М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, Случайные графы: модели и предельные характеристики, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1, 35–88

https://www.mathnet.ru/rm9626

2015 г. январь — февраль *т. 70, вып. 1 (421)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.175.4

Посвящается Валерию Васильевичу Козлову

Случайные графы: модели и предельные характеристики

М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский

В настоящей статье представлен обзор известных результатов в области предельного поведения вероятностей свойств первого порядка случайных графов. Совокупность результатов, приведенных в статье, относится к законам нуля или единицы для свойств случайных графов. Мы сконцентрируемся на модели Эрдёша–Реньи случайного графа и рассмотрим также некоторые обобщения этой модели, мотивированные задачами теории кодирования и комбинаторной геометрии.

Библиография: 65 названий.

Ключевые слова: случайные графы, дистанционные графы, предельные теоремы, законы нуля или единицы, свойства первого порядка.

DOI: 10.4213/rm9626

Содержание

1. Введение

Понятие о случайном графе является сейчас одним из центральных в дискретной математике. Однако до середины 50-х годов XX в. систематической теории случайных графов не было. Были лишь разрозненные работы, в которых случайные графы так или иначе возникали в качестве инструмента (см.,

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00612, 15-01-00350), грантов Президента РФ МД-6277.2013.1, МК-2184.2014.1 и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-2519.2012.1).

например, [1]–[3]). И лишь классические статьи [4]–[6] П. Эрдёша и А. Реньи, опубликованные на рубеже 50-х и 60-х годов, заложили основы современной науки о случайных графах. За прошедшие полвека теория случайных графов выросла в мощную и бурно развивающуюся дисциплину, богатую как фундаментальными результатами, так и приложениями в различных областях математики, информатики, биологии и т. д.

В широком смысле этого слова случайный граф – это случайный элемент, принимающий значения в некотором множестве графов и имеющий заданное распределение. К настоящему времени глубоко исследован целый ряд моделей случайного графа – от классической модели Эрдёша–Реньи и ее естественных обобщений до моделей веб-графов, социальных, биологических сетей и т. д. (см. [7]–[16]).

В настоящем обзоре мы сконцентрируемся на модели Эрдёша–Реньи случайного графа. Также мы рассмотрим некоторые обобщения этой модели, мотивированные задачами теории кодирования и комбинаторной геометрии. При этом мы, разумеется, не станем обсуждать все многообразие результатов, полученных в области за пять десятилетий, но рассмотрим исключительно важный специальный пласт фактов, совокупность которых правильнее всего характеризовать выражением “законы нуля или единицы для свойств случайных графов”.

В последующих разделах мы раскроем смысл всех терминов, которые мы пока что употребляли без точных определений.

2. Случайные графы в модели Эрдёша–Реньи и их простейшие свойства

Прежде всего напомним определение случайного графа в биномиальной модели Эрдёша–Реньи. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V_N, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_N = \{1, \dots, N\}$. *Случайный граф в модели Эрдёша–Реньи* – это случайный элемент $G(N, p)$ со значениями в множестве Ω_N и распределением $\mathsf{P}_{N,p}$ на $\mathscr{F}_N = 2^{\Omega_N}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2 - |E|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин. В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N (в этом случае для вероятностной меры мы по-прежнему будем использовать обозначение $\mathsf{P}_{N,p}$ вместо $\mathsf{P}_{N,p(N)}$), причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \to \infty$.

Случайный граф Эрдёша–Реньи является частным случаем более общей модели, называемой *случайным подграфом* (см., например, [8]–[11]). Пусть $H = (V, E)$ – произвольный граф без петель и кратных ребер, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Рассмотрим множество $\Omega_H = \{\widetilde{H} = (V, \widetilde{E}),\ \widetilde{E} \subseteq E\}$ всех остовных подграфов графа H. *Случайным подграфом графа* H называется случайный элемент $\mathscr{G}(H, p)$

со значениями в множестве Ω_H и распределением $\mathsf{P}_{H,p}$ на $\mathscr{F}_H = 2^{\Omega_H}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{H,p}(\widetilde{H}) = p^{|\widetilde{E}|}(1-p)^{|E|-|\widetilde{E}|}.$$

Очевидно, что если H – полный граф на N вершинах, то $\mathscr{G}(H,p) = G(N,p)$.

Именно Эрдёш и Реньи установили, что свойства случайного графа $G(N,p)$, рассматриваемые ими в первых работах по случайным графам, "возникают" в каком-то смысле внезапно. Например, для каждого из свойств "содержать клику фиксированного размера", "быть связным", "содержать 'гигантскую' компоненту" (т. е. компоненту связности, количество вершин в которой не меньше cN с одной и той же константой c для каждого N) найдется функция $p_0 = p_0(N)$, для которой это свойство не выполнено с вероятностью, стремящейся к 1 при $N \to \infty$, если $p = o(p_0)$ при $N \to \infty$, и выполнено с вероятностью, стремящейся к 1 при $N \to \infty$, если, напротив, $p_0 = o(p)$ при $N \to \infty$. Разумеется, для некоторых свойств имеют место и симметричные ситуации: при $p = o(p_0)$ свойство выполнено с предельной вероятностью 1, а при $p_0 = o(p)$ – не выполнено с аналогичной вероятностью. В любом случае такая функция p_0 называется *пороговой* для данного свойства. Скажем, для свойства "содержать гигантскую компоненту" функция $1/N$ является пороговой (см. [8]–[11]).

Здесь важно заметить, что все перечисленные свойства графов являются монотонными. Свойство называется *монотонным*, если выполнено одно из двух утверждений:

• для любых графов $H \subseteq G$ из того, что граф H обладает этим свойством, следует, что граф G также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *возрастающим*);

• для любых графов $H \subseteq G$ из того, что граф G обладает этим свойством, следует, что граф H также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *убывающим*).

Б. Боллобаш и А. Томасон в 1987 г. доказали, что у каждого монотонного свойства существует пороговая функция. Более того, если выше речь шла лишь о графах $G(N,p)$, то в теореме, которую мы приводим ниже, рассматриваются случайные подграфы $\mathscr{G}(G_n,p)$ графов G_n из практически произвольной последовательности $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 1 (Б. Боллобаш, А. Томасон, 1987, [17]). *Пусть L – некоторое возрастающее свойство графов. Пусть, кроме того, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – такая последовательность графов, что $|V(G_n)| \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая функция $p_0 = p_0(n)$, что если $p = o(p_0)$, то $\mathsf{P}_{G_n,p}(L) \to 0$, $n \to \infty$, а если $p_0 = o(p)$, то $\mathsf{P}_{G_n,p}(L) \to 1$, $n \to \infty$.*

Аналогичный результат верен и для убывающих свойств (асимптотические вероятности 0 и 1 меняются местами). Иными словами, теорема 1 дает весьма общий признак существования пороговых функций для свойств случайных подграфов $\mathscr{G}(G_n,p)$.

Теорема 1 делает заведомо непустым следующее общее рассуждение. Пусть $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – некоторая последовательность графов, а $\mathscr{C}$ – некоторый класс свойств, для которых у случайных подграфов $\mathscr{G}(G_n,p)$ существуют пороговые функции.

Пусть, кроме того, $\mathscr{P}^0$ – класс всех пороговых функций этих свойств. Тогда если $p = p(n)$ – такая функция, что

$$\forall\, p_0 \in \mathscr{P}^0 \qquad (p = o(p_0)) \vee (p_0 = o(p)),$$

то для графа $\mathscr{G}(G_n, p)$ справедлив *закон нуля или единицы для класса свойств* $\mathscr{C}$, т. е. для любого свойства из $\mathscr{C}$ вероятность того, что случайный граф $\mathscr{G}(G_n, p)$ обладает этим свойством, стремится либо к 0, либо к 1. Этот факт заставил многих авторов заняться поиском для различных последовательностей графов $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и различных классов свойств $\mathscr{C}$ таких множеств функций $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}$, что для любого $p \in \mathscr{P}_{\mathscr{C}}$ случайный граф $\mathscr{G}(G_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Именно такого рода задачам мы посвятим основную часть обзора. Однако, желая дать дополнительную мотивировку нашему исследованию, мы продолжим ниже обсуждение пороговых функций для случайного графа $G(N, p)$.

Итак, вернемся к случайному графу $G(N, p)$. В 1960 г. П. Эрдёш и А. Реньи доказали теорему о существовании пороговой функции для свойства "$G(N, p)$ содержит копию данного сбалансированного графа" (определение сбалансированного графа дано ниже в этом абзаце), которая позже была обобщена А. Ручинским и А. Винсом на случай произвольного (не обязательно сбалансированного) графа. Рассмотрим произвольный граф G. В дальнейшем мы будем обозначать $v(G)$ количество вершин графа G и $e(G)$ количество его ребер. Назовем отношение $\rho(G) = e(G)/v(G)$ *плотностью графа* G. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leqslant \rho(G)$.

Теорема 2 (П. Эрдёш, А. Реньи, 1960, [5]). *Пусть G – сбалансированный граф. Тогда функция $p = N^{-1/\rho(G)}$ является пороговой для графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа G.*

Пусть теперь G – произвольный граф. Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max_{H \subseteq G} \rho(H).$$

Теорема 3 (А. Ручински, А. Винс, 1985, [18]). *Функция $p = N^{-1/\rho^{\max}(G)}$ является пороговой для графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа G.*

Кроме того, в 1981 г. Б. Боллобаш нашел асимптотическое распределение количества копий в $G(N, p)$ фиксированного строго сбалансированного графа в случае, когда вероятность проведения ребра равна пороговой вероятности появления копии рассматриваемого графа (напомним, что *строго сбалансированным графом* называется сбалансированный граф, плотность которого строго больше плотностей всех его собственных подграфов). Здесь и далее для произвольного графа G мы будем обозначать N_G количество копий G в случайном графе $G(N, p)$ (с точностью до перенумерации вершин). Пусть G – строго сбалансированный граф.

Теорема 4 (Б. Боллобаш, 1981, [19]). *Пусть a – количество автоморфизмов графа G, $p = N^{-1/\rho(G)}$. Тогда*

$$N_G \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1/a), \qquad N \to \infty.$$

Здесь $\mathrm{Pois}(1/a)$ *– пуассоновская случайная величина со средним* $1/a$.

Обозначим $L_G = \{N_G > 0\}$ свойство содержать копию графа G. Пусть функции p и $1-p$ меняются медленнее, чем любая степенная. Иными словами, для любого положительного α имеем

$$\min\{p, 1-p\}N^\alpha \to \infty, \qquad N \to \infty. \tag{1}$$

Положим

$$\mathscr{L}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{G\in\Omega_n} \{L_G, \overline{L_G}\}.$$

Тогда из теоремы 3 следует, что для любого $L \in \mathscr{L}_0$ либо $\mathsf{P}_{N,p}(L) \to 1$, $N \to \infty$, либо $\mathsf{P}_{N,p}(L) \to 0$, $N \to \infty$. Иными словами, для класса свойств $\mathscr{L}_0$ случайный граф $G(N,p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Очевидно, тот же вывод можно сделать и для $p = N^{-\alpha}$, где α – положительное иррациональное число. В то же время несложно доказать (см., например, [20]), что для любого *рационального* числа $\alpha \in (0,1]$ существует строго сбалансированный граф с плотностью $1/\alpha$. Поэтому в силу теоремы 4 случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ *не* подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств $\mathscr{L}_0$ при $\alpha \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Рассмотренные свойства могут быть записаны с помощью логических формул. Например, пусть G – полный граф на трех вершинах. Тогда свойство L_G может быть выражено формулой

$$\exists x_1\, \exists x_2\, \exists x_3 \quad (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3).$$

Эта формула является формулой первого порядка, определение которой мы напомним в следующем разделе. *Оказывается, законы нуля или единицы для класса $\mathscr{L}_0$ могут быть обобщены на класс всех свойств, выражаемых формулами первого порядка.*

В настоящей работе мы также рассматриваем один специальный случай модели случайных подграфов – так называемый *случайный дистанционный граф*. Рассмотрение дистанционных графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [21]–[28]). Впервые полный дистанционный граф, определение которого сформулировано ниже и свойства которого изучаются в данной работе, в геометрическом контексте рассмотрели в 1981 г. П. Франкл и Р. М. Уилсон. С помощью этого графа они показали, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ растет экспоненциально (см. [29]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи применили результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [21] и [30]). Таким образом, изучение внутренней структуры дистанционного графа и его подграфов играет исключительно важную роль. Наши результаты показывают, в частности, что любой подграф либо содержится в почти всех дистанционных графах, полученных из полного дистанционного графа удалением ребер, либо не содержится в почти всех таких дистанционных графах. Сейчас с исследованием дистанционных графов связаны одни из самых широко изучаемых разделов комбинаторной геометрии (см. [21]–[28], [31]). Отметим, что в то же время некоторые из этих графов изучаются и в теории кодирования (см. [32]–[34]).

Напомним определение случайного дистанционного графа (см. [35]–[45]). Пусть M – произвольное конечное множество целых чисел, $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть, кроме того, функции $a_m\colon \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\mathbb{Z}_+$, $m\in M$, таковы, что при всех $n\in\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ выполнено равенство $\sum\limits_{m\in M} a_m(n)=n$. Пусть также задана функция $c\colon \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\mathbb{Z}$. При всех $n\in\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ определим *дистанционный граф* $G_n=(V_n,E_n)$ с множеством вершин V_n, состоящим из всех n-мерных векторов, которые имеют по $a_m(n)$ координат, равных m для каждого $m\in M$, т. е.

$$
\begin{aligned}
V_n=\{\mathbf{v}=(v^1,\dots,v^n)\colon \forall\, i\in\{1,\dots,n\}\ v^i\in M;\\
\forall\, m\in M\ |\{i\in\{1,\dots,n\}\colon v^i=m\}|=a_m(n)\},
\end{aligned}
$$

и множеством ребер

$$
E_n=\{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\in V_n\times V_n\colon \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=c(n)\},
$$

где $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ – евклидово скалярное произведение. Пусть $p\colon\mathbb{N}\to[0,1]$. *Случайным дистанционным графом* называется случайный подграф $\mathscr{G}(G_n,p)$ графа G_n.

В простейшем случае *симметричного* $\{0,1\}$*-дистанционного графа*, т. е. при $n_i=4i$, $M=\{0,1\}$, $a_0=a_1=n/2$, $c=n/4$, известны пороговые вероятности для свойств из класса $\mathscr{L}_0$. Пусть $\{G_n\}_{n\in4\mathbb{N}}$ – последовательность симметричных $\{0,1\}$-дистанционных графов. Для каждого $n\in4\mathbb{N}$ обозначим $N=N(n)$ количество вершин графа G_n, т. е. $N=C_n^{n/2}$. Пусть G – произвольный строго сбалансированный граф.

Теорема 5 (М. Е. Жуковский, 2012, [41]). *Функция $p=N^{-1/\rho(G)}\sqrt{\log N}$ является пороговой для графа $\mathscr{G}(G_{4i},p)$ и свойства содержать копию графа G.*

Ввиду аналогичных результатов для случайного графа Эрдёша–Реньи эта теорема мотивирует следующий вопрос. Если функция p при любом $\alpha>0$ удовлетворяет условию (1), то подчиняется ли рассматриваемый случайный дистанционный граф закону нуля или единицы для класса свойств, выражаемых формулами первого порядка? Ответ на этот вопрос мы даем в разделе 8.

3. Язык первого порядка

Формулы первого порядка (применительно к свойствам графов) строятся с помощью символов отношения $\sim$, $=$, логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, переменных x, y, $x_1,\dots$ (переменные – это вершины графа), кванторов $\forall$, $\exists$. Символ отношения “$\sim$” выражает свойство двух вершин быть соединенными ребром.

Опишем построение формул подробнее (см. [46], [47]). Введем для этого понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $(x \sim y)$, либо имеет вид $(x = y)$, где x, y – переменные. Атом является формулой. Все входящие в атом переменные являются *свободными*. Ниже мы даем определение связанных и свободных переменных и вместе с этим дальнейшее определение формул первого порядка. Пусть G – некоторый граф (не обязательно конечный). Рассмотрим произвольные вершины i_1, i_2 этого графа. Если $i_1 \sim i_2$, то будем говорить, что формула $(x \sim y)$ *истинна* для графа G на наборе (i_1, i_2). В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $(x = y)$ истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых вершин, т. е. на наборах (i, i). Иными словами, формула истинна на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. Пусть ϕ, ϕ_1, ϕ_2 – формулы, X, X_1, X_2 и Y, Y_1, Y_2 – соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X. Конструкции $\neg\phi$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$, $(\forall\, x\ \phi)$, $(\exists x\ \phi)$ являются формулами. При этом $X \setminus \{x\}$ – множество свободных переменных формул $(\forall\, x\ \phi)$, $(\exists x\ \phi)$, а $Y \cup \{x\}$ – множество связанных переменных этих формул, $X_1 \cup X_2$ – множество свободных переменных формул $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$, $Y_1 \cup Y_2$ – множество связанных переменных этих формул, X – множество свободных переменных формулы $(\neg\phi)$, Y – множество связанных переменных этой формулы. Так же как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна для графа G, либо всегда ложна.

Определим *кванторную глубину формулы*. Глубина атома равна нулю. Глубина формул $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ равна максимуму глубин формул ϕ_1 и ϕ_2. Глубина формулы $(\neg\phi)$ равна глубине формулы ϕ. Глубина формул $(\forall\, x\, \phi)$ и $(\exists x\, \phi)$ на единицу больше глубины ϕ. Замкнутые формулы называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или одновременно ложны для любого графа G.

Приведем примеры формул первого порядка. Формула

$$\forall\, x\, \forall\, y\ [(\neg(x = y)) \Rightarrow (x \sim y)]$$

является замкнутой (обе переменные связанные) и выражает свойство графа быть полным, ее кванторная глубина равна 2. Глубина незамкнутой формулы

$$[\exists x_3\ ([x_1 \sim x_3] \wedge [x_2 \sim x_3])] \vee [\forall\, y_1\ \forall\, y_2\ ([y_1 \sim y_2] \Rightarrow [(y_1 \sim x_1) \wedge (y_2 \sim x_2)])]$$

также равна 2, переменные x_1, x_2 являются свободными, остальные – связанными.

В дальнейшем мы будем рассматривать только замкнутые формулы. Если замкнутая формула ϕ первого порядка истинна для графа G, то будем говорить, что граф G *обладает свойством первого порядка* L, которое определено формулой ϕ. Под свойством мы подразумеваем множество графов, которые этим свойством обладают. В этой связи множество графов из Ω_N, для которых истинна формула ϕ, мы будем обозначать L^N или просто L, если из контекста ясно, о каком именно количестве вершин идет речь. В дальнейшем, если выполнено равенство $\lim_{N\to\infty}\mathsf{P}_{N,p}(L)=1$, то будем говорить, что случайный граф *с асимптотической вероятностью* 1 обладает свойством L. Обозначим $\mathscr{L}$ класс свойств графов, выражаемых формулами первого порядка.

При доказательстве законов нуля или единицы для класса свойств первого порядка используется теорема Эренфойхта. Перед тем как сформулировать ее, напомним некоторые определения. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Два графа G и H называются *k-элементарно эквивалентными*, если для любого свойства первого порядка L, выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превосходит числа k, либо $G\in L$, $H\in L$, либо $G\notin L$, $H\notin L$. Два графа G и H называются *элементарно эквивалентными*, если они являются k-элементарно эквивалентными для любого натурального числа k.

Определим игру Эренфойхта $\mathrm{EHR}(G,H,k)$ на двух графах G, H, не обязательно конечных, с двумя игроками (Новатором и Консерватором) и с фиксированным числом раундов k (см. [8], [10], [35]–[40], [46], [48]–[50]). Пусть $V(G)=\{x_1,\dots,x_n\}$, $V(H)=\{y_1,\dots,y_m\}$. На ν-м ходу ($1\leqslant\nu\leqslant k$) Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu}\in V(G)$, либо $y_{j'_\nu}\in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает на μ-м ходу, скажем, вершину $x_{j_\mu}\in V(G)$, $j_\mu=j_\nu$ ($\nu<\mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\nu}\in V(H)$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu}\in V(G)$, $j_\mu\notin\{j_1,\dots,j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu}\in V(H)$, что $j'_\mu\notin\{j'_1,\dots,j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1},\dots,x_{j_k}\in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1},\dots,y_{j'_k}\in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1},\dots,x_{h_l}$; $y_{h'_1},\dots,y_{h'_l}$, $l\leqslant k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны:

$$G\big|_{\{x_{h_1},\dots,x_{h_l}\}}\cong H\big|_{\{y_{h'_1},\dots,y_{h'_l}\}}.$$

Сформулируем, наконец, теорему Эренфойхта о связи между элементарной эквивалентностью и игрой Эренфойхта.

Теорема 6 (А. Эренфойхт, 1960, [48]). *Пусть G, H – два графа, k – натуральное число. Графы G, H являются k-элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре* $\mathrm{EHR}(G,H,k)$.

Из этой теоремы, очевидно, следует, что два графа являются элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда для любого $k\in\mathbb{N}$ у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G,H,k)$.

Для того чтобы продемонстрировать, для каких задач оказывается полезна теорема Эренфойхта, докажем с ее помощью, что свойство связности нельзя записать на языке первого порядка. Предположим противное. Пусть k – глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство связности. Рассмотрим связный граф G, являющийся бесконечной цепью, и несвязный граф $H = H_1 \sqcup H_2$, являющийся объединением двух бесконечных цепей H_1 и H_2. Такие графы не являются k-элементарно эквивалентными в силу предположения. Тогда по теореме 6 у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$. Докажем, что это не так.

