HW 1 - Ву Ти Фук - М05-501В

1. Покажите, что если в языке счетное число переменных, что максимальных непротиворечивых множеств — континуум.

Число макс. непротив. мн-в (МНМ) имеет мощность континуума, т.е. $2^{\mathbb{N}}$

I. Верхняя оценка $\leq 2^{\mathbb{N}}$

Любое МНМ — это подмн-во мн-ва формул, поэтому количество МНМ не превосходит количества всех подмн-в счётного мн-ва, т.е. их не больше $2^{\mathbb{N}}$

II. Нижняя оценка : $\geq 2^{\mathbb{N}}$

Построим континуум попарно различных МНМ

Для каждого мн-ва $S \subseteq \mathbb{N}$ (их $2^{\mathbb{N}}$)

рассмотрим набор следующего вида:

$$\Sigma_S = \{p_n : n \in S\} \cup \{\neg p_n : n \notin S\}$$

$\{p_0, p_1, p_2 \ldots\}$

$\{\neg p_0, p_1, p_2 \ldots\}$

$\{p_0, \neg p_1, p_2, \ldots\}$

$\ldots$

Этот набор непротиворечивый, но не максимальный.
По лемме Линденбаума Σ_S можно расширить до МНМ Γ_S.
Если $S \neq T$, то существует n, т.ч. $n \in S \Delta T$, и тогда $p_n \in \Gamma_S$ и $\neg p_n \in \Gamma_T$ (или наоборот)
Следовательно $\Gamma_S \neq \Gamma_T$
Мы построили инъекцию $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \{\text{МНМ}\}$
поэтому число МНМ $\geq |\mathcal{B}(\mathbb{N})| = 2^{\mathbb{N}}$
Итак, совместив оценки, получаем требуемое.

2. Пусть $W_1 = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $W_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество чётных чисел. Определим отношения:

$$nR_1m \iff n \vdots m^1, \qquad nR_2m \iff n \vdots m.$$

(отношения действительно одинаковые, просто на разных множествах определены). Определим шкалы $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$. Докажите, что $Log(F_1) = Log(F_2)$.

$F_1 = (W_1, R_1)$, $W_1 = \mathbb{N}$, $nR_1m \Leftrightarrow n \vdots m$

$F_2 = (W_2, R_2)$, $W_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $nR_2m \Leftrightarrow n \vdots m$

Функция $f : W_1 \to W_2$ — p-морфизмом из шкалы $F_1 = (W_1, R_1)$ в $F_2 = (W_2, R_2)$ (Обозначение: $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$), если

1. f является сюръекцией.
2. $xR_1y \Rightarrow f(x)R_2f(y)$ (монотонность).
3. $f(x)R_2u \Rightarrow \exists y(f(y) = u \;\&\; xR_1y)$ (поднятие).

Теорема

Пусть $F_1 \twoheadrightarrow F_2$, тогда $Log(F_1) \subseteq Log(F_2)$.

Т.е. для д-ва $Log(F_1) = Log(F_2)$ достаточно построить $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$ и $g : F_2 \twoheadrightarrow F_1$

1) $f : F_1 \to F_2$, $f(n) = 2n$

- Понятно, что $f(n)$ – сюръекция
- Если $n R_1 m$ (т.е $n \vdots m$), то $2n \vdots 2m$

$\to \quad f(n) \; R_2 \; f(m)$

- Если $f(n) R_2 \sigma$ (т.е. $2n \vdots \sigma$, $\sigma \in W_2$)

Положим $u = \sigma/2$. Тогда $n \vdots u$

То есть $n R_1 u$ и $f(u) = v$

Следовательно, $f: F_1 \twoheadrightarrow F_2$, значит $\boxed{Log(F_1) \subseteq Log(F_2)}$

2) $g: F_2 \to F_1$, $g(2n) = n$ – сюрьекция

- Если $2n R_2 2m$ (т.е $2n \vdots 2m$) то $n \vdots m$

  значит $g(2n) R_1 g(2m)$

- Если $g(2n) R_1 u$ (т.е. $n \vdots u$, $u \in W_1$)

  Возьмём $v = 2u \in W_2$. Тогда $2n \vdots v$

  То есть $2n R_2 v$ и $g(v) = u$

  Значит g является p-морфизмом $F_2 \twoheadrightarrow F_1$

  $\to \boxed{Log(F_2) \subseteq Log(F_1)}$

И так мы доказали, что $Log(F_1) = Log(F_2)$ ∎

3. Определим две логики $\mathsf{Triv} = \mathsf{K} + \Box p \leftrightarrow p$ и $\mathsf{Verum} = \mathsf{K} + \Box p$.

