Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

П. С. Гончарь
Л. Э. Гончарь
Д. С. Завалищин

ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ИГР С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

П. С. Гончарь
Л. Э. Гончарь
Д. С. Завалищин

ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ИГР С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов экономических специальностей
и направлений подготовки

Екатеринбург
Издательство УрГУПС
2012

УДК 517
Г33

Гончарь, П. С.

Г33 Задания по теории игр с примерами решения : учеб.-метод. пособие / П. С. Гончарь, Л. Э. Гончарь, Д. С. Завалищин. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2012. – 74, [2] с.

Содержится материал для индивидуальной самостоятельной учебной работы по матричным играм, включающий в себя основные понятия и определения, разнообразные задания: от элементарных до сложных, требующих исследования.

Предполагается использование совместно с учебным пособием «Теория игр» тех же авторов.

Предназначено для студентов экономических специальностей и направлений подготовки, а также для аспирантов.

Соответствует ГОС и содержанию курса «Математические методы и модели в экономике» специальности «Прикладная информатика в экономике», ФГОС и содержанию курсов «Методы оптимальных решений», «Сетевые модели и теория игр», «Экономико-математические методы и модели» направлений подготовки бакалавров «Экономика», «Торговое дело», «Менеджмент».

УДК 517

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом университета.

Авторы: П. С. Гончарь, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. пед. наук, УрГУПС

Л. Э. Гончарь, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

Д. С. Завалищин, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

Рецензенты: Г. А. Тимофеева, зав. кафедрой «Высшая и прикладная математика», д-р физ.-мат. наук, профессор, УрГУПС

В. Л. Розенберг, ст. научный сотрудник ИММ УрО РАН, канд. физ.-мат. наук

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……………………………………………………………....... 4

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР……………………............ 5

2. ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР С НУЛЕВОЙ СУММОЙ (В ПРИМЕРАХ) ……………………… 8

2.1. Выявление стратегии, сводящей к минимуму риски игроков …. 8

2.2. Чистые и смешанные стратегии игроков. Установление ситуаций, когда задача имеет решение «в чистых стратегиях» ……… 9

2.3. Исключение стратегий, заведомо невыгодных для игроков (по сравнению с другими возможными чистыми стратегиями) …... 12

2.4. Графическое сравнение зависимостей результата игры от вероятности применения игроками чистых стратегий ………………. 15

2.5. Использование теоремы об активных стратегиях ………………. 22

2.6. Переход к задаче линейного программирования с интерпретацией результатов в терминах теории игр ……………………... 23

3. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЕ «В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ» ……………………… 28

4. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЕ «В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ» ……………… 36

5. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ………………………………………………... 64

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ………………………………………….… 73

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр применяется при рассмотрении ситуаций, когда интересы взаимодействующих сторон не совпадают и каждая сторона решает задачу достижения наилучшего для себя результата путем выбора *стратегии* поведения во взаимодействии. Принятое решение каждая сторона оставляет втайне от противоположной стороны. Таким образом, непосредственное прикладное значение теории игр заключается в том, что она позволяет участнику игры или конфликта (в достаточно простых ситуациях и при разумных ограничениях) выбирать собственную стратегию, гарантированно приводящую к наилучшему возможному результату, обосновывать компромиссные решения, а также прогнозировать поведение противника. В более сложных ситуациях, когда формализация и точное решение задачи невозможно, полезными оказываются идеи, развитые в этой теории.

Цель настоящего издания – методическое обеспечение учебной самостоятельной работы студентов при изучении теории игр. Материал соответствует учебному пособию «Теория игр» того же авторского коллектива, где приведены сведения об основных приемах анализа, преобразования и решения простейших задач теории игр. К этому учебному пособию можно обращаться при методических затруднениях, которые не разрешаются приводимыми здесь примерами решения задач.

Игровые задачи с седловой точкой, которые приведены в первую очередь, позволяют (даже при платежной матрице большой размерности) получить решение задачи одним из простых способов – сравнением верхней и нижней цен игры. В учебных целях на этом материале полезно отработать технику применения более универсальных, но, к сожалению, громоздких методов.

При отсутствии седловой точки (такие задания приводятся далее) интересны ситуации, когда применение какого-либо приема приводит к существенному упрощению платежной матрицы и открывается возможность использования других приемов. Возникает необходимость небольшого исследования с построением цепочки по возможности простейших, но результативных действий. Комплексное применение приемов иллюстрируется дополнительными примерами.

Наконец, предложены «игры с природой», которые сопровождаются примером принятия решений с помощью ряда критериев.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Игра – это действительный или формальный конфликт, в котором имеются участники (игроки), каждый из которых стремится к достижению собственных целей. При этом ни один из игроков не знает, какие решения примут другие игроки, но ему известны все возможные решения других игроков и количественные оценки результатов их реализации.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия в зависимости от знаний о сложившейся ситуации. Также возможно, что решения приняты игроком заранее (в ответ на любую возможную ситуацию).

В зависимости от числа игроков различают *игры с двумя, тремя и более участниками*. В принципе возможны также игры с бесконечным числом игроков.

По количеству стратегий различают *конечные и бесконечные игры*. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий (например, в игре в орлянку игроки имеют по два возможных хода – они могут выбрать «орел» или «решку»). Соответственно в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий. Так, в ситуации «Продавец-Покупатель» каждый из игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого (покупаемого) товара.

По свойствам *функций выигрыша* (зависимостей выигрыша каждого игрока от выбранных им самим и партнерами стратегий) выделяется ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, – это модель прямого конфликта между игроками. Подобные игры называются *играми с нулевой суммой*, или *антагонистическими играми*.

Матричной (*биматричной*) называется конечная игра с двумя участниками. Функции выигрыша в такой игре могут быть отражены двумя матрицами одинаковой размерности или одной матрицей, где на пересечении строки (соответствует возможной стратегии первого игрока) и столбца (соответствует возможной стратегии второго игрока) указываются выигрыши обоих игроков. Матричная игра с нулевой суммой, где элемент *платежной матрицы* (величина *платежа*) указывает только выигрыш первого игрока, а выигрыш второго игрока равен по абсолютной величине, но противоположен по знаку указанному числу – *антагонистическая.* Перед обоими игроками стоит задача получения максимального выигрыша, что в данном случае соответствует установке первого игрока (Получателя) на выбор стратегии, увеличивающей гарантированную среднюю величину платежа, и установке второго игрока (Плательщика) на выбор стратегии, уменьшающей эту величину. «Гарантия» означает независимость результата игры от решений, принимаемых противником, т. е. обоснование результата игры при любом решении противника (что логически эквивалентно всем решениям из множества возможных).

Элементарные выборы в конечных играх называются *чистыми стратегиями. Смешанной стратегией* игрока называется сочетание его чистых стратегий, применяемых в серии игр «случайным образом» (игрок сохраняет в тайне конкретные решения для каждого акта игры) с заранее определенной *вероятностью*[1]. *Активными стратегиями* игрока называются его чистые стратегии, используемые им с ненулевой вероятностью.

Минимальный гарантированный выигрыш первого игрока называется *нижней ценой игры* α (максимином), он равен элементу платежной матрицы, который получается в процедуре выбора наибольшего значения из наименьших значений в каждой строке

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})).$$

Максимальный гарантированный проигрыш второго игрока называется *верхней ценой игры* β (минимаксом), он равен элементу платежной матрицы, которая получается в процедуре выбора наименьшего значения из наибольших значений в каждом столбце

$$\beta = \min_j(\max_i(a_{ij})).$$

Ценой игры ν называется средняя (в серии игровых актов) величина платежа, привлекательная (т. е. $\alpha \le \nu \le \beta$) и гарантированная для обоих игроков. *Решением игры* называется совокупность стратегий (чистых или смешанных), позволяющая каждому игроку гарантировать результат игры (величину среднего по серии игровых актов платежа) не хуже, чем значение цены игры ν. Отсюда, в силу способности каждого игрока препятствовать отклонению средней величины платежа от равновесного значения,

---

[1] Величина, равная отношению количества случаев использования конкретной стратегии к общему количеству актов взаимодействия (т. е. частость применения стратегий) в теории игр традиционно называется «вероятностью», хотя такие события не являются случайными для игрока, принимающего это решение. *Вероятность* (в классическом смысле) использования каким-либо игроком его отдельной чистой стратегии численно совпадает с оптимальной частостью использования этой стратегии при допущении о разумности и экономической заинтересованности игрока.