Введем обозначение, которое мы будем использовать в дальнейшем. Пусть X – произвольный граф, A и B – два его подграфа, $x \in V(A)$, $y \in V(B)$. Обозначим $d_X(x, y)$ наименьшее среди количеств ребер в цепях, являющихся подграфами в X и соединяющих вершины x и y. Положим

$$d_X(x, B) = d_X(B, x) = \min_{\widetilde{y} \in V(B)} d_X(x, \widetilde{y}),$$
$$d_X(A, B) = \min_{\widetilde{x} \in V(A)} d_X(\widetilde{x}, B).$$

Заметим, что если граф X несвязный, то цепи, соединяющей вершины x и y, может и не существовать. Если цепи не существует, то положим $d_X(x, y) = \infty$. Для любого натурального числа n мы считаем, что $n < \infty$.

Предположим, что выбранные в первых i раундах, $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, вершины $x_1, \ldots, x_i \in V(G)$, $y_1, \ldots, y_i \in V(H)$ обладают свойством i-отделимости, определенным ниже.

Пусть $y_{j_1}, \ldots, y_{j_u} \in V(H_1)$, $y_{j_{u+1}}, \ldots, y_{j_i} \in V(H_2)$, где $j_1 < \cdots < j_u$, $j_{u+1} < \cdots < j_i$ – попарно различные числа. Пусть, кроме того, σ – такая перестановка на множестве $\{1, \ldots, i\}$, что вершины $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}$ *в цепи G следуют подряд* (т. е. для любого $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ между вершинами $x_{\sigma(j)}$ и $x_{\sigma(j+1)}$ в цепи G не лежит ни одной из вершин $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+2)}, \ldots, x_{\sigma(i)}$ и для любого $j \in \{1, \ldots, i-2\}$ в цепи G между вершинами $x_{\sigma(j)}$ и $x_{\sigma(j+2)}$ находится вершина $x_{\sigma(j+1)}$). Будем говорить, что вершины $x_1, \ldots, x_i$, $y_1, \ldots, y_i$ *обладают свойством i-отделимости*, если

• для любых $\nu_1 \in \{1, \ldots, i-1\}$, $\nu_2 \in \{\nu_1 + 1, \ldots, i\}$ выполнено

$$d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) < 2^{k-i+1} \Leftrightarrow d_H(y_{\nu_1}, y_{\nu_2}) < 2^{k-i+1}$$

и, более того, если $d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) < 2^{k-i+1}$, то

$$d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) = d_H(y_{\nu_1}, y_{\nu_2});$$

• вершины $y_{\sigma(h_1)}, \ldots, y_{\sigma(h_u)}$ следуют подряд в цепи H_1, вершины $y_{\sigma(h_{u+1})}, \ldots, y_{\sigma(h_i)}$ следуют подряд в цепи H_2, где $h_1 < \cdots < h_u$, $h_{u+1} < \cdots < h_i$ – попарно различные числа, отображение σ на множестве $\{h_1, \ldots, h_u\}$ принимает значения $j_1, \ldots, j_u$, а на множестве $\{h_{u+1}, \ldots, h_i\}$ – значения $j_{u+1}, \ldots, j_i$.

Сделанное нами предположение, очевидно, верно при $i = 1$. Далее действуем по индукции и разбираем возможные случаи.

Пусть в $(i+1)$-м раунде Новатором выбрана вершина x_{i+1} в графе G. Докажем, что Консерватор сможет выбрать такую вершину $y_{i+1} \in V(H)$, что вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$-отделимости.

Найдем "ближайшие" к вершине x_{i+1} вершины среди $x_1, \ldots, x_i$. Если вершина x_{i+1} в цепи G лежит между вершинами x_ν и x_μ для некоторых $\nu, \mu \in \{1, \ldots, i\}$, то Консерватор должен руководствоваться следующей стратегией. Если вершины y_ν и y_μ принадлежат одной цепи, то в силу свойства i-отделимости вершин $x_1, \ldots, x_i$, $y_1, \ldots, y_i$ Консерватор в графе H сможет выбрать такую вершину y_{i+1}, что

$$d_G(x_\nu, x_{i+1}) = d_H(y_\nu, y_{i+1}) I(d_H(y_\nu, y_{i+1}) < 2^{k-i}) + d_1 I(d_H(y_\nu, y_{i+1}) \geqslant 2^{k-i}), \tag{2}$$

$$d_G(x_\mu, x_{i+1}) = d_H(y_\mu, y_{i+1}) I(d_H(y_\mu, y_{i+1}) < 2^{k-i}) + d_2 I(d_H(y_\mu, y_{i+1}) \geqslant 2^{k-i}) \tag{3}$$

при некоторых $d_1, d_2 \geqslant 2^{k-i}$. Если же вершины y_ν и y_μ принадлежат разным цепям, то хотя бы одно из чисел $d_G(x_{i+1}, x_\nu)$, $d_G(x_{i+1}, x_\mu)$ не меньше, чем 2^{k-i}. Будем для определенности считать, что $\sigma^{-1}(\nu) < \sigma^{-1}(\mu)$. И пусть, например, $d_G(x_{i+1}, x_\nu) < 2^{k-i}$. Тогда Консерватор выберет такую вершину y_{i+1}, что $d_H(y_{i+1}, y_\nu) = d_G(x_{i+1}, x_\nu)$ и ближайшая к y_{i+1} вершина среди $y_1, \ldots, y_i$ в H, не считая y_ν, находится на расстоянии от нее, не меньшем 2^{k-i}. Очевидно, что вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$-отделимости. Если же $d_G(x_{i+1}, x_\nu) \geqslant 2^{k-i}$, $d_G(x_{i+1}, x_\mu) \geqslant 2^{k-i}$, то в силу свойства i-отделимости вершин $x_1, \ldots, x_i$, $y_1, \ldots, y_i$ выполнено неравенство $d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}) \geqslant 2^{k-i+1}$, где χ – наименьшее такое натуральное число, что вершина $y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}$ принадлежит той же цепи, что и вершина $y_{\sigma^{-1}(\nu)}$, если такая вершина имеется. В этом случае (существует конечное число χ) Консерватор сможет выбрать в той же цепи такую вершину y_{i+1}, что

$$d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{i+1}) \geqslant 2^{k-i}, \qquad d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}, y_{i+1}) \geqslant 2^{k-i}.$$

В противном случае Консерватор сможет выбрать такую вершину y_{i+1}, что

$$\min_{j \in \{1, \ldots, i\}} d_H(y_j, y_{i+1}) = d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{i+1}) \geqslant 2^{k-i}.$$

Очевидно, что вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$-отделимости.

Если, наконец, вершина x_{i+1} в цепи G является "крайней" и $i > 1$, т. е. либо

$$d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(i-1)}) = d_G(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i-1)}) + d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(i)}), \tag{4}$$

либо

$$d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(2)}) = d_G(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) + d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(1)}), \tag{5}$$

то Консерватор выберет такую новую "крайнюю вершину" y_{i+1}, принадлежащую цепи, которой принадлежит вершина $y_{\sigma(i)}$ (если выполнено равенство (4)) или вершина $y_{\sigma(1)}$ (если выполнено равенство (5)), что

$$d_H(y_{\sigma(i)}, y_{i+1}) = d_G(x_{\sigma(i)}, x_{i+1}),$$

если выполнено (4), и

$$d_H(y_{\sigma(1)}, y_{i+1}) = d_G(x_{\sigma(1)}, x_{i+1}),$$

если выполнено (5). Очевидно, что вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ и в этом случае обладают свойством $(i+1)$-отделимости. В случае $i = 1$ стратегия Консерватора очевидна.

Пусть в $(i+1)$-м раунде Новатором выбрана вершина y_{i+1} в графе H_1 (без ограничения общности выбираем одну из цепей графа H). Докажем, что Консерватор сможет выбрать такую вершину $x_{i+1} \in V(G)$, что вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$-отделимости. Найдем "ближайшие" к вершине y_{i+1} вершины среди $y_1, \ldots, y_i$ в цепи H_1. Пусть вершина y_{i+1} в цепи H_1 лежит между вершинами y_ν и y_μ для некоторых $\nu, \mu \in \{1, \ldots, i\}$. Если $|\sigma^{-1}(\nu) - \sigma^{-1}(\mu)| = 1$, то в силу свойства i-отделимости вершин $x_1, \ldots, x_i$, $y_1, \ldots, y_i$ Консерватор в графе G сможет выбрать такую вершину x_{i+1}, что равенства (1), (2) выполнены для некоторых $d_1, d_2 \geqslant 2^{k-i}$. Если $|\sigma^{-1}(\nu) - \sigma^{-1}(\mu)| > 1$, то в силу свойства i-отделимости вершин $x_1, \ldots, x_i$, $y_1, \ldots, y_i$ выполнены неравенства

$$d_{H_1}(y_\nu, y_\mu) \geqslant 2^{k-i+1}, \quad d_G(x_\nu, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\nu)+1)}) \geqslant 2^{k-i+1},$$
$$d_G(x_\mu, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\mu)-1)}) \geqslant 2^{k-i+1}$$

(для определенности будем считать, что $\sigma^{-1}(\nu) < \sigma^{-1}(\mu)$). Если, например, $d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}) < 2^{k-i}$, то Консерватор сможет выбрать такую вершину x_{i+1}, что

$$d_G(x_\nu, x_{i+1}) = d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}), \qquad d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\nu)+1)}) \geqslant 2^{k-i}.$$

Если, наконец, $\min\{d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}), d_{H_1}(y_\mu, y_{i+1})\} \geqslant 2^{k-i}$, то Консерватор выберет такую вершину x_{i+1}, что $d_G(x_\nu, x_{i+1}) = 2^{k-i}$. Легко заметить, что во всех рассмотренных случаях вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $y_1, \ldots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$-отделимости. Случай "крайней" вершины y_{i+1} разбирается аналогичным образом.

Таким образом, если Консерватор будет руководствоваться описанной стратегией, то по прошествии k раундов выбранные вершины $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ будут обладать свойством k-отделимости и, следовательно, индуцированные подграфы $G\big|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$ и $H\big|_{\{y_1,\ldots,y_k\}}$ будут изоморфны. Поэтому Консерватор победит. Тем самым, мы доказали, что свойство связности нельзя выразить формулой первого порядка, а стало быть, формулами первого порядка не ограничиваются формальные записи всех возможных свойств. Свойство связности графа выразимо *формулой второго порядка*, т. е. формулой, в которой кванторы ставятся и по предикатам:

$$\big(\exists X\, \forall x\, \exists y\, \big[[(X(x)) \Rightarrow ((\neg(X(y))) \wedge (x \sim y))] \wedge [(\neg(X(x))) \Rightarrow ((X(y)) \wedge (x \sim y))]\big]\big).$$

Это свойство означает, что множество вершин графа можно так разбить на два подмножества X и $\overline{X}$, что для любой вершины из X найдется вершина из $\overline{X}$, соединенная с ней ребром, и для любой вершины из $\overline{X}$ найдется вершина из X, соединенная с ней ребром (иными словами, граф связен).

4. Закон нуля или единицы для $G(N,p)$ при $p = \mathrm{const}$

Определение закона нуля или единицы для случайного графа $\mathscr{G}(G_n,p)$ для класса свойств $\mathscr{C}$ было дано в разделе 2. Если $\mathscr{C}$ – класс всех свойств первого порядка, то мы будем просто говорить, что *случайный граф $\mathscr{G}(G_n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы*. Такое сокращение мотивировано тем, что, как мы покажем в этом разделе, случайный граф $G(N,p)$, где p – константа, подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств первого порядка и этот результат нельзя расширить до языка второго порядка.

Последнее обстоятельство совсем легко прояснить. Докажем, что, например, граф $G(N,0.5)$ не подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств второго порядка. Рассмотрим формулу второго порядка

$$\begin{aligned}(\exists X\,\forall x_1\,\forall y_1\,\exists x_2\,\exists y_2\ ((x_1\sim y_1)\ \Rightarrow\ ((X(x_1,y_1,x_2,y_2))\wedge(x_2\nsim y_2)\\ \wedge(\forall x\,\forall y\ (((x\neq x_2)\vee(y\neq y_2))\ \Rightarrow\ (\neg(X(x_1,y_1,x,y)))))\\ \wedge(\forall x\,\forall y\ (((x\neq x_1)\vee(y\neq y_1))\ \Rightarrow\ (\neg(X(x,y,x_2,y_2)))))))).\end{aligned}$$

Свойство, выраженное этой формулой, означает, что не более половины пар вершин в графе образует ребра. Вероятность того, что в графе $G(N,0.5)$ количество ребер не превосходит $N(N-1)/4$, равна

$$\sum_{i=0}^{[N(N-1)/4]} C^i_{N(N-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{N(N-1)/2}\to\frac{1}{2}\,,\qquad N\to\infty.$$

Таким образом, предел отличен от 0 и от 1, а следовательно, закон нуля или единицы для класса свойств второго порядка не выполнен.

Перейдем теперь к обсуждению справедливости закона нуля или единицы для $G(N,p)$ с постоянным p и класса свойств первого порядка. Дадим некий удобный критерий, верный при любых p, не только постоянных. Этот критерий будет следствием из теоремы 6 (см., например, [8]). Итак, обозначим $\mathsf{P}_{N,M,p}$ декартово произведение мер $\mathsf{P}_{N,p}\times\mathsf{P}_{M,p}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Случайный граф $G(N,p)$ подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда для любого $k\in\mathbb{N}$*

$$\lim_{N,M\to\infty}\mathsf{P}_{N,M,p}(\{(A,B)\colon \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \mathrm{EHR}(A,B,k)\})=1.$$

Доказательство. Пусть выполнен закон нуля или единицы. Предположим, что при некотором $k\in\mathbb{N}$ предел вероятности существования выигрышной стратегии Консерватора в игре с k раундами либо не существует, либо не равен 1. Тогда существует частичный предел, отличный от 1. Иными словами, найдутся такие возрастающие последовательности чисел $N_i\uparrow\infty$, $M_i\uparrow\infty$, что предел вероятности существования выигрышной стратегии Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(G(N_i,p(N_i)),G(M_i,p(M_i)),k)$ равен c, где $0\leqslant c<1$. Пусть $X_{N,M}$ – множество всех таких пар остовных подграфов A, B в полных графах K_N, K_M соответственно, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A,B,k)$.

Тогда, очевидно,

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,M_i,p}(X_{N_i,M_i}) = 1 - c.$$

В силу теоремы 6 для любой пары $(A, B) \in X_{N,M}$ существует такое свойство первого порядка $L(A, B)$, кванторная глубина которого ограничена числом k, что либо $A \in L(A, B)$, $B \notin L(A, B)$, либо $A \notin L(A, B)$, $B \in L(A, B)$.

Заметим, что существует лишь конечное количество различных свойств, выражаемых формулами кванторной глубины k (см., например, [46]). Для любых $N, M \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathscr{U}(N, M)$ множество всех различных свойств среди $L(A, B)$, $(A, B) \in X_{N,M}$. Пусть $\mathscr{U}$ – множество всех различных свойств в $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{U}(N_i, M_i)$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{N_i,M_i,p}(X_{N_i,M_i}) &= \mathsf{P}_{N_i,M_i,p}\Bigg(\bigcup_{L\in\mathscr{U}} \big(\,(L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i})\big)\Bigg)\\ &\leqslant \sum_{L\in\mathscr{U}} \mathsf{P}_{N_i,M_i,p}\big((L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i})\big).\end{aligned}$$

Пусть δ – такое положительное число, что $c + \delta < 1$. Тогда существует такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $i > i_0$ справедливо неравенство

$$\mathsf{P}_{N_i,M_i,p}(X_{N_i,M_i}) > 1 - c - \delta.$$

Следовательно, для каждого $i > i_0$ существует такое $L = L(i) \in \mathscr{U}$, что

$$\mathsf{P}_{N_i,M_i,p}\big((L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i})\big) > \frac{1 - c - \delta}{|\mathscr{U}|}.$$

Поэтому существуют такие последовательность $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и свойство $L \in \mathscr{U}$, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}_{N_{i_j},M_{i_j},p}\big((L^{N_{i_j}} \times \overline{L^{M_{i_j}}}) \cup (\overline{L^{N_{i_j}}} \times L^{M_{i_j}})\big) > \frac{1 - c - \delta}{|\mathscr{U}|}.$$

Значит,

$$\max\Big\{\mathsf{P}_{N_{i_j},M_{i_j},p}(L^{N_{i_j}} \times \overline{L^{M_{i_j}}}), \mathsf{P}_{N_{i_j},M_{i_j},p}(\overline{L^{N_{i_j}}} \times L^{M_{i_j}})\Big\} > \frac{1 - c - \delta}{2|\mathscr{U}|}.$$

Так как L – свойство первого порядка, выражаемое формулой с ограниченной числом k кванторной глубиной, то $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(L) \in \{0, 1\}$. А стало быть, существуют сколь угодно большие N, M, при которых

$$\mathsf{P}_{N,M,p}(L^N \times \overline{L^M}) > \frac{1 - c - \delta}{2|\mathscr{U}|}.$$

Получили противоречие.

Зафиксируем теперь произвольное $k \in \mathbb{N}$ и предположим, что предел вероятности того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре с k раундами, равен 1. Докажем, что утверждение теоремы верно для любой формулы, кванторная глубина которой ограничена числом k. Предположим, что найдется такая формула первого порядка глубины k, что либо предела вероятности обладания соответствующим свойством L не существует и все частичные пределы принадлежат множеству $\{0,1\}$, либо существует (частичный) предел, отличный от нуля и единицы.

В первом случае пусть $N_i \uparrow \infty$, $M_i \uparrow \infty$ – такие последовательности, что $\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,p}(L) = 0$, $\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{M_i,p}(L) = 1$. Тогда

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,M_i,p}(\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i}) = 1.$$

В силу теоремы 6 для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой пары $(A,B) \in \overline{L^{N_i}} \times L^{M_i}$ у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A,B,k)$. Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,M_i,p}\bigl(\{(A,B)\colon \text{у Новатора есть выигрышная стратегия в игре } \mathrm{EHR}(A,B,k)\}\bigr) = 1.$$

Получили противоречие.

Во втором случае существует частичный предел, отличный от 0 и 1. Пусть $N_i \uparrow \infty$ – такая последовательность, что $\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,p}(L) = c \in (0,1)$. Тогда

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,N_{i+1},p}(\overline{L^{N_i}} \times L^{N_{i+1}}) = (1-c)c.$$

В силу теоремы 6 для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой пары $(A,B) \in \overline{L^{N_i}} \times L^{N_{i+1}}$ у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A,B,k)$. Следовательно, при достаточно больших i имеем

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{N_i,N_{i+1},p}\bigl(\{(A,B)\colon \text{у Новатора есть выигрышная стратегия в игре } \mathrm{EHR}(A,B,k)\}\bigr) > \frac{(1-c)c}{2}\,.$$

Снова получили противоречие. Теорема доказана.

В 1969 г. Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький и В. А. Таланов (и независимо в 1976 г. Р. Фагин) доказали, что случайный граф $G(N,p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если p не зависит от N.

Теорема 8 (Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький и В. А. Таланов, 1969, [51]; Р. Фагин, 1976, [52]). *Случайный граф $G(N,p)$ при фиксированном p подчиняется закону нуля или единицы.*

Доказательство. В случае $p \in \{0,1\}$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $p \in (0,1)$. В силу теоремы 7 для доказательства теоремы достаточно предъявить стратегию Консерватора, которая является выигрышной с вероятностью, стремящейся к 1. Эта стратегия опирается на свойство графов, определенное ниже, которое мы будем использовать и в следующих разделах. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что граф H обладает *свойством полного расширения уровня s* (которое мы будем обозначать S_s), если для любых целых неотрицательных чисел a, b, удовлетворяющих неравенству $a+b \leqslant s$, и для любых вершин $v_1,\dots,v_a$, $u_1,\dots,u_b \in V(H)$ найдется такая вершина $z \in V(H)$, что для любых

$i \in \{1, \ldots, a\}$, $j \in \{1, \ldots, b\}$ вершины v_i, z соединены ребром в H, а вершины u_j, z не соединены ребром в H. Легко заметить, что если графы A, B обладают свойством полного расширения уровня s, то у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, s)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(N, p)$ обладает свойством S_s с вероятностью, стремящейся к 1. Пусть $v_1, \ldots, v_a$, $u_1, \ldots, u_b \in V_N$ для некоторых чисел a и b. Обозначим $U_{v_1,\ldots,v_a}^{u_1,\ldots,u_b}$ множество всех таких графов из Ω_N, что существует вершина $z \in V_N$, соединенная ребром с каждой вершиной из $v_1, \ldots, v_a$ и не соединенная ни с одной из $u_1, \ldots, u_b$. Заметим, что

$$\mathsf{P}_{N,p}\bigl(\overline{U_{v_1,\ldots,v_a}^{u_1,\ldots,u_b}}\bigr) = (1 - p^a(1-p)^b)^{N-a-b} \leqslant (1 - \min\{p, 1-p\}^s)^{N-s}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}_{N,p}(\overline{S_s}) = \mathsf{P}_{N,p}\Biggl(\bigcup_{a=0}^{s} \bigcup_{b=0}^{s-a} \bigcup_{v_1,\ldots,v_a,u_1,\ldots,u_b \in V_N} \overline{U_{v_1,\ldots,v_a}^{u_1,\ldots,u_b}}\Biggr)$$
$$\leqslant s^2 N^s (1 - \min\{p, 1-p\}^s)^{N-s} \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Теорема доказана.

