$X_k(x_l, l \neq k) = \operatorname{Argmax}_{x_k \in X_k} F_k(x)$$

Определение: ситуация $x^0 \in X$ называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу, если

$$x^0: x_k \in X_k(x_l, l \neq k), \quad k = \overline{1, s}$$

13 В англоязычной традиции – point (точка).

Теорема 2.1 о существовании равновесия в игре многих лиц

Пусть X_k – выпуклые компакты евклидовых пространств¹⁴ и пусть

$$F_k(x) \in C\left(X = \times_{k=1}^s X_k\right)$$

Тогда

$\forall F_k \cap_{x_k} \forall x_l, l \neq k \Rightarrow$ в игре Γ существует ситуация равновесия.

Доказательство:

1. Пусть функции $F_k(x)$ удовлетворяют всем условиям и строго вогнуты по x_k т.е.

$$X_k(x_l, l \neq k) = \{f_k(x_l, l \neq k)\} \in X_k, \text{ где } f_k,$$

где f_k – функция наилучшего ответа.

Построим отображение $x \rightarrow f(x) = (f_k(x_l, l \neq k), k = \overline{1, s})$. Оно непрерывно вследствие непрерывности каждой функции (по Т1.2)

$$f_k(x_l, l \neq k)$$

Таким образом, мы построили непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$. Приведем без доказательства вспомогательную топологическую теорему.

Теорема Брауэра¹⁵ о неподвижной точке

Пусть задано непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$, где X – выпуклый компакт евклидового пространства. Тогда $\exists x^0 \in X: f(x^0) = x^0$.

Применим ее:

$$f(x^0) = x^0 \Rightarrow f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0, k = \overline{1, s}.$$

Тем самым мы получили, что x_k^0 является наилучшим ответом на нулевые стратегии остальных игроков и x^0 – седловая точка. Продолжим доказательство теоремы.

2. Рассмотрим теперь общий случай (без предположения о строгости выпуклости). Введем, как и прежде, возмущенную функцию:

$$F_k^\varepsilon(x) = \underbrace{\overbrace{F_k(x)}^{\text{Вогнута по } x_k} + \overbrace{\varepsilon(x_k)^2}^{\text{Строго вогнута по } x_k}}_{\text{Строго вогнута по } x_k}, \varepsilon > 0$$

Из (I) следует, что $\exists x^\varepsilon$ – ситуация равновесия в игре с функциями F_k^ε . Рассмотрим $\varepsilon_h \rightarrow 0+0, h = 1, 2, \dots$. Тогда возникает последовательность $x^{\varepsilon_h} \in X$ соответствующих

¹⁴ Вообще говоря, разных размеров.

¹⁵ Лейтцен Эгберт Ян Брауэр (1881 – 1966) – голландский философ и математик, работавший в таких областях математики, как топология, теория множеств, математическая логика, теория меры и комплексный анализ.

ситуаций равновесия, принадлежащих выпуклому компакту. Выделим сходящуюся подпоследовательность: $x^{\varepsilon_h} \rightarrow x^0$.

Имеем:

$$F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h} \| x_k) \leq F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}), \quad \forall x_k \in X_k, k = \overline{1, s} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} F_k(x^0 \| x_k) \leq F_k(x^0), \quad \forall x_k \in X_k, k = \overline{1, s}$$

Вернемся к играм двух лиц.

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$$

Множества наилучших ответов для нее:

$$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad Y(x) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(x, y)$$

$$(x^0, y^0): \begin{cases} x^0 \in X(y^0) \\ y^0 \in Y(x^0) \end{cases}$$

Пусть

$$X(y) = \{x(y)\}, \quad Y(x) = \{y(x)\},$$

непрерывные по **Т1.2**.

$$(x^0, y^0): \begin{cases} x(y^0) = x^0 \\ y(x^0) = y^0 \end{cases} \Rightarrow \text{получим ситуации равновесия.}$$

Состояние равновесия в биматричной игре

Приведем несколько примеров:

1.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{5} & -1 \\ \boxed{4} & -2 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & 1 & \boxed{5} & \boxed{4} \\ -1 & 2 & \boxed{5} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 5 & 4 & \boxed{7} \\ 4 & \boxed{5} & \boxed{5} & 4 \\ -3 & \boxed{6} & \boxed{6} & 2 \\ \boxed{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X(j) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq i \leq 4} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq j \leq 4} b_{ij}$$

$$X(1) = \{1, 2\}, \quad Y(1) = \{1, 4\}$$

...

Выделим прямоугольниками соответствующие максимумы.

$$\text{Найти ситуацию равновесия} \Leftrightarrow (i^0, j^0): \begin{cases} i^0 \in X(j^0) \\ j^0 \in Y(i^0) \end{cases}$$

В данном случае таких точек две: $(i^0, j^0) = (1, 1), (3, 3)$

2.

$$F(x, y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy, \quad X = [0, 1]$$

$$G(x, y) = 4xy - 2y^2 - y, \quad Y = [0, 1]$$

$$F''_{xx} = -6 < 0 \quad \text{— строго вогнута по } x;$$

$$G''_{yy} = -2 < 0 \quad \text{— строго вогнута по } y.$$

$$F'_x = 0 \Rightarrow -6x + 7y = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{7}{6}y$$

$$G'_y = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{4x - 1}{2}$$

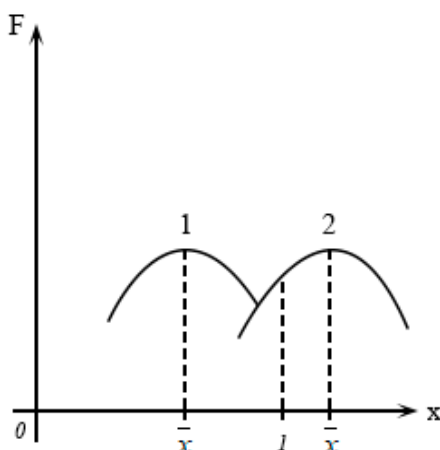


Рис. 9.1. Функции наилучших ответов для первого игрока

Функция наилучшего ответа для первого игрока:

$$x(y) = \begin{cases} \bar{x} = \frac{7}{6}y, & 0 \leq y \leq \frac{6}{7} \\ 1, & \frac{6}{7} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Аналогично для второго игрока:

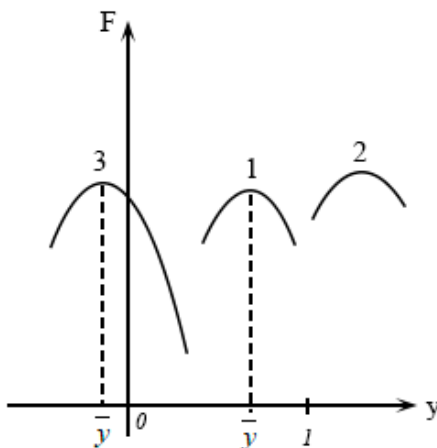


Рис. 9.2. Функции наилучших ответов для второго игрока

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4x-1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Решим систему графически (рис. 10.3):

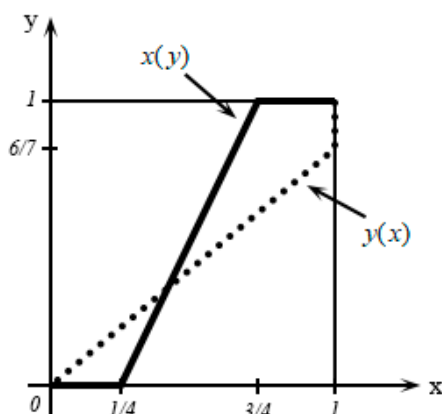


Рис. 9.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

На пересечении двух графиков на рисунке 10.3 располагаются 3 точки равновесия:

$$(x^0, y^0) = (1, 1), (1, 1)$$

Найдем третью:

$$\begin{cases} x(y^0) = \frac{7}{6}y^0 = x^0 \\ y(x^0) = \frac{4x^0-1}{2} = y^0 \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) = \left(\frac{7}{16}, \frac{3}{8}\right)$$

Модель Дуополии Курно¹⁶

Пусть две фирмы производят товар одного и того же вида $x \geq 0, y \geq 0$;
 $p(x+y) = a - x - y$ – цена товара, C – себестоимость производства единицы товара и
затраты равны Cx и Cy . Тогда выигрыши (прибыли) этих фирм будут равны: $a - y - c$

$$F(x, y) = P(x+y)x - Cx = (a - x - y - C)x, F \cap_x$$

$$G(x, y) = P(x+y)y - Cy = (a - x - y - C)y, G \cap_y$$

Построим функции наилучших ответов:

¹⁶ Антуан Огюстен Курно (1801 – 1877) – французский экономист, философ и математик.

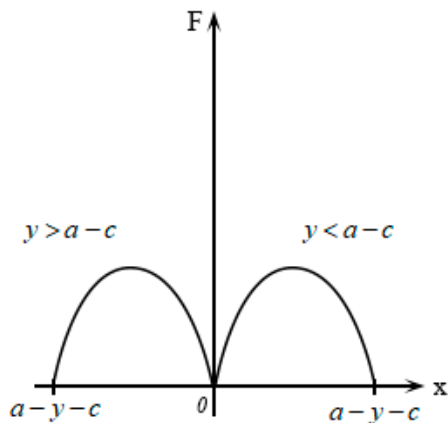


Рис. 9.4. Функции наилучших ответов

$$x(y) = \begin{cases} \frac{a-c-y}{2}, & y < a-c \\ 0, & y \geq a-c \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a-c-x}{2}, & x < a-c \\ 0, & x \geq a-c \end{cases}$$

Построим графики функций и найдем равновесие:

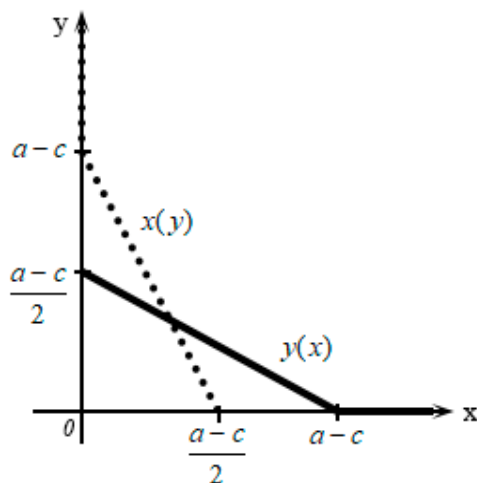


Рис. 9.5. Графическое изображение рассматриваемого случая

Упражнение: найдите (x^0, y^0) – ситуацию равновесия и посмотрите, чему равно $x^0 + y^0$.

Упражнение: предположите, что одна фирма является монополистом, т.е.

$$F(x) = (a - x - C)x,$$

и сравните количество товара и цену в монополии и дуополии.

Лекция 10. Биматричные игры

Биматричная игра

Пусть задана биматричная игра

$$\Gamma: A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

Построим смешанное расширение биматричной игры. Пусть первый игрок использует смешанные стратегии $p \in P$, второй – $q \in Q$. Их ожидаемые выигрыши равны

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j, \quad B(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j,$$

и задано смешанное расширение

$$\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q), B(p, q) \rangle.$$

Так как функция $A(p, q)$ линейна¹⁷ по p , а функция $B(p, q)$ линейна по q , то, ввиду **T2.1**, в игре $\bar{\Gamma}$ всегда существует ситуация равновесия (p^0, q^0) , которую мы будем называть ситуацией равновесия в смешанных стратегиях исходной игры Γ .

Ситуация равновесия

Формально запишем ее определение:

$$(p^0, q^0): \begin{cases} A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall p \in P \\ B(p^0, q) \leq B(p^0, q^0) \quad \forall q \in Q \end{cases}$$

Лемма 1: для того, чтобы пара (p^0, q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m} \\ B(p^0, j) \leq B(p^0, q^0) \quad \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (*)$$

Отметим, что если взять $B = -A$, то эти неравенства превратятся в условие (*) для оптимальных смешанных стратегий в матричной игре.

Доказательство:

1. Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия. Необходимо вывести (*). Необходимость следует из определения ситуации равновесия (p и q – произвольны).
2. Пусть (*). Необходимо вывести, что (p^0, q^0) – ситуация равновесия. Умножим i -ое неравенство на $p_i \geq 0$ и сложим их:

¹⁷ В частности, вогнута.

$$p_i A(i, q^0) \leq p_i A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow A(p, q^0) \leq \sum_{i=1}^m p_i A(p^0, q^0) = A(p^0, q^0) \quad \forall p \in P$$

Аналогично поступаем со вторым неравенством, и лемма доказана.

Свойство дополняющей нежесткости¹⁸

Теорема 2.2: пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

Тогда:

$$p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0) \quad (1)$$

$$q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0) \quad (2)$$

Доказательство: по условию, (p^0, q^0) – ситуация в смешанных стратегиях. Тогда по лемме 1 выполняется (*). Предположим, что

$$\exists i_1 : p_{i_1}^0 > 0, \text{ но } A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0).$$

Из (*) следует, что $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m}$. Домножив оба этих неравенства на $p_{i_1}^0$ и p_i^0 соответственно и сложив их по всем i , получим строгое¹⁹ неравенство

$$A(p^0, q^0) < A(p^0, q^0),$$

что есть противоречие.

Следствие: пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Тогда:

$$A(i, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p_i^0 = 0 \quad (1)$$

$$B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Биматричная игра «Семейный спор»²⁰

$$A = \begin{pmatrix} q_1^0 & 1-q_1^0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p_1^0 & 1-p_1^0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Игроки выбирают стратегии с вероятностями:

$$0 \leq p_1^0 \leq 1, \quad 0 \leq q_1^0 \leq 1$$

¹⁸ Пояснение такого названия уже приводилось в лекции IV при доказательстве аналогичной теоремы.

¹⁹ Сумма нестрогого и строгого неравенств является строгим неравенством.

²⁰ Подробно ситуация описывалась в лекции IX.

По свойству дополняющей нежёсткости:

$$\begin{cases} A(1, q^0) = A(p^0, q^0) \\ A(2, q^0) = A(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^0 = A(p^0, q^0) \\ 2(1 - q_1^0) = A(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow q_1^0 = 2(1 - q_1^0) \Rightarrow q_1^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow q^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} B(p^0, 1) = B(p^0, q^0) \\ B(p^0, 2) = B(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_1^0 = B(p^0, q^0) \\ (1 - p_1^0) = B(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow 2p_1^0 = (1 - p_1^0) \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$A(p^0, q^0) = B(p^0, q^0) = \frac{2}{3}$$

Как разрешить этот спор? Используем т.н. физические смеси²¹. Муж и жена заполняют каждый свой календарь: по дням они распределяют походы на футбол(Ф) и в театр(Т), причем со своей вероятностью (рис. 9.1). При совпадении видов досуга супруги идут либо на футбол, либо в театр, а в противном случае остаются дома.