легко сделать вывод о том, что средняя величина платежа приближается к значению ν при увеличении количества игровых актов. В случае если *цена игры* $\nu = 0$, игра называется *справедливой*.

Основная теорема теории игр (теорема Неймана): всякая конечная игра с нулевой суммой имеет решение, возможно, в области смешанных стратегий.

При совпадении верхней и нижней цен *решение игры* находится *в чистых стратегиях*, обладает *устойчивостью,* и *цена игры* совпадает с верхней и нижней ценами игры. В такой ситуации говорят, что игра имеет *«седловую точку»*.

Теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей смешанной стратегии, а другой игрок не выходит за пределы своих активных стратегий, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры.

Какая-либо строка платежной матрицы называется доминирующей (строго доминирующей) другую строку (доминируемую), если независимо от выбора стратегии вторым игроком, предоставляет первому игроку не худшие (лучшие), т. е. большие в выделенной паре строк величины платежа.

Какой-либо столбец платежной матрицы называется *доминирующим* (строго доминирующим) другой столбец (*доминируемый*), если независимо от выбора стратегии первым игроком предоставляет второму игроку не худшие (лучшие), т. е. меньшие в выделенной паре столбцов величины платежа.

Играми с природой называются задачи, в которых один из игроков (обычно он отождествляется со вторым игроком в антагонистической матричной игре) выбирает стратегию не рациональным, а каким-либо иным способом. В этом случае рассматривается только функция выигрыша первого игрока, а «поведение» второго игрока, если это возможно, характеризуется вероятностью реализации его возможных состояний (они отождествляются с «выбором» стратегий). Для анализа и принятия решений в таких квази-игровых ситуациях используется ряд альтернативных критериев.

2. ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР С НУЛЕВОЙ СУММОЙ (В ПРИМЕРАХ)

2.1. Выявление стратегии, сводящей к минимуму риски игроков

Пример 1а. Количество возможных стратегий Получателя – 5, Плательщика – 4. Величины платежа образуют таблицу.

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	2	3	5	9
$A2$	-2	-4	-2	7
$A3$	7	5	0	-3
$A4$	-1	6	1	2
$A5$	6	9	6	3

Требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию первого игрока, выбирающего строку (Получателя).

Решение

1. В каждой строке найдем минимальное значение

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$\min\limits_j (a_{ij})$	Расшифровка
$A1$	2	3	5	9	2	$\alpha_1 = \min(2; 3; 5; 9) = 2;$
$A2$	-2	-4	-2	7	-4	$\alpha_2 = \min(-2; -4; -2; 7) = -4;$
$A3$	7	5	0	-3	-3	$\alpha_3 = \min(7; 5; 0; -3) = -3;$
$A4$	-1	6	1	2	-1	$\alpha_4 = \min(-1; 6; 1; 2) = -1;$
***A*5**	**6**	**9**	**6**	**3**	**3**	$\alpha_5 = \min(6; 9; 6; 3) = 3.$

2. Из полученных значений возьмем максимальное, то есть вычислим максимин

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = \max(2; -4; -3; -1; 3) = 3.$$

Найденное значение реализуется при выборе последней (пятой) стратегии $A5$ Получателя (она выделена в таблице).

Ответ: наиболее выгодной для Получателя (при однократной игре) является стратегия $A5$, так как при любом выборе Плательщиком его стратегии величина платежа составит $\alpha = 3$ или больше.

Пример 1б. В задаче с предыдущими условиями (см. пример 1а) требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию второго игрока, выбирающего столбец (Плательщика).

Решение

1. В каждом столбце найдем максимальное значение.

	*B*1	*B*2	***B*3**	*B*4
*A*1	2	3	**5**	9
*A*2	-2	-4	**-2**	7
*A*3	7	5	**0**	-3
*A*4	-1	6	**1**	2
*A*5	6	9	**6**	3
$\max\limits_i(a_{ij})$	7	9	**6**	9

Расшифровка

$\beta_1 = \max(2; -2; 7; -1; 6) = 7;$

$\beta_2 = \max(3; -4; 5; 6; 9) = 9;$

$\beta_3 = \max(5; -2; 0; 1; 6) = 6;$

$\beta_4 = \max(9; 7; -3; 2; 3) = 9.$

2. Из полученных значений возьмем минимальное, то есть вычислим минимакс

$$\beta = \min_j(\max_i(a_{ij})) = \min(7; 9; 6; 9) = 6.$$

Найденное значение реализуется при выборе третьей стратегии *B*3 Плательщика (она выделена в таблице).

Ответ: наиболее выгодной для Плательщика (при однократной игре) является стратегия *B*3, так как при любом выборе Получателем его стратегии величина платежа составит $\beta = 6$ или меньше.

2.2. Чистые и смешанные стратегии игроков. Установление ситуаций, когда задача имеет решение «в чистых стратегиях»

Пример 2а. Для данной платежной матрицы:

2	9
8	0

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– сделать вывод о существовании решения игры в чистых стратегиях;

– если игра имеет решение в чистых стратегиях, найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

Решение

1. Введем обозначения стратегий первого игрока (Получателя) и второго игрока (Плательщика)

	*B*1	*B*2
*A*1	2	9
*A*2	8	0

2. В каждой строке выявим наименьшее значение и из этих результатов – наибольшее

	$B1$	$B2$	$\min_j(a_{ij})$
$A1$	2	9	2
$A2$	8	0	0

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = \max(2; 0) = 2$ (реализуется при использовании Получателем стратегии $A1$).

3. В каждом столбце выявим наибольшее значение и из этих результатов – наименьшее

	$B1$	$B2$
$A1$	2	9
$A2$	8	0
$\max_i(a_{ij})$	8	9

Верхняя цена игры $\beta = \min_j(\max_i(a_{ij})) = \min(8; 9) = 8$ (реализуется при использовании Плательщиком стратегии $B1$).

4. Сравнивая результаты п. 2, 3, сделаем вывод: верхняя и нижняя цены игры не совпадают, значит, игра не имеет решения в чистых стратегиях (следует искать смешанную стратегию).

Ответ:

– цена игры лежит в диапазоне $2 = \alpha < \nu < \beta = 2$;

– седловая точка отсутствует, значит, и обе стратегии первого игрока, и обе стратегии второго игрока являются активными.

Пример 2б. Для данной платежной матрицы:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– сделать вывод о существовании решения игры в чистых стратегиях;

– если игра имеет решение в чистых стратегиях, найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

	$B1$	$B2$	$B3$
$A1$	6	5	9
$A2$	-2	-2	7
$A3$	7	0	-3

Решение

1. Определим наименьшие значения в строках и наибольшие значения в столбцах матрицы.

	$B1$	$B2$	$B3$	$\min\limits_j (a_{ij})$
$A1$	6	**5**	9	**5**
$A2$	-2	-2	7	-2
$A3$	7	0	-3	-3
$\max\limits_i (a_{ij})$	7	**5**	9	

2. Вычислим максимин

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = \max(5; -2; -3) = 5$$

(реализуется при выборе Получателем стратегии $A1$), и минимакс

$$\beta = \min_j(\max_i(a_{ij})) = \min(7; 5; 9) = 5$$

(реализуется при выборе Плательщиком стратегии $B2$).

3. Так как $\alpha = \beta$, определим цену игры $\nu = \alpha = \beta = 5$.

