Случайные графы. Лекция 30.09. Эволюция случайного графа. Часть 1

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

30.09.2025

Эволюция случайного графа

Сегодня мы зададимся следующим вопросом: какова типичная (т.е. выполняющаяся с вероятностью, стремящейся к единице) структура случайного графа $G(n,p)$ при различном поведении параметра вероятности появления ребра p?

Эволюция случайного графа

Сегодня мы зададимся следующим вопросом: какова типичная (т.е. выполняющаяся с вероятностью, стремящейся к единице) структура случайного графа $G(n, p)$ при различном поведении параметра вероятности появления ребра p? Конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

- каков максимальный размер компоненты связности в $G(n, p)$?

Эволюция случайного графа

Сегодня мы зададимся следующим вопросом: какова типичная (т.е. выполняющаяся с вероятностью, стремящейся к единице) структура случайного графа $G(n, p)$ при различном поведении параметра вероятности появления ребра p? Конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

- каков максимальный размер компоненты связности в $G(n, p)$?
- какова структура (сложность) компонент в $G(n, p)$?

Эволюция случайного графа

Сегодня мы зададимся следующим вопросом: какова типичная (т.е. выполняющаяся с вероятностью, стремящейся к единице) структура случайного графа $G(n, p)$ при различном поведении параметра вероятности появления ребра p? Конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

- каков максимальный размер компоненты связности в $G(n, p)$?
- какова структура (сложность) компонент в $G(n, p)$?
- сколько компонент определенной сложности есть в графе?

Эволюция случайного графа

Сегодня мы зададимся следующим вопросом: какова типичная (т.е. выполняющаяся с вероятностью, стремящейся к единице) структура случайного графа $G(n,p)$ при различном поведении параметра вероятности появления ребра p? Конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

- каков максимальный размер компоненты связности в $G(n,p)$?
- какова структура (сложность) компонент в $G(n,p)$?
- сколько компонент определенной сложности есть в графе?

Оказывается, что $p = \frac{1}{n}$ является своего рода границей, после которой типичная структура случайного графа кардинально меняется и наблюдаются так называемые *фазовый переход* и *двойной скачок размера наибольшей компоненты*. Мы будем изучать структуру графа в следующих случаях в зависимости от поведения величины np.

I. Случай $np \to 0$

Пусть сначала $p = p(n) = o(1/n)$. Следующая лемма показывает, что в этом случае случайный граф $G(n, p)$ не содержит циклов.

I. Случай $np \to 0$

Пусть сначала $p = p(n) = o(1/n)$. Следующая лемма показывает, что в этом случае случайный граф $G(n, p)$ не содержит циклов.

Лемма (3.1)

Пусть $np \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ ацикличен}\right) \longrightarrow 1.$$

I. Случай $np \to 0$

Пусть сначала $p = p(n) = o(1/n)$. Следующая лемма показывает, что в этом случае случайный граф $G(n, p)$ не содержит циклов.

Лемма (3.1)

Пусть $np \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ ацикличен}\right) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Пусть X_n — число циклов в $G(n, p)$. Тогда, конечно, $X_n = \sum_{k=3}^{n} X_n(C_k)$. В силу леммы 2.1 о среднем числе копий подграфов получаем:

I. Случай $np \to 0$

Пусть сначала $p = p(n) = o(1/n)$. Следующая лемма показывает, что в этом случае случайный граф $G(n,p)$ не содержит циклов.

Лемма (3.1)

Пусть $np \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p)\ \textit{ацикличен}\right) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Пусть X_n — число циклов в $G(n,p)$. Тогда, конечно, $X_n = \sum_{k=3}^{n} X_n(C_k)$. В силу леммы 2.1 о среднем числе копий подграфов получаем:

$$\mathsf{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2k} p^k \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2k} (np)^k = O((np)^3) \longrightarrow 0.$$

I. Случай $np \to 0$

Пусть сначала $p = p(n) = o(1/n)$. Следующая лемма показывает, что в этом случае случайный граф $G(n,p)$ не содержит циклов.

Лемма (3.1)

Пусть $np \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ ацикличен}\right) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Пусть X_n — число циклов в $G(n,p)$. Тогда, конечно, $X_n = \sum_{k=3}^{n} X_n(C_k)$. В силу леммы 2.1 о среднем числе копий подграфов получаем:

$$\mathsf{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2k} p^k \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2k} (np)^k = O((np)^3) \longrightarrow 0.$$

Значит, $\mathsf{P}\left(X_n = 0\right) \geqslant 1 - \mathsf{E}X_n \to 1$ при $n \to \infty$. $\square$

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Таким образом, при $np \to 0$ случайный граф $G(n, p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, имеет только древесные компоненты, т.е. он — лес. Каков в этом случае максимальный размер древесной компоненты?

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Таким образом, при $np \to 0$ случайный граф $G(n,p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, имеет только древесные компоненты, т.е. он — лес. Каков в этом случае максимальный размер древесной компоненты?

Лемма (3.2)

Пусть $np \to 0$. Тогда размер максимальной компоненты $G(n,p)$ имеет размер $o_{\mathsf{P}}(\ln n)$.

Доказательство леммы 3.2

Согласно лемме 3.1 нам достаточно рассматривать только древесные компоненты.

Доказательство леммы 3.2

Согласно лемме 3.1 нам достаточно рассматривать только древесные компоненты. Пусть $c > 0$ — фиксировано. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } \geqslant c\ln n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } k\right) \leqslant$$

Доказательство леммы 3.2

Согласно лемме 3.1 нам достаточно рассматривать только древесные компоненты. Пусть $c > 0$ — фиксировано. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } \geqslant c\ln n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{\binom{k}{2}-k+1+k(n-k)} \leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} \leqslant$$

Доказательство леммы 3.2

Согласно лемме 3.1 нам достаточно рассматривать только древесные компоненты. Пусть $c > 0$ — фиксировано. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } \geqslant c\ln n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{\binom{k}{2}-k+1+k(n-k)} \leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} \leqslant$$

(пользуемся тем, что $\binom{n}{k} \leqslant n^k/k! < (en/k)^k$)

$$\leqslant n \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} (np)^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k^k} e^k \leqslant en(npe)^{c\ln n} \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \frac{1}{k^2} =$$

Доказательство леммы 3.2

Согласно лемме 3.1 нам достаточно рассматривать только древесные компоненты. Пусть $c > 0$ — фиксировано. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } \geqslant c\ln n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит древесную компоненту размера } k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{\binom{k}{2}-k+1+k(n-k)} \leqslant \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} \leqslant$$

(пользуемся тем, что $\binom{n}{k} \leqslant n^k/k! < (en/k)^k$)

$$\leqslant n \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} (np)^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k^k} e^k \leqslant en(npe)^{c\ln n} \sum_{k \geqslant c\ln n}^{n} \frac{1}{k^2} =$$

$$= O(n(npe)^{c\ln n}) = O\left(\left(e^{1/c} npe\right)^{c\ln n}\right) \longrightarrow 0.$$

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Сам же максимальный размер древесной компоненты сильно зависит от того, как быстро np убывает к нулю.