	СБ	ВС	...	СБ	ВС	...	СБ	ВС	...
Муж	Ф	Т		Ф	Ф		Т	Ф	
Жена	Т	Ф		Ф	Т		Т	Т	

Рис. 10.1. Вероятностные распределения рассматриваемого случая

Смешанная стратегия в биматричной игре с санкциями

Рассмотрим следующую модель: первый игрок может либо нарушать (Н) некоторые предписания, либо нет (Б/Н), а второй – наказывать первого, т.е. вводить санкции (С), или нет (Б/С).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} С & Б/С \end{matrix} \\ \begin{matrix} Н \\ Б/Н \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & > b_2 \\ c_2 & < d_2 \end{pmatrix}$$

Легко показать, что в чистых стратегиях ситуация не разрешима. Сделайте это самостоятельно. Решая игру в смешанных стратегиях, мы получим следующие результаты:

$$0 \leq p_1^0 \leq 1, \quad 0 \leq q_1^0 \leq 1$$

$$q_1^0 = \frac{b_1 - d_1}{c_1 - a_1 + b_1 - d_1}, \quad p_1^0 = \frac{d_2 - c_2}{a_2 - b_2 + d_2 - c_2}$$

Попробуйте также показать это собственноручно. Можно интерпретировать p_1^0 , q_1^0 как части всего множества правил и санкций соответственно и решать уже в терминах физических смесей.

²¹ См. лекцию III.

Метод поиска равновесий

Теорема 2.3: пусть $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$ – множества чистых стратегий игроков, (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда $\exists X^0 \in X$, $\exists Y^0 \in Y$, $\exists V_1, V_2$ такие, что справедливы следующие системы:

$$\begin{cases} \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = V_1, \quad \forall i \in X^0 \\ \sum_{j \in Y^0} q_j^0 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = V_2, \quad \forall j \in Y^0 \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство:

1. возьмём $X^0 = \{i \mid p_i^0 > 0\}$, $V_1 = A(p^0, q^0)$.

$$\sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = A(i, q^0) \stackrel{T2.2}{=} A(p^0, q^0) = V_1, \quad \forall i \in X^0$$

и второе равенство, очевидно, выполняется.

2. возьмем $Y^0 = \{j \mid q_j^0 > 0\}$, $V_2 = B(p^0, q^0)$.

$$\sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = B(p^0, j) \stackrel{T2.2}{=} B(p^0, q^0) = V_2, \quad \forall j \in Y^0$$

и второе равенство, очевидно, выполняется. Теорема доказана. Выпишем неизвестные и матрицы этих систем.

1.

$$q_j^0, j \in Y^0, \quad V_1$$

$$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$$

2.

$$p_i^0, i \in X^0, \quad V_2$$

$$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$$

Если эти матрицы квадратные, то количество уравнений совпадает с количеством.

Утверждение: найдется такая ситуация равновесия, в которой матрицы \bar{A} и \bar{B} являются квадратными.

Приведем алгоритм поиска некоторых ситуаций равновесия.

1. Перебираем квадратные подматрицы \bar{A} и \bar{B} размера $k \times k$, $k = \overline{2, \dots}$.
2. На k -ом шаге имеем квадратные матрицы \bar{A} и \bar{B} , решаем для них системы (1) и (2).
3. Если p_i^0 или q_j^0 – отрицательны, то переходим к следующей, большей подматрице. Если же p_i^0 или q_j^0 – неотрицательны, то дополняем их до смешанных стратегий:

$$p^0 = \left(\dots, \underbrace{0}_{i \notin X^0}, \underbrace{p_i^0}_{i \in X^0}, \dots \right), \quad q^0 = \left(\dots, \underbrace{0}_{j \notin Y^0}, \underbrace{q_j^0}_{j \in Y^0}, \dots \right)$$

Осталось проверить справедливость условия (*) при очевидных равенствах

$$A(p^0, q^0) = V_1, \quad B(p^0, q^0) = V_2.$$

$$\begin{cases} A(i, q^0) \leq V_1, & i = \overline{1, m} \\ B(p^0, j) \leq V_2, & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

4. Перебирая все подходящие подматрицы, находим как можно больше ситуаций равновесия в смешанных стратегиях. Рассмотрим частные случаи. Пусть матрица – размера $2 \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & 1-p_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1$$

Согласно алгоритму, будем перебирать квадратные матрицы размера 2×2 , определяемые номерами столбцов j_1, j_2 . Начнем с смешанной стратегии второго игрока p_1^0 :

$$\bar{B} = \begin{matrix} p_1^0 & 1-p_1^0 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_1} \\ b_{1j_2} & b_{2j_2} \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{cases} b_{1j_1} p_1^0 + b_{2j_1} (1 - p_1^0) = V_1 \\ b_{1j_2} p_1^0 + b_{2j_2} (1 - p_1^0) = V_2 \end{cases} \Rightarrow \text{находим } p_1^0$$

Пусть $0 \leq p_1 \leq 1$.²³

22 Равенство будет достигаться при $i \in X^0$ и $j \in Y^0$ соответственно.

23 В противном случае – переходим к следующей подматрице.

$$q^0 = \left(0, \dots, 0, \overset{j_1}{q^*}, 0, \dots, 0, \overset{j_2}{1-q^*}, 0, \dots, 0 \right)$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overset{q^*}{a_{1j_1}} & \overset{1-q^*}{a_{2j_1}} \\ a_{1j_2} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} a_{1j_1} q^* + a_{2j_1} (1 - q^*) = V_1 \\ a_{2j_1} q^* + a_{2j_2} (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow \text{находим } q^*$$

Если $0 \leq q^* \leq 1$, то осталось проверить условие (*), т.е. действительно ли оптимальная стратегия является равновесной. Очевидно, что

$$\begin{cases} A(1, q^0) = V_1 \\ A(2, q^0) = V_1 \end{cases}$$

Осталось проверить, что

$$B(p^0, j) \leq V_2, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq j_1, j_2 \quad 24$$

Наконец, если неравенство справедливо, то ситуация равновесия найдена. Взглянем на геометрическое представление этих выкладок. Введем функцию

$$l_j(p_1) = b_{1j}p_1 + b_{2j}(1 - p_1) = B(p, j)$$

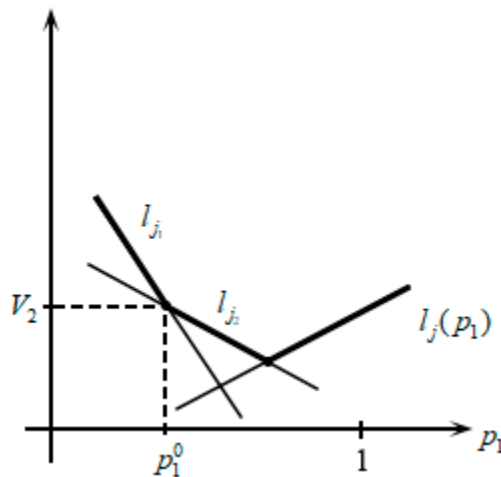


Рис. 10.2. Графическое изображение l_j

24 При $j = j_1, j = j_2$ неравенство переходит в равенство.

$$\begin{cases} l_{j_1}(p_1) = V_2 \\ l_{j_2}(p_1) = V_2 \end{cases} \Rightarrow l_{j_1}(p_1) = l_{j_2}(p_1)$$

$$(*) \quad l_j(p_1^0) \leq V_2, \quad j \neq j_1, j_2$$

Проверяя последовательно все точки излома, получим соответствующие ситуации равновесия. Рассмотрим теперь случай с матрицей размеров $m \times 2$.

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 \\ a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq q_1 \leq 1, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}$$

Здесь функция имеет вид

$$l_i(q_1) = a_{i1}q_1 + a_{i2}(1-q_1) = B(i, q)$$

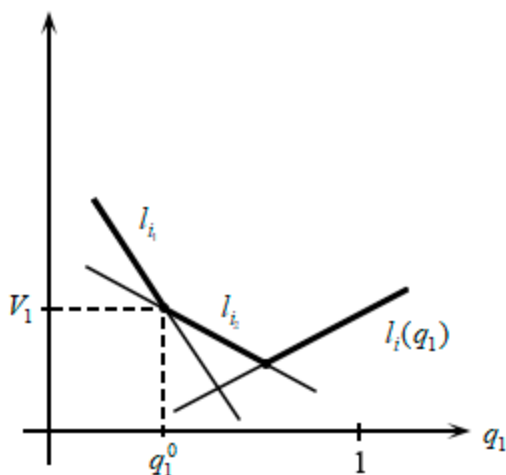


Рис. 10.3. Графическое изображение l_i

$$\begin{cases} l_{i_1}(q_1) = V_1 \\ l_{i_2}(q_1) = V_1 \end{cases} \Rightarrow l_{i_1}(q_1) = l_{i_2}(q_1)$$

$$(*) \quad l_i(q_1^0) \leq V_1, \quad i \neq i_1, i_2$$

$$p^0 = \left(0, \dots, 0, p^{i_1}, 0, \dots, 0, 1-p^{i_2}, 0, \dots, 0 \right)$$

Аналогичным образом:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{i_1 1} p^* + b_{i_2 1} (1 - p^*) = V_2 \\ b_{i_1 2} p^* + b_{i_2 2} (1 - p^*) = V_2 \end{cases} \Rightarrow p^*$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

Выпишем функции:

$$l_j(p_1): \begin{cases} l_1(p_1) = 3p_1 \\ l_2(p_1) = p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - p_1 \\ l_3(p_1) = 3(1 - p_1) \end{cases}$$

Построим графики этих функций:

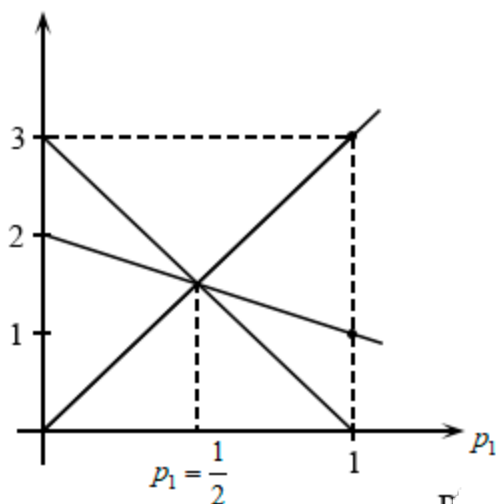


Рис. 10. 4. Графическое изображение рассматриваемого случая

1) Первая ситуация равновесия:

$$l_1 \cap l_2: 3p_1 = 2 - p_1 \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2q^* + 4(1 - q^*) = V_1 \\ 4q^* + 2(1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 2q^* + 4(1 - q^*) = 4q^* + 2(1 - q^*) \Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

Равновесная стратегия:

$$\begin{cases} p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

2) Вторая ситуация равновесия:

$$l_1 \cap l_3: p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 1-q_1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{matrix} p_1 & & \\ & 1-p_1 & \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2q^* + 5(1 - q^*) = V_1 \\ 4q^* + (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 2q^* + 5(1 - q^*) = 4q^* + (1 - q^*) \Rightarrow q^* = \frac{2}{3}$$

Равновесная стратегия:

$$\begin{cases} p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ q^0 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

3) Рассмотрим третий вариант:

$$l_2 \cap l_3: p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 1-q_1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{matrix} p_1 & & \\ & 1-p_1 & \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4q^* + 5(1 - q^*) = V_1 \\ 2q^* + (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 4q^* + 5(1 - q^*) = 2q^* + (1 - q^*) \Rightarrow q^* = 2 \text{ и ситуации равновесия } \exists$$

Приведем две аналогичные T1.11 и T1.12 теоремы.

Теорема доминирования в биматричных играх

Теорема 2.4: пусть в биматричной игре некоторая строка матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда эта строка

входит с нулевой вероятностью в некоторую равновесную смешанную стратегию первого игрока, и ее можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминируемая строка входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию первого игрока.

Теорема 2.5: пусть некоторый столбец матрицы A доминирует²⁵ выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в некоторую равновесную смешанную стратегию второго игрока, и его можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминирующий столбец входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию второго игрока.

Доказательство обеих теорем повторяет доказательство соответствующих T1.11 и T1.12. Рассмотрим пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

При вычеркивании первого столбца получилась бы биматричная игра без ситуаций равновесия в чистых стратегиях, хотя в исходной игре она была. Поэтому при использовании доминирования, нужно быть крайне внимательным.

25 Лектор здесь сказал, что столбец матрицы должен доминироваться остальными столбцами, однако в T1.12 говорится о том, что столбец должен доминировать остальные столбцы. Вероятно, он оговорился.

Лекция 11. Иерархические игры

Иерархические игры. Первая иерархическая игра

В этой лекции рассмотрим игры, в которых игроки, обмениваются некой информацией прежде, чем выбрать собственные стратегии. Решить иерархическую игру Γ_1 означает найти наилучший гарантированный выигрыш и указать оптимальную стратегию, если она существует, либо эpsilon – оптимальную стратегию.

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$$

Будем считать, что X, Y – компакты метрических пространств, функции $F(x, y), G(x, y)$ – непрерывны на $X \times Y$. Определим некоторые иерархические игры. Первая игра:

$$\Gamma_1: x \xrightarrow{2} y,$$

т.е. первый игрок выбирает x , второй игрок выбирает y , зная о выборе x . У этой игры есть следующая экономическая интерпретация: первый игрок – центр, выбирающий цену x некоторой продукции, производимой вторым игроком в количестве y . Положим, второй игрок обязательно выберет стратегию

$$y \in Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmax}} G(x, y),$$

оптимальную для себя.

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

– гарантированный выигрыш первого игрока.²⁶

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x)$$

– наилучший гарантированный выигрыш первого игрока.

Эpsilon оптимальная стратегия

Определение: пусть $\varepsilon > 0$. Стратегия $x^\varepsilon \in X$ называется эpsilon-оптимальной, если

$$W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$$

Пусть

$$Y(x) = \{y(x)\}, \quad \forall x \in X$$

В этом случае по T1.2 отображение $y(x)$ непрерывно и

$$W(x) = F(x, y(x))^{27}$$

26 Считается, что второй игрок себя максимизирует, но его дальнейшее поведение неизвестно: в худшем случае первый игрок рассчитывает на получение минимума.

27 В этом случае $W(x)$ также непрерывна и ее максимум достигается.

Решить иерархическую игру Γ_1 означает найти наилучший гарантированный выигрыш и указать оптимальную, если она существует, либо эpsilon – оптимальную стратегию.

Равновесие по Штакельбергу

Предположим, как и ранее, что первый игрок сообщает второму $x \in X$, второй выбирает $y \in Y(x)$ – наилучший ответ на x . Условимся, что второй игрок благожелателен к первому, т.е., выбирая y , он учитывает пожелания первого игрока:

$$y \in Y^*(x) = \underset{y \in Y(x)}{\operatorname{Argmax}} F(x, y)$$

В этом случае гарантированный выигрыш первого игрока будет равен

$$W^*(x) = \max_{y \in Y(x)} F(x, y),$$

а гарантированный выигрыш –

$$F_1^* = \max_{x \in X} W^*(x)$$

Определение: пара (x^0, y^0) называется равновесием по Штакельбергу, если

$$W^*(x) = F_1^*, \quad y^0 \in Y^*(x^0).$$

Лемма 2: в сделанных предположениях в игре существует равновесие по Штакельбергу.