Ответ:

– единственная активная и наиболее выгодная чистая стратегия Получателя – $A1$;

– единственная активная и наиболее выгодная чистая стратегия Плательщика – $B2$;

– цена игры $\nu = 5$.

Замечание. В последней игре Получатель, выбирая стратегию $A1$ (строку № 1), гарантирует результат игры $\nu \geq 5$. С другой стороны, Плательщик, выбирая стратегию $B2$ (то есть столбец № 2), гарантирует результат игры $\nu \leq 5$. Таким образом, цена игры $\nu = 5$ совпадает с верхней и нижней ценами игры. Никакая смешанная стратегия не принесет пользы ни Получателю, ни Плательщику: любое использование Получателем стратегий $A2$ и $A3$ (при сохранении Плательщиком стратегии $B2$) невыгодно Получателю, но и любое использование Плательщиком стратегий $B1$ и $B3$ (при сохранении Получателем стратегии $A1$) невыгодно Плательщику.

2.3. Исключение стратегий, заведомо невыгодных для игроков (по сравнению с другими возможными чистыми стратегиями)

Пример 3а. Для данной платежной матрицы требуется выявить стратегии, заведомо невыгодные для Получателя (игрока, выбирающего строку), упростить, если это возможно, платежную матрицу.

$A1$	6	7	7	5
$A2$	8	1	6	7
$A3$	4	-3	4	3

Решение

1. Проведем сравнение стратегий $A1$ и $A2$.

$$6 \le 8 \quad 7 \ge 1 \quad 7 \ge 6 \quad 5 \le 7$$

Так как знаки неравенств – разные, в этой паре нет заведомо невыгодной стратегии (по сравнению друг с другом).

2. Проведем сравнение стратегий $A1$ и $A3$.

$$6 \ge 4 \quad 7 \ge -3 \quad 7 \ge 4 \quad 5 \ge 3$$

Так как знаки неравенств – одинаковые, выбор стратегии $A1$ предпочтителен для Получателя при любом выборе стратегии Плательщиком. Стратегию $A3$ (она выделена в таблице) можно вычеркнуть из платежной матрицы.

$A1$	6	7	7	5
$A2$	8	1	6	7
$\boldsymbol{A3}$	**4**	**-3**	**4**	**3**

~

$A1$	6	7	7	5
$A2$	8	1	6	7

Ответ: стратегия $A3$ является заведомо невыгодной для Получателя и может быть вычеркнута из платежной матрицы как неактивная. Таким образом, достигнуто упрощение условий задачи.

Пример 3б. Для платежной матрицы, данной в примере 3а, требуется выявить стратегии, заведомо невыгодные для Плательщика (игрока, выбирающего столбец), упростить, если это возможно, платежную матрицу.

$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
6	7	7	5
8	1	6	7
4	-3	4	3

Решение

1. Проведем сравнение стратегий $B1$ и $B2$, $B1$ и $B3$, $B1$ и $B4$.

$B1$ и $B2$	$B1$ и $B3$	$B1$ и $B4$
$6 \le 7$	$6 \le 7$	$6 \ge 5$
$8 \ge 1$	$8 \ge 6$	$8 \ge 7$
$4 \ge -3$	$4 = 4$	$4 \ge 3$

Так как в первых случаях знаки неравенств – разные, в этих парах нет заведомо невыгодных стратегий (по сравнению друг с другом).

Так как в последнем случае знаки неравенств – одинаковые, выбор стратегии $B4$ предпочтителен для Плательщика (по сравнению со стратегией $B1$) при любом выборе стратегии Получателем.

Упрощаем платежную матрицу, вычеркивая из неё столбец, соответствующий стратегии $B1$ (он выделен в таблице).

$\boldsymbol{B1}$	$B2$	$B3$	$B4$
6	7	7	5
8	1	6	7
4	-3	4	3

~

$B2$	$B3$	$B4$
7	7	5
1	6	7
-3	4	3

Достигнуто упрощение задачи. Обозначения стратегий сохранены.

2. Проведем сравнение стратегий $B2$ и $B3$

$$\boxed{\begin{array}{c} 7 = 7 \\ 1 \le 6 \\ -3 \le 4 \end{array}}$$

Так как знаки неравенств – одинаковые, выбор стратегии $B2$ предпочтителен для Плательщика при любом выборе стратегии Получателем (по сравнению со стратегией *B*3). Упрощаем платежную матрицу, вычеркивая из неё столбец, соответствующий стратегии *B*3 (он выделен в таблице).

*B*2	***B*3**	*B*4
7	**7**	5
1	**6**	7
-3	**4**	3

~

*B*2	*B*4
7	5
1	7
-3	3

3. Проведем сравнение оставшихся столбцов

$7 \geq 5$
$1 \leq 7$
$-3 \leq 3$

Так как знаки неравенств – разные, в этой паре нет заведомо невыгодных стратегий (по сравнению друг с другом).

Ответ: стратегии *B*1 и *B*3 заведомо невыгодны для Плательщика и могут быть вычеркнуты из платежной матрицы как неактивные. Таким образом, достигнуто упрощение условий задачи.

Замечания

По сводным результатам примеров 3а и 3б исходная матрица может быть упрощена с учетом заведомо невыгодных (и поэтому неактивных) стратегий обоих игроков

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1	6	7	7	5
*A*2	8	1	6	7
*A*3	4	-3	4	3

~

	*B*2	*B*4
*A*1	7	5
*A*2	1	7

Повторным рассмотрением стратегий Получателя и Плательщика устанавливаем, что дальнейшие упрощения платежной матрицы на основании парного сравнения рядов платежной матрицы невозможны[2].

	*B*2 и *B*4
*A*1	$7 \geq 5$
*A*2	$1 \leq 7$

	*B*2	*B*4
*A*1 и *A*2	$7 \geq 1$	$5 \leq 7$

[2] Другая возможность выявления неактивных стратегий показана в п. 2.4

2.4. Графическое сравнение зависимостей результата игры от вероятности применения игроками чистых стратегий

Пример 4а. Требуется приближенно определить смешанную стратегию Получателя и цену игры, выявить состав смешанной стратегии Плательщика и провести упрощение данной платежной матрицы (без заведомо невыгодных стратегий).

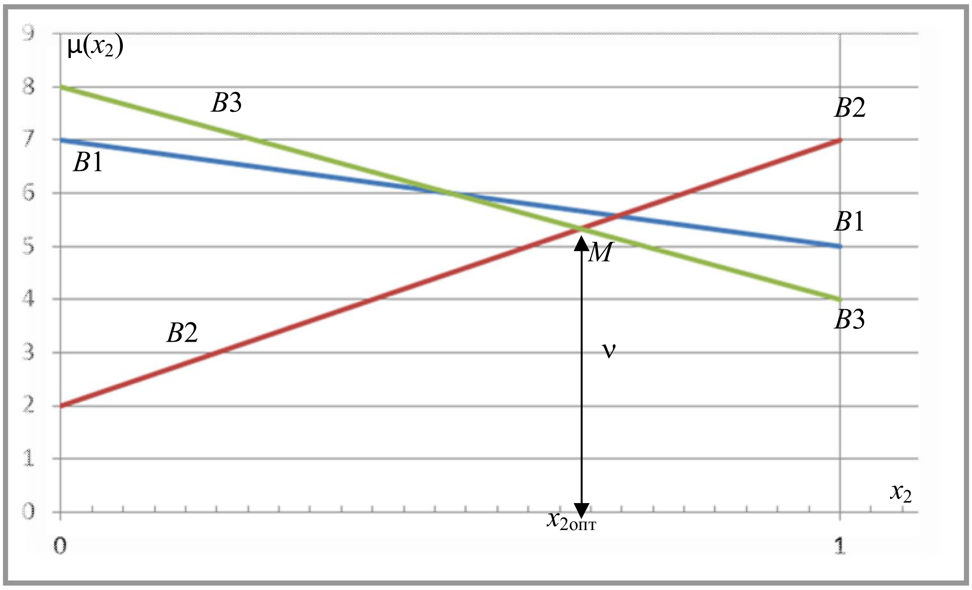
	$B1$	$B2$	$B3$
$A1$	7	2	8
$A2$	5	7	4

Решение

1. Найдем точки для построения графика. Пусть x_2 – вероятность стратегии $A2$ (или её доля в смешанной стратегии Получателя). Предполагая использование игроками только стратегий $A1$ и $B1$, получаем $x_2 = 0$ (откладывается по оси абсцисс) и величину платежа $\mu_{B1}(0) = 7$. С другой стороны, при использовании только стратегий $A2$ и $B1$, получаем $x_2 = 1$ и величину платежа $\mu_{B1}(1) = 5$. При смешанной стратегии Получателя – промежуточные значения средней величины платежа $\mu_{B1}(x_2)$, образующие линейную зависимость от аргумента x_2 $(0 \le x_2 \le 1)$. Аналогично получаются отрезки, соответствующие другим чистым стратегиям Плательщика.