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Сам же максимальный размер древесной компоненты сильно зависит от того, как быстро np убывает к нулю. Мы знаем, что пороговой вероятностью для появления любого дерева размера k является $n^{-k/(k-1)}$. При этом для любого фиксированного дерева T размера k количество подграфов, изоморфных T, имеет асимптотически пуассоновское распределение при $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$.

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Сам же максимальный размер древесной компоненты сильно зависит от того, как быстро np убывает к нулю. Мы знаем, что пороговой вероятностью для появления любого дерева размера k является $n^{-k/(k-1)}$. При этом для любого фиксированного дерева T размера k количество подграфов, изоморфных T, имеет асимптотически пуассоновское распределение при $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$. Но оказывается, что и общее число деревьев размера k при таком p в пределе пуассоновское.

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Сам же максимальный размер древесной компоненты сильно зависит от того, как быстро np убывает к нулю. Мы знаем, что пороговой вероятностью для появления любого дерева размера k является $n^{-k/(k-1)}$. При этом для любого фиксированного дерева T размера k количество подграфов, изоморфных T, имеет асимптотически пуассоновское распределение при $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$. Но оказывается, что и общее число деревьев размера k при таком p в пределе пуассоновское.

Теорема (3.1)

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, фиксировано, а $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, а $T_n(k)$ — это число деревьев размера k в $G(n,p)$. Тогда $T_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

Случай $np \to 0$. Размер компонент.

Сам же максимальный размер древесной компоненты сильно зависит от того, как быстро np убывает к нулю. Мы знаем, что пороговой вероятностью для появления любого дерева размера k является $n^{-k/(k-1)}$. При этом для любого фиксированного дерева T размера k количество подграфов, изоморфных T, имеет асимптотически пуассоновское распределение при $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$. Но оказывается, что и общее число деревьев размера k при таком p в пределе пуассоновское.

Теорема (3.1)

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, фиксировано, а $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, а $T_n(k)$ — это число деревьев размера k в $G(n,p)$. Тогда $T_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

Теорема 3.1 вместе с леммой 3.1 дает следующее интересное следствие.

Следствие

Следствие (3.1)

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, *фиксировано. Обозначим через* $T_n(k)$ *— число деревьев размера* k, $CT_n(k)$ *— число древесных компонент размера* k, *а* $C_n(k)$ *— число компонент размера* k *в случайном графе* $G(n,p)$. *Если* $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, *то*

$$\mathsf{P}(CT_n(k) = T_n(k) = C_n(k)) \longrightarrow 1,$$

и, стало быть, $CT_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$, $C_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ *при* $n \to \infty$, *где* $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

Следствие

Следствие (3.1)

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, *фиксировано. Обозначим через* $T_n(k)$ *— число деревьев размера* k, $CT_n(k)$ *— число древесных компонент размера* k, *а* $C_n(k)$ *— число компонент размера* k *в случайном графе* $G(n,p)$. *Если* $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, *то*

$$\mathsf{P}(CT_n(k) = T_n(k) = C_n(k)) \longrightarrow 1,$$

и, стало быть, $CT_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$, $C_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ *при* $n \to \infty$, *где*
$\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что, с вероятностью, стремящейся к единице, в $G(n,p)$ все компоненты — деревья. Значит, $CT_n(k) = C_n(k)$. Но деревья размера $k+1$ в графе еще не появились — их пороговая вероятность равна $n^{-(k+1)/k}$. Значит, все деревья размера k — это компоненты связности, т.е. $CT_n(k) = T_n(k)$. □

II. Случай $np = c, c \in (0, 1)$

Рассмотрим теперь случай $np = c$, где c — константа из $(0, 1)$. В этом случае структура графа немного меняется, в частности, появляются унициклические компоненты.

II. Случай $np = c, c \in (0, 1)$

Рассмотрим теперь случай $np = c$, где c — константа из $(0, 1)$. В этом случае структура графа немного меняется, в частности, появляются унициклические компоненты. Однако прежде чем мы перейдем к обсуждению структуры случайного графа в данных условиях мы вспомним классическое неравенство Чернова об оценке вероятности больших уклонений в схеме Бернулли.

II. Случай $np = c, c \in (0, 1)$

Рассмотрим теперь случай $np = c$, где c — константа из $(0, 1)$. В этом случае структура графа немного меняется, в частности, появляются унициклические компоненты. Однако прежде чем мы перейдем к обсуждению структуры случайного графа в данных условиях мы вспомним классическое неравенство Чернова об оценке вероятности больших уклонений в схеме Бернулли.

Теорема (3.2, неравенство Чернова)

Пусть $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ и $\lambda = np$. Тогда для любого $t \geqslant 0$ выполнены следующие неравенства

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) \leqslant \exp\left\{-\lambda\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2(\lambda + t/3)}\right\}, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}\left(X \leqslant \lambda - t\right) \leqslant \exp\left\{-\lambda\varphi\left(\frac{-t}{\lambda}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{t^2}{2\lambda}\right\}, \tag{2}$$

где $\varphi(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - x$, $x \geqslant -1$.

Доказательство неравенства Чернова

Во-первых заметим, что для любого $u \geqslant 0$ и $t \leqslant n - \lambda$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) = \mathsf{P}\left(e^{uX} \geqslant e^{u(\lambda+t)}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{uX}}{e^{u(\lambda+t)}} = e^{-u(\lambda+t)}(1 - p + pe^{u})^{n}.$$

Доказательство неравенства Чернова

Во-первых заметим, что для любого $u \geqslant 0$ и $t \leqslant n - \lambda$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) = \mathsf{P}\left(e^{uX} \geqslant e^{u(\lambda+t)}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{uX}}{e^{u(\lambda+t)}} = e^{-u(\lambda+t)}(1 - p + pe^{u})^{n}.$$

Правая часть минимизируется при $e^u = \frac{(\lambda+t)(1-p)}{(n-\lambda-t)p}$.