В следующем разделе мы сформулируем и докажем законы нуля или единицы для случайного графа $G(N, p)$, где p – различные функции от количества вершин N.

5. Законы нуля или единицы для $G(N, p)$ при $p \neq \mathrm{const}$

Доказательство теоремы 8 не изменится, если в рассуждениях заменить константу p на функцию $p = p(N)$, которая при каждом $\alpha > 0$ обладает свойством (1). Поэтому для таких функций p также справедлив закон нуля или единицы.

Теорема 9. *Пусть $p\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$ – функция, которая при каждом $\alpha > 0$ обладает свойством (1). Тогда случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.*

В разделе 2 мы доказали, что из существования для любого рационального $\alpha \in (0, 1]$ строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$ следует отсутствие закона нуля или единицы для случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$. Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 10 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]; А. Ручински, А. Винс, 1986, [20]). *Пусть $\alpha > 0$ – рациональное число. Если $\alpha > 2$ или $\alpha \in (1 + 1/(l+1), 1 + 1/l)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы. Во всех остальных случаях случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется.*

Доказательство. Разобьем рассуждение на три части. В первой части мы дадим набросок доказательства того, что при $\alpha \in (0,1]$ закона нуля или единицы нет. Во второй части мы обсудим отсутствие этого закона при $\alpha = 1+1/l$, $l \in \mathbb{N}$, и при $\alpha > 2$. А третью часть посвятим доказательству этого закона при $\alpha \in (1+1/(l+1), 1+1/l)$.

Случай 1: $\alpha \in (0,1]$. Как уже было сказано выше, случай $\alpha \in (0,1]$ следует из теоремы 4 и существования строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$, которое доказано в [20]. В настоящей работе мы не приводим ни доказательства первого факта, ни полного доказательства последнего факта. Однако последний факт мы все же частично обоснуем. А именно, мы предполагаем, что утверждение о существовании строго сбалансированного графа доказано для $\alpha \in (2/3, 1]$, и затем для любого $\alpha \leqslant 2/3$ приводим конструкцию строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$. Итак, во-первых, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть G – строго сбалансированный граф с плотностью ρ. Тогда существует строго сбалансированный граф с плотностью* $1/2+\rho$.

Доказательство. Пусть G_1, G_2 – графы, изоморфные G и не имеющие общих вершин. Пусть, кроме того, $V(G_1) = \{x_1^1, \dots, x_n^1\}$, $V(G_2) = \{x_1^2, \dots, x_n^2\}$, причем существует такой изоморфизм $f\colon G_1 \to G_2$, что $f(x_i^1) = x_i^2$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Определим граф H следующим образом:

$$V(H) = V(G_1) \cup V(G_2), \qquad E(H) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \bigl\{\{x_1^1, x_1^2\}, \dots, \{x_n^1, x_n^2\}\bigr\}.$$

Очевидно, что плотность графа H равна $1/2+\rho$. Докажем, что он строго сбалансированный. Пусть K – некоторый подграф графа H. Положим $K \cap G_1 = K_1$, $K \cap G_2 = K_2$. Обозначим $e = e(K) - e(K_1) - e(K_2)$. Так как G – строго сбалансированный граф и $e \leqslant \min\{v(K_1), v(K_2)\}$, имеем

$$\begin{aligned}\rho(K) = \frac{e(K_1)+e(K_2)+e}{v(K_1)+v(K_2)} &< \frac{v(K_1)\rho + v(K_2)\rho + e}{v(K_1)+v(K_2)} \\ &= \rho + \frac{e}{v(K_1)+v(K_2)} \leqslant \rho + \frac{1}{2} = \rho(H).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь предположим, что для любого $\alpha \in (2/3, 1]$ существование строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$ доказано. Докажем, что существует строго сбалансированный граф с плотностью ρ, где $\rho \geqslant 3/2$ – произвольное число. Число ρ допускает единственное представление в виде

$$\rho = \frac{1}{2}n + \rho_0, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \rho_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right).$$

Так как строго сбалансированный граф с плотностью ρ_0 существует, то по лемме 1 существует и строго сбалансированный граф с плотностью ρ.

В случае 1 доказательство теоремы завершено.

Случай 2: $\alpha = 1+1/l$, $l \in \mathbb{N}$, или $\alpha > 2$. Отсутствие закона нуля или единицы при $\alpha = 1+1/l$, где $l \in \mathbb{N}$, следует из того, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует дерево (которое, очевидно, является строго сбалансированным графом) с плотностью $l/(l+1)$. Если $\alpha > 2$, то с вероятностью $(1-N^{-\alpha})^{C_N^2}$, стремящейся к 1, в графе $G(N, N^{-\alpha})$ нет ребер, а следовательно, случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

В случае 2 доказательство теоремы завершено.

Случай 3: $\alpha \in (1+1/(l+1), 1+1/l)$. Пусть, наконец, $l \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (1+1/(l+1), 1+1/l)$. Пусть, кроме того, $k \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $\widetilde{\Omega}_N$ множество всех графов в Ω_N, обладающих следующим свойством. Граф G принадлежит $\widetilde{\Omega}_N$ тогда и только тогда, когда любой его подграф на $l+2$ вершинах не является связным, любой его связный подграф является деревом, для любого дерева H на не более чем $l+1$ вершинах в G существует не менее k компонент, являющихся копиями H. Из теоремы 2 следует, что с вероятностью, стремящейся к 1, в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$ любой подграф на $l+2$ вершинах не является связным, любой связный подграф является деревом, существует копия любого дерева H на не более чем $l+1$ вершинах. Докажем, что более сильное утверждение $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(\widetilde{\Omega}_N) = 1$ следует из сформулированного ниже результата. Обозначим $\widetilde{N}_G$ случайную величину, равную наибольшему количеству копий графа G в случайном графе $G(N,p)$, не пересекающихся по вершинам.

Теорема 11 (Б. Кройтер, 1996, [53]). *Пусть $p\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ – произвольная функция, G – произвольный граф. Обозначим*

$$\Phi_G(N) = \min_{\varnothing \subset H \subseteq G} \{N^{v(H)} p^{e(H)}\}.$$

Если $\Phi_G(N) \to \infty$ при $N \to \infty$, то для некоторых чисел $c, C > 0$

$$\mathsf{P}_{N,p}(c\Phi_G(N) \leqslant \widetilde{N}_G \leqslant N_G \leqslant C\Phi_G(N)) \to 1.$$

Пусть $G_1 \subset G_2$ – два дерева, $v(G_2) \leqslant l+1$. Тогда, очевидно,

$$\Phi_{G_1}(N) = N^{v(G_1)-\alpha(v(G_1)-1)} = N^{\alpha-(\alpha-1)v(G_1)} > N^{\alpha-(\alpha-1)v(G_2)} = \Phi_{G_2}(N).$$

Поэтому в силу теоремы 11 с вероятностью, стремящейся к 1, количество компонент, являющихся копиями G_1, в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно, $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(\widetilde{\Omega}_N) = 1$.

Пусть $N, M \in \mathbb{N}$, $A \in \widetilde{\Omega}_N$, $B \in \widetilde{\Omega}_M$. Докажем, что в этом случае у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$ (а стало быть, по доказанному вероятность того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$, стремится к 1 при $N, M \to \infty$). В первом раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_1 в одном из графов (например, в A). Пусть X_1 – древесная компонента в A, содержащая x_1. Тогда, так как $B \in \widetilde{\Omega}_M$, в B найдется компонента Y_1, изоморфная X_1. Пусть при соответствующем изоморфизме вершина x_1 переходит в вершину y_1. Эту вершину и выберет Консерватор в первом раунде. Пусть сыграно i раундов,

$1 \leqslant i < k$. Пусть, кроме того, в графе A выбраны вершины $x_1, \ldots, x_i$ и компоненты $X_1, \ldots, X_j$, $j \leqslant i$, в графе B выбраны вершины $y_1, \ldots, y_i$ и компоненты $Y_1, \ldots, Y_j$ и при этом выполнены следующие свойства.

(i.1) Существует изоморфизм $f\colon X_1 \cup \cdots \cup X_j \to Y_1 \cup \cdots \cup Y_j$, переводящий граф X_r в граф Y_r для каждого $r \in \{1, \ldots, j\}$.

(i.2) Вершины $x_1, \ldots, x_i$ принадлежат графу $X_1 \cup \cdots \cup X_j$, вершины $y_1, \ldots, y_i$ принадлежат графу $Y_1 \cup \cdots \cup Y_j$.

Пусть в $(i+1)$-м раунде Новатор выбирает вершину y_{i+1}, например, в графе B. Если $y_{i+1} \in V(Y_1 \cup \cdots \cup Y_j)$, то Консерватор выберет вершину $x_{i+1} = f^{-1}(y_{i+1})$. Таким образом, выбранные в $(i+1)$-м раунде в графе A вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$ и компоненты $X_1, \ldots, X_j$ и выбранные тогда же в графе B вершины $y_1, \ldots, y_{i+1}$ и компоненты $Y_1, \ldots, Y_j$ обладают свойствами $(i+1.1)$ и $(i+1.2)$. Если же $y_{i+1} \notin V(Y_1 \cup \cdots \cup Y_j)$, то найдем компоненту Y_{j+1} в графе B, содержащую вершину y_{i+1}. Так как $A \in \widetilde{\Omega}_N$, то в A найдется компонента X_{j+1}, изоморфная Y_{j+1}. Пусть при соответствующем изоморфизме вершина y_{j+1} переходит в вершину x_{j+1}. Эту вершину и выберет Консерватор в $(i+1)$-м раунде. Таким образом, и в этом случае выбранные в $(i+1)$-м раунде в графе A вершины $x_1, \ldots, x_{i+1}$ и компоненты $X_1, \ldots, X_{j+1}$ и выбранные тогда же в графе B вершины $y_1, \ldots, y_{i+1}$ и компоненты $Y_1, \ldots, Y_{j+1}$ обладают свойствами $(i+1.1)$ и $(i+1.2)$. Поэтому в последнем раунде Консерватор одержит победу, ведь компоненты, содержащие выбранные обоими игроками вершины, окажутся изоморфными. В силу теоремы 7 случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы.

Рассмотрение случая 3 завершено, и теорема 10 доказана.

В 1988 г. в той же работе [50] Дж. Спенсер и С. Шела доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы при любом иррациональном $\alpha > 0$. Прежде чем сформулировать и доказать теорему, проведем построение необходимых для этого конструкций.

Рассмотрим такие графы $H, G, \widetilde{H}, \widetilde{G}$, что

$$V(H) = \{x_1, \ldots, x_k\}, \qquad V(G) = \{x_1, \ldots, x_l\},$$
$$V(\widetilde{H}) = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_k\}, \qquad V(\widetilde{G}) = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l\},$$

причем $H \subset G$, $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ (тем самым, $k < l$). Граф $\widetilde{G}$ называется (G, H)-*расширением графа* $\widetilde{H}$, когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Rightarrow \{\widetilde{x}_{i_1}, \widetilde{x}_{i_2}\} \in E(\widetilde{G}) \setminus E(\widetilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_1}\} \in E(G) \setminus E(H) \Leftrightarrow \{\widetilde{x}_{i_1}, \widetilde{x}_{i_2}\} \in E(\widetilde{G}) \setminus E(\widetilde{H}),$$

то $\widetilde{G}$ называется *точным расширением*, а пары (G, H) и $(\widetilde{G}, \widetilde{H})$ считаются *изоморфными.* Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$v(G, H) = |V(G) \setminus V(H)|, \qquad e(G, H) = |E(G) \setminus E(H)|,$$
$$f_\alpha(G, H) = v(G, H) - \alpha e(G, H).$$

Если для любого такого графа S, что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S,H) > 0$, то пара (G,H) называется *α-надежной* (см. [8], [10]). Если же для любого такого S, что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $f_\alpha(G,S) < 0$, то пара (G,H) называется *α-жесткой*. Введем, наконец, понятие максимальной пары. Пусть $\widetilde{H} \subset \widetilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leqslant |V(\widetilde{G})|$. Пару $(\widetilde{G},\widetilde{H})$ назовем *(K,T)-максимальной в* Γ, если у любого такого подграфа $\widetilde{T}$ графа $\widetilde{G}$, что $|V(\widetilde{T})| = |V(T)|$ и $\widetilde{T} \cap \widetilde{H} \neq \widetilde{T}$, не существует такого точного (K,T)-расширения $\widetilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\widetilde{G} \setminus \widetilde{T})$, что каждая вершина из $V(\widetilde{K}) \setminus V(\widetilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\widetilde{G}) \setminus V(\widetilde{T})$. Граф $\widetilde{G}$ называется *(K,T)-максимальным в* Γ, если у любого такого подграфа $\widetilde{T}$ графа $\widetilde{G}$, что $|V(\widetilde{T})| = |V(T)|$, не существует такого точного (K,T)-расширения $\widetilde{K}$ в $\Gamma\setminus(\widetilde{G}\setminus\widetilde{T})$, что каждая вершина из $V(\widetilde{K})\setminus V(\widetilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\widetilde{G}) \setminus V(\widetilde{T})$.

Обратимся теперь к случайному графу $G(N,p)$. Пусть $\alpha > 0$, $p = N^{-\alpha}$. Пусть, кроме того, пара (G,H) является α-надежной и

$$V(H) = \{x_1,\dots,x_k\}, \qquad V(G) = \{x_1,\dots,x_l\}.$$

Рассмотрим произвольные вершины $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k \in V_N$ и случайную величину $N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k)$ на вероятностном пространстве $(\Omega_N,\mathscr{F}_N,\mathsf{P}_{N,p})$, которая каждому графу $\mathscr{G}$ из Ω_N ставит в соответствие количество (G,H)-расширений подграфа в $\mathscr{G}$, индуцированного на $\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\}$ (граф X является *подграфом графа Y, индуцированным на множество* $S \subset V(Y)$, если $V(X) = S$ и для любых вершин $x,y \in S$ справедливо $\{x,y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x,y\} \in E(Y)$). Иными словами, пусть $W \subset V_N\setminus\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\}$ – множество, мощность $|W|$ которого равна $l-k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k+1,k+2,\dots,l$, что граф $\mathscr{G}\big|_{\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_l\}}$ является (G,H)-расширением графа $\mathscr{G}\big|_{\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\}}$, то положим $I_W(\mathscr{G}) = 1$. В противном случае $I_W(\mathscr{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k)$ определяется следующим равенством:

$$N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) = \sum_{W \subset V_N\setminus\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\},\ |W|=l-k} I_W.$$

Обозначим $\mathsf{E}_{N,p}$ математическое ожидание по мере $\mathsf{P}_{N,p}$.

Теорема 12 (Дж. Спенсер, 1990, [54]). *С вероятностью, стремящейся к* 1, *для любых вершин* $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* N_0, *что для любого натурального* $N > N_0$ *справедливо соотношение*

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\mathsf{E}_{N,p}N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) &\leqslant N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k)\\ &\leqslant (1+\varepsilon)\mathsf{E}_{N,p}N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k).\end{aligned}$$

При этом

$$\mathsf{E}_{N,p}N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) = \Theta(N^{f_\alpha(G,H)}).$$

В дальнейшем для двух функций $f = f(N)$ и $g = g(N)$, стремящихся к бесконечности при $N \to \infty$, мы будем использовать обозначение $f \sim g$, если для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших N выполнено соотношение $(1-\varepsilon)f(N) \leqslant g(N) \leqslant (1+\varepsilon)f(N)$.

Помимо теоремы 12 Дж. Спенсер и С. Шела (см. [8], [50]) для исследования законов нуля или единицы доказали теорему о количестве максимальных расширений подграфов в случайном графе (для случая "запрещенных" жестких пар). Более формально, пусть случайная величина $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k)$ ставит в соответствие каждому графу $\mathscr{G}$ из Ω_N количество таких точных (G,H)-расширений $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{H} = \mathscr{G}\big|_{\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\}}$, что пара $(\widetilde{G},\widetilde{H})$ является (K,T)-максимальной в $\mathscr{G}$. Сформулируем теорему, доказанную в работе [50], об асимптотическом поведении этой случайной величины.

Теорема 13 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Пусть пара (K,T) является α-жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью* 1 *для любых вершин $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k$ выполнено*

$$\begin{aligned} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) &\sim N_{(G,H)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) \\ &\sim \mathsf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k) = \Theta\bigl(N^{f_\alpha(G,H)}\bigr). \end{aligned}$$

Сформулируем, наконец, утверждение об ограниченности количества α-жестких расширений в случайном графе. Пусть $r,t \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Последовательность графов $H_1,G_1,\dots,H_i,G_i$ называется *α-жесткой (r,t)-цепью*, если она удовлетворяет следующим условиям: $H_1 \subset G_1$, пары (G_j,H_j) являются α-жесткими, $v(G_j,H_j) \leqslant t$ для всех $j \in \{1,\dots,i\}$, $H_j \subset G_1 \cup \dots \cup G_{j-1}$, $G_j \cap (G_1 \cup \dots \cup G_{j-1}) = H_j$ для всех $j \in \{2,\dots,i\}$, $v(H_1) = r$. Также рассматривается "вырожденный" случай $t = 0$. В этом случае $i = 1$ и $H_1 = G_1$ (хотя в основном определении включение $H_1 \subset G_1$ предполагалось строгим).

Лемма 2 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Существует число $K_t(r)$ такое, что с вероятностью, стремящейся к* 1*, для любых вершин $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_r \in V_N$ выполнено следующее свойство. Если $H_1,G_1,\dots,H_i,G_i$ – такая α-жесткая (r,t)-цепь, что в графе $\mathscr{G} \in \Omega_N$ существует точное $(G_1 \cup \dots \cup G_i, H_1)$-расширение графа $\mathscr{G}\big|_{\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_r\}}$, то $v(G_1 \cup \dots \cup G_i, H_1) \leqslant K_t(r)$.*

Доказательство. Пусть m – такое натуральное число, что $[(1/\alpha)v] + 1 > (1/\alpha)v + 1/m$ для любого $v \in \{1,\dots,t\}$. Пусть, кроме того, $\widetilde{\Omega}_N$ – множество всех таких графов из Ω_N, что в каждом из них не существует подграфа с плотностью, большей $1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит $2mt^2r + r$. По теореме 3 имеем $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\widetilde{\Omega}_N) = 1$.

Пусть $\mathscr{G} \in \widetilde{\Omega}_N$, $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_r \in V_N$, а $i \in \mathbb{N}$ – некоторое количество пар (G_j,H_j), $H_j \subset G_j \subset \mathscr{G}$, удовлетворяющих условию леммы. Тогда

$$\rho(G_1 \cup \dots \cup G_i) \geqslant \frac{[(1/\alpha)v_1] + 1 + \dots + [(1/\alpha)v_i] + 1}{r + v_1 + \dots + v_i},$$

где $v_1, \ldots, v_i \leqslant t$. Легко заметить, что при $i = 2mtr$ справедливы неравенства

$$v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leqslant 2mt^2 r + r$$

и

$$\rho(G_1 \cup \dots \cup G_i) > \frac{1}{\alpha} - \frac{r}{r+i} + \frac{i/m}{r+ti} > \frac{1}{\alpha},$$

что противоречит определению множества $\widetilde{\Omega}_N$. Следовательно, $i < 2mtr$. Поэтому в качестве $K_t(r)$ можно выбрать величину $2mt^2 r$. Лемма доказана.

Обратимся теперь к закону нуля или единицы для иррационального α.

Теорема 14 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Пусть $\alpha > 0$ – иррациональное число. Тогда случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы.*

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Положим $a_k = 0$, $a_j = j + 1 + K_{a_{j+1}}(j+1)$ для всех $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, где $K_t(r)$ – величина, определенная в формулировке леммы 2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $\widetilde{\Omega}_N$ множество всех графов X из Ω_N, которые обладают следующими свойствами.

• В X не существует подграфа с плотностью, большей $1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит a_0. Более того, для любого такого графа H, что $v(H) \leqslant a_0$, $\rho^{\max}(H) < 1/\alpha$, в X найдется копия H.

• Пусть (G, H) – α-надежная пара, причем $v(G) \leqslant a_0 + a_1$. Тогда в графе X для любого подграфа $\widetilde{H}$ на $v(H)$ вершинах найдется такое точное (G, H)-расширение $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{H}$, что пара $(\widetilde{G}, \widetilde{H})$ является (K, T)-максимальной для любой α-жесткой пары (K, T) с $v(K) \leqslant a_1 + 1$.

• Для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ и любой α-жесткой (j, a_j)-цепи $H_1, G_1, \ldots, H_i, G_i$ в X выполнено неравенство $v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leqslant a_{j-1}$.

По теореме 3, теореме 13 и лемме 2 выполнено $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\widetilde{\Omega}_N) = 1$. Пусть $N, M \in \mathbb{N}$, $A \in \widetilde{\Omega}_N$, $B \in \widetilde{\Omega}_M$. В силу теоремы 7 для доказательства теоремы 14 нам достаточно предъявить выигрышную стратегию Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$. Вершину, выбранную в j-м раунде, $j \in \{1, \ldots, k\}$, мы будем обозначать x_j, если эта вершина выбрана в графе A, и y_j, если эта вершина выбрана в графе B.