	$B1$	$B2$	$B3$
$x_2 = 0$	(0; 7)	(0; 2)	(0; 8)
$x_2 = 1$	(1; 5)	(1; 7)	(1; 4)
	$\mu_{B1}(x_2) = 7 - 2x_2$	$\mu_{B2}(x_2) = 2 + 5x_2$	$\mu_{B3}(x_2) = 8 - 4x_2$

2. Выполним графическое построение



3. По результатам построения сделаем выводы:

– нижняя ломаная кривая, под которой нет уже никаких отрезков, образована отрезками, соответствующими стратегиям Плательщика $B2$ (слева) и $B3$ (справа). Эти отрезки пересекаются в точке M;

– наивысшая точка указанной ломаной – точка M с примерными координатами (0,65; 5,3). Она является точкой пересечения отрезков, соответствующих стратегиям Плательщика $B2$ и $B3$, значит, эти стратегии являются активными;

– применение стратегии $A1$ с вероятностью $x_{1опт} \approx 1 - 0{,}65 = 0{,}35$ и стратегии $A2$ с вероятностью $x_{2опт} \approx 0{,}65$ гарантирует Получателю средний платеж в размере $\nu \approx 5{,}3$ (или больше);

– стратегия $B1$ использоваться Плательщиком не будет, так как (при найденной смешанной стратегии Получателя) средняя величина платежа в таких актах взаимодействия окажется больше значения $\nu \approx 5{,}3$, что ему не выгодно; смешанная стратегия Плательщика состоит в сочетании его чистых стратегий $B2$ и $B3$, – таким образом, достигнуто упрощение условий задачи, из платежной матрицы можно вычеркнуть столбец, соответствующий стратегии $B1$ (он выделен в таблице)

$$\begin{array}{c|ccc|} & \boldsymbol{B1} & B2 & B3 \\ \hline A1 & \mathbf{7} & 2 & 8 \\ A2 & \mathbf{5} & 7 & 4 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{c|cc|} & B2 & B3 \\ \hline A1 & 2 & 8 \\ A2 & 7 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Ответ:

– вероятности применения стратегий Получателя $x_{1опт} \approx 0{,}35$ и $x_{2опт} \approx 0{,}65$;

– цена игры $\nu \approx 5{,}3$;

– смешанная стратегия Плательщика состоит в применении его чистых стратегий $B2$ и $B3$, они являются активными (столбец, соответствующий стратегии Плательщика $B1$, можно исключить из платежной матрицы, так как эта стратегия не является активной).

Замечания

Точный результат решения предыдущей задачи (читатель может восстановить процесс расчета самостоятельно на основе п. 2.5 или сравнить результат с примерами 6а и 6б, где вероятности применения Плательщиком его стратегий $B2$ и $B3$ обозначаются y_2 и y_3)

$$\begin{cases} x_{1\text{опт}} = 1/3 \approx 0{,}33; \\ x_{2\text{опт}} = 2/3 \approx 0{,}67; \\ y_{2\text{опт}} = 4/9 \approx 0{,}44; \\ y_{3\text{опт}} = 5/9 \approx 0{,}56; \\ \nu = 16/3 \approx 5{,}33. \end{cases}$$

Значение вероятности $x_{2\text{опт}}$ (а затем $x_{1\text{опт}} = 1 - x_{2\text{опт}}$) и цены игры $\nu = \mu_{\text{опт}}$, может быть получено из системы уравнений

$$\begin{cases} \mu = 2 + 5x_2; \\ \mu = 8 - 4x_2. \end{cases}$$

Пример 4б. Требуется приближенно определить смешанную стратегию Плательщика и цену игры, выявить состав смешанной стратегии Получателя и провести упрощение данной платежной матрицы (она получена транспонированием матрицы из примера 4а)

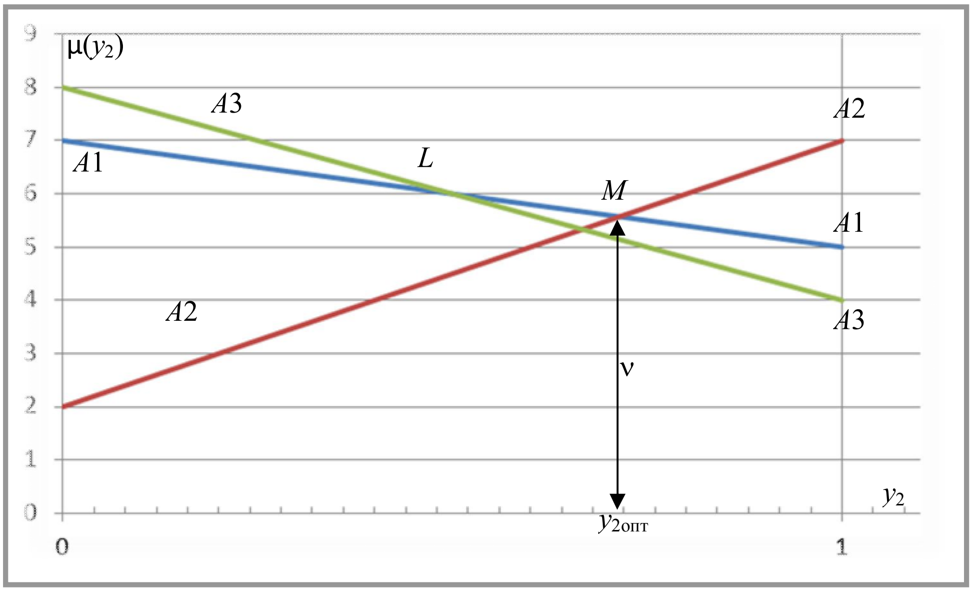
	$B1$	$B2$
$A1$	7	5
$A2$	2	7
$A3$	8	4

Решение

1. Найдем точки для построения графика (y_2 – доля стратегии $B2$ в смешанной стратегии Плательщика, $0 \le y_2 \le 1$, откладывается по оси абсцисс):

	$y_2 = 0$	$y_2 = 1$	
$A1$	(0; 7),	(1; 5)	$\mu_{A1}(y_2) = 7 - 2y_2$
$A2$	(0; 2),	(1; 7)	$\mu_{A2}(y_2) = 2 + 5y_2$
$A3$	(0; 8),	(1; 4)	$\mu_{A3}(y_2) = 8 - 4y_2$

2. Выполним графическое построение



3. По результатам построения сделаем выводы.

Верхний край фигуры, над которым нет уже никаких отрезков, образован отрезками, соответствующими стратегиям Получателя $A3$, $A1$ и $A2$ (слева направо). Эти отрезки пересекаются в точках L и M.

Низшая точка описанной выше ломаной – точка M с примерными координатами (0,7; 5,6). Она является точкой пересечения отрезков, соответствующих стратегиям Получателя $A1$ и $A2$, значит, эти стратегии являются активными.