Доказательство неравенства Чернова

Во-первых заметим, что для любого $u \geqslant 0$ и $t \leqslant n - \lambda$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) = \mathsf{P}\left(e^{uX} \geqslant e^{u(\lambda+t)}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{uX}}{e^{u(\lambda+t)}} = e^{-u(\lambda+t)}(1 - p + pe^{u})^{n}.$$

Правая часть минимизируется при $e^u = \frac{(\lambda+t)(1-p)}{(n-\lambda-t)p}$. Отсюда

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^{\lambda+t}\left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda-t}\right)^{n-\lambda-t} =$$

Доказательство неравенства Чернова

Во-первых заметим, что для любого $u \geqslant 0$ и $t \leqslant n - \lambda$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) = \mathsf{P}\left(e^{uX} \geqslant e^{u(\lambda+t)}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{uX}}{e^{u(\lambda+t)}} = e^{-u(\lambda+t)}(1-p+pe^u)^n.$$

Правая часть минимизируется при $e^u = \frac{(\lambda+t)(1-p)}{(n-\lambda-t)p}$. Отсюда

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\lambda+t} \left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda-t}\right)^{n-\lambda-t} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) - (n-\lambda)\varphi\left(\frac{-t}{n-\lambda}\right)\right\}, \qquad (3)$$

где $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

Доказательство неравенства Чернова

Во-первых заметим, что для любого $u \geqslant 0$ и $t \leqslant n - \lambda$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) = \mathsf{P}\left(e^{uX} \geqslant e^{u(\lambda+t)}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{uX}}{e^{u(\lambda+t)}} = e^{-u(\lambda+t)}(1 - p + pe^u)^n.$$

Правая часть минимизируется при $e^u = \frac{(\lambda+t)(1-p)}{(n-\lambda-t)p}$. Отсюда

$$\mathsf{P}\left(X \geqslant \lambda + t\right) \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\lambda+t}\left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda-t}\right)^{n-\lambda-t} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) - (n-\lambda)\varphi\left(\frac{-t}{n-\lambda}\right)\right\}, \tag{3}$$

где $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$. Совершенно аналогично, в случае уклонения в меньшую сторону от среднего, получаем

$$\mathsf{P}\left(X \leqslant \lambda - t\right) \leqslant \exp\left\{-\lambda\varphi\left(\frac{-t}{\lambda}\right) - (n-\lambda)\varphi\left(\frac{t}{n-\lambda}\right)\right\}. \tag{4}$$

Доказательство неравенства Чернова

Заметим, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех x, поэтому неравенства (1) и (2) сразу вытекают из (3) и (4).

Доказательство неравенства Чернова

Заметим, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех x, поэтому неравенства (1) и (2) сразу вытекают из (3) и (4).

Далее, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = \ln(1+x) \leqslant x$, поэтому $\varphi(x) \geqslant x^2/2$ для $x \in [-1, 0]$. Отсюда из (4) легко вытекает второе неравенство в (2).

Доказательство неравенства Чернова

Заметим, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех x, поэтому неравенства (1) и (2) сразу вытекают из (3) и (4).

Далее, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = \ln(1+x) \leqslant x$, поэтому $\varphi(x) \geqslant x^2/2$ для $x \in [-1, 0]$. Отсюда из (4) легко вытекает второе неравенство в (2).

Для доказательства второго неравенства в (1) рассмотрим вторую производную $\varphi(x)$: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{1+x} \geqslant \frac{1}{(1+x/3)^3} = \left(\frac{x^2}{2(1+x/3)}\right)''.$$

Доказательство неравенства Чернова

Заметим, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех x, поэтому неравенства (1) и (2) сразу вытекают из (3) и (4).

Далее, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = \ln(1+x) \leqslant x$, поэтому $\varphi(x) \geqslant x^2/2$ для $x \in [-1, 0]$. Отсюда из (4) легко вытекает второе неравенство в (2).

Для доказательства второго неравенства в (1) рассмотрим вторую производную $\varphi(x)$: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{1+x} \geqslant \frac{1}{(1+x/3)^3} = \left(\frac{x^2}{2(1+x/3)}\right)''.$$

Значит, для положительных x выполнено $\varphi(x) \geqslant x^2/(2(1+x/3))$. Подставляя $x = t/\lambda$ в (3), получаем искомое неравенство. $\square$

Неравенство Чернова

Следствие (3.2, неравенство Чернова)

Пусть $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ *и* $\lambda = np$. *Тогда для любого* $t \geqslant 0$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(|X-\lambda| \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2(\lambda + t/3)}\right\}.$$

Неравенство Чернова

Следствие (3.2, неравенство Чернова)

Пусть $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ *и* $\lambda = np$. *Тогда для любого* $t \geqslant 0$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(|X - \lambda| \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2(\lambda + t/3)}\right\}.$$

Замечание

Неравенство Чернова дает экспоненциальную (по n*) концентрацию случайной величины* X *вокруг своего среднего, если* $t \asymp n$, $p = const$, *в то время как, например, неравенство Чебышева дает оценку вероятности только вида* $O(1/n)$.

Теорема о наибольшем размере компоненты

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать следующую теорему о размере максимальной компоненты в $G(n,p)$ при $np = c \in (0,1)$.

Теорема о наибольшем размере компоненты

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать следующую теорему о размере максимальной компоненты в $G(n,p)$ при $np = c \in (0,1)$.

Теорема (3.3)

Пусть $c \in (0,1)$ — константа, $np = c$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, максимальный размер компоненты в $G(n,p)$ не превосходит $\frac{3}{(1-c)^2} \ln n$.

Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим следующий процесс набора компоненты случайного графа $G(n, p)$.

Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим следующий процесс набора компоненты случайного графа $G(n,p)$.

- Начинаем с некоторой вершины v и выявляем всех ее соседей в $G(n,p)$. Пусть $v_1,\dots,v_r$ — эти соседи v.

Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим следующий процесс набора компоненты случайного графа $G(n, p)$.

- Начинаем с некоторой вершины v и выявляем всех ее соседей в $G(n, p)$. Пусть $v_1, \ldots, v_r$ — эти соседи v.
- Далее, пусть $v_{11}, \ldots, v_{1s_1}$ — соседи v_1 в $G(n, p)$, кроме $v, v_2, \ldots, v_r$.

Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим следующий процесс набора компоненты случайного графа $G(n,p)$.

- Начинаем с некоторой вершины v и выявляем всех ее соседей в $G(n,p)$. Пусть $v_1,\ldots,v_r$ — эти соседи v.
- Далее, пусть $v_{11},\ldots,v_{1s_1}$ — соседи v_1 в $G(n,p)$, кроме $v,v_2,\ldots,v_r$.
- Продолжаем данную процедуру набора вершин, пока не выявим все вершины компоненты, содержащей v.

Доказательство теоремы 3.3

Рассмотрим следующий процесс набора компоненты случайного графа $G(n, p)$.

- Начинаем с некоторой вершины v и выявляем всех ее соседей в $G(n, p)$. Пусть $v_1, \dots, v_r$ — эти соседи v.
- Далее, пусть $v_{11}, \dots, v_{1s_1}$ — соседи v_1 в $G(n, p)$, кроме $v, v_2, \dots, v_r$.
- Продолжаем данную процедуру набора вершин, пока не выявим все вершины компоненты, содержащей v.

