А. В. Буркин, М. Е. Жуковский, Малые подграфы и их расширения в случайном дистанционном графе, *Матем. сб.*, 2018, том 209, номер 2, 22–46

УДК 519.179.4

А. В. Буркин, М. Е. Жуковский

Малые подграфы и их расширения в случайном дистанционном графе

В настоящей работе доказываются утверждения, касающиеся распределения малых подграфов в последовательности случайных дистанционных графов. Ранее было доказано утверждение о пороговой вероятности для свойства содержать фиксированный строго сбалансированный граф, в этой же статье мы получаем более сильные обобщения этого результата.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: дистанционный граф, малые подграфы, свойства расширений, пороговая вероятность, случайный граф.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8674

§ 1. Введение и история задачи

П. Эрдёшем и А. Реньи в 1959–1960 годах была предложена модель случайного графа $G(n,p)$, в которой каждое ребро присутствует с вероятностью p независимо от остальных ребер (см. [1], [2]). Иными словами, $G(n,p)$ есть случайный элемент со значениями в множестве Ω_n всех неориентированных графов $G=(V_n,E)$ с множеством вершин $V_n=\{1,\dots,n\}$ без петель и кратных ребер и распределением на $\mathscr{F}_n=2^{\Omega_n}$, заданным формулой $\mathsf{P}(G)=p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}$.

В основополагающих работах П. Эрдёшем и А. Реньи был поставлен вопрос о распределении малых подграфов в случайном графе $G(n,p)$. Позже этой задачей занимались Б. Боллобаш (см. [3]), А. Ручински, Э. Винс (см. [4]), Дж. Спенсер (см. [5]) и другие. Монографии [6]–[10] посвящены более полному обзору результатов о распределении малых подграфов в случайном графе Эрдёша–Реньи и описанию других его асимптотических свойств. В настоящей работе мы получили ряд результатов об асимптотическом распределении малых подграфов в другой модели случайного графа, называемой случайным дистанционным графом, определение которой будет дано в § 2. Задачами такого типа занимались А. Р. Ярмухаметов (см., например, [11]), М. Е. Жуковский (см., например, [12], [13]), С. Н. Попова (см. [14]).

Далее в этом параграфе мы сформулируем некоторые результаты, относящиеся к асимптотическим свойствам случайного графа Эрдёша–Реньи.

Пусть $\mathscr{A}=\mathscr{A}(n)$ – произвольное свойство графов. Пороговой вероятностью свойства $\mathscr{A}$ для случайного графа $G(n,p)$ называется такая функция $p^*=p^*(n)$, что $\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(\mathscr{A})=0$ при $p=o(p^*)$, $n\to\infty$, и $\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(\mathscr{A})=1$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03530-а, № 16-31-60052 мол_а_дк) и Министерства образования и науки РФ (соглашение № 02.A03.21.0008).

при $p = w(p^*)$, $n \to \infty$ (или наоборот). Здесь $f(n) = o(g(n))$ $(f(n) = w(g(n)))$, означает, что для любого $C > 0$ существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ выполнено $|f(n)| < C|g(n)|$ $(C|g(n)| < |f(n)|)$. Для этих отношений мы также будем использовать обозначения $f(n) \ll g(n)$ и $f(n) \gg g(n)$ соответственно. Функция $p^* = p^*(n)$ называется *точной пороговой вероятностью*, если $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathscr{A}) = 0$ при $p \leqslant cp^*$ для некоторого $c < 1$ и $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathscr{A}) = 1$ при $p \geqslant cp^*$ для некоторого $c > 1$ (или наоборот).

Для произвольного графа F будем обозначать через $v(F)$ и $e(F)$ количество вершин и количество ребер соответственно. Напомним, что граф F называется *строго сбалансированным*, если

$$\rho(H) < \rho(F)$$

для любого собственного непустого подграфа $H \subset F$, где $\rho(H) = e(H)/v(H)$ – *плотность* графа H. Граф называется *сбалансированным*, если неравенство нестрогое.

Максимальной плотностью графа F называется величина

$$\rho^{\max}(F) = \max_{\substack{H \subseteq F \\ v(H) \neq 0}} \frac{e(H)}{v(H)}.$$

П. Эрдёш и А. Реньи доказали в [2] теорему о пороговой вероятности для свойства содержать связный сбалансированный граф. Это утверждение было в 1981 г. обобщено Б. Боллобашем на случай произвольного графа (см. [3], в 1985 г. А. Ручински и Э. Винс опубликовали более простое доказательство [4]).

Теорема 1 (Б. Боллобаш; А. Ручински, Э. Винс). *Пусть F – произвольный фиксированный граф. Тогда функция $p^* = n^{-1/\rho^{\max}(F)}$ является пороговой вероятностью свойства содержать копию F для случайного графа $G(n,p)$. Выполнен также закон больших чисел для числа копий X_F графа F в $G(n,p)$: при $p \gg p^*$ для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Б. Боллобашем в [3] было найдено асимптотическое распределение числа копий X_F строго сбалансированного графа F в $G(n,p)$, если p – пороговая вероятность свойства содержать граф F.

Теорема 2 (Б. Боллобаш). *Пусть F – строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a – количество его автоморфизмов. Пусть $p \sim cn^{-k/l}$, $c > 0$. Тогда распределение величины X_F слабо сходится к пуассоновскому с параметром $\lambda = c^l/a$.*

Перейдем, наконец, к описанию результата, полученного Дж. Спенсером. Речь пойдет о так называемых свойствах расширений.

Пусть H – граф с вершинами $z_1, \dots, z_d, y_1, \dots, y_k$, где $R = \{z_1, \dots, z_d\}$ – множество *корней*. *Сетью* называется пара (R, H). Говорят, что граф G удовлетворяет *свойству расширения* $\mathrm{Ext}(R, H)$, если для любых $v_1, \dots, v_d \in V(G)$

найдутся такие $w_1, \dots, w_k \in V(G)$, что $\{z_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{v_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i \in \{1, \dots, d\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ и $\{y_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{w_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Пусть $l = e(H) - e(H|_R)$, где $H|_R$ – подграф H, индуцированный на множестве R. В общем случае величины k и l будем обозначать $v(R, H)$ и $e(R, H)$ соответственно. Величина $\rho(R, H) = l/k$ называется *плотностью* сети (R, H). *Подсетью* называется сеть $(R, S) = (R, H|_S)$, где $R \subset S \subseteq V(H)$. В *собственной* подсети $S \neq V(H)$. Сеть (R, H) называется *строго сбалансированной*, если $\rho(R, S) < \rho(R, H)$ для всех собственных подсетей (R, S). Она называется *сбалансированной*, если неравенства нестрогие. Сеть (R, H) называют *нетривиальной*, если каждая корневая вершина z соединена ребром в H с хотя бы одной вершиной $y \in V(H) \setminus R$.

Дж. Спенсером в [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 3 (Дж. Спенсер). *Пусть (R, H) – нетривиальная строго сбалансированная сеть. Тогда существуют такие числа $0 < \varepsilon < K$, что*

$$\text{если } p \leqslant \varepsilon n^{-k/l} (\ln n)^{1/l}, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = 0,$$

$$\text{если } p \geqslant K n^{-k/l} (\ln n)^{1/l}, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = 1.$$

Пусть c_1 есть число автоморфизмов графа H, оставляющих корни на своих местах. Пусть, кроме того, c_2 обозначает количество биективных отображений R на себя, которые можно продолжить до некоторого автоморфизма H. Если $\lambda = \mathrm{const} > 0$ и для $p = p(n)$ выполнено

$$\frac{n^k p^l}{c_1} = \ln\biggl(\frac{n^d}{c_2 \lambda}\biggr),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = e^{-\lambda}.$$

В [5] доказано также обобщение первой части данной теоремы (существование пороговой вероятности) на случай произвольной сети (R, H).

В следующем параграфе мы определим *случайный дистанционный граф* и приведем формулировки доказанных нами теорем для этой модели, аналогичных теоремам 1–3.

§ 2. Описание модели и новые результаты

В настоящей работе рассматривается (*симметричный*) *полный дистанционный граф*

$$G = G\biggl(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\biggr) = (V, E), \qquad n \equiv 0 \mod 4,$$

в котором

$$V = \biggl\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in \{0, 1\},\ x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2}\biggr\},$$

$$E = \biggl\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \colon \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{n}{4}\biggr\},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение.

Этот граф называется дистанционным, поскольку его ребра соответствуют парам вершин, находящихся на определенном расстоянии друг от друга. Рассмотрение дистанционных графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [15] и [16]). Впервые дистанционный граф $G(n,r,s)$ (в нашем случае $r=n/2$, $s=n/4$) рассмотрели в 1981 г. П. Франкл и Р. М. Уилсон. С помощью этого графа они показали, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ растет экспоненциально (см. [17]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи применили результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука (см. [15] и [18]). Таким образом, изучение внутренней структуры дистанционного графа и его подграфов играет исключительно важную роль. Сейчас с исследованием дистанционных графов связаны одни из самых широко изучаемых разделов комбинаторной геометрии (см. [15], [16], [19]).

Количество вершин этого графа будем обозначать через $N=N(n)$, а его степень (граф, очевидно, является регулярным) через $N_1=N_1(n)$. Заметим, что в силу формулы Стирлинга

$$N=C_n^{n/2}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}},\qquad N_1=(C_{n/2}^{n/4})^2\sim\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2^n}{n}.$$

Нас интересует *случайный дистанционный граф* $G_p=G_p(n,n/2,n/4)$ – случайный подграф G, в котором каждое ребро полного дистанционного графа содержится с вероятностью $p=p(n)$ независимо от других ребер (т.е. G_p – случайный элемент со значениями в множестве Ω_n^{dist} всех остовных подграфов $G'=(V,E')$ графа G и распределением на $\mathscr{F}_n^{\mathrm{dist}}=2^{\Omega_n^{\mathrm{dist}}}$, заданным формулой $\mathsf{P}(G')=p^{|E'|}(1-p)^{|E|-|E'|}$). Случайные подграфы широко применяются в вероятностном методе (см., например, [10]). Асимптотические свойства случайного дистанционного графа изучались, например, в работах [11]–[14], [20]. В [12] была доказана следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы П. Эрдёша и А. Реньи о пороговой вероятности для свойства содержать копию строго сбалансированного графа (которая, в свою очередь, является частным случаем теоремы 1).

Теорема 4 (М. Е. Жуковский). *Пусть F – строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Тогда функция*

$$p^*=N^{-k/l}\sqrt{\ln N}$$

является пороговой вероятностью свойства содержать копию графа F для случайного графа G_p.