Применение стратегии $B1$ с вероятностью $y_{1опт} \approx 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ и стратегии $B2$ с вероятностью $y_{2опт} \approx 0{,}7$ гарантирует Плательщику средний платеж в размере $\nu \approx 5{,}6$ (или меньше).

Стратегия $A3$ использоваться Получателем не будет, так как (при найденной смешанной стратегии Плательщика) средняя величина платежа в таких актах взаимодействия окажется невыгодной, так как меньше значения $\nu \approx 5{,}6$. Смешанная стратегия Получателя состоит в сочетании его чистых стратегий $A1$ и $A2$. Таким образом, из платежной матрицы можно вычеркнуть строку, соответствующую стратегии $A3$ (она выделена в таблице)

$$\begin{array}{c|cc|}
 & B1 & B2 \\
\hline
A1 & 7 & 5 \\
A2 & 2 & 7 \\
\mathbf{A3} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \\
\hline
\end{array} \sim \begin{array}{c|cc|}
 & B1 & B2 \\
\hline
A1 & 7 & 5 \\
A2 & 2 & 7 \\
\hline
\end{array}$$

Ответ:

– вероятности применения стратегий Плательщика $B1$ – $y_{1опт} \approx 0{,}3$ и $B2$ – $y_{2опт} \approx 0{,}7$;

– цена игры $\nu \approx 5{,}6$;

– смешанная стратегия Получателя состоит в применении его чистых стратегий $A1$ и $A2$, эти стратегии являются активными, а строку, соответствующую неактивной стратегии Получателя $A3$, можно исключить из платежной матрицы.

Замечания

Точный результат решения задачи (читатель может восстановить процесс расчета самостоятельно на основе п. 2.5, подробное решение – в примере 6в, где вероятности применения Получателем его стратегий $A1$ и $A2$ обозначаются x_1 и x_2)

$$\begin{cases} x_{1опт} = 5/7 \approx 0{,}71; \\ x_{2опт} = 2/7 \approx 0{,}29; \\ y_{1опт} = 2/7 \approx 0{,}29; \\ y_{2опт} = 5/7 \approx 0{,}71; \\ \nu = 39/7 \approx 5{,}56. \end{cases}$$

Значения вероятности применения стратегий Плательщика $B2$ $y_{2опт}$ (а затем и применения стратегий Плательщика $B1$ $y_{1опт} = 1 - y_{2опт}$) и цены игры $\nu = \mu_{опт}$, могут быть получены из системы уравнений

$$\begin{cases} \mu = 7 - 2y_2; \\ \mu = 2 + 5y_2. \end{cases}$$

Пример 4в. Для данной платежной матрицы:

5	0
3	2

–выявить активные стратегии игроков графическим методом;

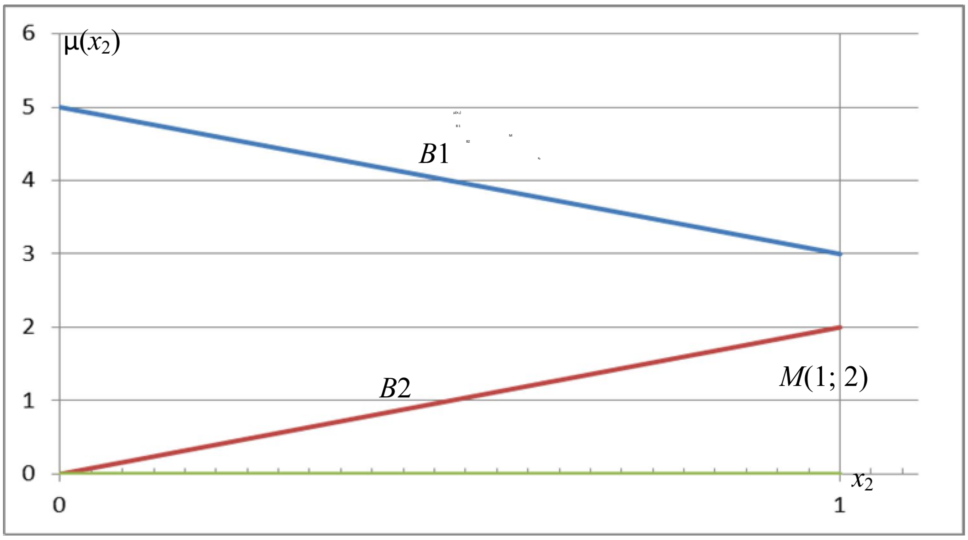
– найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

Решение

1. Введем обозначения стратегий первого игрока (Получателя) и второго игрока (Плательщика)

	$B1$	$B2$
$A1$	5	0
$A2$	3	2

2. Проведем графическое сравнение стратегий Плательщика при разных смешанных стратегиях Получателя. Обозначим x_2 – вероятность использования Получателем стратегии $A2$. Выполним графическое построение



Здесь отрезок, соответствующий стратегии $B1$, соединяет величины платежа $a_{11} = 5$ (при $x_2 = 0$) и $a_{21} = 3$ (при $x_2 = 1$). Отрезок, соответствующий стратегии В2, соединяет величины платежа $a_{12} = 0$ (при $x_2 = 0$) и $a_{22} = 2$ (при $x_2 = 1$).

Найдем такую точку M на нижней границе получившейся фигуры, которая наиболее удалена от оси абсцисс, и сделаем выводы:

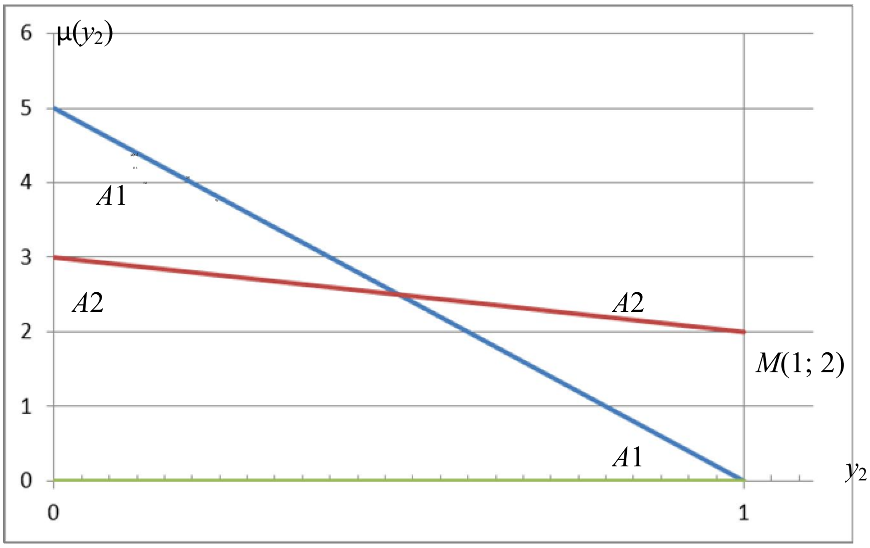
– так как отрезки на графике не пересекаются, то очевидно, что стратегия $B2$ более выгодна Плательщику при ЛЮБОМ выборе смешанной стратегии Получателем. Она является единственной активной стратегией Плательщика;

– точка M имеет координаты $x_2 = 1$ и $\mu(x_2) = a_{22} = 2$ – это указывает на использование Получателем только стратегии $A2$, при неактивной стратегии $A1$, и цене игры, совпадающей с одним из элементов платежной матрицы.

3. Проведем графическое сравнение стратегий Получателя при разных смешанных стратегиях Плательщика. Обозначим y_2 – вероятность использования Плательщиком стратегии $B2$. Выполним графическое построение:

– отрезок, соответствующий стратегии $A1$, соединяет величины платежа $a_{11} = 5$ (при $y_2 = 0$) и $a_{12} = 0$ (при $y_2 = 1$);

– отрезок, соответствующий стратегии $A2$, соединяет величины платежа $a_{21} = 3$ (при $y_2 = 0$) и $a_{22} = 2$ (при $y_2 = 1$).