Обозначим через X_i — число новых вершин компоненты, которое добавляет i-я вершина в процессе. Случайная величина X_i имеет условное биномиальное распределение относительно $X_1, \dots, X_{i-1}$, поэтому ее можно ограничить сверху (добавив к $G(n, p)$ мнимые вершины) случайной величиной $Y_i \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, причем $Y_1, Y_2, \dots$ будут независимыми.

Доказательство теоремы 3.3

Тогда вероятность того, что в $G(n,p)$ найдется компонента размера $k = \lceil \frac{3}{(1-c)^2} \ln n \rceil$, можно оценить следующим образом:

$$\mathsf{P}\left(\text{ в } G(n,p) \text{ существует компонента размера } \geqslant k \right) \leqslant$$

Доказательство теоремы 3.3

Тогда вероятность того, что в $G(n,p)$ найдется компонента размера $k = \lceil \frac{3}{(1-c)^2} \ln n \rceil$, можно оценить следующим образом:

$$\mathsf{P}\,(\text{ в } G(n,p) \text{ существует компонента размера } \geqslant k) \leqslant$$

$$\leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \geqslant k-1\right) \leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \geqslant k-1\right) =$$

Доказательство теоремы 3.3

Тогда вероятность того, что в $G(n,p)$ найдется компонента размера $k = \lceil \frac{3}{(1-c)^2} \ln n \rceil$, можно оценить следующим образом:

$$\mathsf{P}\left(\text{ в } G(n,p) \text{ существует компонента размера } \geqslant k\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \geqslant k-1\right) \leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \geqslant k-1\right) =$$

(т.к. $\sum_{i=1}^{k} Y_i \sim \mathrm{Bin}(nk,p)$ мы можем применить неравенство Чернова (1))

$$= n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \geqslant ck + (1-c)k - 1\right) \leqslant$$

Доказательство теоремы 3.3

Тогда вероятность того, что в $G(n,p)$ найдется компонента размера $k = \lceil \frac{3}{(1-c)^2} \ln n \rceil$, можно оценить следующим образом:

$$\mathsf{P}\,(\text{ в } G(n,p) \text{ существует компонента размера } \geqslant k) \leqslant$$

$$\leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \geqslant k-1\right) \leqslant n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \geqslant k-1\right) =$$

(т.к. $\sum_{i=1}^{k} Y_i \sim \mathrm{Bin}(nk,p)$ мы можем применить неравенство Чернова (1))

$$= n\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \geqslant ck + (1-c)k - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\exp\left\{-\frac{((1-c)k-1)^2}{2(ck+(1-c)k/3)}\right\} \leqslant ne^{-\frac{(1-c)^2}{2}k(1+o(1))} \leqslant n\cdot n^{-3/2(1+o(1))} = o(1)$$

при выбранном $k \geqslant \frac{3}{(1-c)^2}\ln n$. □

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Определение

Связная компонента графа называется ℓ-компонентой, если она состоит из k вершин и $k+\ell$ ребер для некоторого $k \geqslant 2$. Любая ℓ-компонента с $\ell > 0$ называется сложной. Число различных связных графов на k помеченных вершинах с $k+\ell$ ребрами обозначается через $C(k, k+\ell)$.

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Определение

Связная компонента графа называется ℓ-компонентой, если она состоит из k вершин и $k+\ell$ ребер для некоторого $k \geqslant 2$. Любая ℓ-компонента с $\ell > 0$ называется сложной. Число различных связных графов на k помеченных вершинах с $k+\ell$ ребрами обозначается через $C(k, k+\ell)$.

Из определения ясно, что (-1)-компонента это дерево, а 0-компонента — уникциклический граф.

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Определение

Связная компонента графа называется ℓ-компонентой, если она состоит из k вершин и $k+\ell$ ребер для некоторого $k \geqslant 2$. Любая ℓ-компонента с $\ell > 0$ называется сложной. Число различных связных графов на k помеченных вершинах с $k+\ell$ ребрами обозначается через $C(k, k+\ell)$.

Из определения ясно, что (-1)-компонента это дерево, а 0-компонента — уницикличеcкий граф. Их количества хорошо известны:

$$C(k, k-1) = k^{k-2} \qquad \text{(формула Кэли)},$$

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Определение

Связная компонента графа называется ℓ-компонентой, если она состоит из k вершин и $k+\ell$ ребер для некоторого $k \geqslant 2$. Любая ℓ-компонента с $\ell > 0$ называется сложной. Число различных связных графов на k помеченных вершинах с $k+\ell$ ребрами обозначается через $C(k, k+\ell)$.

Из определения ясно, что (-1)-компонента это дерево, а 0-компонента — унициклический граф. Их количества хорошо известны:

$$C(k, k-1) = k^{k-2} \qquad \text{(формула Кэли)},$$

$$C(k,k) = \frac{1}{2}(k-1)! \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} k^{k-1/2}.$$

Структура компонент

Какие же компоненты возможны в нашем случайном графе? Напомним ряд определений относительно компонент.

Определение

Связная компонента графа называется ℓ-компонентой, если она состоит из k вершин и $k+\ell$ ребер для некоторого $k \geqslant 2$. Любая ℓ-компонента с $\ell > 0$ называется сложной. Число различных связных графов на k помеченных вершинах с $k+\ell$ ребрами обозначается через $C(k, k+\ell)$.

Из определения ясно, что (-1)-компонента это дерево, а 0-компонента — уницикличecкий граф. Их количества хорошо известны:

$$C(k, k-1) = k^{k-2} \qquad \text{(формула Кэли)},$$

$$C(k, k) = \frac{1}{2}(k-1)! \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} k^{k-1/2}.$$

Точное же значение $C(k, k+\ell)$ при $\ell > 0$ неизвестно, но имеется ряд хороших асимптотических оценок.

О числе лесов

Обозначим через $F(k,r)$ число таких различных помеченных лесов на k вершинах $\{1,2,\ldots,k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1,2,\ldots,r\}$ находятся в разных компонентах.

О числе лесов

Обозначим через $F(k,r)$ число таких различных помеченных лесов на k вершинах $\{1,2,\ldots,k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1,2,\ldots,r\}$ находятся в разных компонентах.

Лемма

Имеет место равенство

$$F(k,r) = r \cdot k^{k-r-1}.$$

О числе лесов

Обозначим через $F(k, r)$ число таких различных помеченных лесов на k вершинах $\{1, 2, \ldots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \ldots, r\}$ находятся в разных компонентах.

Лемма

Имеет место равенство

$$F(k, r) = r \cdot k^{k-r-1}.$$

Следствие (формула Кэли)

$$C(k, k-1) = k^{k-2}.$$

О числе лесов

Обозначим через $F(k,r)$ число таких различных помеченных лесов на k вершинах $\{1,2,\dots,k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1,2,\dots,r\}$ находятся в разных компонентах.