2.1. Новые результаты. В настоящей статье мы обобщаем теорему 4 на случай произвольного графа. Здесь мы используем обозначение X_F для числа копий графа F в случайном графе G_p. Заметим, что пороговые вероятности в случае произвольного случайного подграфа определяются так же, как и в случае $G(n,p)$.

Теорема 5. *Пусть F – произвольный фиксированный граф. Тогда функция*

$$p^*=N^{-1/\rho^{\max}(F)}\sqrt{\ln N}$$

является пороговой вероятностью свойства содержать копию F для случайного графа G_p. При $p \gg p^*$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Теорема будет доказана в § 4.

Заметим, что в силу теоремы 5 пороговая вероятность p^* имеет асимптотику

$$p^* \asymp N^{-1/\rho^{\max}(F)} \frac{N}{N_1}$$

(для двух стремящихся к бесконечности последовательностей $f(n)$ и $g(n)$ мы пишем $f(n) \asymp g(n)$, если существуют такие числа $0 < c < C$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $c|g(n)| \leqslant |f(n)| \leqslant C|g(n)|$) и тем самым совпадает с пороговой вероятностью из теоремы 1 (в полном графе K_n степень любой вершины равна $n-1$).

Мы также доказали теорему, аналогичную теореме 2.

Теорема 6. *Пусть F – строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a есть число автоморфизмов F. Пусть*

$$p \sim cN^{-k/l} \frac{N}{N_1},$$

где $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда распределение X_F слабо сходится к пуассоновскому с параметром $\lambda = c^l/a$.

Эта теорема будет доказана в § 5.

Обратимся, наконец, к свойствам расширений. Такие свойства являются монотонными (см., например, [7]) и поэтому для них существуют пороговые вероятности (см. [7]). Тем не менее для многих сетей (R, H) и для любых p свойства $\mathrm{Ext}(R, H)$ с вероятностями, стремящимися к единице, не выполнены для некоторых подпоследовательностей случайных дистанционных графов в силу разреженности дистанционного графа $G(n, n/2, n/4)$. В частности, если n не делится на восемь, то (см., например, [21]) в графе $G(n, n/2, n/4)$ найдутся три вершины, не обладающие общим соседом (в данном случае рассматривается следующее свойство расширения: любые три вершины обладают общим соседом). В то же время при $8|n$ в этом графе у любых трех вершин найдется достаточно большое количество соседей. Поэтому для подобных свойств расширений пороговую вероятность не удается представить в удобном виде, как это сделано в теореме 3 для случайного графа $G(n, p)$. Такая проблема возникает, очевидно, из-за того, что в качестве множества корней можно взять любой набор d вершин из V, а среди таких наборов встречаются комбинации, приводящие к “исключениям”. Естественное решение – сузить систему множеств корней. Оказывается, это можно сделать так, чтобы мощность получившейся системы была асимптотически равна мощности семейства всех наборов вершин. Таким образом, при этих ограничениях мы не теряем много информации, и полученные новые свойства расширений достаточно аккуратно отражают структуру графа. Итак, определим эти свойства.

Пусть $f(n)$ – некоторая последовательность положительных чисел. Пусть, кроме того, (R,H) – нетривиальная строго сбалансированная сеть с $V(H)=\{z_1,\dots,z_d,y_1,\dots,y_k\}$, $R=\{z_1,\dots,z_d\}$ и $e(R,H)=l$. Рассмотрим произвольные вершины $\mathbf{v}^1=(v_1^1,\dots,v_n^1),\dots,\mathbf{v}^d=(v_1^d,\dots,v_n^d)\in V$. Напомним, что вершины нашего графа находятся в пространстве $\{0,1\}^n$. Обозначим через $\delta_1,\dots,\delta_{2^d}\in\{0,1\}^d$ различные d-последовательности из нулей и единиц, упорядоченные лексикографически: $\delta_1=(1,\dots,1)>\dots>(0,\dots,0)=\delta_{2^d}$. Разобьем множество $\{1,\dots,n\}$ на подмножества $B_1,\dots,B_{2^d}$ следующим образом: $i\in B_j$ тогда и только тогда, когда $(v_i^1,\dots,v_i^d)=\delta_j$. Положим

$$\begin{gathered}x_j=x_j(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)=|B_j|-\left[\frac{n}{2^d}\right],\qquad j\in\{1,\dots,2^d-1\},\\ x_{2^d}=x_{2^d}(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)=|B_{2^d}|-n+(2^d-1)\left[\frac{n}{2^d}\right],\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа. Обозначим $\widetilde{V}_f^d$ множество всех d-последовательностей вершин из V, для которых $|x_j|\leqslant f(n)$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$. Будем говорить, что остовный подграф G' дистанционного графа G обладает свойством $\operatorname{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R,H)$, если для любых $(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)\in\widetilde{V}_f^d$ найдутся такие $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^k\in V$, что $\{z_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G')$ для любых $i\in\{1,\dots,d\}$, $j\in\{1,\dots,k\}$ и $\{y_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G')$ для любых $i,j\in\{1,\dots,k\}$. Иными словами, свойство $\operatorname{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R,H)$ получается из $\operatorname{Ext}(R,H)$ рассмотрением лишь тех d-последовательностей вершин из V, которые принадлежат $\widetilde{V}_f^d$. Таким образом, нас интересуют только последовательности вершин, разбивающие $\{1,\dots,n\}$ на приблизительно равные подмножества. Несколько позже мы увидим, что $|\widetilde{V}_f^d|\sim|V|^d$. Теорема, сформулированная ниже, выполнена при условии $f\ll n^{2/3}$ (на самом деле условие на f можно ослабить, но для наших целей это не принципиально).

Теорема 7. *Пусть c_1 есть число автоморфизмов H, которые оставляют на месте каждый корень $z_i\in R$. Пусть $p=p(n)$ удовлетворяет равенству*

$$N^k\left(\frac{N_1}{N}\right)^l\frac{p^l}{c_1}=d\ln N.$$

Тогда p является точной пороговой вероятностью для свойства $\operatorname{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R,H)$.

Теорема 7 будет доказана в § 6. Перед доказательством теорем мы в § 3 докажем вспомогательные леммы, сформулированные в п. 2.2, которые представляют и самостоятельный интерес.

2.2. Вспомогательные утверждения. В этом пункте мы сформулируем несколько утверждений, касающихся полного дистанционного графа G.

Пусть $f=f(n)$ – произвольная последовательность положительных чисел, причем $f\ll n^{2/3}$. Пусть, кроме того, (R,H) – произвольная сеть с $V(H)=\{z_1,\dots,z_d,y_1,\dots,y_k\}$, $R=\{z_1,\dots,z_d\}$ и $e(R,H)=l$. Для $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d\in V$ обозначим через $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)$ количество инъективных отображений из $V(H)$ в V, переводящих z_i в $\mathbf{v}^i$, $i\in\{1,\dots,d\}$, и сохраняющих ребра между вершинами, среди которых хотя бы одна не является корнем. Поскольку величина $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)$ не зависит от выбора конкретных вершин, а лишь от значений $|B_j|$ (см. п. 2.1), $j\in\{1,\dots,2^d\}$, которые, в свою очередь, задаются числами $x_1,\dots,x_{2^d}$, будем обозначать $M^{\vec{x}}_{(R,H)}=M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d)$, где вектор $\vec{x}=(x_1,\dots,x_{2^d})$ определен в (2.1).

Лемма 1. *Найдется такая функция* $M'_{(R,H)}=M'_{(R,H)}(n)$, *не зависящая от* $\vec{x}$, *что* $M^{\vec{x}}_{(R,H)}=M'_{(R,H)}(1+O(f(n)n^{-0,8}))$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по всем* $\vec{x}$ *с условием* $|x_j|\leqslant f(n)$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$.

Лемма 1 будет доказана в п. 3.1.

В следующем утверждении мы получили асимптотику количества вхождений произвольного графа F в дистанционный граф G.

Лемма 2. *Пусть* M_F – *количество мономорфизмов графа* F *с* k *вершинами и* l *ребрами в* G. *Тогда*

$$M_F\sim M(k,l):=N^k\left(\frac{N_1}{N}\right)^l.$$

В то время как коротким доказательство леммы 1 не назовешь, мы нашли элегантное и лаконичное доказательство леммы 2, которое использует индукцию по числу ребер графа F. Это доказательство изложено в п. 3.3.

Наконец, мы нашли явное представление $M'_{(R,H)}$ из леммы 1. Так как вывод этого представления опирается на лемму 2, то мы формулируем соответствующее утверждение отдельно от леммы 1.

Лемма 3. *В обозначениях леммы* 1 *в качестве* $M'_{(R,H)}$ *можно выбрать* $M(k,l)$.

Лемма 3 будет доказана в п. 3.3.

§ 3. Доказательства лемм

Прежде чем перейти к доказательствам, введем вспомогательные обозначения. Пусть (R,H) – произвольная сеть с $V(H)=\{z_1,\dots,z_d,y_1,\dots,y_k\}$, $R=\{z_1,\dots,z_d\}$ и $e(R,H)=l$, а $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d\in V$ – произвольные вершины. В обозначениях из п. 2.1 положим

$$w^{\vec{x}}_1(1)=\left[\frac{n}{2^d}\right]+x_1,\dots,w^{\vec{x}}_{2^d-1}(1)=\left[\frac{n}{2^d}\right]+x_{2^d-1},$$
$$w^{\vec{x}}_{2^d}(1)=n-(2^d-1)\left[\frac{n}{2^d}\right]+x_{2^d}.$$

Рассмотрим произвольное $s\in\{1,\dots,k\}$ и такие вершины $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^s\in V$, что $\{z_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G)$ для любых $i\in\{1,\dots,d\}$, $j\in\{1,\dots,s\}$ и $\{y_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G)$ для любых $i,j\in\{1,\dots,s\}$. Для вершин $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{s-1}$ рассмотрим разбиение множества $\{1,\dots,n\}$ на подмножества $B_1,\dots,B_{2^{d+s-1}}$ (см. п. 2.1), мощности которых, как несложно видеть, зависят от чисел $x_1,\dots,x_{2^d}$, и положим

$$w_j=w^{\vec{x}}_j(s)=|B_j|,\qquad B_j=\{r^j_1,\dots,r^j_{w_j}\},\quad j\in\{1,\dots,2^{d+s-1}\}.$$