Пусть в первом раунде Новатор выбрал некоторую вершину, скажем, в графе A. Пусть, кроме того, $H_1, G_1, \ldots, H_i, G_i$ – такая α-жесткая $(1, a_1)$-цепь в A, где $H_1 = (\{x_1\}, \varnothing)$, что граф $G_1 \cup \dots \cup G_i$ является (K, T)-максимальным для любой α-жесткой пары (K, T), удовлетворяющей условию $v(K, T) \leqslant a_1$. Выполнено неравенство

$$v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leqslant 1 + K_{a_1}(1) = a_0.$$

Так как $A \in \widetilde{\Omega}_N$, то максимальная плотность графа $X_1 := G_1 \cup \dots \cup G_i$ меньше, чем $1/\alpha$. Поэтому в силу определения множества $\widetilde{\Omega}_M$ в графе B существует подграф Y_1, изоморфный графу X_1, являющийся (K, T)-максимальным в B для любой такой пары (K, T), что $v(K, T) \leqslant a_1$. Консерватор выберет вершину y_1, являющуюся образом вершины x_1 при изоморфизме $X_1 \to Y_1$.

Пусть $j \in \{1, \dots, k-1\}$ – количество сыгранных раундов. Пусть, кроме того, в графах A и B выбраны подграфы X_j и Y_j соответственно, которые обладают следующими свойствами.

(j.1) Вершины $x_1, \dots, x_j$ принадлежат графу X_j, вершины $y_1, \dots, y_j$ принадлежат графу Y_j.

(j.2) Графы X_j и Y_j изоморфны, $v(X_j) = v(Y_j) \leqslant a_{j-1}$.

(j.3) Графы X_j и Y_j являются (K,T)-максимальным в A и B соответственно для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_j$.

Очевидно, графы X_1 и Y_1 обладают свойствами (1.1), (1.2) и (1.3). Докажем, что, какую бы вершину (x_{j+1} или y_{j+1}) ни выбрал Новатор в $(j+1)$-м раунде, Консерватор сможет найти такую вершину (y_{j+1} или x_{j+1}) и графы $X_{j+1} \subset A$, $Y_{j+1} \subset B$, что они обладают свойствами $(j+1.1)$, $(j+1.2)$ и $(j+1.3)$.

Если в $(j+1)$-м раунде Новатор выбрал вершину, лежащую внутри графа X_j (графа Y_j), Консерватор сможет найти вершину, являющуюся ее образом при изоморфизме $X_j \to Y_j$ ($Y_j \to X_j$). В этом случае положим $X_{j+1} = X_j$, $Y_{j+1} = Y_j$.

Пусть в $(j+1)$-м раунде Новатор выбрал некоторую вершину x_{j+1} вне графа X_j (без ограничения общности будем считать, что Новатор выбрал вершину в графе A). Пусть, кроме того, $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ – такая α-жесткая $(j+1, a_{j+1})$-цепь, что $H_1 = A\big|_{\{x_1,\dots,x_{j+1}\}}$ и граф $X_{j+1} := G_1 \cup \dots \cup G_i$ является (K,T)-максимальным для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$. Так как $A \in \widetilde{\Omega}_N$, то $v(X_{j+1}) \leqslant a_j$.

Предположим, что в графе X_{j+1} существует такой подграф S, содержащий $A\big|_{\{x_1,\dots,x_j\}}$, что $f_\alpha(S \cup X_j, X_j) < 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что в S нет подграфов, обладающих тем же свойством. Иными словами, для любого подграфа $\widetilde{S}$ в S, содержащего $A\big|_{\{x_1,\dots,x_j\}}$, выполнено неравенство $f_\alpha(\widetilde{S} \cup X_j, X_j) > 0$ (неравенство строгое, так как α – иррациональное число). Поэтому $f_\alpha(S \cup X_j, \widetilde{S} \cup X_j) < 0$. Таким образом, пара $(S \cup X_j, X_j)$ является α-жесткой. Получили противоречие со свойством (j.3) графа X_j. Следовательно, $f_\alpha(S \cup X_j, X_j) > 0$ для любого такого графа S, что $A\big|_{\{x_1,\dots,x_j\}} \subset S \subseteq X_{j+1}$, $S \cap X_{j+1} \neq S$, т.е. пара $(X_{j+1} \cup X_j, X_j)$ является α-надежной.

Так как $B \in \widetilde{\Omega}_M$ и $v(X_j \cup X_{j+1}) \leqslant a_{j-1} + a_j \leqslant a_0 + a_1$, то в графе B найдется такое точное $(X_{j+1} \cup X_j, X_j)$-расширение Y графа Y_j, что пара (Y, Y_j) является (K,T)-максимальной для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$. Тогда существуют такие граф $Y_{j+1} \subset Y$ и изоморфизм $f\colon X_{j+1} \cup X_j \to Y$, переводящий граф X_{j+1} в Y_{j+1}, что $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_j) = y_j$. Положим $y_{j+1} = f(x_{j+1})$. Так как граф Y_j обладает свойством (j.3) и $a_j < a_{j+1}$, то граф Y_j является (K,T)-максимальным для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$. Следовательно, граф Y также является (K,T)-максимальным для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$.

Чтобы доказать, что графы X_{j+1} и Y_{j+1} обладают свойствами $(j+1.1)$, $(j+1.2)$ и $(j+1.3)$, осталось обосновать (K,T)-максимальность графа Y_{j+1} для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$. Предположим противное. Тогда существует такой граф Z на не более чем a_{j+1} вершинах, имеющий непустое пересечение с Y_j, что $Y_{j+1} \cap Z = \varnothing$ и пара $(Z \cup Y_{j+1}, Y_{j+1})$ является α-жесткой. Если граф Z не содержится целиком в Y, то пара $(Z \cup Y, Y)$ является α-жесткой и мы приходим к противоречию с максимальностью графа Y. Если же Z целиком содержится в Y, то обозначим $\widetilde{Z}$ граф, являющийся образом графа Z при отображении f^{-1}. Так как пара $(\widetilde{Z} \cup X_{j+1}, X_{j+1})$ является α-жесткой, то приходим к противоречию с максимальностью графа X_{j+1}. Таким образом, граф Y_{j+1} действительно является (K,T)-максимальным для любой пары (K,T), удовлетворяющей условию $v(K,T) \leqslant a_{j+1}$.

К концу игры выбраны вершины $x_1, \ldots, x_k \in V(A)$, $y_1, \ldots, y_k \in V(B)$, а также такие графы $X_k \subset A$ и $Y_k \subset B$, что вершины $x_1, \ldots, x_k$ принадлежат графу X_k, вершины $y_1, \ldots, y_k$ принадлежат графу Y_k и графы X_k и Y_k изоморфны. Следовательно, Консерватор выигрывает игру. Теорема доказана.

6. Некоторые обобщения результатов из разделов 4 и 5

В данном разделе мы приводим (без доказательств) известные результаты, относящиеся к вероятностям свойств первого порядка случайных графов в различных моделях. Эти результаты обобщают и дополняют теоремы, сформулированные в предыдущих двух разделах.

В разделе 5 мы доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы, если α – рациональное число из интервала $(0,1)$. Возникает естественный вопрос: можно ли немного "сдвинуть" функцию $p = N^{-\alpha}$ таким образом, чтобы закон был выполнен? В 1991 г. Дж. Спенсер и Т. Лучак доказали, что для любого рационального $\alpha \in (0,1)$ существует такая функция $p = N^{-\alpha+o(1)}$, что случайный граф $G(N,p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема 15 (Дж. Спенсер, Т. Лучак, 1991, [55]). *Пусть a, b, $a < b$, – взаимно простые натуральные числа. Пусть, кроме того,*

$$p_1(N) = ((b-a+1)(\log N + \omega(N)\log\log N)N^{-a})^{1/b},$$

где ω – такая стремящаяся к бесконечности функция, что $p_1(N) = N^{-a/b+o(1)}$. Тогда случайный граф $G(N, p_1)$ подчиняется закону нуля или единицы. Более того, существует такая функция $p_2 = p_2(N)$, удовлетворяющая условиям $p_2(N) < N^{-a/b}$ и $p_2(N) = N^{-a/b+o(1)}$, что случайный граф $G(N, p_2)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Рассмотрим произвольное число $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ и случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$. Для всех ли свойств первого порядка существует предел вероятности этих свойств? Ответ на этот вопрос был получен в 1988 г. Дж. Спенсером и С. Шела.

Теорема 16 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ существует такое свойство первого порядка L, что последовательность $\{\mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L)\}_{N\in\mathbb{N}}$ не сходится.*

Более того, в этой работе доказано, что для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ существуют такие стремящиеся к бесконечности функции $\beta_1(N)$ и $\beta_2(N)$ и такое свойство первого порядка L, что сходимость вероятности этого свойства отсутствует и при

$$N^{-\alpha}/\beta_1 < p < N^{-\alpha}\beta_2.$$

В 1992 г. Дж. Линч частично ответил на поставленный выше вопрос в случае $\alpha \geqslant 1$.

Теорема 17 (Дж. Линч, 1992, [56]). *Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\alpha = (l+1)/l$. Тогда для любого свойства первого порядка L существует $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L)$. Если же $p = c/N$, где c – произвольное положительное число, то для любого свойства первого порядка L предел $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L)$ существует и может быть выражен функцией от c, использующей в своей записи само число c, сложение, умножение, деление и степени числа e.*

Вернемся теперь к закону нуля или единицы и зададимся следующим вопросом. Будет ли случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняться закону нуля или единицы при ограничении кванторной глубины формул первого порядка для каких-нибудь рациональных α из интервала $(0,1)$? Этот вопрос впервые был задан в работе М. Макартур, где был получен следующий результат.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $\mathscr{L}_k^\infty$ – множество свойств первого порядка, записываемых с помощью формул, содержащих бесконечное количество логических связок, кванторная глубина которых ограничена числом k.

Теорема 18 (М. Макартур, 1997, [57]). *Если $\alpha \in (0, 1/(k-1))$, то для любого свойства $L \in \mathscr{L}_k^\infty$ предел $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L)$ равен либо 0, либо 1. При $\alpha = 1/(k-1)$ этот закон нарушается.*

Исследованию законов нуля или единицы для свойств, выражаемых конечными предложениями с ограниченной кванторной глубиной, посвящен следующий раздел нашей работы.

Другие работы, в которых изучалось предельное поведение вероятностей свойств первого порядка случайных графов, были посвящены в основном доказательству закона нуля или единицы в моделях, отличных от модели Эрдёша–Реньи. В 1987 г. Ф. Колайтис, Х. Прёмел, Б. Ротшилд доказали закон нуля или единицы для графов, свободных от полных графов K_{l+1}. Сформулируем этот результат. Пусть $\mathscr{G}_N$ – множество всех графов, не содержащих K_{l+1}, на множестве вершин $\{1,\dots,N\}$. На $(\mathscr{G}_N, 2^{\mathscr{G}_N})$ зададим равномерное распределение вероятностей P_N:

$$\mathsf{P}_N(X) = \frac{|X|}{|\mathscr{G}_N|}, \qquad X \subseteq \mathscr{G}_N.$$

Теорема 19 (Ф. Колайтис, Х. Прёмел, Б. Ротшилд, 1987, [58]). *Для любого свойства первого порядка L выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_N(L) \in \{0,1\}.$$

В 2007 г. Р. Гилман, Ю. Гуревич, А. Мясников доказали закон нуля или единицы для бесконечного графа. Пусть X – связный граф, множество вершин которого бесконечно. Для любого натурального числа n обозначим $B_n(X)$ индуцированный подграф в X на множестве вершин, до которых существует путь от вершины x длины, не превосходящей n. Будем говорить, что *граф X подчиняется закону нуля или единицы*, если этому закону для любого $x \in V(X)$ подчиняется случайный граф, имеющий равномерное распределение на множестве индуцированных подграфов в $B_n(X)$. Как доказали Гилман, Гуревич и Мясников, закон нуля или единицы верен, если граф X обладает двумя свойствами: ограниченной степенью и свойством дублированных подграфов. Определим эти свойства. Будем говорить, что граф X имеет *ограниченную степень*, если существует такое число K, что для любой вершины x графа X ее степень не превосходит K. Граф X обладает *свойством дублированных подграфов*, если для любого его конечного подграфа A существует такой подграф $B \subset X$, изоморфный A, что множества вершин графов A и B не пересекаются и между вершинами графа A и вершинами графа B нет ребер графа X.

Теорема 20 (Р. Гилман, Ю. Гуревич, А. Мясников, 2007, [59]). *Пусть X – бесконечный связный граф с ограниченной степенью, обладающий свойством дублированных подграфов. Тогда X подчиняется закону нуля или единицы.*

7. Ограничение кванторной глубины

Как мы доказали в разделе 5, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы при рациональных α, принадлежащих интервалу $(0, 1]$. Оказывается, закон нуля или единицы становится выполнен и при некоторых рациональных α из интервала $(0, 1]$ при ограничении кванторной глубины формул первого порядка. Для любой последовательности графов G_n будем говорить, что случайный граф $\mathscr{G}(G_n, p)$ *подчиняется k-закону нуля или единицы*, если для любого свойства, выражаемого формулой первого порядка, кванторная глубина которой не превосходит k, вероятность того, что случайный граф $\mathscr{G}(G_n, p)$ обладает этим свойством, стремится либо к 0, либо к 1. Для доказательства k-законов нуля или единицы используется следствие из теоремы 6, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 7.

Теорема 21. *Случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N,M\to\infty} \mathsf{P}_{N,M,p}(\{(A,B)\colon \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \mathrm{EHR}(A,B,k)\}) = 1.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 7 с одним-единственным изменением: нужно рассматривать не произвольное k, а именно то значение k, для которого доказывается теорема.

В 2012 г. мы доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы при рациональных α из интервала $(0, 1/(k-2))$.

Теорема 22 (М. Е. Жуковский, 2012, [60]). *Пусть $p = N^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/(k-2)$. Тогда случайный граф $G(N,p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

Доказательство мы приводим только для случая рациональных α, так как справедливость закона при иррациональных α утверждает теорема 14. Введем некоторые вспомогательные определения, которые мы будем использовать в доказательстве и далее в этом разделе.

Рассмотрим произвольные графы T, K. Пусть $T \subset K$, любая вершина графа T соединена с некоторой вершиной из $V(K) \setminus V(T)$ и для любого такого графа S, что $T \subset S \subset K$, справедливо неравенство $v(S,T) - \alpha \cdot e(S,T) > 0$, но $v(K,T) - \alpha \cdot e(K,T) = 0$. В этом случае пару (K,T) будем называть *α-нейтральной*. Рассмотрим произвольные вершины $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_k \in V_N$. Для произвольной пары графов (G,H), где $H \subset G$, рассмотрим случайную величину $\widehat{N}^{(K,T)}_{(G,H)}(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_k)$, которая ставит в соответствие каждому графу $\mathscr{G} \in \Omega_N$ количество таких точных (G,H)-расширений $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{H} = \mathscr{G}\big|_{\{\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_k\}}$, что пара $(\widetilde{G}, \widetilde{H})$ является (K,T)-максимальной в $\mathscr{G}$. Для этих случайных величин выполнен результат, подобный теореме 13.

Теорема 23 (М. Е. Жуковский, 2012, [61]). *Пусть пара (G,H) является α-надежной, пара (K,T) – α-нейтральной. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_k$ выполнено*

$$\widehat{N}^{(K,T)}_{(G,H)}(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_k) \sim \mathsf{E}_{N,p} \widehat{N}^{(K,T)}_{(G,H)}(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_k) = \Theta\bigl(N^{f_\alpha(G,H)}\bigr).$$

Рассмотрим множества

$$\left(0, \frac{1}{k-1}\right), \quad \left\{\frac{1}{k-1}\right\}, \quad \left(\frac{1}{k-1}, \frac{2}{2k-3}\right), \quad \left\{\frac{2}{2k-3}\right\}, \quad \left(\frac{2}{2k-3}, \frac{1}{k-2}\right).$$

В зависимости от того, какому из этих множеств принадлежит число α, доказательство теоремы 22 разобьется на случаи.

1) Пусть $\alpha < 1/(k-1)$. Пусть, кроме того, $\mathscr{E} \in \mathscr{F}_N$ – множество графов, обладающих свойством полного расширения уровня $k-1$ (см. раздел 4). Покажем, что $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\mathscr{E}) = 1$. Справедливы соотношения

$$\mathsf{P}_{N,p}(\Omega_N \setminus \mathscr{E}) \leqslant (k-1)^2 N^{k-1} (1-p^{k-1})^N \leqslant (k-1)^2 N^{k-1} \exp(-N^{1-(k-1)\alpha}) \to 0,$$

т. е. действительно $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\mathscr{E}) = 1$. Но раз с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-1$, то, очевидно, с вероятностью $\mathsf{P}_{N,M,p}$, стремящейся к 1, в игре $\mathrm{EHR}(G(N,p(N)), G(M,p(M)), k)$ у Консерватора есть выигрышная стратегия. Следовательно, в силу теоремы 21 выполнен k-закон нуля или единицы.

2) Пусть $\alpha = 1/(k-1)$. Из предыдущего пункта, очевидно, следует, что с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-2$. Тогда для $k-2$ ходов у Консерватора с вероятностью $\mathsf{P}_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N,p(N)),G(M,p(M)),k)$.

Заметим, что если $H \subset G$ и $v(G,H) = 1$, $v(H) = k-2$, то пара (G,H) является α-надежной. Действительно, $e(G,H) \leqslant k-2$ и $1-\alpha(k-2) > 0$. Аналогично, если $v(G,H) = 2$, $v(H) = k-2$, то пара (G,H) также является α-надежной. Если же $v(G,H) = 1$, $v(H) = k-1$, то пара (G,H) является либо α-надежной, либо α-нейтральной. При этом α-нейтральной она является тогда и только тогда, когда $e(G,H) = k-1$. Рассмотрим такую α-нейтральную пару (K,T).

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α-надежной пары (G,H), что $v(G) \leqslant k$, и любых подграфов $\widetilde{H}_A \subset A$, $\widetilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие (K,T)-максимальные точные (G,H)-расширения $\widetilde{G}_A$ и $\widetilde{G}_B$ графов $\widetilde{H}_A$ и $\widetilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\widetilde{G}_A,\widetilde{H}_A)$ и $(\widetilde{G}_B,\widetilde{H}_B)$ является (K,T)-максимальной.

Пусть в игре $\mathrm{EHR}(A,B,k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1,\ldots,x_{k-2}$ в графе A и вершины $y_1,\ldots,y_{k-2}$ в графе B. Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 21 и 23, если независимо от выбора еще двух вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N,p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Итак, пусть Новатор выбрал вершину x_{k-1}, например, в графе A. У выбранного графа $A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}}$ либо существует (K,T)-расширение в A, либо нет. Если оно существует (предположим, его образует вершина x_k), то пара $\big(A\big|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}, A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}}\big)$ является α-надежной. Следовательно, Консерватор сможет найти такие вершины y_{k-1}, $y_k \in V(B)$, что граф $B\big|_{\{y_1,\ldots,y_k\}}$ является точным $\big(A\big|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}, A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}}\big)$-расширением графа $B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-2}\}}$. Тогда на $(k-1)$-м ходу Консерватор выбирает вершину y_{k-1}. Далее, если Новатор выберет вершину, соединенную с каждой из $k-1$ выбранных, то Консерватор сможет найти вершину, соединенную с каждой из выбранных в своем графе. Если же он выберет, скажем, вершину y, не соединенную с какой-нибудь из $y_1,\ldots,y_{k-1}$, то пара $\big(B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-1},y\}}, B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-1}\}}\big)$ является α-надежной и Консерватор победит в силу определения графа A.

Если же (K,T)-расширения не существует, то Консерватор сможет выбрать такую *подходящую ему* вершину y_{k-1} (т. е. $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,k-2\}$ $((x_i \sim x_{k-1}) \Leftrightarrow (y_i \sim y_{k-1})))$, что у графа $B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-1}\}}$ не существует (K,T)-расширения в B. Дальнейшая выигрышная стратегия Консерватора очевидна.

3) Пусть $1/(k-1) < \alpha < 2/(2k-3)$. С вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-2$. Тогда для $k-2$ ходов у Консерватора с вероятностью $\mathsf{P}_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N,p(N)),G(M,p(M)),k)$.

Если для графа H выполнено равенство $v(H) = k-2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H, пара (G, H) является α-надежной и для любого графа G на $k-1$ вершинах, содержащего H, пара (G, H) также является α-надежной. Если же $v(H) = k-1$, то существует такой граф G на k вершинах, содержащий H, что пара (G, H) является α-жесткой (пара (G, H) будет α-жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k-1$). Обозначим такую пару (K, T). В остальных случаях (при том же значении $v(H)$) пара (G, H) является α-надежной.

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α-надежной пары (G, H), что $v(G) \leqslant k$, и любых подграфов $\widetilde{H}_A \subset A$, $\widetilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие точные (G, H)-расширения $\widetilde{G}_A$ и $\widetilde{G}_B$ графов $\widetilde{H}_A$ и $\widetilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\widetilde{G}_A, \widetilde{H}_A)$ и $(\widetilde{G}_B, \widetilde{H}_B)$ является (K, T)-максимальной.

Пусть в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \ldots, x_{k-2}$ в графе A и вершины $y_1, \ldots, y_{k-2}$ в графе B. Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 13 и 21, если независимо от выбора еще двух вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из случая 2).

4) Пусть $\alpha = 2/(2k-3)$. Аналогично предыдущим случаям для $k-3$ ходов у Консерватора с вероятностью $\mathsf{P}_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$.