Лемма

Имеет место равенство

$$F(k,r) = r \cdot k^{k-r-1}.$$

Следствие (формула Кэли)

$$C(k,k-1) = k^{k-2}.$$

Доказательство. Достаточно в лемме положить $r = 1$. □

Доказательство леммы о числе лесов

Пусть задан такой лес на k вершинах $\{1, 2, \ldots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \ldots, r\}$ находятся в разных компонентах.

Доказательство леммы о числе лесов

Пусть задан такой лес на k вершинах $\{1, 2, \ldots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \ldots, r\}$ находятся в разных компонентах. Сопоставим ему код (Прюфера) из $k - r$ чисел по следующему алгоритму:

Доказательство леммы о числе лесов

Пусть задан такой лес на k вершинах $\{1, 2, \ldots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \ldots, r\}$ находятся в разных компонентах. Сопоставим ему код (Прюфера) из $k - r$ чисел по следующему алгоритму:

- находим в текущем лесе висячую вершину v с наибольшим номером;
- пишем в код номер соседа v;
- удаляем из графа v.

Доказательство леммы о числе лесов

Пусть задан такой лес на k вершинах $\{1, 2, \ldots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \ldots, r\}$ находятся в разных компонентах. Сопоставим ему код (Прюфера) из $k - r$ чисел по следующему алгоритму:

- находим в текущем лесе висячую вершину v с наибольшим номером;
- пишем в код номер соседа v;
- удаляем из графа v.

После $k - r$ шагов мы удалим из графа все вершины, кроме корней $\{1, 2, \ldots, r\}$. Каждый раз у нас было k возможных вариантов для записи номера соседа вершины, кроме последнего шага, где мы пишем одну из вершин $\{1, 2, \ldots, r\}$. Всего возможно $r \cdot k^{k-r-1}$ кодов.

Доказательство леммы о числе лесов

Пусть задан такой лес на k вершинах $\{1, 2, \dots, k\}$ с r деревьями, что вершины $\{1, 2, \dots, r\}$ находятся в разных компонентах. Сопоставим ему код (Прюфера) из $k - r$ чисел по следующему алгоритму:

- находим в текущем лесе висячую вершину v с наибольшим номером;
- пишем в код номер соседа v;
- удаляем из графа v.

После $k - r$ шагов мы удалим из графа все вершины, кроме корней $\{1, 2, \dots, r\}$. Каждый раз у нас было k возможных вариантов для записи номера соседа вершины, кроме последнего шага, где мы пишем одну из вершин $\{1, 2, \dots, r\}$. Всего возможно $r \cdot k^{k-r-1}$ кодов.

Несложно по любом коду из $k - r$ чисел, на последнем месте которого находится одно из чисел $\{1, 2, \dots, r\}$, восстановить лес:

- находим вершину v с наибольшим номером, которой нет в текущем коде;
- присоединяем v к u — первой вершине кода;
- стираем u с первого места кода.

Получившаяся биекция доказывает лемму.

Число унициклических графов

Следствие (о числе унициклических графов)

$$C(k,k) = \frac{1}{2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Число унициклических графов

Следствие (о числе унициклических графов)

$$C(k,k) = \frac{1}{2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Доказательство. В унициклическом графе есть один цикл. Пусть его длина равна r. Если удалить его ребра, то останется лес из r деревьев, корнями которых являются вершины цикла.

Число унициклических графов

Следствие (о числе унициклических графов)

$$C(k,k) = \frac{1}{2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Доказательство. В унициклическом графе есть один цикл. Пусть его длина равна r. Если удалить его ребра, то останется лес из r деревьев, корнями которых являются вершины цикла. Отсюда:

$$\begin{aligned} C(k,k) &= \sum_{r=3}^{k}\binom{k}{r}\frac{r!}{2r}F(k,r) = \\ &= \sum_{r=3}^{k}\binom{k}{r}\frac{r!}{2r}r\cdot k^{k-r-1} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k!}{j!}k^{j-1} = \frac{1}{2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}. \end{aligned}$$

Отсутствие сложных компонент

Пусть $np = c \in (0,1)$. Следующая лемма показывает, что в рассматриваемой ситуации в случайном графе с большой вероятностью нет сложных компонент.

Отсутствие сложных компонент

Пусть $np = c \in (0, 1)$. Следующая лемма показывает, что в рассматриваемой ситуации в случайном графе с большой вероятностью нет сложных компонент.

Лемма (3.3)

Пусть $np = 1 - s$, $s > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \frac{2}{ns^3}.$$

Отсутствие сложных компонент

Пусть $np = c \in (0, 1)$. Следующая лемма показывает, что в рассматриваемой ситуации в случайном графе с большой вероятностью нет сложных компонент.

Лемма (3.3)

Пусть $np = 1 - s$, $s > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \frac{2}{ns^3}.$$

Следствие (3.3)

Если $np = c$, $c \in (0, 1)$, *то с вероятностью, стремящейся к 1,* $G(n, p)$ *не содержит сложных компонент.*

Отсутствие сложных компонент

Пусть $np = c \in (0,1)$. Следующая лемма показывает, что в рассматриваемой ситуации в случайном графе с большой вероятностью нет сложных компонент.

Лемма (3.3)

Пусть $np = 1 - s$, $s > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \frac{2}{ns^3}.$$

Следствие (3.3)

Если $np = c$, $c \in (0,1)$, *то с вероятностью, стремящейся к 1,* $G(n,p)$ *не содержит сложных компонент.*

Замечание

Отметим, что сложные компоненты будут отсутствовать и при $s = s(n) \to 0$, *если* $s = \omega(n^{-1/3})$.

Доказательство леммы 3.3

В сложной компоненте должно быть по крайней мере два цикла, поэтому каждая такая компонента содержит подграф одного из двух следующих видов:
а) два цикла, связанные путем,
б) цикл с диагональю внутри.

Доказательство леммы 3.3

В сложной компоненте должно быть по крайней мере два цикла, поэтому каждая такая компонента содержит подграф одного из двух следующих видов:
а) два цикла, связанные путем,
б) цикл с диагональю внутри.

Легко понять, что на множестве из k вершин число таких подграфов не превосходит $k^2 k!$ (сначала выбираем типа графа, затем, например, вершины первого цикла, потом вершины из пути, в конце вершины второго цикла, а также надо отметить две вершины $\binom{k}{2}$ способами, как конечную и начальную для пути).