Вспомним, что вершина $\mathbf{w}^s$ есть вектор из $\{0,1\}^n$. Посмотрим на ее координаты. Для каждого $j \in \{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$ обозначим $u_j^{\vec{x}}(s)$ количество единиц среди чисел $w^s_{r_1^j},\ldots,w^s_{r^j_{w_j}}$ (мы обозначили через $w_1^s,\ldots,w_n^s$ координаты вектора $\mathbf{w}^s$). Поскольку $\mathbf{w}^s \in V$, ее скалярный квадрат равен $n/2$. Левую часть этого равенства можно записать, очевидно, в виде суммы всех $u_j^{\vec{x}}(s)$, $j \in \{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$. В силу определения нашего графа G вершина $\mathbf{w}^s$ соединена с некоторой вершиной $\mathbf{v}$ из $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^{s-1}$ тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно $n/4$. Левая часть этого равенства записывается в виде суммы 2^{d+s-2} величин $u_j^{\vec{x}}(s)$ (здесь индексы входящих в выражение величин суть индексы тех множеств B_j, для которых координаты вершины $\mathbf{v}$ с номерами из B_j равны единице: нулевые координаты в скалярном произведении не участвуют). Предположим, что в графе H среди вершин $x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_{s-1}$ только вершины $x_{l_1^1(s)},\ldots,\ x_{l^1_{a(s)}(s)},y_{l_1^2(s)},\ldots,y_{l^2_{b(s)}(s)}$ соединены ребрами с вершиной y_s (здесь $a(s)$ – количество вершин среди $x_1,\ldots,x_d$, соединенных с y_s, $b(s)$ – среди $y_1,\ldots,y_{s-1}$). Обозначим через $c(1,i)$, $i \in \{l_1^1(s),\ldots,l^1_{a(s)}(s)\}$, и $c(2,i)$, $i \in \{l_1^2(s),\ldots,l^2_{b(s)}(s)\}$, последовательности индексов переменных $u_j^{\vec{x}}(s)$, входящих в уравнения, соответствующие наличию ребер между вершинами y_s и x_i, $i \in \{l_1^1(s),\ldots,l^1_{a(s)}(s)\}$, и между вершинами y_s и y_i, $i \in \{l_1^2(s),\ldots,l^2_{b(s)}(s)\}$, соответственно. Заметим, что длины всех таких последовательностей совпадают и равны $m(s) = 2^{d+s-2}$. Тогда для того, чтобы вершина $\mathbf{w}^s$ была соединена с вершинами $\mathbf{v}_{l_1^1(s)},\ldots,\mathbf{v}_{l^1_{a(s)}(s)}$, $\mathbf{w}_{l_1^2(s)},\ldots,\mathbf{w}_{l^2_{b(s)}(s)}$, необходимо и достаточно, чтобы были справедливы равенства и неравенства системы

$$\begin{cases} u^{\vec{x}}_{c_1(1,l_1^1(s))}(s) + \cdots + u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}(1,l_1^1(s))}(s) = \dfrac{n}{4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^{\vec{x}}_{c_1(1,l^1_{a(s)}(s))}(s) + \cdots + u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}(1,l^1_{a(s)}(s))}(s) = \dfrac{n}{4}, \\ u^{\vec{x}}_{c_1(2,l_1^2(s))}(s) + \cdots + u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}(2,l_1^2(s))}(s) = \dfrac{n}{4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^{\vec{x}}_{c_1(2,l^2_{b(s)}(s))}(s) + \cdots + u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}(2,l^2_{b(s)}(s))}(s) = \dfrac{n}{4}, \\ u_1(s) + u_2(s) + \cdots + u_{2^{d+s-1}}(s) = \dfrac{n}{2}, \\ \forall\, j \in \{1,2,3,\ldots,2^{d+s-1}\} \quad 0 \leqslant u_j^{\vec{x}}(s) \leqslant w_j^{\vec{x}}(s). \end{cases} \tag{3.1}$$

Очевидно,

$$M^{\vec{x}}_{(R,H)} = \sum C^{u_1^{\vec{x}}(1)}_{w_1^{\vec{x}}(1)} \cdots C^{u^{\vec{x}}_{2^d}(1)}_{w^{\vec{x}}_{2^d}(1)} \cdots C^{u_1^{\vec{x}}(k)}_{w_1^{\vec{x}}(k)} \cdots C^{u^{\vec{x}}_{2^{d+k-1}}(k)}_{w^{\vec{x}}_{2^{d+k-1}}(k)}, \tag{3.2}$$

где суммирование ведется по всем решениям $(u_1^{\vec{x}}(1),\ldots,u^{\vec{x}}_{2^d}(1))$, ..., $(u_1^{\vec{x}}(k),\ldots,$ $u^{\vec{x}}_{2^{d+k-1}}(k))$ систем (3.1) с $s=1$, ..., $s=k$ соответственно, $w^{\vec{x}}_{2j-1}(s+1) = u_j^{\vec{x}}(s)$, $w^{\vec{x}}_{2j}(s+1) = w_j^{\vec{x}}(s) - u_j^{\vec{x}}(s)$ при любых $s \in \{1,\ldots,k-1\}$, $j \in \{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$.

3.1. Доказательство леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что $f \gg n^{0,6}$. Будем также предполагать, что $f(n) \geqslant n^{0,6}$ при всех n.

Мы начнем с идеи доказательства леммы, после чего приведем полное строгое доказательство.

Идея доказательства. В § 3 мы свели задачу нахождения числа расширений $M^{\vec{x}}_{(R,H)}$ к поиску асимптотики суммы (3.2) по всем решениям k систем уравнений вида (3.1). Требуется доказать, что эта асимптотика не зависит от $x_1, \dots, x_{2^d}$ и равномерна по ним при $|x_i| \leqslant f(n)$, $i \in \{1, \dots, 2^d\}$.

Нетрудно видеть, что максимум суммы (3.2) достигается, когда $u^{\vec{x}}_j(s) = [w^{\vec{x}}_j(s)/2] + O(1)$, $n \to \infty$. Более того, далее будет показано, что если в (3.2) проводить суммирование не по всем $u^{\vec{x}}_j(s)$, удовлетворяющим соответствующим системам уравнений (3.1), а лишь по таким, что $|u^{\vec{x}}_j(s) - [w^{\vec{x}}_j(s)/2]| \leqslant n^{0,6}$, то асимптотика суммы не поменяется, причем сохранится и равномерность по $x_1, \dots, x_{2^d}$ (при вышеупомянутых ограничениях). Для такой "укороченной" суммы будет уже гораздо проще, вводя для удобства новые переменные и обозначения, доказать равномерность ее асимптотики.

Доказательство леммы 1. В силу определения чисел $x_1, \dots, x_{2^d}$ существуют такая константа $c > 0$ и такие целые числа $a_1, \dots, a_d$, что $|a_j| \leqslant c$ для всех $j \in \{1, \dots, d\}$ и вектор $(x_1, \dots, x_{2^d})$ является решением системы (3.1), в которой $s = 1$, $a(1) = d$ и правая часть заменена на столбец $(a_1, \dots, a_d, 0)^T$. Докажем, что существует такая константа $C > 0$, не зависящая от $(x_1, \dots, x_{2^d})$, что для всех $j \in \{1, \dots, 2^d\}$ найдутся числа $y_j = y_j(n) \in \mathbb{Z}$ и $r_j \in \mathbb{Z}$,

$$|r_j| \leqslant C, \tag{3.3}$$

для которых

$$x_j = 2^k y_j + r_j, \tag{3.4}$$

а вектор $(y_1, \dots, y_{2^d})$ является решением системы (3.1), в которой $s = 1$, $a(1) = d$ и правая часть заменена на столбец $(0, \dots, 0)^T$. Обозначим последнюю систему следующим образом: $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Подставив вместо $\mathbf{y}$ вектор $([x_1/2^k], \dots, [x_{2^d}/2^k])$, получим в правой части некоторый вектор $(b_1, \dots, b_{d+1})^T$, абсолютное значение каждого элемента которого не превосходит некоторой константы $\widetilde{c} > 0$. Заметим, что для любого $i \in \{1, \dots, d+1\}$ в i-й строке матрицы $A = (a_{i,j})^{2^d}_{d+1}$ содержится ненулевой коэффициент: $a_{i,\, 2^d - 2^{d-i}} = 1$ (если $i \in \{1, \dots, d\}$) и $a_{d+1,\, 2^d} = 1$, при этом соответствующие коэффициенты в остальных строках равны нулю: $a_{j,\, 2^d - 2^{d-i}} = 0$, если $i \in \{1, \dots, d\}$, $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, d\}$, и $a_{j, 2^d} = 0$, если $j \in \{1, \dots, d\}$. Следовательно, положив

$$y_{2^d - 2^{d-i}} = \left[\frac{x_{2^d - 2^{d-i}}}{2^k}\right] - b_i \quad \text{при} \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

$$y_{2^d} = \left[\frac{x_{2^d}}{2^k}\right] + \sum_{i=1}^{d} b_i - b_{d+1},$$

$$y_j = \left[\frac{x_j}{2^k}\right] \quad \text{при} \quad j \in \{1, \dots, 2^d\} \setminus \{2^d - 2^{d-1}, 2^d - 2^{d-2}, \dots, 2^d - 1, 2^d\},$$

мы получим искомый вектор $\mathbf{y}$.