Доказательство: пусть $F_1^* = \sup_{x \in X} W^*(x)$. Рассмотрим последовательность

$$x^k \in X: \quad W^*(x^k) \rightarrow F_1^*.$$

Ввиду того, что все последовательности x^k принадлежат компакту X , без ограничения общности постулируем, что $x^k \rightarrow x^0$. Рассмотрим также

$$y^k \in Y^*(x_k), \quad y^k \rightarrow y^0.$$

Покажем, что $y^0 \in Y(x^0)$:

$$G(x^k, y) \leq G(x^k, y^k), \quad \forall y \in Y$$

Перейдя к пределу, получим

$$G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0), \quad \forall y \in Y.$$

$$F_1^* \leftarrow W^*(x^k) = F(x^k, y^k) \rightarrow F(x^0, y^0) \Rightarrow F_1^* = F(x^0, y^0)$$

$$F_1^* = F(x^0, y^0) \stackrel{y^0 \in Y(x^0)}{\leq} W^*(x^0)$$

Строгого неравенства здесь быть не может, т.к. F_1^* – супремум значений $W^*(x^0)$, поэтому

$$F_1^* = F(x^0, y^0) \stackrel{y^0 \in Y(x^0)}{=} W^*(x^0)$$

и лемма доказана.

Примеры:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решим игру Γ_1 :

$$Y(i) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq j \leq 3} b_{ij}$$

$$Y(1) = \{1\}, Y(2) = \{1, 2\}, Y(3) = \{2, 3\}$$

$$W(i) = \min_{y \in Y(i)} a_{iy}$$

$$W(1) = 3, W(2) = 3, W(3) = -5$$

$$F_1 = 3, i^0 = 1, 2$$

Найдем равновесие по Штакельбергу. Построим $Y^*(i)$:

$$Y^*(1) = \{1\} \Rightarrow W^*(1) = 3$$

$$Y^*(2) = \{1\} \Rightarrow W^*(2) = 4$$

$$Y^*(3) = \{3\} \Rightarrow W^*(3) = 4$$

$$F_1^* = 4$$

$$(i^0, j^0) = (2, 1), (3, 3)$$

Отметим, что если первый игрок также благожелателен ко второму, то он выберет (2,1) вместо (3,3), чтобы второй получил не 1, а 7.

2.

$$\begin{cases} F(x, y) = 3x + 2y \\ G(x, y) = (x - y)^2 \end{cases}, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 1]$$

Решим игру Γ_1 : прежде всего найдем множество наилучших ответов второго игрока

28 Речь про столбцы.

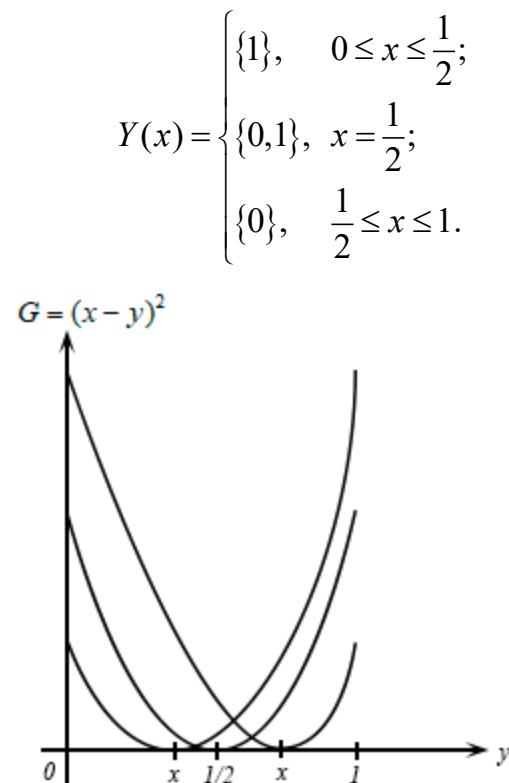


Рис. 11.1. Графическое изображение множества наилучших ответов второго игрока

Гарантированный выигрыш второго игрока:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y)$$

$$F_1 = \frac{7}{2}, \quad x^\varepsilon = \frac{1}{2} - \varepsilon$$

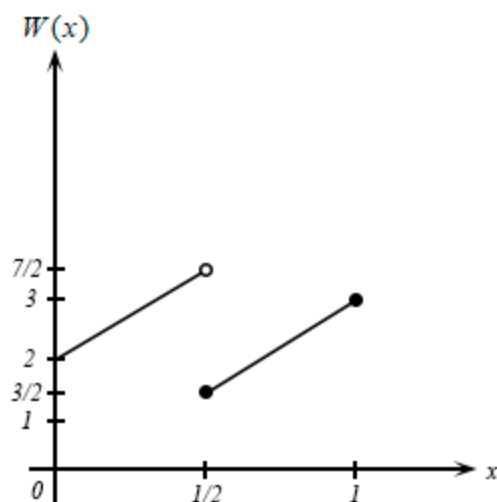


Рис. 11.2. График функции гарантированного выигрыша второго игрока

Найдем равновесие по Штакельбергу.

$$W^*(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y),$$

разница между функциями $W(x)$ и $W^*(x)$ будет в том, что непрерывность в точке $\frac{1}{2}$ справа сменится на непрерывность слева (см. рис. 41).

$$F_1 = \frac{7}{2}$$

$$(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

3.

Первый игрок – центр, выбирающий цену на продукцию $x \in [0, c]$, второй производитель, выбирающий $y \geq 0$ – количество товара. Функции выигрыша:

$$F(x, y) = cy - xy = (c - x)y$$

$$G(x, y) = xy - by^2$$

Найдем

$$Y(x): \max_{y \geq 0} (xy - by^2).$$

$$G'_y = 0 \Leftrightarrow x - 2by = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{x}{2b} \geq 0 \Rightarrow y(x) = \frac{x}{2b}$$

$$W(x) = F(x, y(x)) = (c - x)\frac{x}{2b} \Rightarrow x^0 = \frac{c}{2}, F_1 = W(x^0) = \frac{c^2}{8b}$$

Аналитически мы получили, что посредник, перепродающий продукцию, имеет выгоду в 100% от суммы: продает по цене c , а покупает по цене $\frac{c}{2}$.

Вторая иерархическая игра

Перейдем к следующей игре:

$$\Gamma_2: f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y),$$

т.е. первый игрок изначально будет иметь информацию об y , он заготавливает функцию $f: Y \rightarrow X$ и сообщает второму игроку значение $x = f(y)$.

Экономическая интерпретация этой игры: первый игрок – центр, x – размер премии; второй игрок – производитель, выпускающий некоторое количество продукции y . Премия присуждается за выполнение плана по выпуску. Другая интерпретация – политические игры, где за принятием условий одной стороны последует некоторая реакция, а за неприятием – наказание.

$$y \in Y(f) \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y) \quad ^{29}$$

$$y \in \tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), Y(f) \neq \emptyset \\ Y, Y(f) = \emptyset \end{cases}$$

Гарантированный выигрыш первого игрока:

$$W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y)$$

Наилучший гарантированный выигрыш первого игрока:

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$$

Определение: пусть $\varepsilon > 0$. Стратегия $f^\varepsilon \in \{f\}$ называется эpsilon-оптимальной, если

$$W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$$

Минимизирующая стратегия. «Стратегия наказаний»

Определение: стратегией наказания называется

$$f^H : f^H(y) \in \operatorname{Argmin}_{x \in X} G(x, y), \quad \forall y \in Y$$

Пусть $G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$:

$$D = \{ (x, y) \mid G(x, y) > G_2 \}$$

$$K = \begin{cases} \sup F(x, y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$$

$$\varepsilon > 0 : \exists (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D : F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon,$$

$$f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon \end{cases}$$

Покажем, что

$$W(f_k^\varepsilon) \geq K - \varepsilon,$$

т.е. что эта стратегия позволяет получить первому игроку гарантированный выигрыш $K - \varepsilon$. Так, если первый игрок сообщает второму функцию f_k^ε , то второй игрок рассуждает так:

29 Возможен случай, когда $Y(f) = \emptyset$, т.е. поведение второго игрока никак не регламентировано.

$$f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \Rightarrow G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) > G_2 \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon \Rightarrow G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) \leq G_2 \end{cases},$$

т.е. второй игрок, ввиду своей рациональности, всегда будет выбирать $y = y^\varepsilon$.

$$Y(f_k^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}, \quad W(f_k^\varepsilon) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon.$$

Рассмотрим другую минимизирующую стратегию. Пусть

$$E = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} \left[\min_{x \in X} F(x, y) \right]$$

– множество максиминных стратегий второго игрока,

$$X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x, y)$$

– множество наилучших ответов первого игрока. Будем рассматривать ситуацию, когда уже первый игрок благожелателен ко второму:

$$X^k(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X(y)} G(x, y)$$

Теперь определим стратегию функции наилучшего ответа.

$$f^* : f^*(y) \in X^*(y)$$

$$G(f^*(y), y) = \max_{x \in X(y)} G(x, y) = W^*(y)_{30}$$

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Минимизирующая стратегия 2

Определим стратегию, которая позволяет гарантировать получение величины M .

$$f_M^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \\ f^H(y), & y \notin E \end{cases}$$

Покажем, что

$$W(f_M^0) \geq M$$

В самом деле, если первый игрок сообщает второму функцию f_M^0 , то второй игрок рассуждает так:

30 По *Л2* она достигает максимума на любом компакте.

$$f_M^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \Rightarrow G(f^*(y), y) \geq \min_{x \in X} G(x, y) = G_2 \\ f^H(y), & y \notin E \Rightarrow G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) < G_2 \end{cases},$$

т.е. второй игрок, ввиду своей рациональности, всегда будет выбирать $y \in E$.

$$Y(f_M^0) \subset E$$

$$W(f_M^0) = \inf_{y \in Y(f_M^0) \subset E} F(f^*(y), y) \geq \min_{y \in E} F(f^*(y), y) = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M$$

Теорема Гермейера³¹

Теорема 2.6: в сделанных предположениях в игре Γ_2 наилучший гарантированный выигрыш

$$F_2 = \max[K, M]$$

При этом, если:

1.

$K > M$, то $\forall \varepsilon > 0$ f_k^e – эpsilon- ε оптимальная стратегия

2.

$K \leq M$, то f_M^0 – оптимальная стратегия

Прежде, чем доказать теорему, рассмотрим пару

$$(x^0, y^0) \in \underset{\substack{x \in X \\ y \in Y}}{\operatorname{Argmax}} F(x, y)$$

Может оказаться, что

$$(x^0, y^0) \in D$$

Если такое случилось, то

$$K = F(x^0, y^0) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} F(x, y),$$

т.е. второй игрок настолько эффективно управляет первым, что заставляет его полностью работать на себя.

31 Юрий Борисович Гермейер (1918 – 1975) – советский учёный, специалист в области прикладной математики, исследования операций и теории игр.

Лекция 12. Теория принятия решений

Теорема Геймеера

В конце прошлой лекции была сформулирована теорема Гермейера. Приведём её доказательство. Часть теоремы уже была доказана, т.к. мы показали, что K всегда можно достигнуть и

$$W(f_k^\varepsilon) \geq K - \varepsilon, \quad W(f_M^0) \geq M.$$

Осталось показать, что величину F_2 , большую, чем $\max[K, M]$, получить нельзя:

$$\forall f \in \{f\} \quad W(f) \leq \max[K, M].$$

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$$

Рассмотрим два случая:

1.

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2$$

Тогда можно утверждать, что

$$\exists y^0 \in \tilde{Y}(f): (f(y^0), y^0) \in D, \text{ т.к.}$$

$$y^0 \in Y(f) \Rightarrow G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$$

$$Y(f) = \emptyset, \quad \tilde{Y}(f) = Y \Rightarrow \exists y^0: G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$$

Теперь покажем, что гарантированный выигрыш первого игрока для стратегии F в этом случае будет не больше K :

$$W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y) \leq F \frac{(f(y^0), y^0)}{\in D} \leq K \leq \max[K, M]$$

2.

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$$

Тогда

$$\forall y^0 \in E: G(f(y^0), y^0) = G_2, \text{ т.к.}$$

$$\underline{G_2} = \min_{x \in X} G(x, y^0) \leq G(f(y^0), y^0) \leq$$

$$\leq \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = \underline{G_2} \Rightarrow G(f(y^0), y^0) = \sup_{y \in Y} G(f(y), y)$$

Фактически, мы доказали, что

$$E \subset Y(f)$$

$$W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y) \leq \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M \leq \max [K, M]$$

Теорема полностью доказана.

Примеры:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Решим игру Γ_2 :

$$G_2 = \max_{1 \leq j \leq 3} \min_{1 \leq i \leq 3} b_{ij} = 4, \quad E = \{1, 2\}$$

$$D = \left\{ (i, j) \mid b_{ij} > G_2 = 4 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & 8 \\ \boxed{4} & \boxed{3} & 2 \\ 7 & \boxed{-5} & \boxed{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 4 & 3 \\ \boxed{7} & \boxed{7} & 3 \\ 4 & \boxed{6} & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

$$K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 4$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \leq i \leq 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow F_2 = 6$$

Выпишем оптимальную стратегию:

$$f_M^0(j) = \begin{cases} 3, & j = 1 \in E \\ 1, & j = 2 \in E \\ 1 \text{ (или 2)}, & j = 3 \notin E \end{cases}$$

(в первой строке, например, $3 \in X(j) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq i \leq 3} a_{ij}$)

$$f_K^0(j) = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \\ 1, & j = 3 \end{cases}$$

2.

32 Максимум из обведенных элементов матрицы A .

Знакомая нам задача с центром и производителем. Напомним условие. Первый игрок – центр, выбирающий цену на продукцию $x \in [0, c]$, второй – производитель, выбирающий $y \geq 0$ – количество товара. Функции выигрыша:

$$F(x, y) = cy - xy = (c - x)y;$$

$$G(x, y) = xy - by^2.$$

Решим игру Γ_2 :

$$G_2 = \max_{y \geq 0} \min_{0 \leq x \leq c} (xy - by^2) = 0, \quad E = \{0\}$$

$$M = \min_{y \geq 0} \max_{0 \leq x \leq c} [y(c - x)] = 0$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid xy - by^2 > G_2 = 0 \right\}$$

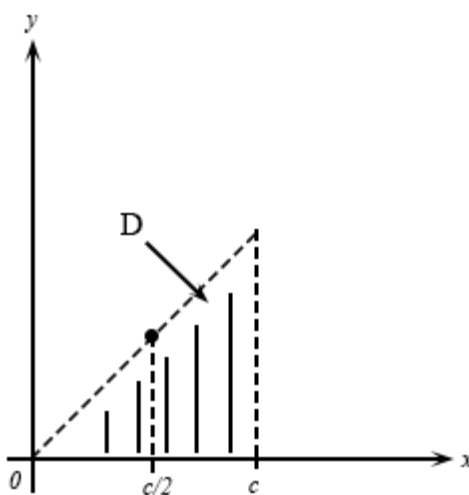


Рис. 12.1. Графическое изображение множества D

Найдем величину K :

$$K = \sup_{\substack{0 \leq x \leq c \\ 0 \leq y \leq \frac{x}{b}}} [y(c - x)] = \max_{0 \leq x \leq c} \left[\frac{x}{b}(c - x) \right] = \left\{ x^0 = \frac{c}{2} \right\} = \frac{c^2}{4b}$$

$$f_K^\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{c}{2}, & y = \frac{c}{2b} - \varepsilon = y\varepsilon \\ 0, & y \neq y\varepsilon \end{cases}$$

Так, что в игре Γ_2 , в отличие от игры Γ_1 , прибыль производителя близка к нулю.