Доказательство леммы 3.3

Обозначим через $\widetilde{X}_n$ число таких подграфов в $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\widetilde{X}_n > 0\right) \leqslant \mathsf{E}\widetilde{X}_n \leqslant$$

Доказательство леммы 3.3

Обозначим через $\widetilde{X}_n$ число таких подграфов в $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p)\ \text{содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\widetilde{X}_n > 0\right) \leqslant \mathsf{E}\widetilde{X}_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} k! k^2 p^{k+1} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n} k^2 (np)^{k+1} = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n} k^2 (1-s)^{k+1} \leqslant$$

Доказательство леммы 3.3

Обозначим через $\widetilde{X}_n$ число таких подграфов в $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(G(n,p) \text{ содержит сложную компоненту}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\widetilde{X}_n > 0\right) \leqslant \mathsf{E}\widetilde{X}_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} k! k^2 p^{k+1} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n} k^2 (np)^{k+1} = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n} k^2 (1-s)^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n} k^2 e^{-s(k+1)} \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-sx} dx = \frac{2}{ns^3}.$$

$\square$

Унициклические компоненты

Вернемся к случайному графу $G(n,p)$. При $np = c \in (0,1)$ мы уже выяснили, что сложных компонент нет. Осталось понять, сколько унициклических компонент возможно в случайном графе. Ответ на то, каково предельное распределение числа унициклических компонент фиксированного размера дает следующая теорема.

Унициклические компоненты

Вернемся к случайному графу $G(n,p)$. При $np = c \in (0,1)$ мы уже выяснили, что сложных компонент нет. Осталось понять, сколько унициклических компонент возможно в случайном графе. Ответ на то, каково предельное распределение числа унициклических компонент фиксированного размера дает следующая теорема.

Теорема (3.4)

Пусть $np = c$, $c > 0$ — константа, $k \geqslant 3$ — фиксировано. Обозначим через $U_n(k)$ — число унициклических компонент размера k в $G(n,p)$. Тогда $U_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n \to +\infty$, где $\lambda = \frac{1}{2k}(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} k^j/j!$

Унициклические компоненты

Вернемся к случайному графу $G(n,p)$. При $np = c \in (0,1)$ мы уже выяснили, что сложных компонент нет. Осталось понять, сколько унициклических компонент возможно в случайном графе. Ответ на то, каково предельное распределение числа унициклических компонент фиксированного размера дает следующая теорема.

Теорема (3.4)

Пусть $np = c$, $c > 0$ — константа, $k \geqslant 3$ — фиксировано. Обозначим через $U_n(k)$ — число унициклических компонент размера k в $G(n,p)$. Тогда $U_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n \to +\infty$, где $\lambda = \frac{1}{2k}(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} k^j/j!$

Замечание

Мы помним, что предельное распределение числа подграфов, изоморфных фиксированному унициклическому графу совсем не обязательно является пуассоновским при $np = const$. Однако, если мы говорим о компонентах, изоморфных фиксированному унициклическому графу, то ситуация резко меняется.

Доказательство теоремы 3.4

Воспользуемся методом моментов. Рассмотрим r-й факториальный момент $U_n(k)$.

$$\mathsf{E}\left(U_n(k)\right)_r = \prod_{j=0}^{r-1} \binom{n-kj}{k} C(k,k) p^k (1-p)^{k(n-(j+1)k)+\binom{k}{2}-k} \sim$$

Доказательство теоремы 3.4

Воспользуемся методом моментов. Рассмотрим r-й факториальный момент $U_n(k)$.

$$\mathsf{E}\left(U_n(k)\right)_r = \prod_{j=0}^{r-1} \binom{n-kj}{k} C(k,k) p^k (1-p)^{k(n-(j+1)k)+\binom{k}{2}-k} \sim$$

(т.к. k и r — константы)

$$\sim \left((np)^k e^{-npk} \frac{C(k,k)}{k!}\right)^r = \left((ce^{-c})^k \frac{C(k,k)}{k!}\right)^r = \lambda^r.$$

Доказательство теоремы 3.4

Воспользуемся методом моментов. Рассмотрим r-й факториальный момент $U_n(k)$.

$$\mathsf{E}\left(U_n(k)\right)_r = \prod_{j=0}^{r-1} \binom{n-kj}{k} C(k,k) p^k (1-p)^{k(n-(j+1)k)+\binom{k}{2}-k} \sim$$

(т.к. k и r — константы)

$$\sim \left((np)^k e^{-npk} \frac{C(k,k)}{k!}\right)^r = \left((ce^{-c})^k \frac{C(k,k)}{k!}\right)^r = \lambda^r.$$

Согласно методу моментов это означает, что $U_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$. $\square$

Унициклические компоненты

Совершенно аналогично доказывается следующий многомерный вариант теоремы 3.4.

Теорема (3.5)

Пусть $np = c$, $c > 0$ *— константа,* $k \geqslant 3$ *— фиксировано. Обозначим через* $U_n(k)$ *— число унициклических компонент размера* k *в* $G(n,p)$. *Тогда для* $3 \leqslant k_1 < \ldots < k_s$ *выполнено*

$$(U_n(k_1), \ldots, U_n(k_s)) \xrightarrow{d} (Z_1, \ldots, Z_s),$$

где $Z_1, \ldots, Z_s$ *— независимые случайные величины и* $Z_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$ *с* $\lambda_i = \frac{1}{2k_i}(ce^{-c})^{k_i} \sum_{j=0}^{k_i-3} {k_i}^j/j!$

Общее число вершин

Осталось прояснить вопрос об общем объеме вершин, входящих в унициклические компоненты. Для этого докажем лемму о математическом ожидании и дисперсии этой случайной величины.

Общее число вершин

Осталось прояснить вопрос об общем объеме вершин, входящих в унициклические компоненты. Для этого докажем лемму о математическом ожидании и дисперсии этой случайной величины.

Лемма (3.4)

Пусть U_n — общее число вершин в унициклических компонентах случайного графа $G(n,p)$. Если $np \to c > 0$, $c \neq 1$, то при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}U_n \longrightarrow \mu(c) = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{+\infty}(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!},$$

$$\mathsf{D}U_n \longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{+\infty}k(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Доказательство леммы 3.4

Пусть, как и в теореме 3.4, $U_n(k)$ — это число унициклических компонент размера k в случайном графе $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{E}U_n = \sum_{k=3}^{n} k\mathsf{E}U_n(k) = \sum_{k=3}^{n} k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k}.$$

Доказательство леммы 3.4

Пусть, как и в теореме 3.4, $U_n(k)$ — это число унициклических компонент размера k в случайном графе $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{E}U_n = \sum_{k=3}^{n} k\mathsf{E}U_n(k) = \sum_{k=3}^{n} k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k}.$$

Слагаемое при фиксированном k имеет нужный предел (см. теорему 3.4):

$$\frac{kC(k,k)}{k!}(ce^{-c})^k = \frac{1}{2}(ce^{-c})^k\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Доказательство леммы 3.4

Пусть, как и в теореме 3.4, $U_n(k)$ — это число унициклических компонент размера k в случайном графе $G(n,p)$. Тогда

$$\mathsf{E}U_n = \sum_{k=3}^{n} k\mathsf{E}U_n(k) = \sum_{k=3}^{n} k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k}.$$

Слагаемое при фиксированном k имеет нужный предел (см. теорему 3.4):

$$\frac{kC(k,k)}{k!}(ce^{-c})^k = \frac{1}{2}(ce^{-c})^k\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}.$$

Для завершения доказательства асимптотической формулы для $\mathsf{E}U_n$ осталось показать, что сходимость ряда равномерная по параметру n. Для этого мы предъявим мажоранту нашего ряда следующего вида: для всех $k \leqslant n$

$$k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k} = O\left(e^{-\gamma\cdot k}\right) \tag{5}$$

для некоторой фиксированной $\gamma > 0$.