Введем для удобства новые обозначения:

$$w'_j(1) = \left[\frac{n}{2^d}\right] \quad \text{при} \quad j \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \qquad w'_{2^d}(1) = n - (2^d - 1)\left[\frac{n}{2^d}\right],$$

$$t_j(s) = u_j^{\vec{x}}(s) - \left[\frac{w_j^{\vec{x}}(s) - \varepsilon_j(s)}{2}\right], \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_j(1) = r_j$ при $j \in \{1, \dots, 2^d\}$, а при $s \in \{2, \dots, k\}$

$$\varepsilon_j(s) = \begin{cases} r_q, & \text{если} \;\; j = 2^{s-1}q, \; q \in \{1, \dots, 2^d\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее $u'_j(s)$ при $s \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{d+s-1}\}$ и $w'_j(s)$ при $s \in \{2, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{d+s-1}\}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений

$$u'_j(s) = \left[\frac{w'_j(s)}{2}\right] + t_j(s), \tag{3.6}$$

$$w'_{2j-1}(s) = u'_j(s-1), \qquad w'_{2j}(s) = w'_j(s-1) - u'_j(s-1). \tag{3.7}$$

Очевидно, $w_j^{\vec{x}}(1) = w'_j(1) + 2^k y_j + r_j$ и $u_j^{\vec{x}}(1) = [w'_j(1)/2] + 2^{k-1} y_j + t_j(1)$ при $j \in \{1, \dots, 2^d\}$. Получим по индукции аналогичные выражения для $w_j^{\vec{x}}(s)$ и $u_j^{\vec{x}}(s)$ при $s \in \{2, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{d+s-1}\}$. Пусть $s \in \{2, \dots, k\}$. Предположим, что для любого $j \in \{1, \dots, 2^{d+(s-1)-1}\}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} w_j^{\vec{x}}(s-1) &= w'_j(s-1) + 2^{k-(s-1)+1}\delta_j(s-1) + \varepsilon_j(s-1), \\ u_j^{\vec{x}}(s-1) &= \left[\frac{w'_j(s-1)}{2}\right] + 2^{k-(s-1)}\delta_j(s-1) + t_j(s-1), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\delta_j(s) = y_q, \quad \text{если} \;\; j \in \{2^{s-1}(q-1) + 1, \dots, 2^{s-1}q\}, \quad q \in \{1, \dots, 2^d\}.$$

Тогда в силу (3.6)–(3.8) для любого $j \in \{1, \dots, 2^{d+(s-1)-1}\}$ имеем

$$\begin{aligned} w_{2j-1}^{\vec{x}}(s) &= u_j^{\vec{x}}(s-1) = u'_j(s-1) + 2^{k-s+1}\delta_j(s-1) = w'_{2j-1}(s) + 2^{k-s+1}\delta_{2j-1}(s), \\ w_{2j}^{\vec{x}}(s) &= w_j^{\vec{x}}(s-1) - u_j^{\vec{x}}(s-1) = w'_j(s-1) - u'_j(s-1) + 2^{k-s+1}\delta_j(s-1) + \varepsilon_j(s-1) \\ &= w'_{2j}(s) + 2^{k-s+1}\delta_{2j}(s) + \varepsilon_{2j}(s). \end{aligned}$$

Окончательно, для любого $j \in \{1, \dots, 2^{d+s-1}\}$ выполнено

$$w_j^{\vec{x}}(s) = w'_j(s) + 2^{k-s+1}\delta_j(s) + \varepsilon_j(s). \tag{3.9}$$

Следовательно, в силу (3.5)

$$u_j^{\vec{x}}(s) = t_j(s) + \left[\frac{w_j^{\vec{x}}(s) - \varepsilon_j(s)}{2}\right] = \left[\frac{w'_j}{2}\right] + 2^{k-s}\delta_j(s) + t_j(s). \tag{3.10}$$

Таким образом,

$$M^{\vec{x}}_{(R,H)} = \sum C^{[w_1'(1)/2]+2^{k-1}\delta_1(1)+t_1(1)}_{w_1'(1)+2^k\delta_1(1)+\varepsilon_1(1)} \cdots C^{[w_{2^d}'(1)/2]+2^{k-1}\delta_{2^d}(1)+t_{2^d}(1)}_{w_{2^d}'(1)+2^k\delta_{2^d}(1)+\varepsilon_{2^d}(1)} \cdots \times C^{[w_1'(k)/2]+\delta_1(k)+t_1(k)}_{w_1'(k)+2\delta_1(k)+\varepsilon_1(k)} \cdots C^{[w_{2^{d+k-1}}'(k)/2]+\delta_{2^{d+k-1}}(k)+t_{2^{d+k-1}}(k)}_{w_{2^{d+k-1}}'(k)+2\delta_{2^{d+k-1}}(k)+\varepsilon_{2^{d+k-1}}(k)}, \tag{3.11}$$

где суммирование ведется по всем таким наборам $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1),\dots,t_1(k),\dots,t_{2^{d+k-1}}(k))$, что числа $u_j^{\vec{x}}(s)$, $s\in\{1,\dots,k\}$, $j\in\{1,\dots,2^{d+s-1}\}$, определяемые равенством (3.5), являются решением систем (3.1) при $s\in\{1,\dots,k\}$.

Докажем, что суммирование в (3.11) можно осуществлять по некоторому такому множеству $T=T(n)$ наборов $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1),\dots,t_1(k),\dots,t_{2^{d+k-1}}(k))$, не зависящему от $x_1,\dots,x_{2^d}$, что равенство в (3.11) заменится на асимптотическое равенство и для всех $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1),\dots,t_1(k),\dots,t_{2^{d+k-1}}(k))\in T$ будет выполнено $|t_j(s)|\leqslant n^{0,6}$ при $s\in\{1,\dots,k\}$, $j\in\{1,\dots,2^{d+s-1}\}$.

Заметим, что в силу определения вектора $(y_1,\dots,y_{2^d})$ вектор $(\delta_1(1),\dots,\delta_{2^d}(1))=(y_1,\dots,y_{2^d})$ является решением системы (3.1), в которой $s=1$, $a(1)=d$ и правая часть заменена на столбец $(0,\dots,0)^T$. Произведем замену переменных $u_j^{\vec{x}}(1)$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$, в системе (3.1) в соответствии с (3.10). Тогда коэффициенты системы при $s=1$ без ограничений, записанных в ее последней строке, не зависят от $\vec{x}$. Следовательно, и ее решения также не зависят от $\vec{x}$. Более того, при достаточно больших n любое решение $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1))$ системы (3.1) при $s=1$ без ограничений, записанных в ее последней строке, удовлетворяющее неравенствам $|t_j(1)|\leqslant n^{0,6}$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$, удовлетворяет этим ограничениям, так как $w_j^{\vec{x}}(1)\geqslant[n/2^d]-f(n)$ при всех $j\in\{1,\dots,2^d\}$. Следовательно, множество всех наборов $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(1)|\leqslant n^{0,6}$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$, и определяемых равенством (3.5), совпадает с множеством всех наборов $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(1)|\leqslant n^{0,6}$, $j\in\{1,\dots,2^d\}$, и являющихся решениями системы (3.1) без ограничений, записанных в ее последней строке. Обозначим через $\widetilde{T}(1)$ множество всех таких наборов. Заметим, наконец, что в силу (3.4), (3.6), (3.7) и (3.9) для любого набора $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1))\in\widetilde{T}(1)$ выполнены неравенства

$$w_j^{\vec{x}}(2)\geqslant w_j'(2)-C_1f(n)\geqslant\left[\frac{w_j'(1)}{2}\right]-n^{0,6}-C_1f(n)\geqslant\left[\frac{n}{2^{d+1}}\right]-\widetilde{C}(2)f(n)$$

при всех $j\in\{1,\dots,2^{d+1}\}$, где C_1 и $\widetilde{C}(2)$ – некоторые положительные константы.

Пусть $s\in\{2,\dots,k\}$ и множество $\widetilde{T}(s-1)$ наборов $(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1),\dots,t_1(s-1),\dots,t_{2^{d+s-2}}(s-1))$ задано. Рассмотрим произвольный набор

$$\mathbf{t}=(t_1(1),\dots,t_{2^d}(1),\dots,t_1(s-1),\dots,t_{2^{d+s-2}}(s-1))\in\widetilde{T}(s-1).$$

Пусть для всех $j\in\{1,\dots,2^{d+s-1}\}$ выполнено

$$w_j^{\vec{x}}(s)\geqslant\left[\frac{n}{2^{d+s-1}}\right]-\widetilde{C}(s)f(n), \tag{3.12}$$

где $\widetilde{C}(s) = \mathrm{const} > 0$. По аналогии со случаем $s = 1$ в силу определения вектора $(y_1, \ldots, y_{2^d})$ вектор $(\delta_1(s), \ldots, \delta_{2^{d+s-1}}(s))$ является решением системы (3.1), в которой $a(s) = d$, $b(s) = s - 1$ и правая часть заменена на столбец $(0, \ldots, 0)^T$. Снова сделаем замену переменных $u_j^{\vec{x}}(s)$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, в соответствии с (3.10). Поскольку коэффициенты системы без ограничений, записанных в ее последней строке, не зависят от $\vec{x}$ и являются функциями от переменных $t_j(i)$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+i-1}\}$, $i \in \{1, \ldots, s-1\}$, которые также не зависят от $\vec{x}$, то и решения такой системы не зависят от $\vec{x}$, и при достаточно больших n любое решение $(t_1(s), \ldots, t_{2^{d+s-1}}(s))$ системы (3.1) без ограничений, записанных в ее последней строке, удовлетворяющее неравенствам $|t_j(s)| \leqslant n^{0,6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, удовлетворяет этим ограничениям в силу предположения (3.12). Следовательно, множество всех наборов $(t_1(s), \ldots, t_{2^{d+s-1}}(s))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(s)| \leqslant n^{0,6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, и определяемых равенством (3.5), совпадает с множеством всех наборов $(t_1(s), \ldots, t_{2^{d+s-1}}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(s)| \leqslant n^{0,6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, и являющихся решениями системы (3.1) без ограничений, записанных в ее последней строке. Обозначим через $\widetilde{T}(\mathbf{t})$ множество всех таких наборов. При $s < k$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s}\}$ и любом $(t_1(s), \ldots, t_{2^{d+s-1}}(s)) \in \widetilde{T}(\mathbf{t})$ в силу (3.4), (3.6), (3.7), (3.9) и предположения (3.12) имеем

$$\begin{aligned} w_j^{\vec{x}}(s+1) &\geqslant w_j'(s+1) - C_1 f(n) \geqslant \left[\frac{w_j'(s)}{2}\right] - n^{0,6} - C_1 f(n) \\ &\geqslant \left[\frac{w_j^{\vec{x}}(s) - 2^{k-s+1}\delta_j(s) - \varepsilon_j(s)}{2}\right] - C_2 f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2^{d+s}}\right] - \widetilde{C}(s+1) f(n), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, $\widetilde{C}(s+1)$ – положительные константы. Положим

$$\widetilde{T}(s) = \bigcup_{\mathbf{t}=(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(s-1),\ldots,t_{2^{d+s-2}}(s-1)) \in \widetilde{T}(s-1)} \{\mathbf{t}\} \times \widetilde{T}(\mathbf{t}).$$

Множество T определим следующим образом: $T = \widetilde{T}(k)$. Осталось доказать, что равенство в (3.11) заменится на асимптотическое равенство при суммировании по всем наборам из T.

По аналогии с доказательством существования чисел $y_1, \ldots, y_{2^d}$, для которых выполнено (3.3) и (3.4), можно доказать, что для любых $x_1, \ldots, x_{2^d}$ существует такое число $c = \mathrm{const} > 0$ и набор $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$, что выполнены неравенства $t_j(s) \leqslant c$ для всех $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$. Соответствующий этому набору элемент суммы из правой части равенства (3.11), очевидно, оценивается снизу величиной $2^{kn}/n^{\widetilde{c}}$ для некоторой константы $\widetilde{c} > 0$.