(a) Опишите многообразия шкал этих логик.

(b) (Теорема Макинсона) Докажите, что любая модальная логика, многообразие которой не пусто, содержится в логике Verum или в логике Triv.

a) $F = (W, R)$

1) $\mathrm{Triv} = K \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$

$R_{\mathrm{Triv}} = \mathrm{Id}_W = \{(w, w) \mid w \in W\}$

Действительно:

- $\Box p \to p$ – общезначима
  $\Updownarrow$
  R рефлексивно
- $p \to \Box p$ общезначима
  $\Updownarrow$
  $R \subseteq \mathrm{Id}_W$ (иначе пусть wRv, $w \neq v$.

Положим $V(p) = \{w\}$)

И так получаем $R_{\mathrm{Triv}} = \mathrm{Id}_W$. На таких шкалах $\Box p$ эквивалентно p в каждой точке.

2) $\mathrm{Verum} = K \oplus \Box p$

$R_{\mathrm{Verum}} = \varnothing$

Если есть хоть 1 ребро wRv, выберём

$V(p) = W \setminus \{v\}$

Тогда в w $\Box p$ ложно.

И наоборот, при $R = \varnothing$ для $\Box p$ истинна везде для любой p

Итак: $Var(Triv) = \{(W, Id_W)\}$

$Var(Verum) = \{(W, \varnothing)\}$

b) Теорема Макинсона:

Пусть L - нормальная модальная логика с непустым многообразием фреймов $\mathbb{C}$

Возьмем $F = (W, R) \in \mathbb{C}$. Рассмотрим 2 случая:

I. В F есть тупик: $\exists\, w \in W$: $R(w) = \varnothing$

Тогда порождённая подмодель на $\{w\}$: $F_w = (\{w\}, \varnothing)$

По замкнутости $\mathbb{C}$ под порождёнными подмоделями $F_w \in \mathbb{C}$. Следовательно:

$$Log(\mathbb{C}) \subseteq Log(\{F_w\}) = Verum.$$

II В F нет тупиков: $\forall x \exists y (xRy)$

Определим отображение $f: F \to \underline{F_0}$

одноточечный фрейм с петлёй $\{0\}$

Тогда

- из wRv следует $\begin{cases} f(w) = f(v) = 0 \\ 0 R_{F_0} 0 \end{cases}$

- Если $f(w) R_{F_0} 0$, то по предположению существует v с wRv и $f(v) = 0$

Значит f - сюръективный p-морфизм $F \twoheadrightarrow F_0$

По замкнутости C отн. p-морфных образов имеем $F_0 \in C$. Следовательно:

$$Log(C) \subseteq Log(«F_0») = Triv$$

В обоих случаях получаем требуемое ∎

4. Докажите, что следующие свойства модально неопределимы:

(a) шкала, как ориентированный граф является сильно связным[2];

(b) для данного n $\forall w\, |R(w)| > n$. (Для каждого n это отдельное свойство.)

Теорема

Любое многообразие данного множества формул $Var(\Gamma)$ замкнуто относительно

- p-морфизмов,
- дизъюнктных сумм,
- порожденных подшкал.

(a) Рассмотрим 2 сильно связных шкалы F_1, F_2 и их дизъюнктную сумму $F_1 \sqcup F_2$

Поскольку между компанентами нет путей то $F_1 \sqcup F_2$ не является сильно связной

т.е класс «сильно связных» не замкнут относительно дизъюнктных сумм

Следует он и не может быть модально определим.