Теория принятия решений. Многокритериальная/векторная оптимизация

ЛПР – лицо, принимающее решения. Пусть имеется ЛПР, выбирающее стратегию $x \in X$,

$$W(x) = (W_1(x), \dots, W_s(x))$$

– векторная оценка,

$$W_i(x), \quad i = \overline{1, s},$$

– частный критерий.

В этих условиях необходимо выбрать $x \in X$. Основная трудность в том, что, как правило, нет x^0 , максимизирующего все частные критерии³³, т.е. что

$$\nexists x^0 \in X : x^0 \in \operatorname{Argmax}_{x \in X} W_i(x), \quad i = \overline{1, s}$$

В этом случае векторные оценки можно изображать на плоскости (рис. 11.2).

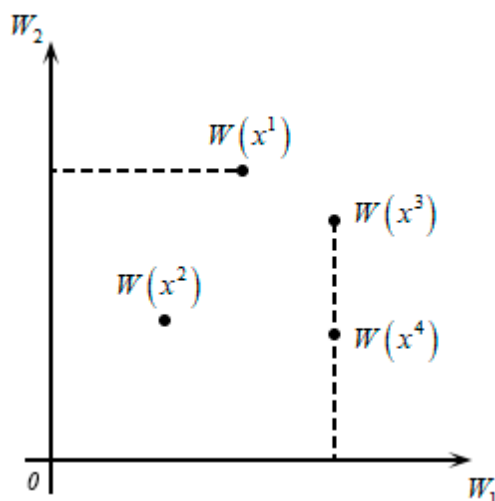


Рис. 12.2. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\operatorname{Argmax}_{x \in X} W_1(x) = \{x^3, x^4\}$$

$$\operatorname{Argmax}_{x \in X} W_2(x) = \{x^1\}$$

Эти множества не пересекаются, что есть препятствие на пути поиска оптимальной стратегии. Познакомимся со способами его преодоления.

Оптимальная по Парето стратегия

Определение: стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Парето, если

$$\nexists x \in X : W_i(x) \geq W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x^0)$$

³³ Для удобства мы условимся именно максимизировать частные критерии. Если в задаче требуется их минимизировать, то достаточно будет сменить знак у максимумов на противоположный.

Обозначим $P(X, W)$ множество всех стратегий из X , оптимальных по Парето по критерию W для предыдущего примера $P(X, W) = \{x^1, x^3\}$. Есть простой способ проверить оптимальность по Парето: строим «уголок»³⁴ и смотрим, есть ли внутри него другие векторные оценки (см. рис. 11.3). Если их нет, то стратегия оптимальна.

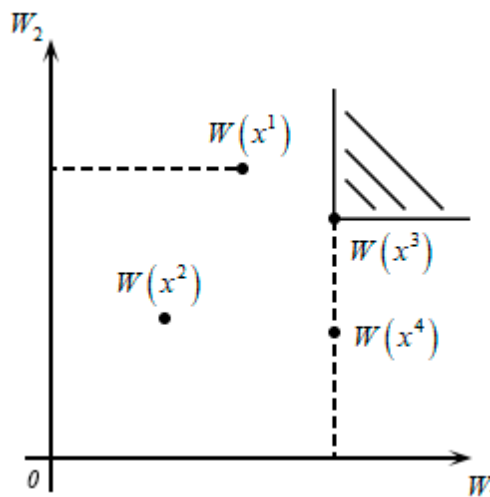


Рис. 12.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

Оптимальная стратегия по Слейтеру

Определение: стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Слейтеру³⁵, если

$$\nexists x \in X : W_i(x) > W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}.$$

Обозначим $S(X, W)$ множество всех стратегий из X , оптимальных по Слейтеру по критерию W . Для нашего примера

$$S(X, W) = \{x^1, x^3, x^4\}$$

Очевидно, что

$$P(X, W) \subset S(X, W).$$

Рассмотрим простейшую задачу проектирования.

Задача «о коробке»: имеем прямоугольник размера $a \times b, a < b$. Необходимо сделать из него коробку (рис. 11.4).

³⁴ Лектор, кажется, называет его «артантом». Моя искал, но не понимаю.

³⁵ Мортон Линкольн Слейтер – американский математик, доктор наук.

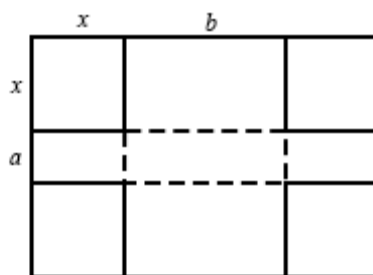


Рис. 12.4. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$x \in X = \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

$W_1(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = V(x)$ – объем коробки;

$W_2(x) = 4x^2 = S(x)$ – площадь (этот материал можно будет использовать).

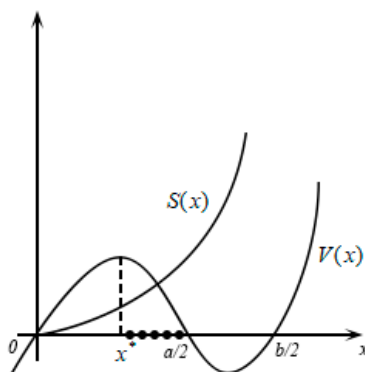


Рис. 11.5. Графическое изображение функций частных критериев

Утверждается, что

$$P(X, W) = \left[x^*, \frac{a}{2} \right),$$

т.к. если $x \in (0, x^*]$, оба критерия возрастают, что не является оптимальным случаем.

Задача многокритериальной оптимизации состоит в том, чтобы построить множества $P(X, W)$ и $S(X, W)$ или их аппроксимации. Когда множество $P(X, W) \neq \emptyset$? Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема о множествах стратегий оптимальных по Парето и Слейтеру

Теорема 3.1: пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ непрерывны на компакте X . Тогда

$$P(X, W) \neq \emptyset \quad (\Rightarrow S(X, W) \neq \emptyset).$$

Доказательство: воспользуемся т.н. свёрткой критерия с некоторыми весовыми коэффициентами. Рассмотрим вектор весовых коэффициентов

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \Lambda = \left\{ \lambda \mid \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1, s} \right\},$$

свёртку

$$F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^s \lambda_i W_i(x)^{36}.$$

Докажем, что

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad X_1(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F_1(\lambda, x) \subset P(X, W)$$

Пусть это не так, тогда

$$\exists x' \in X_1(\lambda) \setminus P(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) \geq W_i(x'), i = \overline{1, s}, W(x) \neq W(x') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{домножим каждое неравенство на } \lambda_i \text{ и сложим их} \right\} \Rightarrow$$

$$F_1(\lambda, x) > F_1(\lambda, x'),$$

что есть противоречие, т.к. $x' \in X_1(\lambda)$ максимизирует свёртку, а мы нашли другую стратегию, дающую большее значение для этой свёртки.

Справедливо ли равенство $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) = P(X, W)$? Далеко не всегда. Рассмотрим пример:

$$W(x) = (W_1(x), W_2(x)), \quad W_1(x) = x_1, \quad W_2(x) = x_2$$

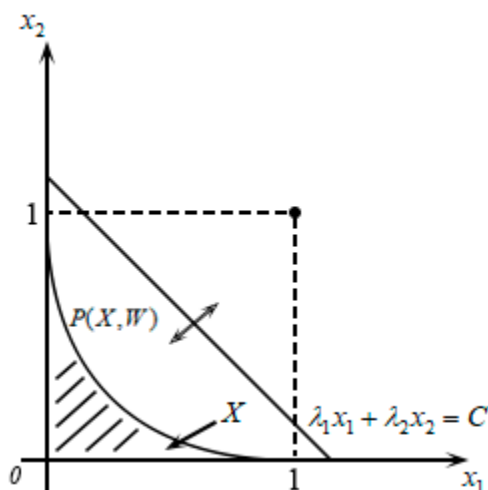


Рис. 12.6. Графическое изображение рассматриваемого случая

36 Функция непрерывна на компакте и ее максимум достигается.

$$F_1(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

Из рисунка видно, что

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) \subset \{(0,1), (1,0)\},$$

в то время как оптимальными являются все точки дуги окружности. Определим другую свертку:

$$F_2 = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x), \quad W_i(x) > 0$$

Упражнение: покажите, что если $V_i(x) = W_i(x) + C_i$, $i = \overline{1, s}$, то выполнено

$$P(X, V) = P(X, W).$$

$$X_2(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F_2(\lambda, x)$$

Теорема о представлении стратегий оптимальных по Слейтеру

Теорема 3.2: пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ положительны и непрерывны на компакте X .

Тогда

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda) = S(X, W) \quad (1)$$

Доказательство: покажем двустороннее вложение множеств.

1)

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad X_2(\lambda) \subset S(X, W)$$

Пусть это не так, тогда

$$\exists x' \in X_2(\lambda) \setminus S(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) > W_i(x'), \quad i = \overline{1, s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{домножим каждое неравенство на } \lambda_i \text{ и возьмем минимум от обеих частей} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2(\lambda, x) > F_2(\lambda, x'),$$

что есть противоречие, т.к. $x' \in X_2(\lambda)$ максимизирует свертку $F_2(\lambda, x')$.

2) Докажем обратное включение:

$$\forall x^0 \in S(X, W) \quad \exists \lambda^0 \in \Lambda: \quad x^0 \in X_2(\lambda^0)$$

$$\lambda^0: \quad \lambda_i^0 = \frac{1}{W_i(x^0) \sum_{k=1}^s \frac{1}{W_k(x^0)}} > 0$$

Последнее, что осталось доказать:

$$\forall x \in X \quad \exists j: \quad W_j(x) \leq W_j(x^0)$$

$$F_2(\lambda^0, x) = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 W_i(x) \leq \lambda_j^0 W_j(x) \leq \lambda_j^0 W_j(x^0) = \frac{1}{\sum_{k=1}^s \frac{1}{W_k(x^0)}} = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 W_i(x^0) = F_2(\lambda^0, x^0)$$

Теорема доказана.

Лекция 13. Многокритериальная оптимизация

Сравнение стратегий по Парето и Слейтеру

Приведем альтернативные формулировки оптимальности по Парето.

Определение: пусть $x, x' \in X$. Будем говорить, что стратегия x лучше стратегии x' в смысле Парето, если

$$W_i(x) \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x').$$

Обозначение: $x \succeq x'$.

Определение: пусть $x, x' \in X$. Будем говорить, что стратегия x строго лучше стратегии x' в смысле Парето, если

$$W_i(x) \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x').$$

Обозначение: $x \succ x'$.

Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – конечное множество стратегий, Π – множество попарно несравнимых стратегий. Приведем алгоритм поиска Π .

Шаг 1: $\Pi = \{x^1\}$

...

Шаг k: $\Pi = \{x^{i_1}, \dots, x^{i_t}\}, t \leq k$

Шаг k+1: выбираем стратегию x^{k+1} и сравниваем её со стратегиями из множества Π .

a.

$$\exists x' \in \Pi: x' \succeq x^{k+1}$$

b.

$$\exists x' \in \Pi: x^{k+1} \succeq x',$$

тогда уничтожаем в множестве Π стратегии, хуже x^{k+1} , получаем множество Π' . Полагаем после этого, что

$$\Pi = \Pi' \cup \{x^{k+1}\}$$

Почему это множество содержит попарно несравнимые стратегии? Предположим, это не так, тогда:

$$\exists x \in \Pi': x \succeq x^{k+1} \succeq x'$$

и, в силу транзитивности, $x \succeq x'$, что есть противоречие, т.к. $x, x' \in \Pi$.

c. x^{k+1} не сравнима ни с какими стратегиями из множества Π , тогда

$$\Pi := \Pi \cup \{x^{k+1}\}.$$

Упражнение: покажите, что после n -ого шага $\Pi = P(X, W)$.

Добавим, что этот алгоритм эффективен в том смысле, что не все возможные пары сравниваются. Аналогичный алгоритм можно предложить и для нахождения множества стратегий, оптимальных по Слейтеру. Для этого достаточно заменить \geq на $>$.

Допустимое или возможное направление вектора

Пусть $x^0 \in X \in E^m$ – выпуклый компакт в евклидовом пространстве.

Определение: будем говорить, что вектор $\alpha \in E^m$ задает в точке $x^0 \in X$ допустимое или возможное направление, если $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 (x^0 + \varepsilon \alpha) \in X$.

Рассмотрим пример (рис. 14.1):

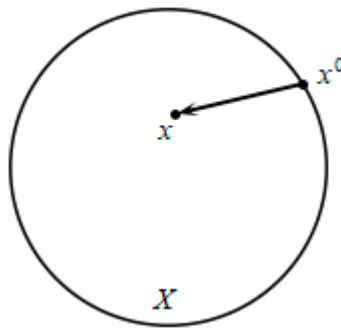


Рис. 13.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

Пусть $\alpha = x - x^0$. По определению выпуклого компакта,

$$(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)x^0) \in X, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\left(x^0 + \varepsilon \overbrace{(x - x^0)}^{\alpha} \right) \in X, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Тогда при $\varepsilon_0 = 1$ выполнено условие определения допустимого направления. Будем использовать обозначение $L(x^0)$ – множество всех направлений в точке x^0 .

Теорема 3.3. о неоптимальной стратегии

Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ – вогнуты на компакте X евклидового пространства и непрерывно дифференцируемые в некоторой области D .

Тогда

$$x^0 \notin S(X, W) \Leftrightarrow \exists \alpha \in L(x^0): (W'_i(x^0), \alpha) > 0, \quad i = \overline{1, s} \quad (1)$$

Доказательство:

1.

$$x^0 \notin S(X, W) \Rightarrow (1)$$

$$\exists x: W_i(x) > W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}$$

$$\left(W_i'(x^0), x - x^0 \right) \geq W_i(x) - W_i(x^0) > 0, \quad i = \overline{1, s} \quad 37$$

Осталось указать направление, допустимость которого мы уже показали: $\alpha = x - x^0$.

2. Пусть для $x^0 \in X$ выполнено (1) $\Rightarrow x^0 \notin S(X, W)$. По определению допустимого направления,

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (x^0 + \varepsilon \alpha) \in X$$

$$W_i(x^0 + \varepsilon \alpha) - W_i(x^0) = \quad 38$$

$$= \left(W_i' \left(x^0 + \overset{0 \leq \theta_i \leq 1}{\theta_i} \varepsilon \alpha \right), \varepsilon \alpha \right) = \varepsilon \left(W_i' \left(x^0 + \overset{0 \leq \theta_i \leq 1}{\theta_i} \varepsilon \alpha \right), \alpha \right)$$

$$\left(W_i' (x^0 + \theta_i \varepsilon \alpha), \alpha \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(W_i' (x^0), \alpha \right) \stackrel{(1)}{>} 0, \quad i = \overline{1, s},$$

т.е. при малых ε

$$\varepsilon \left(\underbrace{W_i' (x^0 + \theta_i \varepsilon \alpha)}_{>0}, \alpha \right) > 0$$

Таким образом, мы получили, что $x^0 + \varepsilon \alpha \succ x^0$, и теорема доказана.