Если $v(H) = k-2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H, пара (G, H) является либо α-надежной, либо α-нейтральной (пара (G, H) будет α-нейтральной тогда и только тогда, когда $e(G, H) = 2k-3$), для любого графа G на $k-1$ вершинах, содержащего H, пара (G, H) является α-надежной. Если же $v(H) = k-1$, а $v(G) = k$, то пара (G, H) является либо α-надежной, либо α-жесткой (пара (G, H) будет α-жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k-1$).

Определим графы T_1, T_2, K_1, K_2. Пусть $T_1 \subset K_1$, $T_2 \subset K_2$. Пусть, кроме того, $v(T_1) = k-2$, $v(K_1, T_1) = 2$, $v(T_2) = k-1$, $v(K_2, T_2) = 1$ и пара (K_1, T_1) является α-нейтральной, а пара (K_2, T_2) – α-жесткой.

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α-надежной пары (G, H), что $v(G) \leqslant k$, и любых подграфов $\widetilde{H}_A \subset A$, $\widetilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие точные (G, H)-расширения $\widetilde{G}_A$ и $\widetilde{G}_B$ графов $\widetilde{H}_A$ и $\widetilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\widetilde{G}_A, \widetilde{H}_A)$ и $(\widetilde{G}_B, \widetilde{H}_B)$ является (K_1, T_1)-максимальной и (K_2, T_2)-максимальной.

Пусть в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \ldots, x_{k-3}$ в графе A и вершины $y_1, \ldots, y_{k-3}$ в графе B. Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 13, 21 и 23, если независимо от выбора еще трех вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Предположим, что Новатор выбрал вершину x_{k-2}, например, в графе A. У графа $A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}}$ либо существует (K_1,T_1)-расширение в A, либо не существует. Если его не существует, то Консерватор сможет выбрать такую подходящую ему вершину y_{k-2}, что у графа $B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-2}\}}$ нет (K_1,T_1)-расширений в B. Далее Новатор выбирает $(k-1)$-ю вершину. Если в соответствующем графе у подграфа, индуцированного на выбранные $k-1$ вершин, существует (K_2,T_2)-расширение, то выбранная $(k-1)$-я вершина и расширяющая k-я вершина образуют вместе с $k-2$ выбранными вершинами α-надежную пару. Следовательно, Консерватор сможет найти нужную ему $(k-1)$-ю вершину (для которой тоже существует (K_2,T_2)-расширение) и победит. Если (K_2,T_2)-расширения не существует, то Консерватор сможет выбрать нужную вершину, так как в соответствующем графе найдется необходимая (K_2,T_2)-максимальная α-надежная пара. Если для графа $A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}}$ существует (K_1,T_1)-расширение $A\big|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$, то пара $\big(A\big|_{\{x_1,\ldots,x_k\}},A\big|_{\{x_1,\ldots,x_{k-3}\}}\big)$ является α-надежной. Следовательно, Консерватор сможет найти такие вершины y_{k-2}, y_{k-1}, y, что вершина y_{k-2} *ведет его к победе* (т. е. $\forall\, i\in\{1,2,\ldots,k-3\}$ $((x_i\sim x_{k-2})\Leftrightarrow(y_i\sim y_{k-2})))$, а пара $\big(B\big|_{\{y_1,\ldots,y_k\}},B\big|_{\{y_1,\ldots,y_{k-2}\}}\big)$ является α-нейтральной. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае, когда (K_1,T_1)-расширения не существует.

5) Пусть $2/(2k-3)<\alpha<1/(k-2)$. Для $k-3$ ходов у Консерватора с вероятностью $\mathsf{P}_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N,p(N)),G(M,p(M)),k)$.

Если $v(H)=k-2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H, пара (G,H) является либо α-надежной, либо α-жесткой (пара (G,H) будет α-жесткой тогда и только тогда, когда $e(G,H)=2k-3$), для любого графа G на $k-1$ вершинах, содержащего H, пара (G,H) является α-надежной. Если же $v(H)=k-1$, а $v(G)=k$, то пара (G,H) является либо α-надежной, либо α-жесткой (пара (G,H) будет α-жесткой тогда и только тогда, когда $e(G,H)=k-1$). Рассмотрим T_1, T_2, K_1, K_2 и A, B – графы из пункта 4).

Пусть в игре $\mathrm{EHR}(A,B,k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1,\ldots,x_{k-3}$ в графе A и вершины $y_1,\ldots,y_{k-3}$ в графе B. Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теоремы 13 и теоремы 21, если независимо от выбора еще трех вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N,p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае 4). Теорема 22 доказана.

Мы также нашли ближайший к 1 интервал значений α, при которых случайный граф $G(N,N^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Теорема 24 (М. Е. Жуковский, 2013, [62]). *Пусть $k>3$ – произвольное натуральное число. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ – множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1}. Случайный граф $G(N,N^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, если $\alpha=1-1/(2^{k-1}+\beta)$, $\beta\in(0,\infty)\setminus\mathcal{Q}$.*

Замечание 1. В этой теореме мы рассмотрели интервал $(1-2^{1-k},1)$ и получили множество рациональных чисел α, при которых k-закон справедлив. Так как любое число из $(1-2^{1-k},1)$ представляется в виде $1-1/(2^{k-1}+\beta)$, этот закон будет выполнен при любых α из

$$\left(1-\frac{1}{2^k},1\right)\cup\left(1-\frac{1}{2^k-1},1-\frac{1}{2^k}\right)\cup\cdots$$
$$\cup\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}+1}\right)$$
$$\cup\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+(2^{k-1}-1)/2},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}}\right)\cup\cdots$$
$$\cup\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}/3},1-\frac{1}{2^{k-1}+(2^{k-1}-[2^{k-1}/3])/2}\right)\cup\cdots.$$

Длины интервалов уменьшаются при стремлении концов к $1-2^{1-k}$.

Доказательство теоремы 24. Пусть $m\in\mathbb{N}$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G,H), что $G\supset H$. Будем говорить, что граф G является *m-расширением графа H первого типа*, если $m\geqslant 3$ и выполнено следующее условие. Существует такая вершина x_1 графа G, что

$$\begin{aligned}V(G)\setminus V(H)&=\{y_1^1,\dots,y_{t_1}^1,y_1^2,\dots,y_{t_2}^2\},\\ E(G)\setminus E(H)&=\bigl\{\{x_1,y_1^1\},\{y_1^1,y_2^1\},\dots,\{y_{t_1-1}^1,y_{t_1}^1\},\{y_{t_1}^1,y_1^2\},\\ &\qquad\{y_1^2,y_2^2\},\dots,\{y_{t_2-1}^2,y_{t_2}^2\},\{y_{t_2}^2,y_{t_1}^1\}\bigr\},\end{aligned}$$

где $t_1+t_2\leqslant m-1$, $t_1\geqslant 0$, $t_2\geqslant 2$ и $\rho^{\max}(G)<m/(m-1)$ (при $t_1=0$ вершина x_1 является смежной с вершинами y_1^2, $y_{t_2}^2$). Граф G мы называем *m-расширением графа H второго типа*, если $m\geqslant 2$ и выполнено следующее условие. Существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G, что

$$G=(V(H)\sqcup\{y_1,\dots,y_t\},E(H)\sqcup\{\{x_1,y_1\},\{y_1,y_2\},\dots,\{y_{t-1},y_t\},\{y_t,x_2\}\}),$$

где $t\leqslant m-1$ и $\rho^{\max}(G)<m/(m-1)$. Граф G является *m-расширением графа H третьего типа*, если $m\geqslant 2$, $V(H)=V(G)$, $E(H)\subset E(G)$ и $\rho^{\max}(G)<m/(m-1)$.

Для произвольного натурального числа $m\geqslant 3$ определим множество графов $\mathscr{H}_m$. Пусть x – вершина. Граф без ребер на множестве вершин $\{x\}$ принадлежит $\mathscr{H}_m$. Далее, пусть $G\in\mathscr{H}_m$. Множество $\mathscr{H}_m$ содержит все попарно неизоморфные m-расширения первого, второго и третьего типов графа G.

Заметим, что любой граф G из $\mathscr{H}_m$, отличный от $(\{x\},\varnothing)$, содержит в себе конечный набор таких вложенных графов $G_1,\dots,G_t$, $G_0=(\{x\},\varnothing)\subset G_1\subset\cdots\subset G_t\subseteq G$, что выполнены следующие свойства:

– $G_i\neq G_{i+1}$ для всех $i\in\{0,1,\dots,t-1\}$;

– граф G либо совпадает с G_t, либо является m-расширением третьего типа графа G_t, а графы G_i являются m-расширениями первого или второго типа графов G_{i-1} при $i\in\{0,1,\dots,t\}$.

Такую последовательность графов $G_0, G_1, \dots, G_t, G$ будем называть *m-разложением* графа G.

Сформулируем утверждение о свойствах множества $\mathscr{H}_m$.

Лемма 3. *Выполнены следующие свойства.*

1. *Пусть G – граф из $\mathscr{H}_m$ и $G_0, G_1, \dots, G_t, G$ – его m-разложение, причем либо $t = 1$ и $G_t \neq G$, либо $t \geqslant 2$. Тогда найдутся такие натуральные числа a, b, что $b \leqslant m$ и $\rho^{\max}(G) = 1 + 1/(m - 1 + b/a)$.*

2. *Пусть $m \geqslant 2$ и $\rho \in (1, m/(m-1))$ – произвольное число. Тогда существует такое число $\eta \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $v > \eta$ у любого графа $G \in \mathscr{H}_m$ на v вершинах найдется подграф на не более чем η вершинах с плотностью, превосходящей ρ.*

Доказательство леммы начнем со свойства 1. Если $t = 1$, то $\rho(G_1) = 1$, $v(G_1) \leqslant m$. Следовательно, $\rho(G) = (v(G_1) + e)/v(G_1)$, где $e \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{1 + (v(G_1) - e)/e} < \frac{m}{m-1}\,.$$

Если $e = 1$, то $v(G_1) = m$ и $\rho(G) = 1 + 1/(m - 1 + 1)$. Если $e > 1$, то неравенство $v(G_1) > (m-1)e$ противоречит условию $v(G_1) \leqslant m$. Поэтому свойство 1 для рассмотренного случая доказано.

Пусть $t \geqslant 2$. Положим $v^{i+1} = v(G_{i+1}) - v(G_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$. Докажем, что

$$\rho(G_t) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_1/(t-1)} \quad \text{при некотором } b_1 \leqslant m.$$

Справедливы соотношения

$$\rho(G_t) = \frac{v^1 + \dots + v^t + t}{1 + v^1 + \dots + v^t} = 1 + \frac{t-1}{1 + v^1 + \dots + v^t} < 1 + \frac{1}{m-1}\,.$$

Так как $v^i \leqslant m - 1$, $i \in \{1, \dots, t\}$, то

$$m - 1 < \frac{1 + v^1 + \dots + v^t}{t-1} \leqslant \frac{1 + t(m-1)}{t-1} = m - 1 + \frac{m}{t-1}\,.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{m - 1 + m/(t-1)} \leqslant \rho(G) < 1 + \frac{1}{m-1}\,,$$

при этом

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_1/(t-1)}\,,$$

где $b_1 = 1 + v^1 + \dots + v^t - (m-1)(t-1)$. Поэтому число b_1 не превосходит m.

Докажем теперь, что

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_2/(t + e_0 - 1)}\,, \quad \text{где} \quad b_2 \leqslant m, \quad e_0 = e(G) - e(G_t).$$

Имеем

$$\rho(G) = \frac{m(t-1) + b_1 + e_0}{(m-1)(t-1) + b_1} = 1 + \frac{1}{m - 1 + (b_1 - (m-1)e_0)/(t - 1 + e_0)}\,.$$

Так как $\rho(G) < 1 + 1/(m-1)$, то $0 < b_2 \leqslant b_1 \leqslant m$, где $b_2 = b_1 - (m-1)e_0$.

Пусть, наконец, $H \subset G$, $\rho(G) < \rho(H) < m/(m-1)$. Тогда

$$\rho(H) = \frac{m(t-1)+b_1+e_0-y}{(m-1)(t-1)+b_1-x}$$

для некоторых натуральных чисел x, y. Справедливо неравенство $y \geqslant x$, так как граф G – связный. Докажем, что

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m-1+b/(t+e_0-1+x-y)}, \quad \text{где} \quad b \leqslant m.$$

Имеем

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m-1+(b_1+y(m-1)-mx-(m-1)e_0)/(t-1+e_0+x-y)}.$$

Так как $\rho(H) > \rho(G)$, то

$$\frac{b_1+y(m-1)-mx-(m-1)e_0}{t-1+e_0+x-y} < \frac{b_1-(m-1)e_0}{t-1+e_0}.$$

Но знаменатель первой дроби не больше, чем знаменатель второй. Следовательно,

$$b = b_1+y(m-1)-mx-(m-1)e_0 < b_1-(m-1)e_0 \leqslant m,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству свойства 2. В силу определения m-расширений первого и второго типа если $G_0, G_1, \ldots, G_t$, G есть m-разложение некоторого графа $G \in \mathscr{H}_m$, то $v(G_{i+1})-v(G_i) \leqslant m-1$, $e(G_{i+1})-e(G_i) = v(G_{i+1})-v(G_i)+1$ для всех $i \in \{0,\ldots,t-1\}$. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для любого графа $G \in \mathscr{H}_m$, количество вершин которого не меньше $(m-1)n+1$, справедливо неравенство $\rho(G) \geqslant mn/((m-1)n+1)$. Действительно, плотность любого графа из множества $\mathscr{H}_m$ меньше, чем $m/(m-1)$, поэтому при добавлении к нему его m-расширения первого или второго типа его плотность увеличивается. Кроме того, для любого $\rho \in (1, m/(m-1))$ найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $mn/((m-1)n+1) > \rho$. Заметим, наконец, что в любом графе из $\mathscr{H}_m$ на более чем $(m-1)(n+1)+1$ вершинах найдется подграф из $\mathscr{H}_m$, количество вершин которого находится в отрезке $[(m-1)n+1, (m-1)(n+1)+1]$. Поэтому, очевидно, для $\eta = (m-1)(n_0+1)+1$ утверждение леммы выполнено. Лемма полностью доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 24, обратимся к описанию стратегии в игре $\mathrm{EHR}\big(G(N,N^{-\alpha}), G(M,M^{-\alpha}), k\big)$, являющейся выигрышной для Консерватора с вероятностью, стремящейся к 1. Всюду далее мы считаем, что в каждом раунде игроки выбирают вершины, отличные от уже выбранных. Такое предположение не ограничивает общности в силу того, что размеры графов в рассматриваемых случаях, а также утверждения, используемые в рассуждениях, позволяют выбирать вершины, отличные от уже выбранных. Сначала мы опишем некоторые свойства графов A, B, благодаря которым Консерватор выигрывает в игре на этих графах, придерживаясь такой стратегии, а затем докажем, что случайный граф обладает этими свойствами с вероятностью, стремящейся к 1.

Пусть n_1, n_2, n_3, n_4 – некоторые натуральные числа, $n_2 \leqslant n_1$, $n_4 \leqslant n_3$, ρ – произвольное положительное число. Будем говорить, что граф G является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-*разреженным*, если он обладает следующими свойствами.

1) Пусть K – граф, количество вершин которого не превосходит n_1. Если $\rho^{\max}(K) < \rho$, то G содержит подграф, изоморфный K. Если $\rho^{\max}(K) > \rho$, то G не содержит подграфа, изоморфного K.
2) Пусть $\mathscr{H}$ – множество таких $1/\rho$-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leqslant n_1$, $v(H_2) \leqslant n_2$. Пусть $\mathscr{K}$ – множество таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \leqslant n_3$, $v(K_2) \leqslant n_4$. Тогда для любых пар $(H_1, H_2) \in \mathscr{H}$, $(K_1, K_2) \in \mathscr{K}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется подграф G_1, являющийся (K_1, K_2)-максимальным в G точным (H_1, H_2)-расширением графа G_2.

Выигрышная стратегия Консерватора, описанная ниже, опирается именно на свойство $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженности обоих графов, на которых играют Новатор и Консерватор (при некоторых значениях n_1, n_2, n_3, n_4, ρ).

Пусть $\rho = 1/\alpha$. Тогда с учетом условий доказываемой нами теоремы имеем

$$\rho \in \left(1, \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1}\right), \qquad \rho \notin \left\{1 + \frac{1}{2^{k-1} - 1 + b/a},\ a, b \in \mathbb{N},\ b \leqslant 2^{k-1}\right\}.$$

Обозначим $\eta(\rho)$ число из формулировки леммы 3, т.е. такое число, что для любого натурального $v > \eta(\rho)$ у любого графа $G \in \mathscr{H}_{2^{k-1}}$ на v вершинах найдется подграф на не более чем $\eta(\rho)$ вершинах с плотностью, превосходящей ρ. Положим

$$n_1(\rho) = \eta(\rho) + k\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right), \qquad n_2(\rho) = \eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right), \quad (6)$$

$$n_3 = 2^{k-2} + 1, \qquad n_4 = 2. \quad (7)$$

Пусть графы A, B являются $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженными. Сперва опишем стратегию Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$, а позже докажем, что случайный граф с асимптотической вероятностью 1 является $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженным. Это и завершит доказательство теоремы.

Итак, начнем со стратегии. Будем обозначать X_i граф, выбранный Новатором в i-м раунде. Оставшийся граф будем обозначать Y_i. Вершины, выбранные в графе X_i в первых i раундах, обозначим $x_i^1, \ldots, x_i^i$, в графе Y_i – $y_i^1, \ldots, y_i^i$. Итак, пусть в первом раунде Новатор выбрал вершину x_1^1. В силу леммы 3 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа X_1 в нем не существует подграфа, изоморфного некоторому графу из $\mathscr{H}_{2^{k-1}}$ с количеством вершин, превосходящим $\eta(\rho)$. Обозначим $\widetilde{X}_1^1$ подграф в X_1, изоморфный некоторому графу из $\mathscr{H}_{2^{k-1}}$, содержащий вершину x_1^1 и обладающий следующим свойством максимальности. Если v_1 – число вершин в $\widetilde{X}_1^1$, то в X_1

не существует подграфа, содержащего вершину x_1^1 и изоморфного некоторому графу из $\mathscr{H}_{2^{k-1}}$, количество вершин которого превосходит v_1. Выполнены неравенства $v_1 \leqslant \eta(\rho) < n_1(\rho)$. Поэтому в силу леммы 3 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа X_1 плотность графа $\widetilde{X}_1^1$ меньше, чем ρ. Следовательно, по свойству $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_1 в нем найдется подграф $\widetilde{Y}_1^1$, изоморфный $\widetilde{X}_1^1$. Пусть при соответствующем изоморфизме $\varphi_1 \colon \widetilde{X}_1^1 \to \widetilde{Y}_1^1$ вершина x_1^1 переходит в вершину y_1^1, которую и выберет Консерватор в первом раунде.

Пусть сыграно i раундов, $1 \leqslant i < k$. Опишем стратегию Консерватора в $(i+1)$-м раунде. Ниже мы определим ряд свойств подграфов в A, B (они обозначены (I), (II) и (III)). Мы предположим, что в A и B содержатся подграфы, обладающие этими свойствами. В соответствии со свойством (I) выбранные вершины $x_1^i, \dots, x_i^i$, $y_1^i, \dots, y_i^i$ должны принадлежать объединению этих подграфов. Затем мы докажем, что независимо от выбора Новатором вершины x_{i+1}^{i+1} Консерватор сможет найти такую вершину y_{i+1}^{i+1}, что вершины $x_1^{i+1}, \dots, x_{i+1}^{i+1}$, $y_1^{i+1}, \dots, y_{i+1}^{i+1}$ также будут содержаться в подграфах, обладающих свойствами (I), (II) и (III). Кроме того, станет очевидно, что вершины x_1^1, y_1^1 содержатся в подграфах, обладающих упомянутыми свойствами, откуда по индукции последует аналогичное утверждение для последнего раунда, т. е. для вершин $x_1^k, \dots, x_k^k$, $y_1^k, \dots, y_k^k$. В частности, из этих свойств мы выведем, что графы $X_k\big|_{\{x_1^k, \dots, x_k^k\}}$ и $Y_k\big|_{\{y_1^k, \dots, y_k^k\}}$ изоморфны.

Воспользуемся обозначением, которое мы ввели в разделе 3, а именно обозначением $d_Q(W_1, W_2)$, где Q – некоторый граф, а W_1, W_2 – некоторые его подграфы. Пусть r – произвольное натуральное число, не превосходящее i. Пусть, кроме того, $W_1, \dots, W_r$ – подграфы в Q. Будем говорить, что $W_1, \dots, W_r$ обладают (k, i, r)-свойством в Q, если

– любые два графа из $W_1, \dots, W_r$ не имеют общих вершин;

– для любых различных $j_1, j_2 \in \{1, \dots, r\}$ справедливо неравенство

$$d_Q(W_{j_1}, W_{j_2}) > 2^{k-i};$$

– для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ в графе Q не существует подграфа, являющегося 2^{k-i}-расширением графа W_j первого или второго типа;

– мощность множества $V(W_1 \cup \dots \cup W_r)$ не превосходит

$$\eta(\rho) + (i-1)\biggl(\biggl[\frac{1}{\rho - 1}\biggr] + 1\biggr).$$

Предположим, что для некоторого $r \in \{1, \dots, i\}$ графы X_i и Y_i содержат подграфы $\widetilde{X}_i^1, \dots, \widetilde{X}_i^r$ и $\widetilde{Y}_i^1, \dots, \widetilde{Y}_i^r$ соответственно, которые обладают следующими свойствами.