(b) Построим контрпример через p-морфный образ.

- Рассмотрим K_{n+1} с петлями и K_1 с петлями

Для каждой в-ны w из K_{n+1} имеем $|R(w)| = n+1 > n$

А для K_1 очевидно свойство $|R(w)| > n$ нарушается

(для любого $n \geq 1$)

• Если мы все вершины K_{n+1} отразим в вершину K_1 то это сюръективный p-морфизм $f: K_{n+1} \twoheadrightarrow K_1$ так:

$\triangleright \ (f(x) = f(y) = w) \wedge (w R_{K_1} w)$

$\triangleright \ f(x) R_{K_1} u$, так как в K_{n+1} есть все ребра, то $\exists y \ ((f(y) = u) \wedge (x R_{K_{n+1}} y))$

Следовательно $Log(K_{n+1}) \subseteq Log(K_1)$

Поскольку модально определимый класс замкнут отн. p-морфных образов, из истинности св-ва в K_{n+1} оно должно было бы сохраняться в K_1 — но не сохраняется.

→ Значит этот класс модально неопределим (для каждого фикс. $n \geq 1$.)

5. Докажите не ссылаясь на теорему о полноте, а построив вывод или доказав, что вывод существует:

(a) $\mathsf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$;

(b) $\mathsf{K} \vdash \Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$;

(c) $\mathsf{K} + AB + A4 \vdash A5$;

(d) $\mathsf{K} + A5 + AT \vdash AB$.

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Исчисление высказываний (альт. формулировка):
Аксиомы:

1. $p \to (q \to p)$,
2. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$,
3. $(p \wedge q) \to p$, $(p \wedge q) \to q$,
4. $p \to (q \to (p \wedge q))$,
5. $p \to (p \vee q)$, $q \to (p \vee q)$,
6. $(p \to r) \to [(q \to r) \to (p \vee q) \to r]$,
7. $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$,
8. $\neg\neg p \to p$ (либо $p \vee \neg p$)
9. $\top$, $\bot \to p$.

a, $\boxed{\mathsf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q}$

Строим вывод из K

① $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (акс. дистриб.)

(Sub $p/p\wedge q$ и q/p)

$\Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p)$

② $(p \wedge q) \to p$ (аксиома ИВ)

(по правилу Nec)

$\Box((p \wedge q) \to p)$

(по MP)

$\Box(p \wedge q) \to \Box p$

Аналогично $\Box(p \wedge q) \to \Box q$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$ $\boxed{\Rightarrow}$

Теперь в другую сторону.

3) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (акс. дистриб.)

(Sub $q / q \to (p \wedge q)$)

$\Box(p \to (q \to (p \wedge q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q)))$

4) $p \to (q \to (p \wedge q))$ (аксиома ЦВ)

(по правилу MP)

$\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$ (*)

Аналогично $\Box q \to \Box(p \to (q \wedge p))$ (**)

Комбинируя (*) и (**): $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ $\boxed{\Leftarrow}$

б) $\boxed{K \vdash \Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)}$

1) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (акс. дистриб.)

(Sub $p / \neg q$ и $q / \neg p$)

$\Box(\neg q \to \neg p) \to (\Box \neg q \to \Box \neg p)$

② $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (тавтология)

(Sub $p/\Box\neg q$ и $q/\Box\neg p$)

$$(\Box\neg q \to \Box\neg p) \to (\neg\Box\neg p \to \neg\Box\neg q)$$

③ $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (тавтология)

(Nec)

$$\Box(p \to q) \to \Box(\neg q \to \neg p)$$

По ③ → ① → ② получим искомый вывод

$\Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$ (т.к. $\Diamond p := \neg\Box\neg p$)

c) $\boxed{K + AB + A4 \vdash A5}$

A5: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

A4: $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

AB: $p \to \Box\Diamond p$

AT: $\Box p \to p$

(D)	сериальность	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	рефлексивность	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	симметричность	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	транзитивность	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	евклидовость	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Строим вывод.