Рассмотрим частный случай. Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ – строго вогнуты на выпуклом компакте X . Покажем, что $P(X, W) = S(X, W)$. Нам уже известно, что $P(X, W) \subset S(X, W)$. Покажем, что строгого включения быть не может. Предположим противное:

$$\exists x' \in S(X, W) \setminus P(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x')$$

Рассмотрим

$$\frac{x + x'}{2} \in X$$

37 Известное неравенство, являющееся алгебраической реализацией факта, что касательная в некоторой точке вогнутой функции лежит выше этой функции.

38 Формула конечных приращений Лагранжа.

$$W_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) > \frac{1}{2} \overbrace{W_i(x)}^{\geq W_i(x')} + \frac{1}{2} W_i(x') \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s},$$

то есть,

$$\frac{x+x'}{2} \succ x' \in S(X, W)$$

Получили противоречие.

Пример: пусть даны x^1, \dots, x^s – точки на плоскости. Определим критерий расстояния для некоторой точки x :

$$W_i(x) = -|x - x^i|, \quad i = \overline{1, s}$$

$$W'_i(x) = -\frac{(x - x^i)}{|x - x^i|} = \frac{x^i - x}{|x - x^i|}, \quad i = \overline{1, s}$$

– градиент в точке x . Решим задачу для двух точек x^1, x^2 .

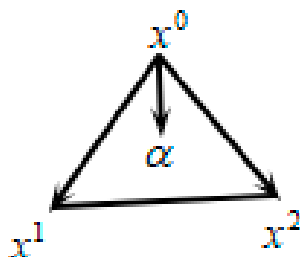


Рис. 13.2. Графическое изображение рассматриваемого случая

x^0 не является оптимальной по Слейтеру, если существует направление α , образующее острые углы с векторами $\overrightarrow{x^0, x^1}$, $\overrightarrow{x^0, x^2}$ (см. рис. 14.2). Нетрудно показать, что такое направление найдется для всех x^0 вне отрезка $[x^1, x^2]$. Все точки этого отрезка, очевидно, оптимальны по Слейтеру, т.к. хотя бы один угол между векторами будет неострый.

Упражнение: попробуйте решить задачу для трех точек x^1, x^2, x^3 .

Общая задача принятия решений и бинарное отношение

Как и прежде, ЛПР выбирает стратегию $x \in X$.

Определение: бинарным отношением R на множестве X называется $R \subset X \times X$. Если пара $(x, x') \in R$, то будем говорить, что стратегия x лучше (или не хуже) стратегии x' . Вместо записи $(x, x') \in R$ будем использовать xRx' , а вместо $(x, x') \notin R$ – $x\bar{R}x'$.

Определение: бинарное отношение R на множестве X называется:

1. рефлексивным, если $xRx \quad \forall x \in X$ (\geq)
2. антирефлексивным, если $x\bar{R}x \quad \forall x \in X$ ($>$)
3. симметричным, если $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in X$ ($=$)
4. асимметричным, если $xRy \Rightarrow y\bar{R}x \quad \forall x, y \in X$
5. транзитивным, если $xRy, yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in X$
6. ациклическим, если $\nexists x^1, \dots, x^k \in X : x^1Rx^2 \dots Rx^kRx^1$

Утверждение: из асимметричности следует антирефлексивность, т.к., если отношение не антирефлексивно, то $\exists x : xRx \Rightarrow x\bar{R}x$, что абсурдно.

Утверждение: из ациклическости следует асимметричность, т.к., если отношение не асимметрично, то $\exists x, y : xRyRx$, что есть цикл.

Пример: сравнение стратегий по векторному критерию в смысле Парето \succeq (\succ) является транзитивным асимметричным бинарным отношением.

Упражнение: докажите, что из антирефлексивности и транзитивности бинарного отношения R следует его ациклическость.

Ядро бинарного отношения

Определение: ядром бинарного отношения R на множестве X называется

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx'\} \quad (1)$$

Определение: ядром асимметричного бинарного отношения R на множестве X называется

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid \nexists x \in X : xRx'\} \quad (2)$$

Покажем, что для асимметричных бинарных отношений множества (1) и (2) совпадают:

1.

$$x' \in (1) \Rightarrow x' \in (2)$$

$$x' \notin (2) \Rightarrow \exists x \in X : xRx' \begin{cases} \xRightarrow{\text{асимм.}} x'\bar{R}x \\ \xRightarrow{(1)} x'Rx \end{cases}$$

2.

$$x' \in (2) \Rightarrow x' \in (1)$$

$$x' \in (2) \Rightarrow \nexists xRx' \Rightarrow \text{верна импликация } xRx' \Rightarrow x'Rx$$

Примеры:

1. Пусть $R = '\succeq'$ – асимметричное бинарное отношение, тогда $C(X, R) = P(X, W)$.
2. Пусть $R = '\succ'$ – асимметричное бинарное отношение, тогда $C(X, R) = S(X, W)$.
3. Изоморфизм бинарных отношений и орграфов.

Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – конечное множество. Тогда, соединяя стрелкой некоторые x^i, x^j : $x^i R x^j$, получим ориентированный граф.

Задача: рассмотрим стратегии x^1, x^2, x^3 (см. рис.14.3). Найдём ядро бинарного отношения. Поскольку $x^1 R x^2 R x^3$, отношение не антисимметрично.

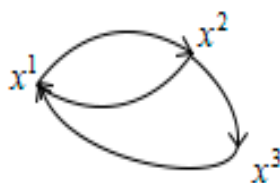


Рис. 13.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\begin{cases} x^1 \notin C(X, R) \\ x^2 \in C(X, R) \Rightarrow C(X, R) = \{x^2\} \\ x^3 \notin C(X, R) \end{cases}$$

Упражнение: попробуйте решить задачу для четырех стратегий (рис. 14.4).

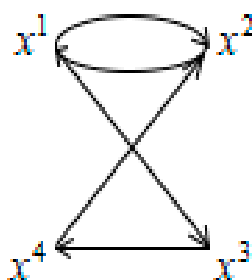


Рис. 13.4. Графическое изображение рассматриваемого случая

Утверждение: пусть X конечно, а бинарное отношение R ациклично. Тогда $C(X, R) \neq \emptyset$. Докажите его самостоятельно.

Пример: приведем таблицу оценок двух школьников.

	Математика	Литература
x^1	3	5

x^2 5 4

Очевидно, эти две стратегии несравнимы в смысле Парето. Попробуем сравнить их, используя дополнительную информацию о важности предметов. Рассмотрим некоторые случаи.

1. Математика равноценна литературе.

Введем третьего гипотетического ученика со следующими оценками:

	Математика	Литература
x^1	3	5
x^2	5	4
x^3	4	5

Справедливо, что

$$x^2 \square x^3 \succeq x^1 \Rightarrow x^2 \succeq x^1.$$

2. Математика «лучше» литературы.

	Математика	Литература
x^1	3	5
x^2	5	4
x^3	4	5

Справедливо, что

$$x^2 \succeq x^3 \succeq x^1 \Rightarrow x^2 \succeq x^1$$

Очевидно, литература лучше математики быть не может, т.к. x^2, x^1 в этом случае будут несравнимы.

Определение: частные критерии $W_i(x), W_j(x)$ однородны, если их диапазоны изменений совпадают:

$$\max_{x \in X} W_i(x) = \max_{x \in X} W_j(x);$$

$$\min_{x \in X} W_i(x) = \min_{x \in X} W_j(x).$$

Неоднородные критерии можно сделать однородными, преобразовав $W_j(x)$ и найдя соответствующие коэффициенты:

$$W_j(x) \rightarrow \alpha W_j(x) + \beta$$

Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем считать все критерии однородными.

Лекция 14. Критерии и математическая модель операций

Отношения и критерии. Бинарное отношение

Формализуем информацию о сравнительной важности или равносильности критериев. Пусть $I = \{1, \dots, s\}$ – множество номеров критериев, на котором мы задаем бинарные отношения. Введем некоторые из них.

Отношение равноценности:

$$A_1: rA_1t \Rightarrow W_r(x) \text{ и } W_t(x) \text{ равноценны,}$$

где A_1 – отношение эквивалентности³⁹.

Отношение сравнительной важности:

$$A_2: rA_2t \Rightarrow W_r(x) \text{ важнее } W_t(x).$$

A_2 – асимметрично⁴⁰, транзитивно.

Отношение транзитивного замыкания:

$$\varphi: r\varphi t \Rightarrow \exists rB_1i_1\dots i_{k-1}B_kt, \quad B_l = \{A_1 \text{ либо } A_2\},$$

причём A_2 встречается хотя бы единожды.

Условие о непротиворечивости: φ – антирефлексивно. Последнее отношение позволяет получать непротиворечивую информацию от ЛПР. Рассмотрим евклидово пространство E^s с векторными оценками

$$y = W(x), \quad y \in Y = W(X)$$

Определим на этом пространстве бинарные отношения.

Бинарное отношение по Парето

Отношение сравнения по Парето:

$$P: yPy' \Leftrightarrow y_i \geq y'_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad y \neq y'$$

Введем обозначение y^{rt} – векторная оценка y , в которой r -ая и t -ая компоненты поменяны местами. Пусть выполнено rA_1t , то есть r и t равноценны. Тогда

$$S_r: yS_r y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}$$

Пусть выполнено rA_2t , то есть r -ый, критерий важнее t -ого. Тогда

$$T_r: yT_r y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}, \quad y_r > y_t$$

Определение: будем говорить, что две векторных оценки y и y' связаны (зом)бинарным отношением R тогда и только тогда, когда

³⁹ Т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

⁴⁰ И антирефлексивно в соответствии с утверждением из предыдущей лекции.

$$\exists yH_1z^1H_2z^2\dots z^{k-1}H_ky', H_i \in \{P, S_{rt} : rA_1t, T_{rt} : rA_2t\}$$

$$\exists H_l = P \text{ или } T_{rt}$$

Лемма 1: введенное бинарное отношение R – транзитивно и ациклично.

Доказательство:

1) Транзитивность: $yRy'Ry'' \Rightarrow yRy''$.

Используя определение отношения R, построим две цепочки:

$$yH_1z^1H_2z^2\dots z^{k-1}H_ky'$$

$$y'H_{k+1}z^{k+1}H_{k+2}z^{k+2}\dots z^{k+q-1}H_{k+q}y''$$

Объединяя их, получим искомое:

$$yH_1z^1H_2z^2\dots z^{k-1}H_ky'H_{k+1}z^{k+1}H_{k+2}z^{k+2}\dots z^{k+q-1}H_{k+q}y'' \Rightarrow yRy''$$

2) Ацикличность, от противного: пусть

$$\exists yH_1z^1H_2z^2\dots z^{k-1}H_ky$$

Тогда рассмотрим два случая:

а.

$$\exists l : H_l = P$$

$$z^{l-1}pz^l \Rightarrow \sum_{i=1}^s z_i^{l-1} > \sum_{i=1}^s z_i^l$$

$$H_l = T_{rt}, S_{rt} \Rightarrow \sum_{i=1}^s z_i^{l-1} = \sum_{i=1}^s z_i^l$$

$$\sum_{i=1}^s y_i \geq \sum_{i=1}^s z_i^1 \geq \dots > \dots \geq \sum_{i=1}^s y_i,$$

что есть противоречие.

б.

$$\forall i H_i \neq P$$

Без ограничения общности считаем, что $H_1 = T_{rt}$

$$H_l = S_{i_l j_l} \text{ или } T_{i_l j_l}$$

Определим множество $I_+ = \{i | i\varphi t\}$:

$$r \in I_+, \text{ т.к. } T_{rt} \Rightarrow rA_2t \Rightarrow r\varphi t$$

$t \notin I_+$, т.к. если бы оно принадлежало, то было бы выполнено $t\varphi t$, что неверно в силу антирефлексивности φ .

Покажем, что

$$j_l \in I_+ \Rightarrow i_l \in I_+$$

$$i_l A_1 j_l \varphi t \Rightarrow i_l \varphi t$$

Ввиду этой импликации, возможны три случая:

$$(1) \text{ и } (2): \left. \begin{array}{l} i_l, j_l \in I_+ \\ i_l, j_l \notin I_+ \end{array} \right\} H_l = S_{i_l j_l} \text{ или } T_{i_l j_l} \Rightarrow z^{l-1} H_l z^l \Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{l-1} = \sum_{i \in I_+} z_i^l$$

$$(3): i_l \in I_+, j_l \notin I_+ \Rightarrow i_l A_2 j_l, \text{ т.к. если бы } i_l A_1 j_l, \text{ то } j_l A_1 i_l \varphi t \Rightarrow j_l \in I_+$$

Итак,

$$i_l A_2 j_l \Rightarrow H_l = T_{i_l j_l} \Rightarrow z_i^{l-1} > z_{j_l}^{l-1} \Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{l-1} > \sum_{i \in I_+} z_i^l$$

$$\sum_{i \in I_+} y_i > \sum_{i \in I_+} z_i^1 \geq \dots \geq \sum_{i \in I_+} y_i,$$

что есть противоречие. Лемма доказана.

Сужение векторных стратегий

Пусть $P(X, W) = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное множество стратегий, оптимальных по Парето. Рассмотрим соответствующее множество векторных оценок:

$$P(Y) = \{y_1 = W(x_1), \dots, y_n = W(x_n)\}$$

– соответствующее множество векторных оценок. Наша задача состоит в том, чтобы сузить множество $P(Y)$, т.е. построить $C(P(Y), R) \neq \emptyset$ ⁴¹ – ядро на множестве векторных оценок $P(Y)$ бинарного отношения R . Предположим, что все частные критерии равноценны, т.е.

$$A_1 = I \times I, \quad A_2 = \emptyset.$$

Определим отображение:

$$y \in E^s \quad \theta(y) = (\theta_1(y), \dots, \theta_s(y)), \quad \theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \dots \geq \theta_s(y)$$

Лемма о векторной оценке, связанной отношением Парето

Лемма 2: пусть $y P y'$. Тогда $[\theta(y)] P [\theta(y')]$ ⁴².

Доказательство:

$$\theta_1(y) = \max_{1 \leq i \leq s} y_i \geq \max_{1 \leq i \leq s} y'_i = \theta_1(y')$$

⁴¹ По ранее доказанному утверждению.

⁴² Квадратные скобки в данном случае – просто инструмент выделения.

Покажем, что

$$\theta_i(y) \geq \theta_i(y'), \quad i = \overline{1, s},$$

т.е. что $\theta(y) \neq \theta(y')$. Пусть

$$\exists k: \theta_k(y) < \theta_k(y')$$

$$\underbrace{\theta_s(y) \leq \dots \leq \theta_k(y)}_{s-k+1 \text{ компонент}} < \underbrace{\theta_k(y') \leq \theta_{k-1}(y') \leq \dots \leq \theta_1(y')}_{k \text{ компонент}} \Rightarrow$$

всего компонент $s - k + 1 + k = s + 1 > s$. Пришли к противоречию.

Утверждение о бинарном отношении при равноценных критериях

Утверждение: если $A_1 = I \times I$, то $yRy' \Leftrightarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$.