(I) Вершины $x_i^1, \dots, x_i^i$ принадлежат множеству $V(\widetilde{X}_i^1 \cup \dots \cup \widetilde{X}_i^r)$, вершины $y_i^1, \dots, y_i^i$ принадлежат множеству $V(\widetilde{Y}_i^1 \cup \dots \cup \widetilde{Y}_i^r)$.

(II) Графы $\widetilde{X}_i^1, \dots, \widetilde{X}_i^r$ обладают (k, i, r)-свойством в X_i, графы $\widetilde{Y}_i^1, \dots, \widetilde{Y}_i^r$ обладают (k, i, r)-свойством в Y_i.

(III) Графы $\widetilde{X}_i^j$ и $\widetilde{Y}_i^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \ldots, r\}$ и при некотором соответствующем изоморфизме (общем для всех графов, так как они не имеют общих вершин) вершины x_i^j переходят в вершины y_i^j, $j \in \{1, \ldots, i\}$.

Если $X_{i+1} = X_i$, то положим $\widetilde{X}_{i+1}^j = \widetilde{X}_i^j$, $\widetilde{Y}_{i+1}^j = \widetilde{Y}_i^j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. В противном случае положим $\widetilde{X}_{i+1}^j = \widetilde{Y}_i^j$, $\widetilde{Y}_{i+1}^j = \widetilde{X}_i^j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. Пусть φ_{i+1} – изоморфизм из $\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r$ в $\widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r$, переводящий графы $\widetilde{X}_{i+1}^j$ в $\widetilde{Y}_{i+1}^j$ при $j \in \{1, \ldots, r\}$. Пусть, кроме того, $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^j) = y_{i+1}^j$ при $j \in \{1, \ldots, i\}$. Рассмотрим далее три различные ситуации.

1. Предположим, что Новатор в $(i+1)$-м раунде выбрал вершину x_{i+1}^{i+1} из множества $V(\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r)$. Тогда Консерватор выберет $y_{i+1}^{i+1} = \varphi(x_{i+1}^{i+1})$. Заметим, что мы определили графы $\widetilde{X}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{X}_{i+1}^r, \widetilde{Y}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{Y}_{i+1}^r$, просто переобозначив графы $\widetilde{X}_i^1, \ldots, \widetilde{X}_i^r, \widetilde{Y}_i^1, \ldots, \widetilde{Y}_i^r$ и не меняя их структуры. Поэтому, как нетрудно видеть, при $i < k-1$ графы $\widetilde{X}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{X}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$-свойством в X_{i+1}, графы $\widetilde{Y}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{Y}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$-свойством в Y_{i+1}. Кроме того, графы $\widetilde{X}_{i+1}^j$ и $\widetilde{Y}_{i+1}^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \ldots, r\}$ и при соответствующем изоморфизме φ_{i+1} (одном и том же для всех графов) вершины x_{i+1}^j переходят в вершины y_{i+1}^j, $j \in \{1, \ldots, i+1\}$. Иными словами, для $(i+1)$-го раунда мы подобрали графы $\widetilde{X}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{X}_{i+1}^r, \widetilde{Y}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{Y}_{i+1}^r$, обладающие свойствами (I), (II) и (III).

2. Предположим теперь, что Новатор выбрал вершину x_{i+1}^{i+1}, не принадлежащую множеству $V(\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r)$, но при этом

$$d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r) \leqslant 2^{k-1-i}.$$

Заметим, что в силу определения графов $\widetilde{X}_{i+1}^1, \ldots, \widetilde{X}_{i+1}^r$ в графе X_{i+1} найдется ровно одна цепь $c_{X_{i+1}}$, которая проходит только через вершины графа

$$X_{i+1} \setminus (\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r)$$

(не считая последней вершины), имеет длину, не превосходящую 2^{k-1-i}, и соединяет x_{i+1}^{i+1} с некоторой вершиной $\widetilde{x}_{i+1}^l$ графа $\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r$, где $l \in \{1, \ldots, r\}$, $\widetilde{x}_{i+1}^l \in V(\widetilde{X}_{i+1}^l)$. Следовательно, пара

$$\left(\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r \cup c_{X_{i+1}}, \widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r\right)$$

является $1/\rho$-надежной. Кроме того,

$$|V(\widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r)| < \eta(\rho) + (i-1)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right) \leqslant \eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right).$$

Поэтому в силу свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_{i+1} в нем найдется точное (K_1, K_2)-максимальное $(\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r \cup c_{X_{i+1}}, \widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r)$-расширение графа $\widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r$ для всех таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_2) = 2$, $v(K_1) \leqslant 2^{k-1-i}$. Действительно,

$$\begin{aligned}|V(\widetilde{X}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{X}^r_{i+1} \cup c_{X_{i+1}})| &\leqslant \eta(\rho) + (k-2)\biggl(\biggl[\frac{1}{\rho-1}\biggr] + 1\biggr) + 2^{k-1-i} \\ &< \eta(\rho) + (k-2)\biggl(\biggl[\frac{1}{\rho-1}\biggr] + 1\biggr) + \frac{1}{\rho-1} \\ &\leqslant \eta(\rho) + (k-1)\biggl(\biggl[\frac{1}{\rho-1}\biggr] + 1\biggr) = n_1(\rho).\end{aligned}$$

Иными словами, существуют такая вершина $y^{i+1}_{i+1} \in V(Y_{i+1})$, что

$$d_{Y_{i+1}}(y^{i+1}_{i+1}, \widetilde{Y}^l_{i+1}) = d_{X_{i+1}}(x^{i+1}_{i+1}, \widetilde{X}^l_{i+1}),$$

и единственная цепь $c_{Y_{i+1}}$, имеющая длину не больше 2^{k-1-i} и соединяющая y^{i+1}_{i+1} с некоторой вершиной $\widetilde{y}^l_{i+1}$ графа $\widetilde{Y}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{Y}^r_{i+1}$, $\widetilde{y}^l_{i+1} \in V(\widetilde{Y}^l_{i+1})$. Переопределим графы $\widetilde{X}^l_{i+1}$, $\widetilde{Y}^l_{i+1}$:

$$\widetilde{X}^l_{i+1} := \widetilde{X}^l_{i+1} \cup c_{X_{i+1}}, \qquad \widetilde{Y}^l_{i+1} := \widetilde{Y}^l_{i+1} \cup c_{Y_{i+1}}.$$

Остальные графы $\widetilde{X}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{X}^{l-1}_{i+1}, \widetilde{X}^{l+1}_{i+1}, \dots, \widetilde{X}^r_{i+1}$, $\widetilde{Y}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{Y}^{l-1}_{i+1}, \widetilde{Y}^{l+1}_{i+1}, \dots, \widetilde{Y}^r_{i+1}$ оставим без изменений. Продолжим изоморфизм φ_{i+1} графов на вершины из $V(\widetilde{X}^l_{i+1})$: для конечной вершины v цепи $c_{X_{i+1}}$, отличной от $\widetilde{x}^l_{i+1}$, найдем конечную вершину u цепи $c_{Y_{i+1}}$, отличную от $\widetilde{y}^l_{i+1}$, и определим $\varphi_{i+1}(v) = u$. Тогда $\varphi_{i+1}\big|_{\widetilde{X}^j_{i+1}} : \widetilde{X}^j_{i+1} \to \widetilde{Y}^j_{i+1}$ – изоморфизм при каждом $j \in \{1, \dots, r\}$ и $\varphi_{i+1}(x^j_{i+1}) = y^j_{i+1}$ при всех $j \in \{1, \dots, i+1\}$, т.е. графы $\widetilde{X}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{X}^r_{i+1}$, $\widetilde{Y}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{Y}^r_{i+1}$ обладают свойствами (I) и (III). Докажем, что при $i < k-1$ выполнено свойство (II) (графы $\widetilde{X}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{X}^r_{i+1}$ обладают $(k, i+1, r)$-свойством в X_{i+1}, а графы $\widetilde{Y}^1_{i+1}, \dots, \widetilde{Y}^r_{i+1}$ обладают $(k, i+1, r)$-свойством в Y_{i+1}). Для этого достаточно доказать следующие утверждения:

– для любого $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l\}$

$$d_{X_{i+1}}(\widetilde{X}^j_{i+1}, \widetilde{X}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1}, \qquad d_{Y_{i+1}}(\widetilde{Y}^j_{i+1}, \widetilde{Y}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1};$$

– в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося 2^{k-i-1}-расширением графа $\widetilde{X}^l_{i+1}$ (графа $\widetilde{Y}^l_{i+1}$) первого или второго типа;
– мощности множеств $V(\widetilde{X}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{X}^r_{i+1})$, $V(\widetilde{Y}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{Y}^r_{i+1})$ не превосходят величины $\eta(\rho) + i\bigl([1/(\rho-1)] + 1\bigr)$.

Предположим, что найдутся число $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l\}$ и цепь, имеющая длину не больше 2^{k-1-i} и соединяющая некоторую вершину u графа $\widetilde{X}^l_{i+1}$ с некоторой вершиной v графа $\widetilde{X}^j_{i+1}$. Так как $2^{k-1-i} < 2^{k-i}$, то $u \in V(c_{X_{i+1}})$. Но длина цепи $c_{X_{i+1}}$ не превосходит 2^{k-1-i}. Следовательно,

$$d_{X_{i+1}}(\widetilde{X}^j_{i+1}, \widetilde{X}^l_{i+1} \setminus (c_{X_{i+1}} \setminus \{\widetilde{x}^l_{i+1}\})) \leqslant 2^{k-1-i} + 2^{k-1-i} = 2^{k-i}.$$

Однако величина в левой части неравенства равна

$$d_{X_i}(\widetilde{X}_i^l, \widetilde{X}_i^j) \quad \text{либо} \quad d_{Y_i}(\widetilde{Y}_i^l, \widetilde{Y}_i^j).$$

Получили противоречие либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{X}_i^1, \ldots, \widetilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{Y}_i^1, \ldots, \widetilde{Y}_i^r$. Таким образом, $d_{X_{i+1}}(\widetilde{X}_{i+1}^j, \widetilde{X}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1}$. Аналогично доказывается неравенство $d_{Y_{i+1}}(\widetilde{Y}_{i+1}^j, \widetilde{Y}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1}$.

Доказательство второго утверждения мы тоже приводим только для графа X_{i+1}, так как оно в точности повторяет доказательство для графа Y_{i+1}. Итак, пусть в графе X_{i+1} существует подграф W, являющийся 2^{k-1-i}-расширением первого или второго типа графа $\widetilde{X}_{i+1}^l$. Рассмотрим множество ребер

$$E = E(W) \setminus \big(E(\widetilde{X}_{i+1}^l) \cup E(W \setminus \widetilde{X}_{i+1}^l)\big).$$

Вершин, принадлежащих множеству $V(\widetilde{X}_{i+1}^l)$ и являющихся концами ребер из E, не более двух. Обозначим их v_1 и v_2 (вообще говоря, эти вершины могут совпадать). Если

$$v_1, v_2 \in V(\widetilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\widetilde{x}_{i+1}^l\}),$$

то мы приходим к противоречию либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{X}_i^1, \ldots, \widetilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{Y}_i^1, \ldots, \widetilde{Y}_i^r$. Если же хотя бы одна из вершин v_1, v_2 не принадлежит множеству

$$V(\widetilde{X}_{i+1}^l) \setminus \big(V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\widetilde{x}_{i+1}^l\}\big),$$

то в графе W найдется подграф W_1, множество вершин которого содержит

$$V(\widetilde{X}_{i+1}^l) \setminus \big(V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\widetilde{x}_{i+1}^l\}\big)$$

и который является 2^{k-i}-расширением графа

$$W\big|_{V(\widetilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\widetilde{x}_{i+1}^l\})}$$

первого или второго типа. Мы снова приходим к противоречию либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{X}_i^1, \ldots, \widetilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{Y}_i^1, \ldots, \widetilde{Y}_i^r$.

Последнее утверждение выполнено, так как количество добавленных вершин не превосходит $2^{k-1-i} \leqslant [1/(\rho - 1)] + 1$.

Если $i = k-1$, то в обоих случаях $\varphi_k \colon \widetilde{X}_k^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_k^r \to \widetilde{Y}_k^1 \cup \cdots \cup \widetilde{Y}_k^r$ – изоморфизм и $\varphi_k(x_k^j) = y_k^j$ при всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, а стало быть, графы $X_k\big|_{\{x_k^1, \ldots, x_k^k\}}$, $Y_k\big|_{\{y_k^1, \ldots, y_k^k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

3. Пусть, наконец,

$$d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \cdots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r) > 2^{k-1-i}.$$

Найдем подграф в X_{i+1}, содержащий наибольшее количество вершин, одна из которых совпадает с x_{i+1}^{i+1}, и изоморфный некоторому графу из множества $\mathscr{H}_{2^{k-1-i}}$. Обозначим полученный граф $\widetilde{X}_{i+1}^{r+1}$. В силу свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа X_{i+1} он содержит не более одного простого цикла.

Рассмотрим пару (H_1, H_2), где граф H_1 является цепью длины $[1/(\rho-1)]+1$, объединенной с графом, изоморфным $\widetilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (вершина x_{i+1}^{i+1} при соответствующем изоморфизме переходит в некоторую вершину h). Граф H_2 содержит лишь одну вершину, которая является концевой вершиной рассмотренной цепи, отличной от h. Рассмотрим, кроме того, множество $\mathscr{K}$ всех попарно неизоморфных пар (K_1, K_2), для каждой из которых найдется такой граф K, что $K \cap K_1 = K_2$, граф $K \cup K_1$ является 2^{k-1-i}-расширением графа K первого или второго типа. В силу $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_{i+1} найдутся такие вершины

$$y_{i+1}^{i+1} \in V(Y_{i+1}) \setminus V(\widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r), \qquad \widetilde{y}_{i+1}^l \in V(\widetilde{Y}_{i+1}^l)$$

для некоторого $l \in \{1, \dots, r\}$, такая цепь $c_{Y_{i+1}} \subset Y_{i+1}$ длины $[1/(\rho-1)]+1$, соединяющая вершины $\widetilde{y}_{i+1}^l$ и y_{i+1}^{i+1}, а также такой граф $\widetilde{Y}_{i+1}^{r+1} \subset Y_{i+1}$, изоморфный $\widetilde{X}_{i+1}^{r+1}$, что

$$d_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{i+1}, \widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r) = \left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1, \qquad V(c_{Y_{i+1}}) \cap V(\widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}) = \{y_{i+1}^{i+1}\}$$

и пара

$$(c_{Y_{i+1}} \cup \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}, (\{\widetilde{y}_{i+1}^l\}, \varnothing))$$

является (K_1, K_2)-максимальным в Y_{i+1} точным (H_1, H_2)-расширением графа $(\{\widetilde{y}_{i+1}^l\}, \varnothing)$ для всех $(K_1, K_2) \in \mathscr{K}$.

Продолжим изоморфизм графов φ_{i+1} на вершины из множества $V(\widetilde{X}_{i+1}^{r+1})$: $\varphi_{i+1}\big|_{\widetilde{X}_{i+1}^{r+1}} \colon \widetilde{X}_{i+1}^{r+1} \to \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}$, причем $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^{i+1}) = y_{i+1}^{i+1}$.

Докажем, что графы $\widetilde{X}_{i+1}^1, \dots, \widetilde{X}_{i+1}^{r+1}, \widetilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ обладают свойствами (I), (II) и (III) при $i < k-1$. Свойство (I) выполнено, так как $x_{i+1}^{i+1} \in V(\widetilde{X}_{i+1}^{r+1})$, $y_{i+1}^{i+1} \in V(\widetilde{Y}_{i+1}^{r+1})$. Из изоморфности пар

$$(c_{Y_{i+1}} \cup \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}, (\{\widetilde{y}_{i+1}^l\}, \varnothing)) \quad \text{и} \quad (H_1, H_2)$$

следует изоморфность пар

$$(\widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{X}_{i+1}^{r+1}, \widetilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{X}_{i+1}^r) \quad \text{и} \quad (\widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}, \widetilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \widetilde{Y}_{i+1}^r)$$

и справедливость свойства (III). Осталось доказать, что графы $\widetilde{X}_{i+1}^1, \dots, \widetilde{X}_{i+1}^{r+1}$ обладают $(k, i+1, r+1)$-свойством в X_{i+1}, а графы $\widetilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \widetilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ обладают $(k, i+1, r+1)$-свойством в Y_{i+1}. Пусть $j \in \{1, \dots, r\}$. Предположим, что существует такая вершина $v \in V(\widetilde{X}_{i+1}^{r+1})$, отличная от x_{i+1}^{i+1}, что $d_{X_{i+1}}(v, \widetilde{X}_{i+1}^j) < 2^{k-1-i}$. Тогда в графе X_{i+1} существует подграф, являющийся 2^{k-i}-расширением графа $\widetilde{X}_{i+1}^j$ первого или второго типа. Получили противоречие с (k, i, r)-свойством графов $\widetilde{X}_{i+1}^1, \dots, \widetilde{X}_{i+1}^r$ в X_{i+1}. Следовательно, $d_{X_{i+1}}(\widetilde{X}_{i+1}^j, \widetilde{X}_{i+1}^{r+1}) \geqslant$

2^{k-1-i}. Кроме того,

$$\begin{aligned}d_{Y_{i+1}}(\widetilde{Y}^j_{i+1}, \widetilde{Y}^{r+1}_{i+1}) &> d_{Y_{i+1}}(\widetilde{Y}^j_{i+1}, y^{i+1}_{i+1}) - |V(\widetilde{Y}^{r+1}_{i+1})| \\ &\geqslant \left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1 - 2^{k-1-i} > 2^{k-1} - 2^{k-1-i} \geqslant 2^{k-2} \geqslant 2^{k-1-i}.\end{aligned}$$

Граф $\widetilde{X}^{r+1}_{i+1}$ (граф $\widetilde{Y}^{r+1}_{i+1}$) не имеет общих вершин с графом $\widetilde{X}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{X}^r_{i+1}$ (графом $\widetilde{Y}^1_{i+1} \cup \dots \cup \widetilde{Y}^r_{i+1}$) по построению. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned}|V(W_1 \cup \dots \cup W_{r+1})| &= |V(W_1 \cup \dots \cup W_r)| + |V(W_{r+1})| \\ &\leqslant \eta(\rho) + (i-1)\biggl(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\biggr) + 2^{k-1-i} \\ &< \eta(\rho) + i\biggl(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\biggr),\end{aligned}$$

где либо $W_j = \widetilde{X}^j_{i+1}$ для всех $j \in \{1, \dots, r+1\}$, либо $W_j = \widetilde{Y}^j_{i+1}$ для всех $j \in \{1, \dots, r+1\}$. Докажем, наконец, что в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося 2^{k-1-i}-расширением графа $\widetilde{X}^{r+1}_{i+1}$ (графа $\widetilde{Y}^{r+1}_{i+1}$). В случае графа $\widetilde{X}^{r+1}_{i+1}$ достаточно вспомнить, что он содержит наибольшее количество вершин среди всех графов, изоморфных какому-либо графу из $\mathscr{H}_{2^{k-1-i}}$ и содержащих вершину x^{i+1}_{i+1}. Граф Y_{i+1} не содержит графов, являющихся 2^{k-1-i}-расширениями графа $\widetilde{Y}^{r+1}_{i+1}$ первого или второго типа, так как граф $\widetilde{Y}^{r+1}_{i+1}$ является (K_1, K_2)-максимальным в Y_{i+1} для всех $(K_1, K_2) \in \mathscr{K}$.

Если $i = k-1$, то $\varphi_k \colon \widetilde{X}^1_k \cup \dots \cup \widetilde{X}^{r+1}_k \to \widetilde{Y}^1_k \cup \dots \cup \widetilde{Y}^{r+1}_k$ – изоморфизм и $\varphi_k(x^j_k) = y^j_k$ при всех $j \in \{1, \dots, k\}$, а стало быть, графы $X_k\big|_{\{x^1_k, \dots, x^k_k\}}$, $Y_k\big|_{\{y^1_k, \dots, y^k_k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

Напомним, что $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathscr{Q}$ – произвольное число, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\rho = 1/\alpha$. Для завершения доказательства нашей теоремы нам остается убедиться в том, что с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженным, где числа n_1, n_2, n_3, n_4 определены равенствами (6), (7).

Обратимся сначала к первому свойству в определении $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженного графа. Рассмотрим такое множество $\mathscr{G}$ попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1, а максимальная плотность отлична от ρ, что любой граф G с $v(G) \leqslant n_1$ и $\rho^{\max}(G) \neq \rho$ изоморфен некоторому графу из $\mathscr{G}$. Пусть $\mathscr{G}_1$ – такое множество попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1, а максимальная плотность меньше, чем ρ, что любой граф, удовлетворяющий заданным условиям, изоморфен некоторому графу из $\mathscr{G}_1$. Очевидно, что $|\mathscr{G}_1| \leqslant |\mathscr{G}| < \infty$. Поэтому в соответствии с теоремой 3 справедливы равенства

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\forall\, G \in \mathscr{G}_1 \ N_G > 0) = 1,$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,p}(\exists G \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}_1 \ N_G > 0) = 0.$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\mathscr{H}$ – множество таких попарно неизоморфных $1/\rho$-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leqslant n_1$, $v(H_2) \leqslant n_2$ и мощность $\mathscr{H}$ максимальна. Пусть $\mathscr{K}$ – множество таких попарно неизоморфных $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \leqslant n_3$, $v(K_2) \leqslant n_4$ и мощность $\mathscr{K}$ максимальна. В силу теоремы 13 с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено

$$\forall\, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{v(H_2)} \in V_N \quad \forall\,(H_1, H_2) \in \mathscr{H} \quad \forall\,(K_1, K_2) \in \mathscr{K}$$
$$\bigl(N^{(K_1,K_2)}_{(H_1,H_2)}(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{v(H_2)}) > 0\bigr).$$

Тем самым, свойство 2), а вместе с ним и теорема 24 доказаны.