Заметим, что по формуле Стирлинга для любых натуральных чисел z и d выполнено неравенство $C_z^{[z/2]+d}/C_z^{[z/2]} \leqslant e^{-2d^2/z}(1 + \varepsilon(d, z))$, где $\varepsilon_d(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и $d/z \to 0$. Так как при фиксированном z величина $C_z^{[z/2]+d}/C_z^{[z/2]}$ убывает при увеличении d, то $C_z^{[z/2]+d}/C_z^{[z/2]} \leqslant e^{-2z^{0,2}}(1 + \varepsilon(z))$ при $|d| > z^{0,6}$, где $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Поэтому слагаемые в (3.11), соответствующие наборам $((t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1)), \ldots, (t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)))$, в которых хотя бы одно из $t_j(i)$

удовлетворяет неравенству $|t_j(i)| > n^{0,6}$, дают в совокупности

$$n^{k2^{d+k-1}} e^{-\Omega(n^{0,2})} 2^{kn} = o\left(\frac{2^{kn}}{n^{\widetilde{c}}}\right).$$

Здесь $g(n) = \Omega(h(n))$ означает, что при достаточно больших n для некоторого $C > 0$ выполнено $g(n) \geqslant Ch(n)$. Окончательно получаем

$$M^{\vec{x}}_{(R,H)} = \sum_{(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k))\in T} C^{[w'_1(1)/2]+2^{k-1}\delta_1(1)+t_1(1)}_{w'_1(1)+2^k\delta_1(1)+\varepsilon_1(1)} \cdots$$
$$\times C^{[w'_{2^d}(1)/2]+2^{k-1}\delta_{2^d}(1)+t_{2^d}(1)}_{w'_{2^d}(1)+2^k\delta_{2^d}(1)+\varepsilon_{2^d}(1)} \cdots C^{[w'_1(k)/2]+\delta_1(k)+t_1(k)}_{w'_1(k)+2\delta_1(k)+\varepsilon_1(k)} \cdots$$
$$\times C^{[w'_{2^{d+k-1}}(i)/2]+\delta_{2^{d+k-1}}(k)+t_{2^{d+k-1}}(k)}_{w'_{2^{d+k-1}}(k)+2\delta_{2^{d+k-1}}(k)+\varepsilon_{2^{d+k-1}}(k)}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3.13}$$

равномерно по всем $x_1,\ldots,x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$.

Осталось теперь доказать, что асимптотика каждого члена суммы по множеству T равномерна по $x_1,\ldots,x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$ и $s \in \{1,\ldots,k\}$. Покажем, что

$$C^{[w'_1(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)}_{w'_1(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)+\varepsilon_1(s)} \cdots C^{[w'_{2^{d+s-1}}(i)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)}_{w'_{2^{d+s-1}}(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+\varepsilon_{2^{d+s-1}}(s)}$$
$$\sim C^{[w'_1(s)/2]+t_1(s)}_{w'_1(s)} \cdots C^{[w'_{2^{d+s-1}}(s)/2]+t_{2^{d+s-1}}(s)}_{w'_{2^{d+s-1}}(s)}$$

равномерно по всем $x_1,\ldots,x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$ и $s \in \{1,\ldots,k\}$.

Избавимся, в первую очередь, от $\varepsilon_j(s)$ в биномиальных коэффициентах. Заметим, что в силу (3.12) найдется такое $c > 0$, что для всех $x_1,\ldots,x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$, $s \in \{1,\ldots,k\}$ и $j \in \{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$ выполнено $cn \leqslant w^{\vec{x}}_j(s) \leqslant n$. В этой связи по формуле Стирлинга найдется такая константа $\widetilde{c} > 0$, что для всех тех же наборов переменных

$$\left|\frac{(C^{[w'_j(s)/2]+2^{k-s}\delta_j(s)+t_j(s)}_{w'_j(s)+2^{k-s+1}\delta_j(s)+\varepsilon_j(s)})}{C^{[w'_j(s)/2]+2^{k-s}\delta_j(s)+t_j(s)}_{w'_j(s)+2^{k-s+1}\delta_j(s)}} - 2^{\varepsilon_j(s)}\right| \leqslant \widetilde{c}\,\frac{f(n)}{n}.$$

Более того, по формуле Стирлинга существует такое $M > 0$, что для всех $w \in [cn, n] \cap \mathbb{N}$ имеем

$$\left|\frac{w!}{\sqrt{2\pi w}\,\frac{w^w}{e^w}} - 1\right| \leqslant \frac{M}{w}.$$

Разложение Тейлора дает существование такого $c_1 > 0$, что для всех $w \in [cn, n]$, $|y| \leqslant f(n)$, $s \in \{1,\ldots,k\}$

$$\left|\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w + 2^{k-s+1}y}} - 1\right| \leqslant c_1\left|\frac{y}{w}\right| \leqslant \frac{c_1}{c}\cdot\frac{f(n)}{n}.$$

Наконец, в силу определения величин $x_1,\ldots,x_{2^d}$ и $y_1,\ldots,y_{2^d}$ справедливы равенства $\sum_{j=1}^{2^d} x_j = \sum_{j=1}^{2^d} y_j = 0$, а следовательно, $\sum_{j=1}^{2^d} r_j = 0$ в силу (3.4) и

$\sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \delta_j(s) = \sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \varepsilon_j(s) = 0$ для любого $s \in \{1, \ldots, k\}$ в силу определения величин $\delta_j(s)$ и $\varepsilon_j(s)$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
&C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)+\varepsilon_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)} \cdots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+\varepsilon_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} \\
&\quad = 2^{\sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \varepsilon_j(s)} \\
&\qquad \times C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)} \cdots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} \\
&\qquad \times \left(1 + O\left(\frac{f(n)}{n}\right)\right) \\
&\quad = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{2^{d+s-1}} \frac{2^{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)} \cdots 2^{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}}{\sqrt{(w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)) \cdots (w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s))}} \\
&\qquad \times \frac{C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)}}{C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)}} \cdots \frac{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)}}{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}} \\
&\qquad \times \left(1 + O\left(\frac{f(n)}{n}\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{2^{d+s-1}} \frac{2^{w_1'(s)} \cdots 2^{w_{2^{d+s-1}}'(s)}}{\sqrt{w_1'(s) \cdots w_{2^{d+s-1}}'(s)}} \\
&\qquad \times \frac{C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)}}{C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)}} \cdots \frac{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)}}{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)}} \\
&\qquad \times \left(1 + O\left(\frac{f(n)}{n}\right)\right) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$ и $s \in \{1, \ldots, k\}$.

Для любых $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ обозначим через $W_j^{\vec{x}}(s)$ множество всех троек $(w_j'(s), 2^{k-s}\delta_j(s), t_j(s))$, которые возникают, когда набор $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k))$ пробегает все множество T. Равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ и $(w, y, t) \in W_j^{\vec{x}}(s)$

$$\frac{C_{w+2y}^{[w/2]+y+t}}{C_{w+2y}^{[w/2]+y}} = e^{-2t^2/w}(1 + O(f(n)n^{-0,8})).$$

Таким образом, в силу (3.14) равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$ и $s \in \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned}
&C_{w_1'(s)+2^{k-s+1}\delta_1(s)+\varepsilon_1(s)}^{[w_1'(s)/2]+2^{k-s}\delta_1(s)+t_1(s)} \cdots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+2^{k-s+1}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+\varepsilon_{2^{d+s-1}}(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+2^{k-s}\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} \\
&\quad = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{2^{d+s-1}} \frac{2^{w_1'(s)} \cdots 2^{w_{2^{d+s-1}}'(s)}}{\sqrt{w_1'(s) \cdots w_{2^{d+s-1}}'(s)}}
\end{aligned}$$

$$\times \frac{C_{w_1'(s)}^{[w_1'(s)/2]+t_1(s)}}{C_{w_1'(s)}^{[w_1'(s)/2]}} \cdots \frac{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+t_{2^{d+s-1}}(s)}}{C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]}}(1+O(f(n)n^{-0,8}))$$

$$= C_{w_1'(s)}^{[w_1'(s)/2]+t_1(s)} \cdots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{[w_{2^{d+s-1}}'(s)/2]+t_{2^{d+s-1}}(s)}(1+O(f(n)n^{-0,8})),$$

что, в свою очередь, доказывает лемму 1, так как множество T и все величины в правой части последнего равенства не зависят от $\vec{x}$.

Лемма 1 доказана.

3.2. Доказательство леммы 2. Как можно судить по доказательству предыдущей леммы, доказывать утверждение этой леммы напрямую было бы тяжело, если вообще возможно. К счастью, проблема легко решается, если доказывать утверждение сразу для всех связных фиксированных графов.

Обозначим через $\mathscr{M}_{m,l}$ множество всех связных графов с m вершинами и l ребрами.

Будем доказывать утверждение для каждого m индукцией по числу ребер. При $l = m-1$ первую вершину (корень дерева) выбираем N способами, а каждую последующую (соединенную ребром с ровно одной из ранее выбранных) $N_1 - O(1)$ способами (напомним, что N_1 – степень вершины рассматриваемого дистанционного графа). Поэтому для любого $F \in \mathscr{M}_{m,m-1}$ имеем

$$M_F \sim N N_1^{m-1} = N^m \left(\frac{N_1}{N}\right)^{m-1}.$$

Пусть лемма верна для $l \leqslant L-1$, докажем ее для $l = L$, где $L \in \{m, m+1, \dots\}$. Пусть, кроме того, $F \in \mathscr{M}_{m,L-1}$ и вершины z_1 и z_2 графа F не соединены ребром.