① Из AB с Sub $p/\Diamond p$:

$$\Diamond p \to \Box\Diamond\Diamond p$$

② Из A4:

$$\Box\Diamond\Diamond p \to \Box\Diamond p$$

⑤ Склеиваем ① и ②: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ ■

d) $\boxed{K + A5 + AT \vdash AB}$

① Из AT с Sub $p/\neg p$:

$$\Box\neg p \to \neg p$$

② $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (тавтология)

(Sub $p/\Box\neg p$ и $q/\neg p$)

$$(\Box\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\Box\neg p)$$

По ① и ② с MP получим вывод:

④ $p \to \Diamond p$ (т.к. $\Diamond p = \neg\Box\neg p$)

③ A5: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

Склеиваем ④ и ③ получим искомый:

$$p \to \Box\Diamond p$$

6. Рассмотрим следующую формулу:

$$AL \rightleftharpoons \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

Докажите, не ссылаясь на полноту по Крипке (тем более, что мы ее и не знаем для $\mathsf{K} + AL$), что $\mathsf{K} + AL \vdash \Box p \to \Box\Box p$.

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Исчисление высказываний (альт. формулировка):
Аксиомы:

1. $p \to (q \to p)$,
2. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$,
3. $(p \wedge q) \to p$, $(p \wedge q) \to q$,
4. $p \to (q \to (p \wedge q))$,
5. $p \to (p \vee q)$, $q \to (p \vee q)$,
6. $(p \to r) \to [(q \to r) \to (p \vee q) \to r]$,
7. $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$,
8. $\neg\neg p \to p$ (либо $p \vee \neg p$)
9. $\top$, $\bot \to p$.

Строим вывод

① $(X \wedge Y) \to Y$ (аксиома) (а)

$Y \to (p \to (Y \wedge p))$ (аксиома) (б)

$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(Sub: $A / X \wedge Y$; B / Y ; $C / p \to (Y \wedge p)$)

$$((X \wedge Y) \to Y) \to [(Y \to (p \to (Y \wedge p))) \to$$

$$\to ((X \wedge Y) \to (p \to (Y \wedge p)))] \quad (в)$$

Из (а), (в), MP:

$$[Y \to (p \to (Y \wedge p))] \to [(X \wedge Y) \to (p \to (Y \wedge p))] \quad (2)$$

Из (б), (2), MP:

$$(X \wedge Y) \to (p \to (Y \wedge p))$$

(Sub $X/\Box\Box p$; $Y/\Box p$)

$$(\Box\Box p \wedge \Box p) \to (p \to (\Box p \wedge p))$$

$(p \wedge q) \to q$ (аксиома)

(Sub $p/\Box\Box p$; $q/\Box p \wedge p$)

$$(\Box\Box p \wedge \Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)$$

(2) $(A \wedge B) \to A$ (аксиома)

(Nec + K)

$\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (д)

$(A \wedge B) \to B$ (аксиома)

$\Box(A \wedge B) \to \Box B$ (е)

$(\underbrace{P \to Q}_{(д)}) \to ((\underbrace{P \to R}_{(е)}) \to (\underbrace{P \to (Q \wedge R)}_{(ж)}))$ (тавтология)

(Sub $P/\Box(A \wedge B)$; $Q/\Box A$; $R/\Box B$)

... (ё)

Из (а), (б), (в) и MP получаем: т

$$\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$$

(Sub $A/\Box p$, B/p)

$$\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box\Box p \wedge \Box p)$$

По ①, ② и транзитивности получаем:

③ $\Box(\Box p \wedge p) \to (p \to (\Box p \wedge p))$

(Перестановка)

$$p \to (\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p))$$

(Nec + K)

$$\Box p \to \Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p))$$

④ $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (AL)

(Sub $p/\Box p \wedge p$)

$$\Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)) \to \Box(\Box p \wedge p)$$

По ③, ④ и транзитивности:

⑤ $\Box p \to \Box(\Box p \wedge p)$

⑥ $(p \wedge q) \to p$

$(Sub\ p/\Box p,\ q/p)$

$(\Box p \wedge p) \to \Box p$

$(Nec + K)$

$\Box(\Box p \wedge p) \to \Box\Box p$

По ⑤, ⑥ и транзитивности: получаем искомый вывод

$\Box p \to \Box\Box p.$

7. Пусть $F_L = (W_L, R_L)$ — каноническая шкала. Докажите, что для $x, y \in W_L$ верно

$$xR_L^k y \iff \forall A(\underbrace{\Box \dots \Box}_{k \text{ раз}} A \in x \Rightarrow A \in y).$$

Докажем по индукции по k.