В теореме 22 и теореме 24 утверждается справедливость k-закона нуля или единицы при некоторых рациональных α из $(0, 1)$. Что можно сказать о других значениях α из этого интервала? Справедлив ли закон нуля или единицы на концах интервалов, рассмотренных в этих теоремах? Частично мы ответили на этот вопрос в работах [60], [62], [63].

Теорема 25. *Пусть $k \geqslant 3$ – произвольное натуральное число. Случайный граф $G(N, N^{-1/(k-2)})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Пусть теперь $k > 3$ и $\widetilde{\mathscr{Q}}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\beta \in \widetilde{\mathscr{Q}}$. Если же $\alpha \in \{1 - 1/(2^{k-1} - 1), 1 - 1/2^k\}$, то случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

Доказательство этого утверждения громоздкое и довольно техническое, поэтому мы рассмотрим только случай $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, где β – некоторое число из $\widetilde{\mathscr{Q}}$.

Для доказательства мы рассмотрим два графа A и B, а также свойство L_1, которым обладает граф A, и свойство L_2, которым обладает граф B. Мы докажем, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$, а затем установим, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к некоторому положительному числу, обладает свойствами L_1 и L_2. Тем самым в силу теоремы 21 утверждение будет доказано.

Итак, пусть $k > 3$ – некоторое натуральное число, $\beta \in \widetilde{Q}$, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$. Положим

$$\rho = \frac{1}{\alpha} = \frac{2^{k-1} + \beta}{2^{k-1} + \beta - 1}\,.$$

Пусть β – нечетное число. Тогда рассмотрим граф X, равный объединению двух простых циклов C_1, C_2, имеющих ровно одну общую вершину, причем

$$v(C_1) + v(C_2) = 2^{k-1} + \beta, \qquad v(C_1) \leqslant 2^{k-1} - 1,$$
$$v(C_2) \leqslant 2^{k-1} - 2, \qquad v(C_1) > v(C_2),$$

графы C_1 и C_2 не имеют общих ребер. Заметим, что $v(C_1)$ и $v(C_2)$ – числа различной четности. Обозначим L_1 свойство графа содержать подграф, изоморфный X. Рассмотрим свойство содержать такую вершину x, что в графе существуют различные $v(C_1)$-расширение первого типа подграфа $(\{x\}, \varnothing)$

и $v(C_2)$-расширение первого типа того же подграфа. Обозначим отрицание этого свойства L_2. Пусть граф A обладает свойством L_1, а граф B обладает свойством L_2. В первом раунде Новатор выбирает такую вершину x_1 графа A, что x_1 является вершиной некоторого подграфа $A_1 \cup A_2$ в A, изоморфного X, причем $A_1 \cong C_1$, $A_2 \cong C_2$, $V(A_1) \cap V(A_2) = \{x_1\}$.

Пусть теперь β – четное число. Рассмотрим граф X, равный объединению двух простых непересекающихся по вершинам циклов C_1, C_2, а также цепи D длины 1, соединяющей некоторые вершины $c_1 \in V(C_1)$, $c_2 \in V(C_2)$, причем

$$v(C_1) + v(C_2) = 2^{k-1} + \beta - 1, \qquad v(C_1) \leqslant 2^{k-1} - 1,$$
$$v(C_2) \leqslant 2^{k-1} - 2, \qquad v(C_1) > v(C_2).$$

Снова заметим, что $v(C_1)$ и $v(C_2)$ – числа различной четности. Обозначим L_1 свойство графа содержать подграф, изоморфный X. Рассмотрим свойство содержать такую вершину x, что в графе существуют различные $v(C_1)$-расширение первого типа подграфа $(\{x\}, \varnothing)$ и $(v(C_2)+1)$-расширение первого типа того же подграфа. Обозначим отрицание этого свойства L_2. Пусть граф A обладает свойством L_1, а граф B обладает свойством L_2. В первом раунде Новатор выбирает такую вершину x_1 графа A, что x_1 является вершиной некоторого подграфа $A_1 \cup A_2$ в A, изоморфного X, причем $A_1 \cong C_1$, $A_2 \cong C_2 \cup D$, $V(A_1) \cap V(A_2) = \{x_1\}$.

Консерватор выбирает некоторую вершину $y_1 \in V(B)$. Очевидно, что в графе A найдутся такие вершины x_2^1, x_2^2, что граф A_1 является объединением двух цепей K_A^1, T_A^1 различной длины, соединяющих вершины x_1 и x_2^1, а граф A_2 является объединением двух цепей K_A^2, T_A^2 различной длины, соединяющих вершины x_1 и x_2^2. Заметим, что $v(K_A^1) + v(T_A^1)$ и $v(K_A^2) + v(T_A^2)$ – числа разной четности. Пусть в графе B существует вершина y, соединенная с y_1 различными цепями K_B^1, T_B^1, при этом, скажем, $v(K_B^1) = v(K_A^1)$, $v(T_B^1) = v(T_A^1)$. Тогда, очевидно, для любой другой вершины, для которой существуют две такие различные цепи K_B^2, T_B^2, соединяющие ее с y_1, что $v(K_B^2) \leqslant v(K_A^2)$, $v(T_B^2) \leqslant v(T_A^2)$, числа $v(K_B^1) + v(T_B^1)$ и $v(K_B^2) + v(T_B^2)$ должны иметь одинаковую четность. Следовательно, в графе B не найдется вершины y, соединенной с y_1 такими различными цепями K_B^2, T_B^2, что $v(K_B^2) = v(K_A^2)$, $v(T_B^2) = v(T_A^2)$. Тогда во втором раунде Новатор выберет вершину $x_2 = x_2^2$. Консерватор во втором раунде выбирает некоторую вершину $y_2 \in V(B)$. Пусть, например, не нашлось цепи длины $v(K_A^2) - 1$, соединяющей y_1 с y_2 в графе B. Положим $S_1 = K_A^2$. Пусть сыграно i раундов, $i \geqslant 2$. Пусть, кроме того, выбраны вершины $x_1, \ldots, x_i \in V(A)$, $y_1, \ldots, y_i \in V(B)$, а также такая цепь S_{i-1}, соединяющая вершину x_i с некоторой вершиной $x_{j(i)}$, $j(i) \leqslant i-1$, в графе A, что в графе B не найдется цепи такой же длины, соединяющей вершины y_i и $y_{j(i)}$. Новатор в $(i+1)$-м раунде выбирает такую вершину x_{i+1}, принадлежащую цепи S_{i-1}, что величина

$$|d_{S_{i-1}}(x_i, x_{i+1}) - d_{S_{i-1}}(x_{j(i)}, x_{i+1})|$$

минимальна. Консерватор выбирает некоторую вершину $y_{i+1} \in V(B)$. Заметим, что в графе B не найдется двух цепей, из которых одна имеет длину

$d_{S_{i-1}}(x_{j(i)}, x_{i+1})$ и соединяет $y_{j(i)}$ с y_{i+1}, а вторая имеет длину $d_{S_{i-1}}(x_i, x_{i+1})$ и соединяет y_i с y_{i+1}. Пусть, например, не нашлось цепи, соединяющей $y_{j(i)}$ с y_{i+1}. Обозначим S_i цепь, являющуюся подграфом в S_{i-1} и соединяющую $x_{j(i)}$ с x_{i+1}. Так как $\max\{v(C_1), v(C_2)\} \leqslant 2^{k-1}$, то в одном из раундов с номером $r \in \{3, \dots, k\}$ Новатор выберет такую вершину x_r, что она будет соединена ребрами как с вершиной x_{r-1}, так и с некоторой вершиной $x_{j(r)}$, $j(r) < r-1$. В графе B вершины, соединенной и с y_{r-1}, и с $y_{j(r)}$, не найдется. Поэтому Новатор победит.

Докажем теперь, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к некоторому положительному числу, обладает свойствами L_1 и L_2. Граф X строго сбалансированный, а его плотность равна ρ. Поэтому в силу теоремы 4 вероятность того, что случайный граф обладает свойством L_1, стремится к $1 - e^{-1/a(X)}$. Для завершения доказательства осталось установить справедливость следующего соотношения: $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(\overline{L}_2) \in (0,1)$. Легко заметить, что свойство $\overline{L}_2$ выполнено тогда и только тогда, когда граф содержит подграф, выбранный из некоторого конечного множества, причем плотность графов из этого множества не меньше, чем ρ (а плотность некоторых равна ρ). В соответствии с теоремой о совместном распределении чисел подграфов в случайном графе (см. [10; гл. III, замечание 3.20]) с вероятностью, стремящейся к некоторому числу из интервала $(0,1)$, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ содержит хотя бы один подграф из упомянутого множества. Тем самым, теорема доказана.

Будем говорить, что рациональное число $\alpha \in (0,1)$ является *k-критической точкой*, если случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Из теорем 22, 24 и 25 следует, что наименьший элемент в множестве k-критических точек, которое мы обозначим S_k, равен $1/(k-2)$, а наибольший – $1 - 1/(2^{k-1} - 2)$. Известно, кроме того, что множество k-критических точек является бесконечным при достаточно больших k. Это следует из утверждения, которое мы приводим ниже.

Пусть G – произвольный граф, а x_1, x_2, x_3 – его вершины. Количество вершин, соединенных ребрами в графе G с каждой из вершин x_1, x_2, x_3, обозначим $N_G(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим свойство L, выражаемое формулой второго порядка, определенное следующим образом. Граф G обладает свойством L тогда и только тогда, когда число $\max_{x_1,x_2,x_3 \in V(G)} N_G(x_1, x_2, x_3)$ четно (максимум берется по всем тройкам вершин, элементы которых попарно различны).

Лемма 4 (Дж. Спенсер, 1990, [64]). *Пусть $\delta > 0$ – произвольное число, $\alpha = 1/3 + \delta$, $p = N^{-\alpha}$. Тогда существует такое свойство первого порядка $\widetilde{L}$, что $\mathsf{P}_{N,p}(\widetilde{L} \bigtriangleup L) \to 0$, $N \to \infty$.*

Докажем, что из этой леммы следует бесконечность множества k-критических точек при достаточно больших k. Пусть k – кванторная глубина формулы, выражающей свойство $\widetilde{L}$, существование которого утверждает лемма. Для доказательства того, что $|S_k| = \infty$, достаточно доказать, что существует бесконечно много таких рациональных $\delta \in (0, 2/3)$, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta})$ обладает свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/(2n)$. Докажем, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ обладает свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1. Легко доказать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ полный двудольный граф $K_{3,m}$ является строго сбалансированным. Из теоремы 4 следует, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ содержит $K_{3,2n}$ с вероятностью, стремящейся к некоторому числу τ, отличному от 0 и 1. Более того, из теоремы 2 следует, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ содержит $K_{3,2n-1}$ и не содержит $K_{3,2n+1}$ с вероятностью, стремящейся к 1. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-1/3-\delta_n}}(L) = \tau \in (0,1),$$

что завершает доказательство бесконечности множества S_k.

Обратимся теперь к объекту, который в определенном смысле является более естественным, чем множество k-критических точек. Такой объект (мы обозначим его $\widetilde{S}_k$) был в 1988 г. рассмотрен Дж. Спенсером и С. Шела в [50] и назван спектром. *Спектр* – это множество всех рациональных $\alpha \in (0,1)$, которые не обладают следующим свойством. Для любого свойства первого порядка L, выражаемого формулой, кванторная глубина которой ограничена числом k, существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что либо для любого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ выполнено равенство $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha+\varepsilon}}(L) = 0$, либо для любого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ выполнено равенство $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha+\varepsilon}}(L) = 1$.

Рассмотрение такого множества мотивировано существованием монотонных свойств первого порядка, пороговые функции которых имеют вид $N^{-\alpha+o(1)}$, где $\alpha \in (0,1)$ – рациональное число. В этой связи при достаточно больших k и при некоторых рациональных α выполнен k-закон нуля или единицы для случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$, тогда как случайный граф $G(N, N^{-\alpha+o(1)})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Поэтому естественно находить асимптотические вероятности выполнения свойств первого порядка не только в самой точке, но и в некоторой ее малой окрестности.

Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $S_k \subseteq \widetilde{S}_k$. Кроме того, при достаточно больших k эти множества различны. Следовательно, множество $\widetilde{S}_k$ также является бесконечным. Но совпадают ли наименьшие и наибольшие элементы этих множеств? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 26. *Выполнено равенство $\widetilde{S}_3 = \{1/2, 2/3\}$. Если $k > 3$, то три наименьших элемента спектра $\widetilde{S}_k$ равны*

$$\frac{1}{k-1}, \quad \frac{2}{2k-3}, \quad \frac{1}{k-2}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при любом $k \geqslant 3$ числа $1/(k-1)$, $2/(2k-3)$ принадлежат $\widetilde{S}_k$. Рассмотрим два свойства L_1, L_2, которые выражаются с помощью двух формул первого порядка

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ \big((x_k \sim x_1) \wedge \cdots \wedge (x_k \sim x_{k-1})\big),\\
\phi_2 &= \forall x_1 \ldots \forall x_{k-2} \exists x_{k-1} \exists x_k \ \big((x_{k-1} \sim x_1) \wedge \cdots \wedge (x_{k-1} \sim x_{k-2})\\
&\qquad \wedge (x_k \sim x_1) \wedge \cdots \wedge (x_k \sim x_{k-2}) \wedge (x_{k-1} \sim x_k)\big).
\end{aligned}$$

Рассмотрим, кроме того, две пары графов (G_1, H_1), (G_2, H_2), где $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, G_1 и G_2 – полные графы на k вершинах, H_1 – полный граф на $k-1$ вершинах, H_2 – полный граф на $k-2$ вершинах. Тогда при любых $\alpha < 1/(k-1)$ пара (G_1, H_1) является α-надежной, при любых $\alpha \in \bigl(1/(k-1), 2/(2k-3)\bigr)$ пара (G_1, H_1) является α-жесткой, а пара (G_2, H_2) – α-надежной, при любых $\alpha > 2/(2k-3)$ пара (G_2, H_2) является α-жесткой. Очевидно, что граф обладает свойством L_1 тогда и только тогда, когда любой его подграф на $k-1$ вершине обладает (G_1, H_1)-расширением. Граф обладает свойством L_2 тогда и только тогда, когда любой его подграф на $k-2$ вершинах обладает (G_2, H_2)-расширением. В силу теоремы 13 при любых $\alpha < 1/(k-1)$ выполнено $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L_1) = 1$, при любых $\alpha \in \bigl(1/(k-1), 2/(2k-3)\bigr)$ выполнено $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L_1) = 0$, $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L_2) = 1$, при любых $\alpha > 2/(2k-3)$ выполнено $\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha}}(L_2) = 0$. Следовательно, $1/(k-1)$, $2/(2k-3) \in \widetilde{S}_k$. Так как при $k \geqslant 3$ выполнено $1/(k-2) \in S_k$, то и $1/(k-2) \in \widetilde{S}_k$. Осталось доказать, что среди элементов множества $\bigl(0, 1/(k-1)\bigr) \cup \bigl(1/(k-1), 2/(2k-3)\bigr) \cup \bigl(2/(2k-3), 1/(k-2)\bigr)$ нет элементов множества $\widetilde{S}_k$. Для этого докажем критерий принадлежности числа спектру.

Лемма 5. *Число $\alpha \in (0,1)$ не принадлежит спектру $\widetilde{S}_k$ тогда и только тогда, когда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любых (не обязательно различных) $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре* $\mathrm{EHR}\bigl(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k\bigr)$ *при $N, M \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha \notin \widetilde{S}_k$. Тогда для любого свойства первого порядка L, выраженного формулой, кванторная глубина которой ограничена числом k, существует такое число $\varepsilon(L) > 0$, что либо для любого $\alpha_0 \in \bigl(\alpha-\varepsilon(L), \alpha+\varepsilon(L)\bigr)$ выполнено равенство $\mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_0}}(L) = 0$, либо для любого $\alpha_0 \in \bigl(\alpha-\varepsilon(L), \alpha+\varepsilon(L)\bigr)$ выполнено равенство $\mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_0}}(L) = 1$. Обозначим $\mathscr{L}_k$ класс всех свойств первого порядка, выражаемых с помощью формул, кванторная глубина которых ограничена числом k. Положим $\varepsilon = \min_{L\in\mathscr{L}_k} \varepsilon(L)$. Тогда для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ и для любого $L \in \mathscr{L}_k$ выполнено

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_1}}(L) = \lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_2}}(L) \in \{0,1\}.$$

Следовательно, случайный граф $G(N,p)$, где $p = N^{-\alpha_1}$, если N – четно, и $p = N^{-\alpha_2}$, если N – нечетно, подчиняется k-закону нуля или единицы. Тогда по теореме 21 с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}\bigl(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k\bigr)$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – такое число, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}\bigl(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k\bigr)$ при $N, M \to \infty$. Пусть, кроме того, L – произвольное свойство первого порядка. Рассмотрим случайный граф $G(N,p)$, где $p = N^{-\alpha_1}$, если N – четно, и $p = N^{-\alpha_2}$, если N – нечетно. Так как вероятности того, что у Консерватора есть выигрышные стратегии в играх $\mathrm{EHR}\bigl(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k\bigr)$, $\mathrm{EHR}\bigl(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_1}), k\bigr)$,

$\mathrm{EHR}\bigl(G(N,N^{-\alpha_2}),G(M,M^{-\alpha_2}),k\bigr)$, стремятся к 1 при $N,M\to\infty$, то стремится к 1 и вероятность того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}\bigl(G(N,p(N)),G(M,p(M)),k\bigr)$. Поэтому в силу теоремы 21 случайный граф $G(N,p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}\mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_1}}(L)=\lim_{N\to\infty}\mathsf{P}_{N,N^{-\alpha_2}}(L)\in\{0,1\}.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть произвольное $\alpha\in\bigl(0,1/(k-1)\bigr)\cup\bigl(1/(k-1),2/(2k-3)\bigr)\cup\bigl(2/(2k-3),1/(k-2)\bigr)$ и такое $\varepsilon>0$, что

$$(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\subset\left(0,\frac{1}{k-1}\right)\cup\left(\frac{1}{k-1},\frac{2}{2k-3}\right)\cup\left(\frac{2}{2k-3},\frac{1}{k-2}\right),$$

после чего, воспользовавшись для произвольных $\alpha_1,\alpha_2\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ рассуждениями из теоремы 22, доказать, что у Консерватора с вероятностью, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(N,N^{-\alpha_1}),G(N,N^{-\alpha_2}),k)$.

8. Дистанционные графы

В этом разделе мы сделаем обзор законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных дистанционных графов, определение которых дано в разделе 2. Далее будем считать, что функция $p=p(N)$, где N – количество вершин дистанционного графа, удовлетворяет условию (1).

В работах [35]–[39] были изучены законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов, вершины которых являются векторами из $\{0,1\}^n$ с одинаковым количеством нулевых и единичных координат (в наших обозначениях $M=\{0,1\}$, $a_0(n)=n/2$, $a_1(n)=n/2$, $c(n)=n/4$). Оказалось (см., например, [39]), что закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов не выполнен. Однако в [35] были найдены подпоследовательности в рассматриваемой последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющиеся закону нуля или единицы. Кроме того, в статье [38] были исследованы законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной. Затем С. Н. Попова в [40] рассмотрела более общую модель – случайные дистанционные графы с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ (т. е. $M=\{-1,0,1\}$), зависящие от набора параметров $a_{-1}(n)$, $a_0(n)$, $a_1(n)$ и $c(n)$. Общий случай случайного дистанционного графа с вершинами в $\mathbb{Z}^n$ был рассмотрен С. Н. Поповой в [65]. В этой работе были получены условия, при которых последовательность случайных графов $\{\mathscr{G}(G^M_{n_i},p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ (см. раздел 2) подчиняется закону нуля или единицы, а также условия, при которых из упомянутой последовательности можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся этому закону. Прежде чем перейти к формулировкам и доказательствам этих результатов, мы мотивируем задачу, доказав, что в простейшем случае $M=\{0,1\}$, $a_0(n)=\alpha n$, $a_1(n)=(1-\alpha)n$,

$c(n) = \alpha^2 n$, где α – фиксированное рациональное число из $(0, 1)$, случайный дистанционный граф не подчиняется закону нуля или единицы.