Найдем точку M верхней границы получившейся фигуры, которая наиболее приближена к оси абсцисс, и сделаем выводы:

– так как отрезки, соответствующие стратегиям Получателя, пересекаются, выбор заведомо выгодной (доминирующей) стратегии сделать нельзя;

–точка M находится не в точке пересечения отрезков, а связана ТОЛЬКО со стратегией Получателя $A2$, что указывает на использование Получателем только этой стратегии при неактивной стратегии $A1$;

– верхняя граница фигуры, образованной пересекающимися отрезками, имеет точку, наиболее приближенную к оси абсцисс, при $y_2 = 1$ и $\mu(y_2) = a_{22} = 2$ – это указывает на использование Плательщиком только стратегии $B2$, при неактивной стратегии $B1$ и цене игры, совпадающей с одним из элементов платежной матрицы.

Ответ:

– активные стратегии игроков – $A2$ для Получателя и $B2$ для Плательщика;

– решение игры: $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ (стратегии $A1$ и $B1$ являются неактивными); $x_2 = 1$ и $y_2 = 1$ (стратегии $A2$ и $B2$ используются игроками, как для однократного взаимодействия, так и во всех случаях многократного взаимодействия);

–цена игры $\nu = 2$.

Замечание: легко убедиться, что в предыдущей задаче нижняя цена игры равна верхней цене игры (т. е. игра имеет «седловую точку»): $\nu = \alpha = \beta = 2$.

2.5. Использование теоремы об активных стратегиях

Пример 5. Для данной платежной матрицы требуется найти смешанные стратегии игроков и цену игры.

	$B1$	$B2$
$A1$	0	6
$A2$	4	2

Решение

1. Убедимся, что данная матрица не имеет «седловой» точки

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = \max(0; 2) = 2,$$
$$\beta = \min_j(\max_i(a_{ij})) = \min(4; 6) = 4,$$
$$\alpha < \beta.$$

Действительно, нижняя и верхняя цены игры не совпадают, значит, все стратегии обоих игроков являются активными.

2. Согласно теореме об активных стратегиях приравняем средние величины платежа по обеим стратегиям Получателя цене игры, а также учтем, что сумма обеих вероятностей, с которыми он применяет свои стратегии, – один. Поступая аналогично в отношении стратегий Плательщика, составим и решим системы уравнений для поиска смешанных стратегий обоих игроков

$$\begin{matrix} B1: \\ B2: \\ \end{matrix}\begin{cases} \nu = 0x_1 + 4x_2; \\ \nu = 6x_1 + 2x_2; \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{matrix} A1: \\ A2: \\ \end{matrix}\begin{cases} \nu = 0y_1 + 6y_2; \\ \nu = 4y_1 + 2y_2; \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Решая системы, находим искомые величины.

$$\begin{cases} x_1 = 1/4 = 0{,}25; \\ x_2 = 3/4 = 0{,}75; \\ \nu = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1/2 = 0{,}5; \\ y_2 = 1/2 = 0{,}5; \\ \nu = 3. \end{cases}$$

3. Проведем проверку найденной смешанной стратегии Получателя.

Предположим, что Плательщик достаточно много раз применяет свою стратегию $B1$. В таких случаях средняя величина платежа

$$\mu_{B1} = 0{,}25 \cdot 0 + 0{,}75 \cdot 4 = 3 = \nu > \alpha = 2.$$

В остальных случаях Плательщик применяет свою стратегию $B2$. Тогда средняя величина платежа

$$\mu_{B2} = 0{,}25 \cdot 6 + 0{,}75 \cdot 2 = 3 = \nu > \alpha.$$

Проведем проверку найденной смешанной стратегии Плательщика.

Предположим, что Получатель достаточно много раз применяет свою стратегию $A1$. В таких случаях средняя величина платежа

$$\mu_{A1} = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 6 = 3 = \nu < \beta = 4.$$

В остальных случаях Плательщик применяет свою стратегию $A2$. Тогда средняя величина платежа

$$\mu_{A2} = 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 2 = 3 = \nu < \beta.$$

Ответ:

– вероятности применения стратегий Получателя $x_1 = 0{,}25$ и $x_2 = 0{,}75$;

– вероятности применения стратегий Плательщика $y_1 = 0{,}5$ и $y_2 = 0{,}5$;

– цена игры $\nu = 3$.

Замечание: величина цены игры $\nu = 3$ удовлетворяет требованию выгодности смешанной стратегии и для Получателя, для Плательщика $\alpha < \nu < \beta$.

2.6. Переход к задаче линейного программирования с интерпретацией результатов в терминах теории игр

Пример 6а. Требуется найти смешанную стратегию Получателя, цену игры ν, определить состав смешанной стратегии Плательщика и упростить данную платежную матрицу (она взята из примера 4а).

	$B1$	$B2$	$B3$
$A1$	7	2	8
$A2$	5	7	4

Решение

1. Для каждой стратегии Плательщика запишем требование: средняя величина платежа должна оказаться не меньше, чем цена игры ν.

$$\begin{array}{r} B1: \\ B2: \\ B3: \end{array}\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq \nu; \\ 2x_1 + 7x_2 \geq \nu; \\ 8x_1 + 4x_2 \geq \nu. \end{cases}$$

2. Разделим все полученные неравенства на цену игры ν, вводя новые искомые величины через соотношение $X_i = x_i / \nu$.

$$\begin{matrix} B1: \\ B2: \\ B3: \end{matrix}\begin{cases} 7X_1 + 5X_2 \geq 1; \\ 2X_1 + 7X_2 \geq 1; \\ 8X_1 + 4X_2 \geq 1. \end{cases}$$

Эти неравенства образуют систему ограничений в ЛП-задаче.

3. Запишем целевую функцию ЛП-задачи

$$G = X_1 + X_2 \to \min.$$

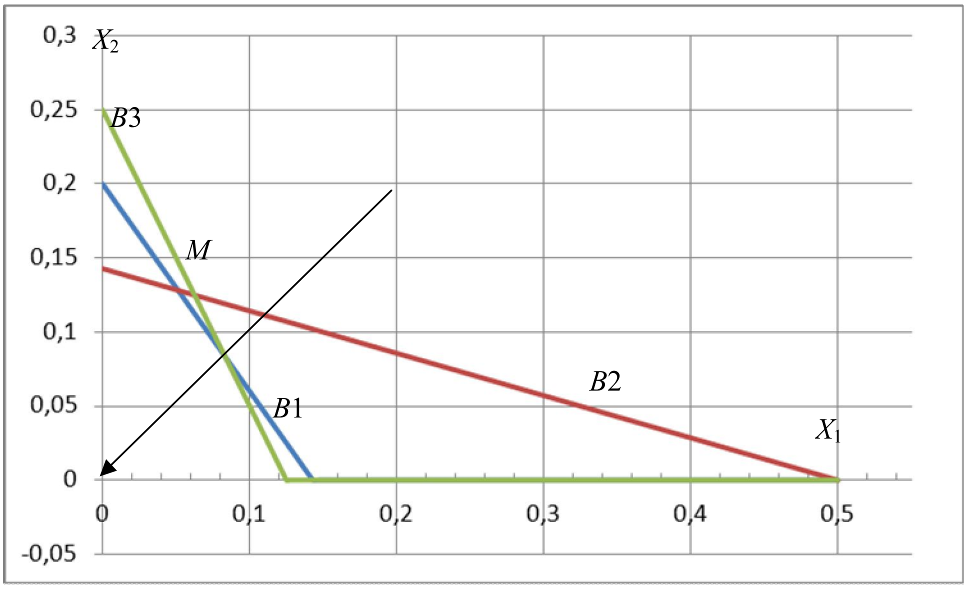
4. Размерность задачи позволяет решить её графическим методом. Граничным линиям соответствуют строгие равенства (линейные зависимости), по которым найдем точки пересечения с координатными осями графика

$$B1: 7X_1 + 5X_2 = 1 \Rightarrow \left(0; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{7}; 0\right);$$

$$B2: 2X_1 + 7X_2 = 1 \Rightarrow \left(0; \frac{1}{7}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right);$$

$$B3: 8X_1 + 4X_2 = 1 \Rightarrow \left(0; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}; 0\right).$$

Выполним построение отрезков



По результатам построения делаем вывод: наименьшее значение целевая функция принимает в точке M, которая является точкой пересечения отрезков, соответствующих стратегиям $B2$ и $B3$.