Определим сеть (R, H) следующим образом: $H = F$, $R = \{z_1, z_2\}$. Рассмотрим произвольные вершины $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \dots, v_n^1), \mathbf{v}^2 = (v_1^2, \dots, v_n^2) \in V$. Тогда в наших обозначениях $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, -x, -x, x)$ для некоторого $x \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\Sigma(x) := M_{(R,H)}^{\vec{x}} = \sum C_{w_1^{\vec{x}}(1)}^{u_1^{\vec{x}}(1)} \cdots C_{w_4^{\vec{x}}(1)}^{u_4^{\vec{x}}(1)} \cdots C_{w_1^{\vec{x}}(m-2)}^{u_1^{\vec{x}}(m-2)} \cdots C_{w_{2^{m-1}}^{\vec{x}}(m-2)}^{u_{2^{m-1}}^{\vec{x}}(m-2)}, \tag{3.15}$$

где суммирование ведется по всем решениям $(u_1^{\vec{x}}(1), \dots, u_4^{\vec{x}}(1))$, …, $(u_1^{\vec{x}}(m-2), \dots, u_{2^{m-1}}^{\vec{x}}(m-2))$ систем (3.1) с $s = 1$, …, $s = m-2$ соответственно. Кроме того,

$$M_F = N \sum_{x=-n/4}^{n/4-1} C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \Sigma(x).$$

По аналогии с доказательством леммы 1 можно при $x = 0$ доказать существование таких решений $(u_1^{\vec{x}}(1), \dots, u_4^{\vec{x}}(1))$, …, $(u_1^{\vec{x}}(m-2), \dots, u_{2^{m-1}}^{\vec{x}}(m-2))$ систем (3.1) с $s = 1$, …, $s = m-2$ соответственно, что для некоторой константы $C > 0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{w_j^{\vec{x}}(s)}{2} - u_j^{\vec{x}}(s)\right| \leqslant C.$$

Очевидно, соответствующий этому решению член суммы из правой части равенства (3.15) ограничен снизу величиной $2^{(m-2)n}/n^{\widetilde{c}}$ для некоторой константы $\widetilde{c} > 0$. Следовательно,

$$\Sigma(0) \geqslant \frac{2^{(m-2)n}}{n^{\widetilde{c}}}. \tag{3.16}$$

По формуле Стирлинга $C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \leqslant 2^n e^{-8x^2/n}(1+o(1))$ при $|x| \leqslant n^{0,6}$, а следовательно, $C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \leqslant 2^n e^{-8n^{0,2}}(1+o(1))$ при $|x| > n^{0,6}$. Отсюда в силу (3.16)

$$\sum_{|x|>n^{0,6}} C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \Sigma(x) \leqslant n 2^n e^{-8n^{0,2}} 2^{(m-2)n} = o(N_1 \Sigma(0)).$$

Поэтому

$$M_F \sim N \sum_{x=\lceil -n^{0,6} \rceil}^{\lfloor n^{0,6} \rfloor} C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \Sigma(x) \sim N \sum_{x=\lceil -n^{0,6} \rceil}^{\lfloor n^{0,6} \rfloor} C_{n/2}^{n/4+x} C_{n/2}^{n/4-x} \Sigma(0) \tag{3.17}$$

по лемме 1. Добавим в граф F ребро между вершинами z_1 и z_2 и обозначим полученный граф F^+. Поскольку $M_{F^+} = N N_1 \Sigma(0)$ и

$$\sum_{x=\lceil -n^{0,6} \rceil}^{\lfloor n^{0,6} \rfloor} (C_{n/2}^{n/4+x})^2 \sim N,$$

то $M_{F^+} \sim (N_1/N) M_F$ для любого $F \in \mathscr{M}_{m,L-1}$, что доказывает утверждение леммы 2.

3.3. Доказательство леммы 3. Будем считать, что индуцированный на множестве корней R подграф графа H представляет собой клику. Тогда в силу леммы 2

$$M_H \sim N^{d+k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{C_d^2 + l}, \qquad M_{H|_R} \sim N^d \left(\frac{N_1}{N}\right)^{C_d^2}. \tag{3.18}$$

Рассмотрим множество X векторов $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{2^d})$, для каждого из которых найдется последовательность d вершин $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d \in V$, образующих клику в G, с таким вектором $\vec{x}$, определенным в (2.1). Для каждого $\vec{x} \in X$ обозначим через $T_d(\vec{x})$ количество последовательностей d вершин $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d \in V$ с таким вектором $\vec{x}$. Тогда

$$M_H = \sum_{\vec{x} \in X} T_d(\vec{x}) M_{(R,H)}^{\vec{x}}, \qquad M_{H|_R} = \sum_{\vec{x} \in X} T_d(\vec{x}).$$

Аналогично доказательству асимптотического равенства (3.17), можно показать, что при суммировании в двух последних равенствах по всем $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{2^d})$ из X с условием $|x_i| \leqslant n^{0,6}$, $i \in \{1, \ldots, 2^d\}$, асимптотика величины M_H не поменяется. Поэтому в силу (3.18)

$$M_H \sim \sum_{\substack{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_{2^d})\in X\\ \forall i\in\{1,\ldots,2^d\}\ |x_i|\leqslant n^{0,6}}} T_d(\vec{x}) M^{\vec{x}}_{(R,H)} \sim \sum_{\substack{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_{2^d})\in X\\ \forall i\in\{1,\ldots,2^d\}\ |x_i|\leqslant n^{0,6}}} T_d(\vec{x}) M'_{(R,H)}$$
$$\sim N^d \left(\frac{N_1}{N}\right)^{C_d^2} M'_{(R,H)}.$$

Отсюда и из (3.18)

$$M'_{(R,H)} \sim N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l,$$

что и требовалось доказать. Лемма 3 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 5

Пусть a – количество автоморфизмов графа F, а $\widetilde{M}_F$ – количество подграфов полного дистанционного графа G, изоморфных графу F. Из леммы 2 известно, что

$$M := \widetilde{M}_F \sim \frac{1}{a} N^{v(F)} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{e(F)}.$$

Пусть $F_1, \ldots, F_M$ – это все копии F в G. Ясно, что X_F можно представить в виде суммы

$$X_F = \sum_{i=1}^{M} X_i,$$

где X_i – индикатор того, что $F_i \subset G_p$.

Пользуясь линейностью математического ожидания, получаем, что

$$\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{M} \mathsf{E}X_i \sim \frac{1}{a} N^{v(F)} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{e(F)} p^{e(F)}.$$

Пусть $H_0 \subseteq F$ – подграф, на котором достигается максимум плотности $\rho(H_0)$. Пусть $\widetilde{a}$ – количество автоморфизмов графа H_0. Тогда $\rho^{\max}(F) = \rho(H_0) = e(H_0)/v(H_0)$. Рассуждая аналогично, найдем асимптотику математического ожидания X_{H_0} (количества копий H_0 в G_p):

$$\mathsf{E}X_{H_0} \sim \frac{1}{\widetilde{a}} N^{v(H_0)} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{e(H_0)} p^{e(H_0)}.$$

Пусть

$$p \ll N^{-1/\rho(H_0)} \frac{N}{N_1}.$$

Тогда $\mathsf{E}X_{H_0} \to 0$ и

$$\mathsf{P}(X > 0) \leqslant \mathsf{P}(X_{H_0} > 0) = \mathsf{P}(X_{H_0} \geqslant 1) \leqslant \mathsf{E}X_{H_0} \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу неравенства Маркова.

Пусть теперь

$$p = \omega N^{-1/\rho(H_0)} \frac{N}{N_1},$$

где $\omega = \omega(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любого графа $H \subseteq F$ имеем

$$\mathsf{E}X_H \asymp N^{v(H)} N^{-e(H)/\rho(H_0)} \omega^{e(H)} \geqslant N^{v(H)} N^{-e(H)/\rho(H)} \omega^{e(H)} = \omega^{e(H)} \to \infty \quad (4.1)$$

при $n \to \infty$. Напомним, что

$$\mathsf{D}X_F = \sum_{i=1}^{M} \mathsf{D}X_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant M} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Заметим, что случайные величины X_i, X_j являются зависимыми в том и только том случае, когда пересечение образов графа F при мономорфизмах $F \to F_i$, $F \to F_j$ содержит хотя бы одно ребро. Кроме того, для любого подграфа $H \subset F$ число таких пар подграфов $\{F_i, F_j\}$, что некоторый остовный подграф $F_i \cap F_j$ изоморфен H, составляет

$$O\left(N^{2v(F)-v(H)} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{2e(F)-e(H)}\right).$$

Оценим дисперсию X_F:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}X_F &\leqslant \mathsf{E}X_F + O\left(\sum_{\substack{H \subset F \\ e(H) \geqslant 1}} N^{2v(F)-v(H)} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{2e(F)-e(H)} p^{2e(F)-e(H)} \right) \\
&\leqslant \mathsf{E}X_F + (\mathsf{E}X_F)^2 O\left(\sum_{\substack{H \subset F \\ e(H) \geqslant 1}} \frac{1}{N^{v(H)} (N_1/N)^{e(H)} p^{e(H)}} \right) \\
&= \mathsf{E}X_F + (\mathsf{E}X_F)^2 O\left(\sum_{\substack{H \subset F \\ e(H) \geqslant 1}} \frac{1}{\mathsf{E}X_H} \right) = o((\mathsf{E}X_F)^2)
\end{aligned}$$

в силу (4.1). Отсюда, воспользовавшись неравенством Чебышёва, получим, что

$$\mathsf{P}(X_F = 0) = \mathsf{P}(-X_F \geqslant 0) \leqslant \mathsf{P}(|\mathsf{E}X_F - X_F| \geqslant \mathsf{E}X_F) \leqslant \frac{\mathsf{D}X_F}{(\mathsf{E}X_F)^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Применим это же неравенство для доказательства закона больших чисел при $p \gg N^{-1/\rho^{\max}(F)} N/N_1$. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left| \frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1 \right| < \varepsilon \right) = 1 - \mathsf{P}(|X_F - \mathsf{E}X_F| \geqslant \varepsilon \mathsf{E}X_F) \geqslant 1 - \frac{\mathsf{D}X_F}{\varepsilon^2 (\mathsf{E}X_F)^2} \to 1.$$

Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 6

В силу леммы 2 количество подграфов полного дистанционного графа G, изоморфных графу F, есть

$$M \sim \frac{1}{a} N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l.$$

Отсюда в обозначениях из § 4

$$\mathsf{E} X_F = \sum_{i=1}^{M} \mathsf{E} X_i = M p^l \sim \frac{c^l}{a} = \lambda.$$

В силу теоремы 1.20 из работы [6] достаточно доказать сходимость факториальных моментов

$$\mathsf{E} X^{\underline{j}} = \mathsf{E} X(X-1)\cdots(X-j+1)$$

к λ^j при $n \to \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Из сходимости будет следовать утверждение теоремы.