Доказательство леммы 3.4

Заметим, что выражение в левой части (5) можно оценить следующим образом:

$$k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k} = O\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+1/2}(np)^k e^{-pkn+pk^2/2}\right).$$

Доказательство леммы 3.4

Заметим, что выражение в левой части (5) можно оценить следующим образом:

$$k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k} = O\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+1/2}(np)^k e^{-pkn+pk^2/2}\right).$$

Заметим, что множитель $(n/(n-k))^{1/2}$ не влияет на равномерную сходимость, т.к. мы хотим получить экспоненциально быстро убывающую к 0 мажоранту.

Доказательство леммы 3.4

Заметим, что выражение в левой части (5) можно оценить следующим образом:

$$k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k} = O\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+1/2}(np)^k e^{-pkn+pk^2/2}\right).$$

Заметим, что множитель $(n/(n-k))^{1/2}$ не влияет на равномерную сходимость, т.к. мы хотим получить экспоненциально быстро убывающую к 0 мажоранту.

Далее, обозначим $\beta = k/n$, $\zeta = np$. Тогда выражение в предыдущей формуле примет вид:

$$\exp\{kf(\zeta,\beta)\}, \text{ где } f(\zeta,\beta) = -\frac{1-\beta}{\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\zeta\beta}{2} - \zeta + \ln\zeta.$$

Доказательство леммы 3.4

Заметим, что выражение в левой части (5) можно оценить следующим образом:

$$k\binom{n}{k}C(k,k)p^k(1-p)^{k(n-k)+\binom{k}{2}-k} = O\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+1/2}(np)^k e^{-pkn+pk^2/2}\right).$$

Заметим, что множитель $(n/(n-k))^{1/2}$ не влияет на равномерную сходимость, т.к. мы хотим получить экспоненциально быстро убывающую к 0 мажоранту.

Далее, обозначим $\beta = k/n$, $\zeta = np$. Тогда выражение в предыдущей формуле примет вид:

$$\exp\{kf(\zeta,\beta)\}, \text{ где } f(\zeta,\beta) = -\frac{1-\beta}{\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\zeta\beta}{2} - \zeta + \ln\zeta.$$

По условию $\zeta \to c \neq 1$, а $f(\zeta,0) = 1-\zeta+\ln\zeta$. Таким образом, если нам удастся показать, что существует такое $\delta = \delta(c) < 0$, что $f(\zeta,\beta) \leqslant \delta$ для всех $\beta \in [0,1]$ и всех ζ, достаточно близких к c, то искомая равномерная сходимость ряда будет установлена.

Доказательство леммы 3.4

Отметим, что $f(c,0) = 1 - c + \ln c < 0$, и выберем $\beta_0 > 0$ так, чтобы при $\beta < \beta_0$ выполнялось $f(c,\beta_0) \leqslant f(c,0)/2 < 0$. Тогда для всех близких к c значений ζ будет выполнено соотношение $f(\zeta,\beta) \leqslant f(c,0)/4 < 0$.

Доказательство леммы 3.4

Отметим, что $f(c,0) = 1 - c + \ln c < 0$, и выберем $\beta_0 > 0$ так, чтобы при $\beta < \beta_0$ выполнялось $f(c,\beta_0) \leqslant f(c,0)/2 < 0$. Тогда для всех близких к c значений ζ будет выполнено соотношение $f(\zeta,\beta) \leqslant f(c,0)/4 < 0$.

Если же $\beta \geqslant \beta_0$, то рассмотрим функцию

$$g(\beta) = \beta f(\zeta,\beta) = -(1-\beta)\ln(1-\beta) + \frac{\zeta\beta^2}{2} - \zeta\beta + \beta\ln(\zeta).$$

Доказательство леммы 3.4

Отметим, что $f(c,0) = 1 - c + \ln c < 0$, и выберем $\beta_0 > 0$ так, чтобы при $\beta < \beta_0$ выполнялось $f(c,\beta_0) \leqslant f(c,0)/2 < 0$. Тогда для всех близких к c значений ζ будет выполнено соотношение $f(\zeta,\beta) \leqslant f(c,0)/4 < 0$.

Если же $\beta \geqslant \beta_0$, то рассмотрим функцию

$$g(\beta) = \beta f(\zeta,\beta) = -(1-\beta)\ln(1-\beta) + \frac{\zeta\beta^2}{2} - \zeta\beta + \beta\ln(\zeta).$$

Возьмем первую и вторую производные от $g(\beta)$:

$$g'(\beta) = 1 + \ln(1-\beta) + \zeta\beta - \zeta + \ln\zeta, \quad g''(\beta) = -\frac{1}{1-\beta} + \zeta.$$

Доказательство леммы 3.4

Отметим, что $f(c,0) = 1 - c + \ln c < 0$, и выберем $\beta_0 > 0$ так, чтобы при $\beta < \beta_0$ выполнялось $f(c, \beta_0) \leqslant f(c,0)/2 < 0$. Тогда для всех близких к c значений ζ будет выполнено соотношение $f(\zeta, \beta) \leqslant f(c,0)/4 < 0$.

Если же $\beta \geqslant \beta_0$, то рассмотрим функцию

$$g(\beta) = \beta f(\zeta, \beta) = -(1-\beta)\ln(1-\beta) + \frac{\zeta\beta^2}{2} - \zeta\beta + \beta\ln(\zeta).$$

Возьмем первую и вторую производные от $g(\beta)$:

$$g'(\beta) = 1 + \ln(1-\beta) + \zeta\beta - \zeta + \ln\zeta, \quad g''(\beta) = -\frac{1}{1-\beta} + \zeta.$$

Если $\zeta < 1$, то $g''(\beta) < 0$ на всем $[0,1]$, следовательно, $g'(\beta)$ убывает и максимальна при $\beta = 0$, где ее значение равно $f(\zeta, 0) = 1 - \zeta + \ln\zeta < 0$. Стало быть, сама функция $g(\beta)$ строго убывает на $[0,1]$.