Доказательство:

1.

$$yRy' \Rightarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$$

$$yRy' \Leftrightarrow \exists yH_1z^1H_2z^2\dots z^{k-1}H_ky', \quad H_i \neq T_n, \text{ т.е. } \exists l: H_l = P$$

Если $H_l = S_{i_l j_l}$, то z^{l-1} и z^l имеют одинаковые компоненты, просто переставленные местами. Поэтому совпадают упорядоченные оценки: $\theta(z^{l-1}) = \theta(z^l)$. Если $H_l = P$, то

$$z^{l-1}pz^l \xrightarrow{J2} [\theta(z^{l-1})]P[\theta(z^l)]$$

2.

$$yRy' \Leftarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$$

Хорошо известно, что упорядочить компоненты можно при помощи простой перестановки пар:

$$yS_{i_1 j_1} \dots S_{i_k j_k} [\theta(y)]P[\theta(y')] S_{i_{k+1} j_{k+1}} \dots y'$$

Таким образом, утверждение доказано.

Примеры:

1. Пусть все частные критерии равноценны. Необходимо построить ядро бинарного отношения для следующих векторов:

$$y^1 = (3, 5, 3) \Rightarrow \theta(y^1) = (5, 3, 3)$$

$$y^2 = (4, 4, 3) \Rightarrow \theta(y^2) = (4, 4, 3)$$

$$y^3 = (5, 3, 2) \Rightarrow \theta(y^3) = (5, 3, 2)$$

$$y^4 = (2, 3, 5) \Rightarrow \theta(y^4) = (5, 3, 2)$$

$$y^5 = (4, 2, 4) \Rightarrow \theta(y^5) = (4, 4, 2)$$

Сравним оценки:

$$\begin{aligned} & [\theta(y^1)]P[\theta(y^3)], [\theta(y^4)] \\ & [\theta(y^2)]P[\theta(y^5)] \end{aligned}$$

Легко видеть, что y^1 и y^2 – несравнимы и

$$C(P(Y), R) = \{y^1, y^2\}.$$

2.

$$P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$$

Представим четырех учеников со следующими оценками:

$$y^1 = (5, 5, 4, 4)$$

$$y^2 = (5, 4, 5, 4)$$

$$y^3 = (5, 4, 4, 5)$$

$$y^4 = (4, 4, 5, 5)$$

Рассмотрим следующие отношения равноценности:

$$A_1 = \{(1, 3), (3, 1)\} \cup \{(i, i), i = \overline{1, 4}\}$$

$$A_2 = \{(2, 4), (2, 3)\}$$

Заметим, что:

$$y^1 T_{24} y^3 \Rightarrow y^1 R y^3$$

$$y^1 T_{23} y^2 \Rightarrow y^1 R y^2$$

$$y^1 T_{24} y^3 S_{13} y^4 \Rightarrow y^1 R y^4$$

$$C(P(Y), R) = \{y^1\},$$

т.е. первый ученик самый лучший.

Основные определения: операции и оперирующая сторона

Определение: операция – совокупность мероприятий, направленных на достижение некоторой цели.

Определение: оперирующая сторона – совокупность лиц (либо одно лицо), стремящихся(-еся) в операции к поставленной цели.

Определение: исследователь операции – участник оперирующей стороны, создающий и исследующий математическую модель операции, а также дающий рекомендации по тому, как нужно действовать в данной операции.

Определение: для достижения цели оперирующая сторона использует активные средства(ресурсы).

Контролируемые и неконтролируемые факторы

Определение: контролируемый фактор – величины, значения которых определяются действиями оперирующей стороны. Обозначение: $x \in M_0$ ⁴³.

Определение: неконтролируемый фактор – величины, влияющие на исход операции, но не подконтрольные оперирующей стороне. Они подразделяются на неопределенные и случайные факторы.

Определение: неопределенный фактор – неконтролируемый фактор, про который известна лишь его область значений. Обозначение: $y \in N \subset N_0$, где N – область неопределенности.

Неопределенные факторы делятся на три группы:

1. субъекты, имеющие собственные интересы
2. природные неопределенности
3. неясность цели (пример: неопределенный фактор i в $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$)

Определение: случайный фактор – неконтролируемый фактор, который является случайной величиной. Обозначение: $z \in Z$ с законом распределения $\theta(z) \in \Theta$.

1.

$$\theta = \{\theta_\alpha, \alpha \in A\}$$

2.

$$\theta = \left\{ \theta \mid \underline{a}_i \leq \int_Z a_i(z) d\theta(z) \leq \overline{a}_i, i = \overline{1, l} \right\}$$

Критерий эффективности

Будем считать, что после окончания операции известны значения

⁴³ Так их обозначает Ю. Б. Гермейер.

$$(x, y, z) \in M_0 \times N \times Z$$

Определение: зададим степень соответствия исхода операции поставленной цели функцией $F(x, y, z)$, которую назовем критерием эффективности.

Лекция 15. Оптимальные стратегии в операции

Определения (информационная гипотеза, стратегия)

Определение: информационная гипотеза – точное описание того, в какие моменты и какая информация о неконтролируемых факторах поступает оперирующей стороне.

Определение: стратегия – выбор контролируемых факторов в зависимости от поступающей

информации о неконтролируемых факторах. Формально, это функция $\tilde{x}: N \times Z \rightarrow M_0$.

Примеры:

1. Никакой дополнительной информации не ожидается:

$$\tilde{x} = x \in M_0, \quad M = M_0$$

2. В момент начала операции⁴⁴ y становится известным:

$$y \in N \quad \tilde{x}: N \rightarrow M_0,$$

Обозначим M_u множество таких функций.

3. В момент начала операции известна информация и об y , и о z :

$$y, z \in N \times Z \quad \tilde{x}: N \times Z \rightarrow M_0,$$

Обозначим \tilde{M} множество таких функций.

4. Для некоторого вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ известна только сумма

$$\sum_{j=1}^n y_j: \tilde{x}(y) = f(\sum_{j=1}^n y_j),$$

причем множество таких функций $M: M_0 \subset M \subset M_u$

Подход Гермейера, принцип гарантированного результата

Рассмотрим подход Гермейера, основанный на принципе гарантированного результата. Для стратегии $\tilde{x} \in M$ определим оценку эффективности $W(\tilde{x})$ – гарантированную величину значения критерия.

Примеры:

1. Вспомним игру Γ_1 , где первый игрок сообщал второму стратегию x , второй выбирал стратегию из множества лучших ответов $y \in Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmax}} G(x, y)$,

при этом

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

44 После момента исследования!

Важно отметить, что принцип гарантированного результата здесь не исключает риск, так как второй игрок обязательно будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$.

2. Более тривиальный пример: игрок, в зависимости от прогноза погоды, решает, взять ему с собой на улицу зонтик или нет. Понятно, что риск здесь также присутствует, потому что прогноз погоды может оказаться неверным.

Оптимальная стратегия

Определение: стратегия $\tilde{x}^0 \in M$ называется оптимальной, если справедливо:

$$W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) = F_2(M).^{45}$$

Пример: у инвестора есть k акций, которые он желает продать. Торги происходят в течение $i = 1, \dots, n > k$ дней. В i -ый день стоимость акций равна y_i , $i = \overline{1, n}$. Его контролируемые факторы:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{акция продана,} \\ 0, & \text{акция не продана,} \end{cases}$$

$\tilde{x}_i(y_i)$ – сама стратегия

Предположим, что y_i – такие неопределенные факторы, что:

$$N = \left\{ y_i \mid a \leq y_i \leq b, \ i = \overline{1, n} \right\}$$

$$M_0 = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = k, \ x_i = \{0, 1\} \right\}$$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \text{выручка}$$

$$\min_{y \in N} F(\tilde{x}, y) = k \cdot a$$

Рассмотрим другой критерий:

$$F_1(x, y) = \frac{F(x, y)}{\max_{x \in M_0} F(x, y)} \leq 1,$$

т.е. сумма, которую получает инвестор, сравнивается с той суммой, которую инвестор получил бы, не зная он всех цен.

45 Если максимум не достигается, то можно ввести понятие ε - оптимальной стратегии (см. лекцию XI)

Оценка эффективности стратегий

Выпишем явную форму для оценки эффективности стратегий. Для этого сделаем некоторые предположения:

1. $y \in N$ – либо природная неопределенность, либо стратегия противника

$$F_n(x, y, z) = -F(x, y, z),$$

имеющего противоположные интересы

2. противник не знает реализацию случайной величины z
3. оперирующая сторона разрешает осреднение критерия по случайности (по закону распределения θ)

В таком случае формула для оценки эффективности записывается так:

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) \quad (1)$$

Если бы противник знал реализацию z , то формула изменилась бы так:

$$W'(\tilde{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z)$$

Покажем, что $W(\tilde{x}) \geq W'(\tilde{x})$, т.е. что если противник знает больше, то оценка эффективности уменьшается:

$$\forall y \in N \quad \forall \theta \in \Theta \quad \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) \geq \int_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z)$$

Беря нижнюю грань по $\theta \in \Theta$ от обеих частей неравенства, получаем искомое.

Смешанная стратегия. Оценка эффективности смешанной стратегии

Предположим, что $M = M_0$, $F_1(M_0)$ – наилучший гарантированный результат.

Определение: смешанной стратегией φ на множестве M_0 называется вероятностное распределение на этом множестве.

$$W(\varphi) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \int_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z) \quad (2)$$

Если противник знает реализацию z , то:

$$W'(\varphi) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in N} \int_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z)$$

Упражнение: пусть

$$y = (y_1, y_2) \in N = N_1 \times N_2,$$

Где y_1 – природная неопределенность, y_2 – стратегия противника, знающего z .
Выпишите в этих условиях $W(\tilde{x})$.

Абсолютно оптимальные стратегии

Оптимальная стратегия $\tilde{x}^0 \in M$ определяется как $W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x})$, при этом оценка эффективности соответствует (1). Допустим, что закон распределения случайного фактора θ известен. Определим осредненный критерий:

$$\begin{aligned}\tilde{x}: N \times Z &\rightarrow M_0 \\ \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) &= \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) \\ W(\tilde{x}) &= \inf_{y \in N} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta)\end{aligned}\quad (1)$$

Определение: абсолютно оптимальной стратегией $\tilde{x}_a \in M$ называется

$$\bar{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta), \quad \forall y \in N$$

Положим, что $M_0 \subseteq M \subseteq M_u$. Тогда

$$\begin{aligned}\max_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) &= \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \\ \forall \tilde{x} \in M \quad \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) &= \bar{F}(\tilde{x}(y), y, \theta) \leq \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \max_{x \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) \Rightarrow \\ \max_{x \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) &= \bar{F}(\tilde{x}(y), y, \theta) \leq \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \max_{x \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta)\end{aligned}\quad (3)$$

Очевидно, что неравенство можно заменить на равенство и (3) обосновано. Равенство (3) может быть не выполнено для $M \subsetneq M_u$. Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned}F(x, z) &= -(x - z)^2, \quad M_0 = [0, 1], \quad Z = [0, 1] \\ \tilde{x}: Z &\rightarrow M_0 \\ \max_{0 \leq x \leq 1} \left[-\int_0^1 (x - z)^2 dz \right] &< 0 = \max_{x \in M} \left[-\int_0^1 (\tilde{x}(z) - z)^2 dz \right]\end{aligned}$$

Теорема 3.4 о существовании абсолютно оптимальной стратегии

Теорема 3.4: пусть $\exists \tilde{x}_a \in M$. Тогда \tilde{x}_a – оптимальная стратегия и

$$F_e(M) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta)\quad (4)$$

Доказательство:

$$\forall \tilde{x} \in M \quad W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) \leq \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \inf_{y \in N} \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = W(\tilde{x}_a)$$

Рассмотрим частные случаи.

Теорема 3.5 о наилучшем результате при достижении максимума

1. Если $\forall y \in N$ достигается $\max_{x \in M_0} \overline{F}(x, y, \theta)$, то

$$F_z(M_u) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M_0} \overline{F}(x, y, \theta) \quad (5)$$

2. Если $\forall y \in N, \forall z \in Z$ достигается $\max_{x \in M_0} F(x, y, z)$, то

$$F_z(M) = \inf_{y \in N} \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) \quad (6)$$

Доказательство:

- 1.

$$\tilde{x}_a : \tilde{x}_a(y) : \overline{F}(\tilde{x}_a(y), y, \theta) = \max_{x \in M_0} \overline{F}(x, y, \theta) \stackrel{(3)}{=} \max_{x \in M_u} \overline{F}(x, y, \theta), \quad \forall y \in N$$

Мы получили, что стратегия \tilde{x}_a – абсолютно оптимальна, а значит, по ТЗ.4,

$$F_z(M_u) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M_u} \overline{F}(\tilde{x}_a(y), y, \theta) \stackrel{(3)}{=} \inf_{y \in N} \max_{x \in M_0} \overline{F}(x, y, \theta)$$

- 2.

$$\tilde{x}_a : \tilde{x}_a(y, z) : F(\tilde{x}_a(y, z), y, z) = \max_{x \in M_0} F(x, y, z), \quad \forall y \in N, \quad \forall z \in Z$$

Стратегия \tilde{x}_a будет абсолютно оптимальной, если мы докажем, что

$$\overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{x \in M} \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in M \quad \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) &= \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) \leq \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) = \\ &= \int_Z F(\tilde{x}_a(y, z), y, z) d\theta(z) = \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta), \quad \forall y \in N \end{aligned}$$

Применяя ТЗ.4, получим:

$$F_z(M) \stackrel{(4)}{=} \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) \stackrel{(7)}{=} \inf_{y \in N} \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z)$$

и теорема доказана.

Пример:

$$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}, \quad j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

Критерий эффективности задается матрицей:

$$(F(i, j))_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

а.

$$M = M_0, \quad F_z(M_0) = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 4} F(i, j) = 1, \quad i_0 = 3$$

В множестве M_0 нет абсолютно оптимальных стратегий. В самом деле, если бы она была:

$$i_a : F(i_a, j) = \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j), \quad j = \overline{1, 4},$$

иными словами,

$$F(i_a, j) \geq F(i, j), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 4}$$

У нас нет такой строки i_a , которая доминировала бы остальные строки.

б.

$$M = M_u,$$

т.е. ожидается полная информация о неопределенном факторе j , а значит стратегия является функцией

$$\tilde{i} : N \rightarrow M_0,$$

коих в примере будет – 3^4 . По ТЗ.5,

$$F_z(M_u) = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = 2$$

$$\tilde{i}^0 : W(\tilde{i}^0) = \min_{1 \leq j \leq 4} F(\tilde{i}^0(j), j) = 2$$

Найдем все оптимальные стратегии:

$$F(\tilde{i}^0(j), j) \geq 2, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$\tilde{i}^0(1) = 2, 3$$

$$\tilde{i}^0(2) = 1, 2, 3$$

$$\tilde{i}^0(3) = 1, 3$$

$$\tilde{i}^0(4) = 1, 2$$

Всего – 24 оптимальные стратегии. Теперь найдем все абсолютно оптимальные стратегии:

$$\tilde{t}_a(j): \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = F(\tilde{t}_a(j), j)$$

$$\tilde{t}_a(1) = 3$$

$$\tilde{t}_a(2) = 1, 2, 3$$

$$\tilde{t}_a(3) = 1$$

$$\tilde{t}_a(4) = 1, 2$$

Всего 6 абсолютно оптимальных стратегия.