База $k = 1$. Это ровно определение R_L:

Для $F_L = (W_L, R_L)$: $xR_L y \Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y)$

Шаг $k \to k+1$

$\Rightarrow$ Пусть $x R_L^{k+1} y$. Тогда найдётся z т.ч.

$x R_L z$ и $z R_L^k y$

Возьмем произвольное A с $\Box^{k+1} A \ (\in x)$

• Из $x R_L z$ и $\Box^{k+1} A = \Box(\Box^k A) \in x$

по определению R_L получаем $\Box^k A \in z$

• По предположению для k из $z R_L^k y$

следует $A \in y$

Значит доказали: $\forall A\ (\Box^{k+1} A \in x \Rightarrow A \in y)$

$\Leftarrow$ Пусть для любого $x, y \in W_L$ $\forall A\ (\Box^{k+1} A \in x \Rightarrow A \in y)$

Нужно д-ть, что $x R_L^{k+1} y$.

Рассмотрим $T_k(x) := \{A \mid \forall u\,(x R_L^k u \Rightarrow A \in u)\}$

Вспомогательная лемма

Для любого x и A: $\Box^k A \in x \Leftrightarrow A \in T_k(x)$

Идея д-ва: индукция по k.

Можно переписать $T_k(x)$ как: $T_k(x) = \{A \mid \Box^k A \in x\}$

Теперь покажем для любого x, y из $T_k(x) \subseteq y$ следует $x R_L^k y$. (*)

По предположению индукции для k:

$$x R_L^k y \Leftrightarrow \forall A\,(\Box^k A \in x \Rightarrow A \in y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A: A \in T_k(x) \Rightarrow A \in y$$

$$\Updownarrow$$

$$T_k(x) \subseteq y$$

Осталось сделать ещё один шаг по R_L

Построим промежуточную точку z т.ч. $x R_L z$ и $z R_L^k y$

Возьмём $z := \{B \mid \Box B \in x\} \cup T_k(z)$

Это множество согласовано

По лемме Линденбаума дополним Σ до МНМ z

Тогда:

- Из $\{B \mid \Box B \in x\} \subseteq z$ следует $x R_L z$
- Из $T_k(z) \subseteq y$ и ⊛ следует $z R_L^k y$

Комбинируя, получаем $x R_L^{k+1} y$ ∎

8. Докажите, что формула $\Box\Box p \to \Box p$ является канонической.

Пусто $L := K + \{\Box\Box r \to \Box r\}$

$F_L = (W_L, R_L)$ - каноническая шкала L

Докажем, что F_L обладает свойством:

$$R_L \subseteq R_L^2.$$

Если $R \subseteq R^2$ и в x точна $\Box\Box p$, то для любого y т.ч. xRy имеем также xR^2y, значит p истинна в y $\to$ $\Box p$ истинна в x

Возьмём любые $x, y \in W_L$ т.ч. xR_Ly.

По задаче I: имеем экв.:

$$xR_L^2 y \Leftrightarrow \forall A\ (\Box^2 A \in x \Rightarrow A \in y)$$

Пусть $\Box^2 A \in x$

Так как $\Box\Box r \to \Box r$ принадлежит L $\to$

$\to$ $\Box^2 A \to \Box A$ содержится в каждом МНМ (в частности в x)

$\to$ $\Box A \in x$.

Из xR_Ly по определению канонического отн.

$\Box A \in x \to A \in y$.

Следовательно $x R^2_L y$.

Т.е $R_L \subseteq R^2_L$

$\to$ ф-ла $\Box\Box p \to \Box p$ общезначима на F_L

↳ каноническая ∎

9. Докажите, что формулы Alt_n каноничны для всех n.