Очевидно, $\mathsf{E} X^{\underline{j}}$ есть математическое ожидание числа упорядоченных наборов j различных копий графа F. Покажем, что эта величина асимптотически совпадает с математическим ожиданием Y_j – количества упорядоченных наборов j копий F, множества вершин которых не пересекаются. Заметим, что

$$\begin{aligned} M(M - kN_1^{k-1}) \cdots (M - (j-1)kN_1^{k-1}) p^{jl} \leqslant \mathsf{E} Y_j \\ \leqslant M(M-1)\cdots(M-j+1)p^{jl}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E} Y_j \sim M^j p^{jl} \sim \lambda^j.$$

Остается доказать, что $\mathsf{E} Z_j \to 0$ при $n \to \infty$, где $Z_j = X^{\underline{j}} - Y_j$.

Заметим сначала, что для двух таких различных графов A и B с $V(A) \cap V(B) \neq \varnothing$, что B изоморфен F и в точности $t \geqslant 1$ вершин графа B не принадлежат $V(A)$, в силу строгой сбалансированности F выполнено $e(B|_{V(A\cap B)}) < (k-t)l/k$, из чего следует:

$$\begin{aligned} e(A \cup B) = e(A) + e(B) - e(B|_{V(A\cap B)}) \geqslant e(A) + l - \frac{(k-t)l}{k} + \frac{1}{k} \\ = e(A) + \frac{tl}{k} + \frac{1}{k}, \qquad t < k, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$e(A \cup B) = e(A) + e(B) = e(A) + l, \qquad t = k. \tag{5.3}$$

Пусть $F_{i_1}, \ldots, F_{i_j}$ – подграфы G, изоморфные F, с

$$\left| \bigcup_{v=1}^{j} V(F_{i_v}) \right| = t < jk.$$

Пусть для каждого $v \in \{2, \ldots, j\}$ ровно t_v вершин подграфа F_{i_v} не принадлежат $\bigcup_{s=1}^{v-1} V(F_{i_s})$. Тогда, очевидно, $\sum_{v=2}^{j} t_v = t - k$. Пусть сначала $t > k$. Без

ограничения общности можно считать, что $0 < t_2 < k$, поэтому из (5.2) следует, что
$$e(F_{i_1} \cup F_{i_2}) \geqslant l + \frac{t_2 l}{k} + \frac{1}{k}.$$
Поскольку в силу (5.2) и (5.3)
$$e\biggl(\bigcup_{s=1}^{v} F_{i_s}\biggr) \geqslant e\biggl(\bigcup_{s=1}^{v-1} F_{i_s}\biggr) + \frac{t_v l}{k},$$
получаем
$$e\biggl(\bigcup_{v=1}^{j} F_{i_v}\biggr) \geqslant \frac{tl}{k} + \frac{1}{k}.$$
Заметим, что при $t = k$ для $e(\bigcup_{v=1}^{j} F_{i_v})$ верна та же оценка.

Оценим математическое ожидание Z_j:
$$\mathsf{E} Z_j \leqslant \sum_{t=k}^{kj-1} O\biggl(N^t \biggl(\frac{N_1}{N}\biggr)^{(tl+1)/k} p^{(tl+1)/k}\biggr) = \sum_{t=k}^{kj-1} O\biggl(\frac{N^t}{N^{(tl+1)/l}}\biggr) = o(1).$$

Таким образом, теорема 6 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 7

Будем для удобства обозначать $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^d)$, $\vec{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k)$. Пусть для любых $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \in \widetilde{V}_f^d \times V^k$
$$\begin{aligned} A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} = \bigl\{G' \in \Omega_n^{\mathrm{dist}}\colon\ &\text{отображение } \lambda\colon (V(H), E(H) \setminus E(H|_R)) \to G' \\ &\text{такое, что } \lambda(z_i) = \mathbf{v}^i,\ i \in \{1, \dots, d\},\ \lambda(y_j) = \mathbf{w}^j,\ j \in \{1, \dots, k\}, \\ &\text{является мономорфизмом}\bigr\}. \end{aligned}$$
Тогда, как легко видеть,
$$\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H) = \bigcap_{\vec{\mathbf{v}} \in \widetilde{V}_f^d} \ \bigcup_{\vec{\mathbf{w}} \in V^k} A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}. \tag{6.1}$$

Очевидно, что $\mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}) = p^l$. Более того, по лемме 3 для любого $\vec{\mathbf{v}}$ число различных $\vec{\mathbf{w}}$, для которых $G \in A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}$, асимптотически равно $M'_{(R,H)} := N^k (N_1/N)^l$.

Будем называть последовательности $\vec{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^d)$ и $\vec{\mathbf{w}}' = ((\mathbf{w}')^1, \dots, (\mathbf{w}')^d)$ эквивалентными, если они совпадают как множества и существует автоморфизм H, оставляющий на месте корни, который переводит каждое y_i в $y_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, где перестановка σ на $\{1, \dots, d\}$ определена следующим образом: $(\mathbf{w}')^i = \mathbf{w}^{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Таким образом, последовательности $\vec{\mathbf{w}}$ разбиваются на c_1 классов эквивалентности. Поскольку для эквивалентных $\vec{\mathbf{w}}$ и $\vec{\mathbf{w}}'$ события $A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}$ и $A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'}$ совпадают, будем рассматривать для каждого $\vec{\mathbf{v}}$ по одному представителю из каждого класса эквивалентности (множество которых обозначим $V(\vec{\mathbf{v}})$).

Пусть

$$B_{\vec{\mathbf{v}}} = \overline{\bigcup_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}} = \bigcap_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} \overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}.$$

Пользуясь корреляционным неравенством из [5], получаем

$$\prod_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} \mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}) \leqslant \mathsf{P}(B_{\vec{\mathbf{v}}}) \leqslant \biggl(\prod_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} \mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}})\biggr) \exp\Bigl\{2\sum \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'})\Bigr\}, \quad (6.2)$$

где суммирование под экспонентой ведется по всем $\vec{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^k)$, $\vec{\mathbf{w}}' = ((\mathbf{w}')^1,\dots,(\mathbf{w}')^k)$ с $\{\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^k\}\cap\{(\mathbf{w}')^1,\dots,(\mathbf{w}')^k\}\neq\varnothing$.

Пусть

$$p^l = cc_1 d\ln N N^{-k}\left(\frac{N}{N_1}\right)^l. \quad (6.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\prod_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} \mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}) &= (1-p^l)^{1/c_1 N^k (N_1/N)^l (1+h_{\vec{\mathbf{v}}}(n))} = e^{-1/c_1 p^l N^k (N_1/N)^l (1+g_{\vec{\mathbf{v}}}(n))}\\ &= e^{-cd\ln N(1+g_{\vec{\mathbf{v}}}(n))} = N^{-cd(1+g_{\vec{\mathbf{v}}}(n))}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $h_{\vec{\mathbf{v}}}(n) = O(f(n)n^{-0,8})$, $g_{\vec{\mathbf{v}}}(n) = O(f(n)n^{-0,8})$ при $n\to\infty$.

Разобьем все такие пары $(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{w}}')$ в суммировании в (6.2), что $G\in A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}$, на классы W_t, $t\in\{1,\dots,k\}$, в которых

$$|\{\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^k\}\cap\{(\mathbf{w}')^1,\dots,(\mathbf{w}')^k\}| = t.$$

Из лемм 1–3 следует, что

$$|W_t| = O\biggl(N^{2k-t}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{2l-e_t}\biggr)$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}\in\widetilde{V}_f^d$, где e_t – наибольшее по всем парам $(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{w}}')\in W_t$ количество ребер из $E(G|_{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^k})\cap E(G|_{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d,(\mathbf{w}')^1,\dots,(\mathbf{w}')^k})\setminus E(G|_{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^d})$. Поскольку сеть (R,H) строго сбалансирована, $e_t < tl/k$, если $t<k$. Если же $t=k$, то $e_t<l$, так как иначе расширения $\vec{\mathbf{w}}$ и $\vec{\mathbf{w}}'$ были бы эквивалентны. Поэтому в силу (6.3)

$$\begin{aligned}\sum_{(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{w}}')\in W_t} \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}\cap A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'}) &= O\biggl(N^{2k-t}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{2l-e_t} p^{2l-e_t}\biggr)\\ &= O\biggl(\frac{\ln^2 N}{N^t (N_1/N)^{e_t} p^{e_t}}\biggr) = o(1)\end{aligned}$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}\in\widetilde{V}_f^d$. Отсюда $\sum_{t=1}^k \sum_{(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{w}}')\in W_t} \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}\cap A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'}) = o(1)$ равномерно по $\vec{\mathbf{v}}\in\widetilde{V}_f^d$, и

$$\mathsf{P}(B_{\vec{\mathbf{v}}}) = N^{-cd(1+g_{\vec{\mathbf{v}}}(n))}(1+o(1)) \quad (6.5)$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}\in\widetilde{V}_f^d$, так как справедливы оценки (6.2) и (6.4).

Теперь легко видеть, что при $c > 1$ в силу (6.1)

$$\mathsf{P}(\overline{\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R,H)}) \leqslant N^d N^{-cd(1+o(1))} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Рассмотрим теперь случай $c < 1$. Пусть случайная величина $X_{\vec{\mathbf{v}}}$ есть индикатор события $B_{\vec{\mathbf{v}}}$. Будем называть $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d)$ и $\vec{\mathbf{v}}' = ((\mathbf{v}')^1,\ldots,(\mathbf{v}')^d)$ эквивалентными, если они совпадают как множества и существует автоморфизм H, который переводит каждое z_i в $z_{\sigma(i)}$, $i \in \{1,\ldots,d\}$, где перестановка σ на $\{1,\ldots,d\}$ определена следующим образом: $(\mathbf{v}')^i = \mathbf{v}^{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1,\ldots,d\}$. Очевидно, для эквивалентных $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}'$ выполнено $X_{\vec{\mathbf{v}}} = X_{\vec{\mathbf{v}}'}$. Как и ранее, будем рассматривать только по одному представителю из каждого класса эквивалентности (обозначим множество таких представителей U). Пусть $X = \sum_{\vec{\mathbf{v}}\in U} X_{\vec{\mathbf{v}}}$. Заметим, что $X = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено свойство $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R,H)$. В силу (6.5) имеем

$$\mathsf{E}X = \sum_{\vec{\mathbf{v}}\in U} \mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}} \geqslant N^d N^{-cd(1+o(1))} \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Очевидно,

$$\mathsf{D}X = \sum_{\vec{\mathbf{v}}\in U} \mathsf{D}X_{\vec{\mathbf{v}}} + \sum_{\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{v}}'} \mathrm{cov}(X_{\vec{\mathbf{v}}}, X_{\vec{\mathbf{v}}'}).$$