Доказательство леммы 3.4

Отметим, что $f(c,0)=1-c+\ln c<0$, и выберем $\beta_0>0$ так, чтобы при $\beta<\beta_0$ выполнялось $f(c,\beta_0)\leqslant f(c,0)/2<0$. Тогда для всех близких к c значений ζ будет выполнено соотношение $f(\zeta,\beta)\leqslant f(c,0)/4<0$.

Если же $\beta\geqslant\beta_0$, то рассмотрим функцию

$$g(\beta)=\beta f(\zeta,\beta)=-(1-\beta)\ln(1-\beta)+\frac{\zeta\beta^2}{2}-\zeta\beta+\beta\ln(\zeta).$$

Возьмем первую и вторую производные от $g(\beta)$:

$$g'(\beta)=1+\ln(1-\beta)+\zeta\beta-\zeta+\ln\zeta,\quad g''(\beta)=-\frac{1}{1-\beta}+\zeta.$$

Если $\zeta<1$, то $g''(\beta)<0$ на всем $[0,1]$, следовательно, $g'(\beta)$ убывает и максимальна при $\beta=0$, где ее значение равно $f(\zeta,0)=1-\zeta+\ln\zeta<0$. Стало быть, сама функция $g(\beta)$ строго убывает на $[0,1]$.

При $\zeta>1$ вторая производная $g(\beta)$ положительна на полуинтервале $[0,1-1/\zeta)$ и отрицательна на $(1-1/\zeta,1)$. В своей точке максимума $\beta=1-1/\zeta$ первая производная обращается в нуль, тем самым, сама функция $g(\beta)$ снова строго убывает на $[0,1]$.

Доказательство леммы 3.4

Но тогда для любых $\beta \geqslant \beta_0$ и ζ, близких к c, выполнено

$$f(\zeta, \beta) \leqslant \beta f(\zeta, \beta) \leqslant g(\beta_0) < g(0) = 0.$$

Осталось положить $\delta = \max(\beta_0 f(c, \beta_0)/2, f(c, 0)/4)$.

Доказательство леммы 3.4

Но тогда для любых $\beta \geqslant \beta_0$ и ζ, близких к c, выполнено

$$f(\zeta,\beta) \leqslant \beta f(\zeta,\beta) \leqslant g(\beta_0) < g(0) = 0.$$

Осталось положить $\delta = \max(\beta_0 f(c,\beta_0)/2, f(c,0)/4)$.

В итоге, мы доказали равномерную сходимость ряда. Предел математического ожидания U_n найден.

Доказательство леммы 3.4

Но тогда для любых $\beta \geqslant \beta_0$ и ζ, близких к c, выполнено

$$f(\zeta, \beta) \leqslant \beta f(\zeta, \beta) \leqslant g(\beta_0) < g(0) = 0.$$

Осталось положить $\delta = \max(\beta_0 f(c, \beta_0)/2, f(c, 0)/4)$.

В итоге, мы доказали равномерную сходимость ряда. Предел математического ожидания U_n найден.

Докажем теперь формулу для дисперсии. По теореме 3.5 для фиксированных $k_1 \neq k_2$ мы имеем, что $\mathsf{E} U_n(k_1) U_n(k_2) \sim \mathsf{E} U_n(k_1) \cdot \mathsf{E} U_n(k_2)$, а $\mathsf{E}(U_n(k_1))_2 \sim (\mathsf{E} U_n(k_1))^2$.

Доказательство леммы 3.4

Но тогда для любых $\beta \geqslant \beta_0$ и ζ, близких к c, выполнено

$$f(\zeta, \beta) \leqslant \beta f(\zeta, \beta) \leqslant g(\beta_0) < g(0) = 0.$$

Осталось положить $\delta = \max(\beta_0 f(c, \beta_0)/2, f(c, 0)/4)$.

В итоге, мы доказали равномерную сходимость ряда. Предел математического ожидания U_n найден.

Докажем теперь формулу для дисперсии. По теореме 3.5 для фиксированных $k_1 \neq k_2$ мы имеем, что $\mathsf{E} U_n(k_1) U_n(k_2) \sim \mathsf{E} U_n(k_1) \cdot \mathsf{E} U_n(k_2)$, а $\mathsf{E}(U_n(k_1))_2 \sim (\mathsf{E} U_n(k_1))^2$. Отсюда, применяя те же рассуждения про равномерную сходимость, получаем, что

$$\mathsf{E} U_n^2 \sim \sum_{k_1 \neq k_2} k_1 \cdot k_2 \mathsf{E} U_n(k_1) \mathsf{E} U_n(k_2) + \sum_k k^2 \mathsf{E}(U_n(k))^2 \sim$$

Доказательство леммы 3.4

Но тогда для любых $\beta \geqslant \beta_0$ и ζ, близких к c, выполнено

$$f(\zeta,\beta) \leqslant \beta f(\zeta,\beta) \leqslant g(\beta_0) < g(0) = 0.$$

Осталось положить $\delta = \max(\beta_0 f(c,\beta_0)/2, f(c,0)/4)$.

В итоге, мы доказали равномерную сходимость ряда. Предел математического ожидания U_n найден.

Докажем теперь формулу для дисперсии. По теореме 3.5 для фиксированных $k_1 \neq k_2$ мы имеем, что $\mathsf{E}U_n(k_1)U_n(k_2) \sim \mathsf{E}U_n(k_1) \cdot \mathsf{E}U_n(k_2)$, а $\mathsf{E}(U_n(k_1))_2 \sim (\mathsf{E}U_n(k_1))^2$. Отсюда, применяя те же рассуждения про равномерную сходимость, получаем, что

$$\mathsf{E}U_n^2 \sim \sum_{k_1 \neq k_2} k_1 \cdot k_2 \mathsf{E}U_n(k_1)\mathsf{E}U_n(k_2) + \sum_k k^2 \mathsf{E}(U_n(k))^2 \sim$$

$$\sim \sum_{k_1,k_2} k_1 \cdot k_2 \mathsf{E}U_n(k_1)\mathsf{E}U_n(k_2) + \sum_k k^2 \mathsf{E}U_n(k).$$

Доказательство леммы 3.4

Следовательно,

$$\mathsf{D}U_n \sim \sum_k k^2 \mathsf{E}U_n(k) \longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty} k(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!}.$$

$\square$

Общее число вершин

Следствие (3.4)

Пусть $np \to c > 0$, $c \neq 1$. Тогда общее число вершин в унициклических компонентах случайного графа $G(n, p)$ ограничено по вероятности.

Общее число вершин

Следствие (3.4)

Пусть $np \to c > 0$, $c \neq 1$. Тогда общее число вершин в унициклических компонентах случайного графа $G(n,p)$ ограничено по вероятности.

Доказательство. Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Тогда по неравенству Маркова:

$$\mathsf{P}\left(U_n \geqslant w(n)\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}\, U_n}{w(n)} = O\left(\frac{1}{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

□