Лекция 16. Оптимальные стратегии в операции

Продолжаем рассматривать примеры. Напомним условие:

$$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}, \quad j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(F(i, j))_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

с.

$$N = N_1 \cup N_2, \quad N_1 = \{1, 2\}, \quad N_2 = \{3, 4\}$$

Предположим, что вначале оперирующей стороне будет известно, какому множеству принадлежит $j - N_1$ или N_2 .

$$\tilde{i}: \quad \tilde{i}(j) = \begin{cases} i_1, & j \in N_1 \\ i_2, & j \in N_2 \end{cases}$$

$$i_a^1 = 3, \quad i_a^2 = 1$$

– абсолютно оптимальная стратегия и по ТЗ.4:

$$F_z(M) = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = 2$$

$$F(\tilde{i}^0(j), j) \geq 2, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$i_1^0 = 2, 3, \quad i_2^0 = 1$$

§13 Необходимое условие для оптимальной максиминных стратегий

Предположим, что случайный фактор z отсутствует, при этом

$$F(x, y), \quad x \in M = M_0, \quad y \in N,$$

$$W(x) = \min_{y \in N} F(x, y) - \text{оценка эффективности,}$$

$$x^0: \quad W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x)$$

Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in E^m,$$

$h(x)$ – функция многих переменных.

Определение: производной по направлению $\alpha \in E^m$ называется

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x + \varepsilon \alpha) - h(x)}{\varepsilon} = \frac{dh(x)}{d\alpha} = (h'(x), \alpha)_{46}$$

Пример:

$$x \in E^1, \quad W(x) = \min[x, 1 - x]$$

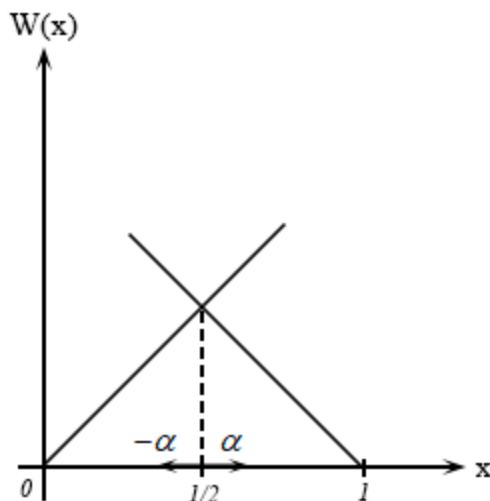


Рис. 16.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\alpha = (1), \quad -\alpha = (-1)$$

Производные по этим направлениям:

$$\frac{dW\left(\frac{1}{2}\right)}{d\alpha} = -1, \quad \frac{dW\left(\frac{1}{2}\right)}{d(-\alpha)} = -1$$

Теорема 3.6 о существовании производной по направлению

Пусть $D \in E^m$, N – компакт метрического пространства,

$$F(x, y), \quad F'_{x_i}(x, y), \quad i = \overline{1, m}$$

– непрерывны на $D \times N$. Тогда

$$\forall x \in D \quad \forall \alpha \in E^m \quad \exists \frac{dW(x)}{d\alpha} = \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y), \quad N(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in N} F(x, y) \quad (1)$$

Альтернативная запись суммы –

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) = (\alpha, F'_x(x, y)),$$

46 Последние скобки – скалярное произведение.

т.е. скалярное произведение α на градиент или, фактически, производная по направлению.

Доказательство: $\forall x \in D \quad \forall \alpha \in E^m$ рассмотрим

$$\varepsilon_k \rightarrow 0+,$$

$$x^k = x + \varepsilon_k \alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$x_i^k = x_i + \varepsilon_k \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Покажем, что существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k},$$

выражающийся формулой (1). Рассмотрим последовательность

$$y_k \in N(x_k), \quad \forall y \in N(x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} &= \frac{F(x^k, y^k) - F(x, y)}{\varepsilon_k} = \frac{\overbrace{F(x^k, y^k) - F(x^k, y)}^{\leq 0} + F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} \leq \\ &\leq \frac{F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i^k - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_k(x_k - x), y)}{\varepsilon_k} = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_k(x_k - x), y) \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \quad \forall y \in N(x)$$

В силу того, что неравенство выполнено для $\forall y$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \quad (2)$$

Доказав аналогичное неравенство для нижнего предела:

47 Формула конечных приращений Лагранжа.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y), \quad (3)$$

получим, что нижний предел больше верхнего предела или равен ему, а значит предел последовательности существует и равен выражению из условия теоремы. Докажем (3). По определению нижнего предела,

$$\exists k_l, l = 1, 2, \dots : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}}$$

Возьмем $y^{k_l} \in N(x^{k_l})$. Тогда $y^{k_l} \rightarrow y^* \in N(x)$, т.к.

$$F(x^{k_l}, y^{k_l}) \leq F(x^{k_l}, y) \quad \forall y \in N,$$

и, переходя к пределу при фиксированном y ,

$$F(x, y^*) \leq F(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}} &= \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^*)}{\varepsilon_{k_l}} = \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l}) + \overbrace{F(x, y^{k_l}) - F(x, y^*)}^{\geq 0}}{\varepsilon_{k_l}} \geq \\ &\geq \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l})}{\varepsilon_{k_l}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_{k_l}(x^{k_l} - x), y^{k_l}) \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y^*) \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y)$$

и (3) доказано. Теорема полностью доказана.

Отметим частный случай:

$$N(x) = \{y(x)\}, \quad F(x, y) \cup_y$$

$W(x) = F(x, y(x))$ дифференцируема, т.к.

$$\frac{d}{dx_i} W(x) = F'_{x_i}(x, y(x))$$

Пример: пусть $x = (x_1, x_2)$. Рассмотрим функции

$$W = \min_{1 \leq i \leq 3} f_i(x), \quad f_1(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(x) = 3x_2^2, \quad f_3(x) = \cos(\pi x_1) + 3x_2$$

Возьмем точку и направление:

$$x^0 = (1, -1), \quad \alpha = (1, 1)$$

Производная по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} W(x^0) &= \min_{j \in N(x^0)} (\alpha, f'_j(x^0)) \\ f_1(x^0) &= 2, \quad f_2(x^0) = 3, \quad f_3(x^0) = -4 \\ N(x^0) &= \{3\} \end{aligned}$$

$$f'_3(x^0) = (0, 3) \Rightarrow (\alpha, f'_3(x^0)) = 3 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} W(x^0) = 3$$

Следствие теоремы 3.6 максиминная стратегия

Пусть $M_0 \subset D \in E^m$, при этом $x^0 \in M_0$ – максиминная стратегия и выполнены все условия исходной теоремы. Тогда

$$\sup_{\alpha \in A(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0, \quad (4)$$

$A(x^0)$ – множество всех направлений α , которые допустимы в точке x^0 .

Доказательство: вспомним определение допустимого/возможного направления:

$$\forall \alpha \in A(x^0) \exists \varepsilon_0 > 0: \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (x^0 + \varepsilon \alpha) \in M_0$$

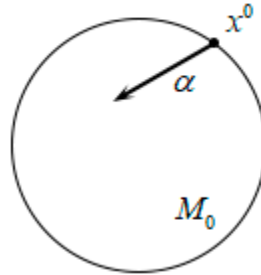


Рис. 16.2. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\overbrace{W(x^0 + \varepsilon \alpha) - W(x^0)}^{\leq 0}}{\varepsilon} \leq 0$$

Из (1) следует, что

$$\min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0 \quad \forall \alpha,$$

и, ввиду справедливости неравенства для $\forall \alpha$,

$$\sup_{\alpha \in \Lambda(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0$$

Лемма доказана.

Теорема 3.7 максиминная стратегия на отрезке

Пусть $M_0 = [a, b] \subset D$, N – компакт метрического пространства; $F(x, y), F'_x(x, y)$ непрерывны на $D \times N$. Тогда для максиминной стратегии $x^0 \in M_0$ справедливо одно из следующих утверждений:

- $x^0 = a$ или $x^0 = b$
- $\exists y^1 \neq y^2 \in N(x^0)$
- $N(x^0) = \{y^1\}, F'_x(x^0, y^1) = 0$

Эти условия являются обобщением поиска максимума у функции одной переменной на отрезке: он достигается либо в точке, где производная равна 0, либо на краях отрезка.

Доказательство: если выполнено а или б, то теорема справедлива. Рассмотрим случай, когда а и б не выполнено и необходимо выполнение с.

Если не выполнено а, то $a < x^0 < b$.

Если не выполнено б, то $N(x^0) = \{y_1\}$.

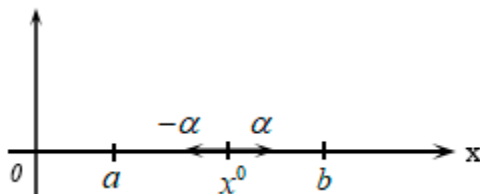


Рис. 16.3. Графическое изображение рассматриваемого случая

Воспользуемся условием для максиминной стратегии:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha: 1 \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0 \\ -\alpha: (-1) \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F'_x(x^0, y^1) = 0$$

Следствие теоремы 3.7 (на параллелепипеде)

Пусть

$$N = \{y \in E^n \mid c_j \leq y_j \leq d_j\},$$

при этом существуют частные производные $F'_{y_j}(x, y)$ на $M \times N$ при всех $j = \overline{1, n}$, и выполнены все условия исходной теоремы. Тогда для максиминной стратегии из отрезка справедливо либо 1, либо 2:

1.

$$\exists y^1 \in N(x^0): \begin{cases} F'_x(x^0, y^1)(x^0 - a)(x^0 - b) = 0 \\ F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2.

$$\exists y^1 \neq y^2 \in N(x^0): \begin{cases} F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ F'_{y_j}(x^0, y^2)(y_j^2 - c_j)(y_j^2 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) \end{cases}$$

Доказательство: по условию ТЗ.7, выполнено одно из условий а, б, с. Покажем, что

$$a \vee c \Rightarrow 1)$$

Первое уравнение системы, очевидно, выполняется.

$$\min_{c_j \leq y_j \leq d_j} F(x^0, y^1 \| y_j) = F(x^0, y^1), \quad y_j = y_j^1$$

F дифференцируема на отрезке и минимум достигается либо на краях отрезка, либо во внутренней точке, где производная равна нулю.

Теперь покажем, что

$$B \Rightarrow 2)$$

Первые два равенства выполнены ввиду аналогичных рассуждений. Последнее также выполнено, т.к.

$$F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) = W(x^0)$$

Используя следствие как необходимое условие, можно разработать алгоритм поиска максиминных стратегий.

Алгоритм поиска максиминных стратегий

1. Решить систему из $n + 1$ уравнений относительно $(x^0, y_j^1), \quad j = \overline{1, n}$
2. Решить систему из $2n + 1$ уравнений относительно $(x^0, y_j^1, y_j^2), \quad j = \overline{1, n}$

Пусть M_0^*, N^* – множества, появляющиеся в результате решений систем 1) и 2). Тогда

$$x^0 \in \max_{x \in M_0^*} \min_{y \in N^*} F(x, y)$$

Пример:

$$F(x, y) = -(x - y + y^3)^2, \quad M_0 = [-1, 1], \quad N = [-1, 1]$$

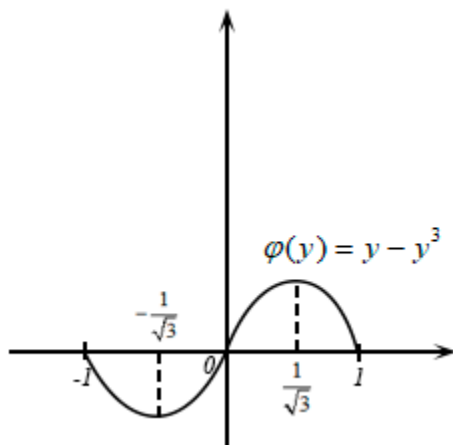


Рис. 16.4. Графическое изображение рассматриваемого случая

Будем стараться минимизировать отклонение x от функции $\varphi(y) = y - y^3$.

$$N(x) = \begin{cases} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x > 0 \\ \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x = 0 \\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x < 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что

$$y \in N(x) \quad F'_x(x, y) = -2(x - y + y^3) \neq 0 \Rightarrow M_0^* = \{\pm 1, 0\}, \quad N^* = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

Так, получается следующая задача нахождения максимина для матрицы:

$$(F(x, y))_{x \in M^*, y \in N^*} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^0 = 0$$

Лекция 17. Задачи оптимального распределения ресурсов

Общая постановка задачи оптимального распределения ресурсов (§15)

Пусть имеется $i = \overline{1, n}$ пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс в количестве $A > 0$, $f_i(t)$, – функция эффективности вложения ресурса в i -ый пункт, распределение ресурса задается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i – количество ресурсов, направляемых в i -ый пункт. Мы будем рассматривать два типа задач: в одних ресурс будет непрерывным (бесконечно делимым), в других – дискретным (штучным).

$$M_0 = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\} - \text{для непрерывных задач}$$

$$M'_0 = \left\{ x \in M_0 \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n} \right\} - \text{для дискретных задач}$$

Рассмотрим первую задачу оптимального распределения ресурсов.

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad (I)$$

т.е. оперирующая сторона пытается максимизировать минимальный эффект отложения по всем пунктам. Будем считать, что $f_i(t)$ – определена, возрастает и непрерывна на отрезке

$$[0, A], f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0),$$

т.е. первый пункт – слабейший.

Теорема 3.8. Принцип уравнивания

В сделанных предположениях пусть x^0 является оптимальным распределением ресурса в задаче (I). Тогда необходимо и достаточно, что

$$\exists 1 \leq k \leq n \begin{cases} f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0), \\ x_i^0 = 0 \quad \forall i = \overline{k+1, n} \end{cases} \quad (1)$$

При этом если $f_1(0) = \dots = f_n(0)$, то $k = n$. Оптимальное распределение ресурсов в задаче (I) единственно.

Смысл этой теоремы в том, чтобы распределить ресурсы между k слабейшими пунктами с одинаковыми эффектами отложения.

Доказательство:

x^0 – оптимальное распределение в (I) \Rightarrow (1). Заметим, что это распределение существует ввиду непрерывности функции $f_i(t)$.

$$\exists k: f_k(0) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0) \quad (2)$$

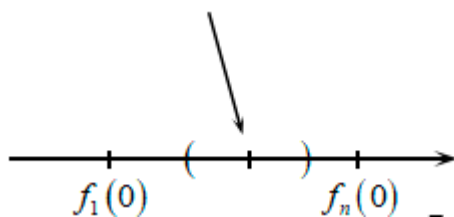


Рис. 17.1. Графическое изображение рассматриваемого случая

Докажем, что

$$x_i^0 = 0 \quad \forall i = \overline{k+1, n}$$

Предположим противное:

$$\exists i_1 \geq k+1: x_{i_1}^0 > 0$$

Построим новое распределение

$$z: z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0), \quad i \neq i_1$$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > f_{i_1}(0) \geq f_{k+1}(0) \stackrel{(2)}{>} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad i = i_1$$

Тогда

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0),$$

что противоречит определению x^0 . Докажем, что

$$f_i(x_i^0) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad i = \overline{1, k},$$

От противного:

$$\exists i_1 \leq k: f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) \stackrel{(2)}{\geq} f_k(0) \geq f_{i_1}(0) \Rightarrow x_{i_1}^0 > 0$$

Аналогично вводим

$$z: z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0), \quad i \neq i_1$$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon)^{48} > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad i = i_1$$

Тогда

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0),$$

что противоречит определению x^0 .