Оценим слагаемое $\mathsf{E}(X_{\vec{\mathbf{v}}}X_{\vec{\mathbf{v}}'})$ в выражении для ковариации, пользуясь корреляционным неравенством из [5]. Так как при некотором выборе множеств $V(\vec{\mathbf{v}}), V(\vec{\mathbf{v}}')$ множества таких $\vec{\mathbf{w}} \in V(\vec{\mathbf{v}})$ и $\vec{\mathbf{w}} \in V(\vec{\mathbf{v}'})$, что $\mathbf{w}^i \notin \{\mathbf{v}^j, (\mathbf{v}')^j\}$ для всех $i \in \{1,\ldots,k\}$ и $j \in \{1,\ldots,d\}$, совпадают, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X_{\vec{\mathbf{v}}}X_{\vec{\mathbf{v}}'}) &= \mathsf{P}(B_{\vec{\mathbf{v}}} \cap B_{\vec{\mathbf{v}}'}) = \mathsf{P}\Biggl(\biggl(\bigcap_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}})} \overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}\biggr) \cap \biggl(\bigcap_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}}')} \overline{A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}}}\biggr)\Biggr) \\
&\leqslant \mathsf{P}\Biggl(\biggl(\bigcap_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}}):\ \forall i\in\{1,\ldots,k\}\forall j\in\{1,\ldots,d\}\ \mathbf{w}^i\notin\{\mathbf{v}^j,(\mathbf{v}')^j\}} \overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}\biggr) \\
&\quad \cap \biggl(\bigcap_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}}'):\ \forall i\in\{1,\ldots,k\}\forall j\in\{1,\ldots,d\}\ \mathbf{w}^i\notin\{\mathbf{v}^j,(\mathbf{v}')^j\}} \overline{A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}}}\biggr)\Biggr) \\
&\leqslant \prod_{\vec{\mathbf{w}}\in V(\vec{\mathbf{v}}),\vec{\mathbf{w}}'\in V(\vec{\mathbf{v}}'):\ \forall i\in\{1,\ldots,k\}\forall j\in\{1,\ldots,d\}\ \{\mathbf{w}^i,(\mathbf{w}')^i\}\cap\{\mathbf{v}^j,(\mathbf{v}')^j\}=\varnothing} \mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}})\mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'}}) \\
&\quad \times \exp\biggl\{2\biggl(\sum(\mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'}) + \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'})) + \sum \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'})\biggr)\biggr\},
\end{aligned}$$

где суммирование в первой сумме ведется по наборам $\vec{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k)$, $\vec{\mathbf{w}}' = ((\mathbf{w}')^1,\ldots,(\mathbf{w}')^k)$ с $\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\} \cap \{(\mathbf{w}')^1,\ldots,(\mathbf{w}')^k\} \neq \varnothing$, а во второй – по всем $\vec{\mathbf{w}}$, $\vec{\mathbf{w}}'$ с пересекающимися множествами ребер $E(G|_{\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}}) \setminus E(G|_{\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d\}})$ и $E(G|_{\{(\mathbf{v}')^1,\ldots,(\mathbf{v}')^d,(\mathbf{w}')^1,\ldots,(\mathbf{w}')^k\}}) \setminus E(G|_{\{(\mathbf{v}')^1,\ldots,(\mathbf{v}')^d\}})$ (причем в обеих суммах $\vec{\mathbf{w}}$ и $\vec{\mathbf{w}}'$ удовлетворяют условию $\{\mathbf{w}^i,(\mathbf{w}')^i\} \cap \{\mathbf{v}^j,(\mathbf{v}')^j\} = \varnothing$ для всех $i \in \{1,\ldots,k\}$ и $j \in \{1,\ldots,d\}$). Выше мы уже доказали, что

$$\sum \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}'}) = o(1), \qquad \sum \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'}) = o(1)$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$. Таким образом, нужно показать, что также равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$ выполнено

$$\sum \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'}) = o(1). \tag{6.6}$$

Опять разобьем все такие пары $(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{w}}')$ в суммировании, что $G \in A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}$, на классы W_t, $t \in \{1, \dots, k\}$, в которых

$$|\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k\} \cap \{(\mathbf{w}')^1, \dots, (\mathbf{w}')^k\}| = t.$$

В силу наших ограничений на пределы суммирования в (6.6) для любой пары $(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{w}}') \in W_t$ выполнено

$$(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^d\} \cup \{(\mathbf{v}')^1, \dots, (\mathbf{v}')^d\}) \cap (\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k\} \cup \{(\mathbf{w}')^1, \dots, (\mathbf{w}')^k\}) = \varnothing.$$

Поэтому из лемм 1–3 следует

$$|W_t| = O\left(N^{2k-t}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{2l-e_t}\right),$$

где $e_t < tl/k$, равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$. Таким образом, снова получаем, что для каждого $t \in \{1, \dots, k\}$

$$\sum_{(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{w}}') \in W_t} \mathsf{P}(A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}} \cap A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'}) = o(1)$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$, поэтому по аналогии с (6.4)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_{\vec{\mathbf{v}}} X_{\vec{\mathbf{v}}'}) \leqslant \prod_{\vec{\mathbf{w}} \in V(\vec{\mathbf{v}}), \vec{\mathbf{w}}' \in V(\vec{\mathbf{v}}') :\ \forall i \in \{1, \dots, k\} \forall j \in \{1, \dots, d\}\ \{\mathbf{w}^i, (\mathbf{w}')^i\} \cap \{\mathbf{v}^j, (\mathbf{v}')^j\} = \varnothing} &\mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}}}) \\ \times \mathsf{P}(\overline{A_{\vec{\mathbf{v}}'\vec{\mathbf{w}}'}})(1 + o(1)) &\leqslant (1 - p^l)^{1/c_1 N^k (N_1/N)^l (1 + h_{\vec{\mathbf{v}}}(n)) - kdN^{k-1}} \\ &\times (1 - p^l)^{1/c_1 N^k (N_1/N)^l (1 + h_{\vec{\mathbf{v}}'}(n)) - kdN^{k-1}} (1 + o(1)) \\ &\leqslant N^{-cd(2 + g_{\vec{\mathbf{v}}}(n) + g_{\vec{\mathbf{v}}'}(n))}(1 + o(1))\end{aligned}$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$. Отсюда в силу (6.5)

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_{\vec{\mathbf{v}}}, X_{\vec{\mathbf{v}}'}) = \mathsf{E}(X_{\vec{\mathbf{v}}} X_{\vec{\mathbf{v}}'}) - \mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}} \mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}'} \leqslant N^{-cd(2 + g_{\vec{\mathbf{v}}}(n) + g_{\vec{\mathbf{v}}'}(n))}(1 + o(1)) \\ - N^{-cd(2 + g_{\vec{\mathbf{v}}}(n) + g_{\vec{\mathbf{v}}'}(n))} = o(N^{-cd(2 + g_{\vec{\mathbf{v}}}(n) + g_{\vec{\mathbf{v}}'}(n))}) = o(\mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}} \mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}'})\end{aligned}$$

равномерно по $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in \widetilde{V}_f^d$. Поэтому

$$\mathsf{D}X \leqslant \mathsf{E}X + \sum_{\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{v}}'} o(\mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}} \mathsf{E}X_{\vec{\mathbf{v}}'}) = o((\mathsf{E}X)^2).$$

Пользуясь неравенством Чебышёва, получаем, что

$$\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(-X \geqslant 0) \leqslant \mathsf{P}(|\mathsf{E}X - sX| \geqslant \mathsf{E}X) \leqslant \frac{\mathsf{D}X}{(\mathsf{E}X)^2} \to 0.$$

Теорема 7 доказана.

Список литературы

[1] P. Erdős, A. Rényi, "On random graphs. I", *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.

[2] P. Erdős, A. Rényi, "On the evolution of random graphs", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.

[3] B. Bollobás, "Threshold functions for small subgraphs", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.

[4] A. Ruciński, A. Vince, "Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs", Proceedings of the 16th Southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing (Boca Raton, Fla., 1985), *Congr. Numer.*, **49** (1985), 181–190.

[5] J. Spencer, "Threshold functions for extension statements", *J. Combin. Theory Ser. A*, **53**:2 (1990), 286–305.

[6] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.

[7] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, xii+333 pp.

[8] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.

[9] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000, 256 с.; англ. пер.: V. F. Kolchin, *Random graphs*, Encyclopedia Math. Appl., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, xii+252 pp.

[10] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 3rd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008, xviii+352 pp.

[11] А. Р. Ярмухаметов, "О связности случайных дистанционных графов специального вида", *Чебышевский сб.*, **10**:1 (2009), 95–108.

[12] М. Е. Жуковский, "О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф", *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 844–855; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, "On the probability of the occurrence of a copy of a fixed graph in a random distance graph", *Math. Notes*, **92**:6 (2012), 756–766.

[13] М. Е. Жуковский, "О последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющейся закону нуля или единицы", *Пробл. передачи информ.*, **47**:3 (2011), 39–58; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, "On a sequence of random distance graphs subject to the zero-one law", *Problems Inform. Transmission*, **47**:3 (2011), 251–268.

[14] С. Н. Попова, "Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$", *Пробл. передачи информ.*, **50**:1 (2014), 64–86; англ. пер.: S. N. Popova, "Zero-one law for random distance graphs with vertices in $\{-1,0,1\}^n$", *Problems Inform. Transmission*, **50**:1 (2014), 57–78.

[15] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007, 138 с.

[16] А. М. Райгородский, "Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств", *УМН*, **56**:1(337) (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, "Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces", *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.

[17] P. Frankl, R. M. Wilson, "Intersection theorems with geometric consequences", *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.

[18] J. Kahn, G. Kalai, "A counterexample to Borsuk's conjecture", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.

[19] P. Brass, W. O. J. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005, xii+499 pp.

[20] М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, "Случайные графы: модели и предельные характеристики", *УМН*, **70**:1(421) (2015), 35–88; англ. пер.: M. E. Zhukovskii,

A.M. Raigorodskii, “Random graphs: models and asymptotic characteristics”, *Russian Math. Surveys*, **70**:1 (2015), 33–81.

[21] М.Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 95–128; англ. пер.: M.E. Zhukovskii, “A weak zero-one law for sequences of random distance graphs”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 1012–1044.

Поступила в редакцию
15.02.2016 и 23.12.2016

Антон Валерьевич Буркин
(Anton V. Burkin)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова
E-mail: a.v.burkin@gmail.com

Максим Евгеньевич Жуковский
(Maksim E. Zhukovskii)
Факультет инноваций и высоких технологий,
Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный
Московской обл.;
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: zhukmax@gmail.com