Для доказательств отрицательных и положительных результатов нам потребуются два вспомогательных утверждения. Пусть M – произвольное конечное множество целых чисел, содержащее нуль, $\{\mathscr{G}(G_{n_i}^M, p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность случайных дистанционных графов. Введем вспомогательную величину $\Phi(n)$, выражаемую через параметры $a_m(n)$ и используемую в формулировках теорем:

$$\Phi(n) = \sum_{m\in M} m a_m(n). \tag{8}$$

Заметим, что величина $\Phi(n)$ равна сумме всех координат произвольного вектора, являющегося вершиной дистанционного графа G_n^M. Для любого $t \in \mathbb{N}$ обозначим L_t свойство графов для любых t вершин содержать их общего соседа. Более того, скажем, что последовательность графов $\{G_{n_i}^M\}_{i\in\mathbb{N}}$ обладает *свойством* $\widetilde{L}_t$, если существуют такие число $\beta > 0$ и функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n^M$ в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 (С. Н. Попова, 2013, [40]). *Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = 0, \qquad c(n) = 0$$

и $a_0(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Тогда последовательность $\{G_{n_i}^M\}_{i\in\mathbb{N}}$ обладает свойством $\widetilde{L}_t$ при каждом $t \in \mathbb{N}$.

Прежде чем сформулировать второе утверждение, введем несколько обозначений. Обозначим $\mathscr{M}_{l\times h}$ множество всех матриц, элементы которых принадлежат множеству M, размера $l \times h$ и ранга l. Пусть Δ_l – максимальный среди определителей всех матриц из $\mathscr{M}_{l\times l}$, D_l – наименьшее натуральное число, делящееся на все натуральные числа, не превосходящие Δ_l, т. е. $D_l = \text{НОК}(\Delta_l, \Delta_l - 1, \dots, 1)$. Введем множество $M_+ = \{m \in M : m > 0\}$ и обозначим η наименьшее натуральное число, делящееся на все числа из множества M_+, т. е. $\eta = \text{НОК}\{m : m \in M_+\}$.

Утверждение 2 (С. Н. Попова, 2014, [65]). *Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = \alpha n, \qquad c(n) = \alpha^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q}\cap(0, 1)$ – фиксированное число, и $a_0(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Пусть $t \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{G_{n_{i_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ такова, что числа $\Phi(n_{i_j})$ и $c(n_{i_j})$ делятся на $\eta \cdot D_{t+1}$ при достаточно больших $j \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{G_{n_{i_j}}^M\}_{j\in\mathbb{N}}$ обладает свойством $\widetilde{L}_t$.

Доказательства утверждений нетривиальны и техничны, поэтому в настоящем обзоре мы их не приводим.

Вернемся к обещанной мотивировке. Пусть

$$M = \{0, 1\}, \quad a_0(n) = \alpha n, \quad a_1(n) = (1-\alpha)n, \quad c(n) = \alpha^2 n,$$

где α – фиксированное рациональное число из $(0, 1)$. Докажем, что случайный дистанционный граф $\mathscr{G}(G_n^M, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы. Этот результат является обобщением построенного в [35] примера существования свойства первого порядка, пределы вероятности которого различны для различных подпоследовательностей случайных дистанционных графов в случае $\alpha = 1/2$. Пусть $\alpha = s/q$ – несократимая дробь и $q > 2$ (случай $q = 2$ был разобран в [35]). Пусть, кроме того, n не делится на q^3. Пусть, например, $q < 2s$ (в противном случае пример строится аналогичным образом). Рассмотрим вершины $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{q^2+q-1} \in V_n^M$, определенные следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{x}_1 & = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}),\\
\mathbf{x}_2 & = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}),\\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill}\\
\mathbf{x}_{q^2-qs+1} & = (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1}),\\
\mathbf{x}_{q^2-qs+2} & = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1}),\\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill}\\
\mathbf{x}_{q^2} & = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{1}),\\
\mathbf{x}_{q^2+1} & = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}),\\
\mathbf{x}_{q^2+2} & = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}),\\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill}\\
\mathbf{x}_{q^2+q-1} & = (\underbrace{\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{q},\underbrace{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1}}_{q^2-qs-q},\underbrace{\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1}}_{2qs-q^2},\underbrace{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1}}_{q-1},\underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0}}_{q^2-qs-q+1}).
\end{array}$$

Здесь $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ – векторы, составленные из n/q^2 единиц и n/q^2 нулей соответственно. Предположим, что существует вершина $\mathbf{x}_{q^2+q}$ в V_n^M, соединенная ребрами с каждой из $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{q^2+q-1}$. Обозначим x_1 количество единиц в векторе $\mathbf{x}_{q^2+q}$ среди первых n/q^2 координат, x_2 – среди следующих n/q^2 координат, и т. д. (получим q^2 чисел $x_1, \ldots, x_{q^2}$). Тогда вектор $(x_1, \ldots, x_{q^2})$ является решением системы

$$\begin{gathered}
x_1 + \cdots + x_{sq} = \alpha^2 n,\\
x_2 + \cdots + x_{sq+1} = \alpha^2 n,\\
\cdots\\
x_{(q^2-sq)+1} + \cdots + x_{q^2} = \alpha^2 n,\\
x_1 + x_{(q^2-sq)+2} + \cdots + x_{q^2} = \alpha^2 n,\\
\cdots\\
x_1 + \cdots + x_{sq-1} + x_{q^2} = \alpha^2 n,\\
x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{sq} + x_{sq+1} = \alpha^2 n,\\
x_1 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{sq+1} + x_{sq+2} = \alpha^2 n,\\
\cdots\\
x_1 + x_{q+1} + x_{q+2} + \cdots + x_{sq+q-2} + x_{sq+q-1} = \alpha^2 n.
\end{gathered}$$

Из первых q^2 уравнений системы получаем, что

$$\begin{aligned} &x_1 = x_{1+qr_1} = x_{1+qr_2} = \cdots = x_{1+qr_{q-1}},\\ &x_2 = x_{2+qr_1} = x_{2+qr_2} = \cdots = x_{2+qr_{q-1}},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &x_q = x_{q+qr_1} = x_{q+qr_2} = \cdots = x_{q+qr_{q-1}}, \end{aligned}$$

где r_i, $i \in \{1,\dots,q-1\}$, – остатки от деления is на q. Так как числа s и q взаимно просты, то все числа $r_1,\dots,r_{q-1}$ различны и отличны от 0. Поэтому $x_1 = x_{q+1} = \cdots = x_{q^2-q+1}$, $x_2 = x_{q+2} = \cdots = x_{q^2-q+2}$, $\dots$, $x_q = x_{2q} = \cdots = x_{q^2}$. Из 2-го, 3-го, $\dots$, q-го и последних $q-1$ уравнений получаем равенство $x_1 = \cdots = x_q$. Следовательно, $x_1 = \cdots = x_{q^2} = \alpha^2 n/(qs) = sn/q^3$, но s и q взаимно просты, а n не делится на q^3. Получили противоречие. Таким образом, не существует вершины $\mathbf{x}_{q^2+q}$ в V_n^M, соединенной ребрами с каждой из $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{q^2+q-1}$. Следовательно, граф G_n^M не обладает свойством L_{q^2+q-1}.

Рассмотрим последовательности натуральных чисел $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $t_i = iq^3 + q^2$ и для любого $a \in \mathbb{N}$ существует такое i_0, что при $i \geqslant i_0$ число m_i делится на a. Составим из этих двух последовательностей одну: $n_{2i} = m_i$, $n_{2i-1} = t_i$. Тогда, очевидно,

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{G^M_{n_{2i-1}},p}(L_{q^2+q-1}) = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{G^M_{n_{2i}},p}(L_{q^2+q-1}) = 1,$$

что и послужит опровержением закона нуля или единицы.

По утверждению 2 последовательность $\{G^M_{n_{2i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ обладает свойством $\widetilde{L}_{q^2+q-1}$. Таким образом, существуют такие число $\beta > 0$ и функция $\varphi(n) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что для любого $n \in \{n_{2i},\ i \in \mathbb{N}\}$ и любых вершин $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{q^2+q-1} \in V_n^M$ в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{q^2+q-1}$. Тогда в силу (1)

$$\mathsf{P}_{G_n^M,p}(\overline{L_{q^2+q-1}}\,) \leqslant N^{q^2+q-1}(1-p(n)^{q^2+q-1})^{\varphi(n)} \to 0, \qquad i \to \infty.$$

Поэтому, действительно, $\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}_{G^M_{n_{2i}}}(L_{q^2+q-1}) = 1$, и, следовательно, случайный граф $\mathscr{G}(G_n^M, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы.

Обратимся теперь к условиям, при которых случайных дистанционный граф подчиняется закону нуля или единицы. В следующей теореме даются ограничения на функции $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$, при которых последовательность случайных графов $\mathscr{G}(G^M_{n_i}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема 27 (С. Н. Попова, 2014, [65]). *Пусть $\widetilde{m} \in M$, при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = \widetilde{m}\cdot n, \qquad c(n) = \widetilde{m}^2 \cdot n$$

и $a_{\widetilde{m}}(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Тогда последовательность $\{\mathscr{G}(G^M_{n_i}, p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

Доказательство. Сначала покажем, что при любых значениях параметров $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$ и при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ граф G_n^M изоморфен графу $G_n^{M-\mu}$, задаваемому параметрами

$$\widetilde{a}_l(n) = a_{l+\mu}(n), \quad l \in M - \mu, \quad \text{и} \quad \widetilde{c}(n) = c(n) - 2\mu\Phi(n) + \mu^2 n,$$

где $M - \mu = \{m - \mu\colon m \in M\}$. Определим отображение $\varphi\colon V(G_n^M) \to V(G_n^{M-\mu})$ следующим образом:

$$\varphi((v^1, \dots, v^n)) = (v^1 - \mu, \dots, v^n - \mu).$$

Тогда

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 2\mu \sum_{i=1}^{n} v^i + \mu^2 n = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 2\mu\Phi(n) + \mu^2 n.$$

Поэтому

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in E(G_n^M) \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \Leftrightarrow \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \widetilde{c} \Leftrightarrow \{\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})\} \in E(G_n^{M-\mu}).$$

Следовательно, φ – изоморфизм графов G_n^M и $G_n^{M-\mu}$.

Перейдем теперь к рассмотрению графа G_n^M с параметрами, удовлетворяющими условиям $\Phi(n) = \widetilde{m} \cdot n$, $c(n) = \widetilde{m}^2 \cdot n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $a_{\widetilde{m}}(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Выбрав в качестве μ число $\widetilde{m}$, получим, что такой граф G_n^M изоморфен графу $G_n^{M-\mu}$, для которого $\Phi(n) = 0$, $c(n) = 0$ при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $a_0(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Докажем, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ случайный граф $\mathscr{G}(G_n^M, p)$, $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1. Пусть E_t – событие, состоящее в том, что случайный граф $\mathscr{G}(G_n^M, p)$, $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, не обладает свойством полного расширения уровня t. Для различных вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n^M$ введем событие $F_{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_l}$, состоящее в том, что в случайном графе $\mathscr{G}(G_n^M, p)$ не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Заметим, что

$$E_t = \bigcup_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}_+ \\ k+l\leqslant t}} \bigcup_{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_l \in V_n^M} F_{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_l}.$$

Из утверждения 1 следует, что существуют такое $\beta = \beta(t) > 0$ и такая функция $\varphi(n,t) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n^M$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $k + l \leqslant t$, в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n,t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Тогда

$$\mathsf{P}_{G_n^M,p}(F_{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_l}) \leqslant (1 - \varepsilon(n)^t)^{\Omega(|V_n^M|^\beta)},$$

где

$$\varepsilon(n) = \min\{p(|V_n^M|), 1 - p(|V_n^M|)\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}_{G^M_{n_i},p}(E_t) \leqslant t^2|V^M_{n_i}|^t(1-\varepsilon(n_i)^t)^{\Omega(|V^M_{n_i}|^\beta)} \leqslant t^2|V^M_{n_i}|^t \exp\bigl\{-\varepsilon(n_i)^t\Omega(|V^M_{n_i}|^\beta)\bigr\}.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $i \to \infty$ в силу условия (1) на функцию p. Следовательно, случайный граф $\mathscr{G}(G^M_{n_i},p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, обладает свойством полного расширения уровня t, и потому последовательность $\{\mathscr{G}(G^M_{n_i},p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы. Теорема доказана.

Сформулируем теперь условия, при которых можно найти подпоследовательность случайных дистанционных графов, подчиняющуюся закону нуля или единицы.

Теорема 28 (С. Н. Попова, 2014, [65]). *Пусть $\widetilde{m} \in M$, при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = (\widetilde{m}+\alpha)n, \qquad c(n) = (\widetilde{m}+\alpha)^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$ – фиксированное число, и $a_{\widetilde{m}}(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Пусть, кроме того, подпоследовательность $\{n_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ такова, что для любого $d \in \mathbb{N}$ существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что при $j > j_0$ числа n_{i_j} делятся на d. Тогда последовательность $\{\mathscr{G}(G^M_{n_{i_j}},p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

Доказательство. Пусть $\{n_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ – подпоследовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Учитывая, что граф G^M_n изоморфен графу $G^{\widetilde{M}}_n$, для которого $\Phi(n) = \alpha n$, $c(n) = \alpha^2 n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $a_0(n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$, и применяя утверждение 2, получаем, что существуют такое $\beta = \beta(t) > 0$ и такая функция $\varphi(n,t) = \Omega(|V^M_n|^\beta)$, что при всех $n \in \{n_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ для любых вершин $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_t \in V^M_n$ в графе G^M_n есть не менее $\varphi(n,t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_t$. Оценивая вероятность отсутствия свойства полного расширения уровня t таким же образом, как и в доказательстве теоремы 27, заключаем, что последовательность $\{\mathscr{G}(G_{n_{i_j}},p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы. Теорема доказана.

Вернемся к случайному графу $\mathscr{G}(G^{\{0,1\}}_n,p)$, определенному следующим образом: $a_0(n) = \alpha n$, $a_1(n) = (1-\alpha)n$, $c(n) = \alpha^2 n$, $\alpha = s/q$ – несократимая дробь, $0 < s < q$. Как уже было замечено выше, он не подчиняется закону нуля или единицы. Тем не менее из теоремы 28 следует, что во всей последовательности рассматриваемых случайных дистанционных графов $\{\mathscr{G}(G^{\{0,1\}}_{q^2 i},p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ существует подпоследовательность, подчиняющаяся этому закону.

Список литературы

[1] В. Л. Гончаров, “О распределении циклов в перестановках”, *Докл. АН СССР*, **35**:9 (1942), 299–301.

[2] T. Szele, “Kombinatorikai vizsgálatok az irányitott teljes gráffal kapcsolatban”, *Mat. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 223–256.

[3] P. Erdős, "Graph theory and probability", *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.

[4] P. Erdős, A. Rényi, "On random graphs. I", *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.

[5] P. Erdős, A. Rényi, "On the evolution of random graphs", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.

[6] P. Erdős, A. Rényi, "On the evolution of random graphs", *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **38** (1961), 343–347.

[7] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е изд., Физматлит, М., 2004, 256 с.; англ. изд.: V. F. Kolchin, *Random graphs*, Encyclopedia Math. Appl., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, xii+252 pp.

[8] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 3rd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008, xviii+352 pp.

[9] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.

[10] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xii+333 pp.

[11] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.

[12] А. М. Райгородский, *Модели интернета*, Интеллект, Долгопрудный, 2013, 64 с.

[13] L. Lovász, *Large networks and graph limits*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, xiv+475 pp.

[14] S. N. Dorogovtsev, *Lectures on complex networks*, Oxf. Master Ser. Phys., **20**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, x+134 pp.

[15] M. Penrose, *Random geometric graphs*, Oxford Stud. Probab., **5**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003, xiv+330 pp.

[16] M. E. J. Newman, *Networks. An introduction*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, xii+772 pp.

[17] B. Bollobás, A. Thomason, "Threshold functions", *Combinatorica*, **7**:1 (1987), 35–38.

[18] A. Ruciński, A. Vince, "Balanced graphs and the problem of subgraphs of a random graph", Proceedings of the Sixteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1985), *Congr. Numer.*, **49** (1985), 181–190.

[19] B. Bollobás, "Threshold functions for small subgraphs", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.

[20] A. Ruciński, A. Vince, "Strongly balanced graphs and random graphs", *J. Graph Theory*, **10**:2 (1986), 251–264.

[21] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007, 138 с.

[22] А. М. Райгородский, "Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств", *УМН*, **56**:1(337) (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, "Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces", *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.

[23] A. M. Raigorodskii, "Coloring distance graphs and graphs of diameters", *Thirty essays on geometric graph theory*, ed. J. Pach, Springer, New York, 2013, 429–460.

[24] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, xiv+354 pp.

[25] L. A. Székely, "Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems", *Paul Erdős and his mathematics*, v. II (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Budapest, 2002, 649–666.

[26] A. Soifer, *The mathematical coloring book. Mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer, New York, 2009, xxx+607 pp.

[27] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991, xvi+333 pp.

[28] A. M. Raigorodskii, “Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters”, *Discrete geometry and algebraic combinatorics*, Contemp. Math., **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.

[29] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.

[30] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk's conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N. S.*), **29**:1 (1993), 60–62.

[31] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005, xii+499 pp.

[32] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979, 744 с.; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes. Parts I, II*, North-Holland Mathematical Library, **16**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977, xv+ix+762 pp.

[33] V. Rödl, “On a packing and covering problem”, *European J. Combin.*, **6**:1 (1985), 69–78.

[34] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, Selected topics in discrete mathematics (Warsaw, 1996), *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.

[35] М. Е. Жуковский, “О последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющейся закону нуля или единицы”, *Пробл. передачи информ.*, **47**:3 (2011), 39–57; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “On a sequence of random distance graphs subject to the zero-one law”, *Problems Inform. Transmission*, **47**:3 (2011), 251–268.

[36] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:2 (2010), 344–349; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “The weak zero-one law for the random distance graphs”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:2 (2011), 356–360.

[37] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *Докл. РАН*, **430**:3 (2010), 314–317; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “Weak zero-one laws for random distance graphs”, *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 51–54.

[38] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 95–128; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “A weak zero-one law for sequences of random distance graphs”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 1012–1044.

[39] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон ‘нуля или единицы’ для случайных дистанционных графов”, *Вестн. РУДН*, **2**:1 (2010), 11–25.

[40] С. Н. Попова, “Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$”, *Пробл. передачи информ.*, **50**:1 (2014), 64–86; англ. пер.: S. N. Popova, “Zero-one law for random distance graphs with vertices in $\{-1,0,1\}^n$”, *Problems Inform. Transmission*, **50**:1 (2014), 57–78.

[41] М. Е. Жуковский, “О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф”, *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 844–855; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “On the probability of the occurrence of a copy of a fixed graph in a random distance graph”, *Math. Notes*, **92**:6 (2012), 756–766.

[42] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, "Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов", *Докл. РАН*, **457**:4 (2014), 383–387.

[43] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, "Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов", *Матем. сб.* (в печати).

[44] A. B. Kupavskii, "On random subgraphs of Kneser graph", *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear).

[45] B. Bollobás, B. P. Narayanan, A. M. Raigorodskii, "On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem", *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear).

[46] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000, 286 с.

[47] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 2007, 128 с.

[48] A. Ehrenfeucht, "An application of games to the completness problem for formalized theories", *Fund. Math.*, **49** (1960/1961), 121–141.

[49] J. Spencer, *The strange logic of random graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, x+168 pp.

[50] S. Shelah, J. Spencer, "Zero-one laws for sparse random graphs", *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.

[51] Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький, В. А. Таланов, "Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов", *Кибернетика*, **2** (1969), 17–27.

[52] R. Fagin, "Probabilities in finite models", *J. Symbolic Logic*, **41**:1 (1976), 50–58.

[53] B. Kreuter, "Threshold functions for asymmetric Ramsey properties with repect to vertex colorings", *Random Structures Algorithms*, **9**:3 (1996), 335–348.

[54] J. Spencer, "Counting extensions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **55**:2 (1990), 247–255.

[55] T. Łuczak, J. Spencer, "When does the zero-one law hold?", *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:3 (1991), 451–468.

[56] J. F. Lynch, "Probabilities of sentences about very sparse random graphs", *Random Structures Algorithms*, **3**:1 (1992), 33–53.

[57] M. McArthur, "The asymptotic behavior of $L^k_{\infty,\omega}$ on sparse random graphs", *Logic and random structures* (New Brunswick, NJ, 1995), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 53–63.

[58] Ph. G. Kolaitis, H. J. Prömel, B. L. Rothschild, "K_{l+1}-free graphs: asymptotic structure and a 0-1 law", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303**:2 (1987), 637–671.

[59] R. H. Gilman, Y. Gurevich, A. Miasnikov, "A geometric zero-one law", 2007, 13 pp., arXiv: 0706.0271.

[60] M. Zhukovskii, "Zero-one k-law", *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.

[61] М. Е. Жуковский, "Оценка количества максимальных расширений в случайном графе", *Дискрет. матем.*, **24**:1 (2012), 79–107; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, "Estimation of the number of maximal extensions in a random graph", *Discrete Math. Appl.*, **22**:1 (2012), 55–90.

[62] М. Е. Жуковский, "Расширение k-закона нуля или единицы", *Докл. РАН*, **454**:1 (2014), 23–26; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, "Extension of the zero-one k-law", *Dokl. Math.*, **89**:1 (2014), 16–19.

[63] М. Е. Жуковский, "О наибольшей критической точке в k-законе нуля или единицы", *Матем. сб.* (в печати).

[64] J. Spencer, “Infinite spectra in the first order theory of graphs”, *Combinatorica*, **10**:1 (1990), 95–102.

[65] С. Н. Попова, “Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$”, *Матем. сб.* (в печати).

Максим Евгеньевич Жуковский
(Maksim E. Zhukovskii)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступила в редакцию
05.09.2014

Андрей Михайлович Райгородский
(Andrei M. Raigorodskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: mraigor@yandex.ru