Достаточное условие оптимальности распределения

x^0 – оптимальное распределение в (I) \Leftarrow (1)

$$\forall x \in M_0, \quad x \neq x^0 \quad \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$$

$$x \neq x^0 \Rightarrow \exists j: \quad 0 < x_j \leq x_j^0$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) < f_j(x_j^0) \stackrel{(1)}{=} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$$

Единственность получается из этого же неравенства: для любого другого распределения значение будет строго меньше, чем максимальное значение минимума. Теорема доказана.

Алгоритм для нахождения оптимального распределения ресурсов

Решаем систему с $k+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = C, \quad i = \overline{1, k} \\ \sum_{i=1}^k x_i^0 = A \end{cases}$$

Понятно, что $x_i^0 \geq 0$. Прекращаем вычисление, если выполнено условие оптимальности:

$$C < f_{k+1}(0)$$

Рассмотрим дискретную задачу:

$$\max_{x \in M_0'} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \quad (I)'$$

Пусть $f_i(t)$ – возрастающая функция дискретного аргумента. $\forall x \in M_0'$ определим

$$I(x) = \operatorname{Argmin}_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i), \quad |I(x)|$$

– число элементов в этом конечном множестве.

48 При малом ε сохраняется строгое неравенство (в силу непрерывности функции).

Теорема 3.9 (о значении эффекта)

В сделанных предположениях пусть x^* является оптимальным распределением ресурса в задаче $(I)'$, причем $|I(x^*)|$ – минимально среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо и достаточно:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^* - 1) \quad (3)$$

Можно также написать, что выполнено

$$f_j(x_j^* - 1) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^* - 1),$$

т.е. при положительном вложении эффекты близки к минимуму.

Доказательство:

x^* – оптимальное распределение, причем $|I(x^*)|$ минимально $\Rightarrow (3)$

От противного:

$$\exists j: x_j^* > 0 \quad f_j(x_j^* - 1) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) = f_j(x_j^*)$$

$$z: z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \quad \begin{matrix} x^0 - \text{оптимальное} \\ \text{распределение} \end{matrix} \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*)$$

$$I(z) = I(x^*) \setminus \{l\},$$

что противоречит условию теоремы.

Докажем достаточное условие: x^* – оптимальное распределение $(I)' \Leftarrow (3)$

$$\forall x \in M'_0, \quad x \neq x^* \quad \exists j: x_j < x_j^* \Rightarrow x_j \leq x_j^* - 1$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) \leq f_j(x_j^* - 1) \stackrel{(3)}{\leq} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*)$$

Теорема доказана.

Упражнение: придумайте пример, когда в задаче $(I)'$ оптимальное распределение x^* не единственно.

Рассмотрим алгоритм решения задачи $(I)'$.

Шаг 1: выбирается некоторое распределение ресурса $x^{(1)} \in M'_0$. Его можно взять произвольным, но чаще выбирают x^0 для непрерывного случая и округляют его должным образом.

Шаг 2: пусть на k -ом шаге получено распределение $x^{(k)}$. Тогда мы проверяем для него выполнение условия (3):

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}) \geq f_j(x_j^{(k)} - 1)$$

Если условие выполнено, то $x^{(k)}$ – оптимально. В противном случае

$$f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)})$$

Определим

$$x^{(k+1)} : x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l \end{cases}$$

1. $|I(x^{(k)})| = 1 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)})$
2. $|I(x^{(k)})| \geq 2 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}), I(x^{(k+1)}) = I(x^{(k)}) \setminus \{l\}$

Шаг 2 повторится не более чем n раз⁴⁹, после этого значение минимума возрастет.

Пример: пусть $n = 4$, $A = 10$. Будем решать задачу поиска $\max_{x \in M'_0} \min_{1 \leq i \leq n} ix_i^2$.

$$f_i(t) = it^2, f_i(0) = 0, i = \overline{1, 4}$$

$$\begin{cases} i(x_i^0)^2 = C, & i = \overline{1, 4} \\ \sum_{k=1}^4 x_k^0 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^0 = \sqrt{\frac{C}{i}}, & i = \overline{1, 4} \\ \sum_{k=1}^4 \sqrt{\frac{C}{k}} = 10 \end{cases} \Rightarrow x_i^0 = \frac{10}{\sqrt{i} \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\sqrt{k}}}, i = \overline{1, 4}$$

Решим теперь дискретную задачу.

i	$x_i^{(1)}$	$i(x_i^{(1)})^2$	$i(x_i^{(1)} - 1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i(x_i^{(2)})^2$	$i(x_i^{(2)} - 1)^2$
-----	-------------	------------------	----------------------	-------------	------------------	----------------------

49 Алгоритм конечен.

1	4	16	9	3	9	4
2	3	18	8	3	18	8
3	2	12	3	2	12	3
4	1	4	0	2	16	4

$$x_1^0 \approx 3.59, \quad x_2^0 \approx 2.54, \quad x_3^0 \approx 2.07, \quad x_4^0 \approx 1.8$$

$$x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$$

Для последних двух столбцов выполняется неравенство (3): $9 > \{8, 3, 4\}$, поэтому $x^* = (3, 3, 2, 2)$.

Рассмотрим задачу максимизации суммарной эффективности по всем пунктам:

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) \quad (\text{II})$$

Можно сказать, что это капиталистический принцип: максимизируются накопления, но при этом возникает бедность. Интерпретируем эту задачу как оптимальное распределение капитала A между n пунктами, при этом $f_i(x_i)$ – прибыль от вложения в i -ый пункт. Будем считать, что $f_i(t)$ – дифференцируема на отрезке $[0, A]$, но не обязательно возрастает.

Лемма Гиббса⁵⁰

Теорема 3.10: пусть x^0 – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II). Тогда

$$\exists \lambda : \begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, & \text{если } x_i^0 > 0 \\ f_i'(x_i^0) \leq \lambda, & \text{если } x_i^0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Если функции $f_i(t)$ вогнуты, то (1) – достаточное условие оптимальности. Если

$$f_1'(0) \geq f_2'(0) \geq \dots \geq f_n'(0), \quad \exists f_i''(0) < 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то

$$\exists l : \begin{cases} x_i^0 > 0, & i = \overline{1, l} \\ x_i^0 = 0, & i = \overline{l+1, n} \end{cases}$$

Используя интерпретацию $f_i(t)$ как величину прибыли, можно сказать, что при положительных вложениях нормы прибыли $f_i'(x_i^0)$ должны совпадать.

50 Джозайя Уиллард Гиббс (1839 – 1903) – американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики.

Доказательство: x^0 – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II) \Rightarrow (1)

$$i: x_i^0 > 0$$

$$\forall j \neq i \quad \varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i, j} f_k(x_k^0)$$

Необходимое условие оптимальности можно записать в виде $\varphi'(0) \leq 0$.

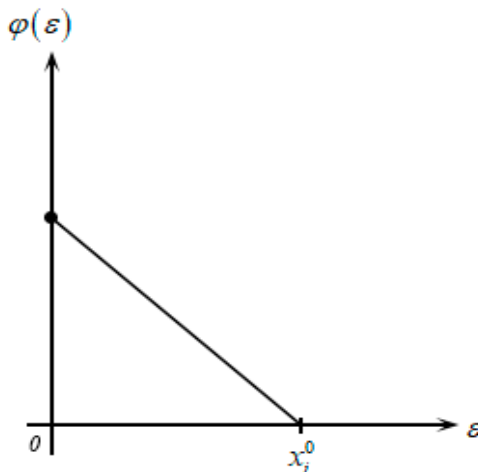


Рис. 17.2. Графическое изображение рассматриваемого случая

$$\varphi'(0) = -f_i(x_i^0) + f_j(x_j^0) \leq 0$$

$$f_j(x_j^0) \leq f_i(x_i^0) \quad (2)$$

Аналогично из $x_j^0 > 0$ можно получить

$$f_j(x_j^0) \geq f_i(x_i^0) \quad (3)$$

$$(2) \text{ и } (3) \Rightarrow f_j(x_j^0) = f_i(x_i^0) = \lambda$$

Функции $f_i(t)$ вогнуты и выполнено условие (1) $\Rightarrow x^0$ – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II). Так, нам нужно доказать, что

$$\forall x \in M_0, \quad x \neq x^0 \quad \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) &= \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) - f_i(x_i^0)] \leq \sum_{i=1}^n f'_i(x_i^0)(x_i - x_i^0) \leq \\ &\leq \left[x_i^0 = 0 \Rightarrow (x_i - x_i^0) \geq 0, \quad x_i^0 > 0 \Rightarrow f'_i(x_i^0) = \lambda \right] \leq \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) = \lambda(A - A) = 0 \end{aligned}$$

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Докажем от противного:

$$x^0 : \exists i: x_i^0 = 0, \text{ но } x_{i+1}^0 > 0$$

$$f_i(x_i^0) = f_i(0) \stackrel{(1)}{\leq} \lambda \stackrel{(1)}{=} f'_{i+1}(x_{i+1}^0) < f'_{i+1}(0),$$

но тогда производные не упорядочены. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Лекция 18. Задача поиска объекта

Задача поиска объекта

Рассмотрим пример на использование леммы Гиббса. Предположим, необходимо осуществить поиск объекта в некоторой области (разбитой на подобласти). Время поиска ограничено и равно A . Если объект находится в i -ой области, то условная вероятность его обнаружения в течение времени t равна

$$1 - e^{-\mu_i t}, \quad \mu_i > 0$$

Пусть $p_i > 0$ – априорная вероятность того, что объект находится в i -ой области и пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in M_0$$

– вектор распределения времени поиска. Максимизируется при этом полная вероятность обнаружения объекта:

$$\sum_{i=1}^n p_i (1 - e^{-\mu_i x_i}) \rightarrow \max_{x \in M_0}$$

$$f_i(t) = p_i (1 - e^{-\mu_i x_i})$$

Эти функции являются вогнутыми, так как

$$f_i'(t) = p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i}$$

и вторая производная, очевидно, отрицательна. Без потери общности, можно считать, что производные в нуле упорядочены:

$$f_i'(0) = p_i \mu_i$$

$$p_1 \mu_1 \geq p_2 \mu_2 \geq \dots \geq p_n \mu_n$$

Применим тогда лемму Гиббса:

$$\begin{cases} p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, & i = \overline{1, l} \\ \sum_{i=1}^l x_i^0 = A \end{cases}$$

Получаем $l + 1$ уравнений и неизвестных. Решаем их, учитывая второе условие теоремы:

$$f_n'(0) \leq \dots \leq f_{l+1}'(0) = p_{l+1} \mu_{l+1} \leq \lambda$$

Осталось рассмотреть последнюю задачу максимизации суммарной эффективности для дискретного случая:

$$\max_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \quad (\Pi)'$$

Потребуем следующее условие:

$$\forall 0 < t < A, t \in \square \quad f_i(t) - f_i(t-1) \geq f_i(t+1) - f_i(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

Лемма о максимизации суммарной эффективности

Пусть $f_i(t)$ удовлетворяет условию (2). Тогда:

1.

$$\forall t > t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) \geq (f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0))(t - t_0)$$

2.

$$\forall t < t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) \geq (f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1))(t - t_0)$$

Доказательство:

1.

$$\begin{aligned} t > t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) &= \underbrace{f_i(t) - f_i(t-1)} + \underbrace{f_i(t-1) - f_i(t-2)} + \dots + \\ &+ \underbrace{f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0)} \leq (f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0))(t - t_0) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} t < t_0 \quad f_i(t_0) - f_i(t) &= \underbrace{f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1)} + \underbrace{f_i(t_0 - 1) - f_i(t_0 - 2)} + \dots + \\ &+ \underbrace{f_i(t + 1) - f_i(t)} \geq (f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1))(t_0 - t) \end{aligned}$$

Теорема 3.11 (Критерий Гросса)⁵²

Пусть x^* – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II)'. Тогда необходимо и достаточно, что

$$x_j^* \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)] = \lambda \quad (3)$$

Фактически, это дискретный принцип уравнивания для дискретных производных. Действительно,

$$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \lambda \geq f_j(x_j^* + 1) - f_j(x_j^*),$$

т.е. дискретная производная близка к λ .

51 По сути, это дискретная производная.

52 Бенедикт Хайман Гросс (1950) – американский математик, занимается изучением теории чисел и теоремой Гросса-Загье.

Доказательство: x^* – оптимальное распределение ресурсов задачи $(II)' \Rightarrow (3)$. Пусть (3) не выполнено. Тогда

$$\exists j: x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) < \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)] = f_l(x_l^* + 1) - f_l(x_l^*)$$

$$z: z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$f_j(x_j^*) - f_l(x_l^*) < \underbrace{f_l(x_l^* + 1)}_{z_l} + \underbrace{f_j(x_j^* - 1)}_{z_j},$$

что есть противоречие, т.к. суммарный эффект возрастет, хотя x^* – оптимальное распределение ресурсов.

Достаточное условие: пусть для некоторого x^* выполнено $(3) \Rightarrow x^*$ – оптимальное распределение ресурсов задачи $(II)'$

$$\forall x \neq x^*, x \in M'_0 \quad \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \leq 0$$

Достаточно показать справедливость неравенства

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \lambda(x_i - x_i^*), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

поскольку суммирование по i даст искомое неравенство. Воспользуемся доказанной леммой:

$$\begin{aligned} x_i > x_i^* \quad f_i(x_i) - f_i(x_i^*) &\leq \overbrace{(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*))}^{\leq \lambda} \overbrace{(x_i - x_i^*)}^{> 0} \leq \lambda(x_i - x_i^*) \\ 0 \leq x_i < x_i^* \quad f_i(x_i) - f_i(x_i^*) &\leq \overbrace{(f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1))}^{\geq \lambda} \overbrace{(x_i - x_i^*)}^{< 0} \leq \lambda(x_i - x_i^*) \end{aligned}$$

Неравенства (4) доказаны и теорема справедлива.

Алгоритм нахождения оптимального распределения ресурсов

Возьмем произвольное⁵³ распределение x^1 . Положим, что на k -ом шаге мы проверяем условие (3). Если оно выполнено, то оптимальное распределение найдено. В противном случае,

$$x_j^k > 0 \Rightarrow f_j(x_j^k) - f_j(x_j^k - 1) < \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^k + 1) - f_i(x_i^k)] = f_l(x_l^k + 1) - f_l(x_l^k)$$

53 Лучше взять округленное решение x^0 непрерывной задачи.

Новое распределение имеет следующий вид:

$$x^{(k+1)} : x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

Значение необходимости:

$$f_j(x_j^k) + f_l(x_l^k) < f_j(x_j^{(k+1)}) + f_l(x_l^{(k+1)})$$

Упражнение: сформулируйте необходимое и достаточное условие оптимальности для $\min_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ при условии, что функции $f_i(x_i)$ выпуклы.



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