Проведем аналитический расчет координат точки М и значения целевой функции

$$\begin{matrix} B2: \\ B3: \\ \end{matrix}\begin{cases} 2X_1 + 7X_2 = 1; \\ 8X_1 + 4X_2 = 1; \\ G_{\min} = X_1 + X_2; \end{cases} \sim \begin{cases} X_1 = 1/16; \\ X_2 = 2/16; \\ G_{\min} = 3/16. \end{cases}$$

5. Возврат к «игровой» задаче осуществляется с помощью следующих соотношений:

$$\nu = 1/G_{\min} = 16/3 \approx 5{,}33 \text{ (цена игры)};$$

$$x_1 = X_1 \cdot \nu = 1/3 \approx 0{,}33 \text{ (вероятность применения стратегии } A1\text{)};$$

$$x_2 = X_2 \cdot \nu = 2/3 \approx 0{,}67 \text{ (вероятность применения стратегии } A2\text{)}.$$

6. Проверка результата.

Значения вероятностей – неотрицательные, их сумма

$$x_1 + x_2 = 1/3 + 2/3 = 1.$$

При использовании Плательщиком его чистых стратегий получаем среднюю величину платежа

$$\begin{matrix} B1: \\ B2: \\ B3: \end{matrix}\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 17/3 > \nu; \\ 2x_1 + 7x_2 = 16/3 = \nu; \\ 8x_1 + 4x_2 = 16/3 = \nu. \end{cases}$$

Неравенство, полученное для стратегии $B1$, указывает на выгодную для Получателя, но невыгодную для Плательщика стратегию. Эту стратегию можно исключить из платежной матрицы как неактивную.

Ответ (совпадает с ответом в примере 4а):

– вероятности применения стратегий Получателя $x_1 \approx 0{,}33$ и $x_2 \approx 0{,}67$;

– цена игры $\nu \approx 5{,}33$;

– смешанная стратегия Плательщика состоит в применении его чистых стратегий В2 и В3, а столбец, соответствующий стратегии В1, можно исключить из платежной матрицы.

Пример 6б. Требуется найти смешанную стратегию Плательщика и цену игры, если дана платежная матрица (она получена в примерах 4а и 6а).

	$B2$	$B3$
$A1$	2	8
$A2$	7	4

Решение

1. Для каждой стратегии Получателя запишем требование: средняя величина платежа должна оказаться не больше, чем цена игры ν

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \end{array}\begin{cases} 2y_2 + 8y_3 \le \nu; \\ 7y_2 + 4y_3 \le \nu. \end{cases}$$

2. Разделим все полученные неравенства на цену игры ν, вводя новые искомые величины через соотношение $Y_j = y_j / \nu$

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \end{array}\begin{cases} 2Y_2 + 8Y_3 \le 1; \\ 7Y_2 + 4Y_3 \le 1. \end{cases}$$

Эти неравенства образуют систему ограничений в ЛП-задаче. Матрица ЛП-задачи равна исходной платежной матрице.

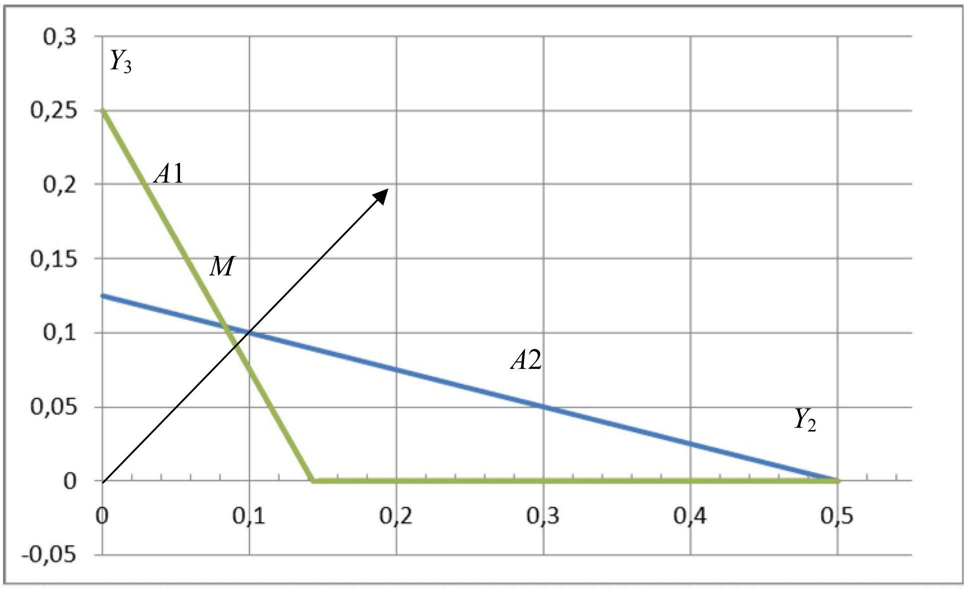
3. Запишем целевую функцию ЛП-задачи

$$F = Y_2 + Y_3 \to \max.$$

4. Размерность задачи позволяет решить её графическим методом. Линиям, ограничивающим область допустимых значений (по отдельность и для каждого неравенства системы), соответствуют строгие равенства, по которым найдем точки пересечения этих линий с координатными осями графика

$$A1: 2Y_2 + 8Y_3 = 1 \Rightarrow \left(0; \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right);$$
$$A2: 7Y_2 + 4Y_3 = 1 \Rightarrow \left(0; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{7}; 0\right).$$

Выполним построение отрезков



По результатам построения делаем вывод: наибольшее значение целевая функция принимает в точке M, которая является точкой пересечения отрезков, соответствующих стратегиям $A1$ и $A2$.

Проведем аналитический расчет координат точки M и значения целевой функции

$$\begin{matrix} A1: \\ A2: \\ \end{matrix}\begin{cases} 2Y_2 + 8Y_3 = 1; \\ 7Y_2 + 4Y_3 = 1; \\ F_{\max} = Y_2 + Y_3; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_2 = 1/12; \\ Y_3 = 5/48; \\ F_{\max} = 3/16. \end{cases}$$

5. Возврат к «игровой» задаче осуществляется с помощью соотношений

$$\nu = 1/F_{\max} = 16/3 \approx 5{,}33 \text{ (цена игры)};$$

$$y_2 = Y_2 \cdot \nu = 4/9 \approx 0{,}44 \text{ (вероятность использования стратегии } B2);$$

$$y_3 = Y_3 \cdot \nu = 5/9 \approx 0{,}56 \text{ (вероятность использования стратегии } B3).$$

6. Проверка результата.

Значения вероятностей – неотрицательные, их сумма

$$y_1 + y_2 = 4/9 + 5/9 = 1.$$

При использовании Получателем его чистых стратегий рассчитаем среднюю величину платежа

$$\begin{matrix} A1: \\ A2: \end{matrix}\begin{cases} 2y_2 + 8y_3 = 16/3 = \nu; \\ 7y_2 + 4y_3 = 16/3 = \nu. \end{cases}$$

Замечание: значение цены игры ν, полученное для Плательщика, совпадает с результатом, полученным в примере 6а для Получателя.

Ответ:

– вероятности применения Плательщиком стратегий $y_2 \approx 0{,}44$ и $y_2 \approx 0{,}56$;

– цена игры $\nu \approx 5{,}33$;

– обе стратегии Получателя являются активными.

3. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЕ «В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ»

Для данных платежных матриц:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– найти решение игры: выгодные чистые стратегии игроков и цену игры;

– упростить данную платежную матрицу, исключив из неё доминируемые строки и столбцы, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям Получателя и (или) Плательщика;

– выявить активные стратегии игроков графическим методом.

Задание 1

1.01 $\begin{array}{|cc|}0 & 2\\ 6 & 5\end{array}$ 1.02 $\begin{array}{|cc|}1 & 5\\ 0 & 4\end{array}$ 1.03 $\begin{array}{|cc|}4 & 5\\ 7 & 6\end{array}$

1.04 $\begin{array}{|cc|}4 & 5\\ 3 & 7\end{array}$ 1.05 $\begin{array}{|cc|}6 & 9\\ 3 & 7\end{array}$ 1.06 $\begin{array}{|cc|}6 & 1\\ 8 & 4\end{array}$

1.07 $\begin{array}{|cc|}8 & 4\\ 1 & 2\end{array}$ 1.08 $\begin{array}{|cc|}3 & 4\\ 6 & 5\end{array}$ 1.09 $\begin{array}{|cc|}7 & 8\\ 4 & 5\end{array}$

1.10 $\begin{array}{|cc|}9 & 3\\ 7 & 1\end{array}$ 1.11 $\begin{array}{|cc|}3 & 7\\ 2 & 6\end{array}$ 1.12 $\begin{array}{|cc|}5 & 6\\ 9 & 8\end{array}$

1.13 $\begin{array}{|cc|}9 & 7\\ 3 & 4\end{array}$ 1.14 $\begin{array}{|cc|}7 & 0\\ 4 & 3\end{array}$ 1.15 $\begin{array}{|cc|}7 & 4\\ 6 & 0\end{array}$

1.16 $\begin{array}{|cc|}1 & 4\\ 9 & 7\end{array}$ 1.17 $\begin{array}{|cc|}4 & 5\\ 0 & 8\end{array}$ 1.18 $\begin{array}{|cc|}4 & 3\\ 9 & 2\end{array}$

1.19

9	6
5	2

1.20

7	2
8	1

1.21

2	4
9	5

1.22

9	1
8	6

1.23

9	5
7	2

1.24

3	5
6	8

1.25

7	6
1	0

1.26

5	9
2	4

1.27

3	2
6	5

1.28

7	1
9	8

1.29

5	4
6	0

1.30

4	1
9	8

1.31

7	9
2	0

1.32

2	3
7	5

В задании 1 для нахождения решения игры достаточно использовать приемы нахождения и сравнения нижней и верхней цен игры. Также результат достаточно просто может быть получен методом упрощения матриц путем выявления и исключения стратегий, заведомо невыгодных для игроков. Примеры использования этих приемов (1а, 1б, 2б, 3а, 3б) приведены выше. В учебных целях полезно повторить полученные результаты с помощью мощных, но громоздких в применении приемов – графического сравнения стратегий (примеры 4а и 4б) и линейного программирования (примеры 6а и 6б).

Задание 2

2.01

2	0	5	0
1	7	1	2
9	7	4	4
4	3	1	4

2.02

5	8	3	4
7	2	5	4
8	1	7	1
9	7	7	6

2.03

2	7	1	4
3	4	5	5
0	9	2	6
0	3	4	8

2.04

8	2	8	1
7	2	4	4
4	2	1	4
8	1	5	1

2.05

3	4	3	2
8	4	0	1
7	3	8	0
2	5	2	0

2.06

9	5	6	0
9	6	5	6
0	6	8	2
9	6	6	7

2.07

5	1	4	3
7	2	9	0
3	3	4	4
7	5	6	7

2.08

8	2	8	6
9	1	7	1
7	3	5	6
0	3	7	1

2.09

1	6	7	7
4	9	6	2
3	0	0	5
4	5	6	5

2.10

7	3	3	7
2	1	3	6
9	0	9	5
4	1	4	0

2.11

6	6	6	7
7	0	6	0
6	8	1	8
3	1	4	8

2.12

1	4	6	7
9	1	9	2
8	6	7	9
2	4	4	6

2.13

4	5	8	3
3	0	5	4
2	3	8	9
4	5	4	4

2.14

8	9	6	9
8	8	4	7
8	6	1	4
9	0	5	6

2.15

3	5	5	7
1	9	1	2
1	1	2	9
2	0	5	2

2.16

5	9	2	3
3	7	4	3
6	5	4	6
5	5	3	3

2.17

3	6	7	3
3	8	6	2
3	1	5	1
2	9	6	9

2.18

5	3	7	3
1	3	9	4
5	4	4	4
5	4	7	9

2.19

9	5	3	8
6	6	1	7
1	9	3	4
5	2	1	5

2.20

8	4	5	1
3	8	3	0
0	9	1	2
8	6	6	5

2.21

2	0	8	6
8	9	7	6
6	6	6	6
6	6	9	4

2.22

2	4	6	0
7	8	3	9
6	6	3	8
7	8	8	8

2.23

2	9	4	9
2	2	1	8
4	8	3	2
8	5	5	8

2.24

7	6	6	6
3	7	2	5
0	8	5	8
3	3	2	8

2.25

3	3	8	7
3	1	0	2
2	5	1	7
3	1	8	2

2.26

4	5	4	8
1	3	2	1
2	3	9	7
3	6	7	2

2.27

9	6	6	1
0	7	4	1
4	1	7	1
6	5	9	4

2.28

0	1	1	8
6	2	2	5
5	1	4	8
4	2	0	3

2.29

6	4	0	0
3	3	8	3
1	4	0	3
7	5	6	0

2.30

1	9	2	9
0	9	1	4
2	4	2	2
8	8	3	5

2.31

2	5	8	9
6	2	7	6
5	5	7	9
0	4	9	8

2.32

8	8	7	7
6	5	2	4
6	2	4	9
6	1	3	4

В задании 2 для нахождения решения игры достаточно использовать приемы нахождения нижней и верхней цен игры. Также результат может быть получен методом упрощения матриц путем выявления и исключения стратегий, заведомо невыгодных для игроков. Примеры использования этих приемов (1а, 1б, 3а, 3б) приведены выше. До исключения из платежной матрицы доминируемых рядов использование методов графического сравнения стратегий невозможно, а после такого упрощения – уже бессмысленно, так как у игроков остается только по одной активной стратегии.

Задание 3

3.01

7	3	4	4
0	8	3	3
6	9	5	8
5	3	1	3

3.02

4	9	0	1
3	7	4	7
7	1	2	2
7	8	4	8

3.03

6	9	8	9
5	0	9	5
0	7	6	2
3	1	7	2

3.04

7	5	9	5
4	3	0	3
4	8	1	4
8	1	3	1

3.05

0	0	2	8
3	4	2	8
6	9	0	5
8	8	3	4

3.06

7	9	9	6
8	4	8	1
2	7	5	5
4	5	6	6

3.07

0	8	5	7
1	0	1	4
2	5	6	2
0	0	5	4

3.08

6	7	7	3
8	7	1	1
3	6	2	1
7	8	7	9

3.09

9	1	5	2
3	8	8	0
0	3	3	0
8	7	7	2

3.10

0	5	0	3
4	6	1	8
7	4	2	8
6	1	2	9

3.11

2	1	0	1
8	7	7	3
9	5	6	0
0	7	7	3

3.12

9	9	3	0
5	1	3	3
8	4	1	7
9	8	5	7

3.13

3	6	3	0
1	3	9	6
2	5	3	7
6	8	7	6

3.14

5	8	3	9
1	3	5	1
4	1	9	6
5	9	7	9

3.15

5	6	1	4
3	3	4	7
3	5	1	8
9	9	6	6

3.16

7	4	2	5
3	6	5	8
8	7	6	7
7	2	5	5

3.17

8	6	9	6
9	8	4	4
8	1	2	6
9	6	1	0

3.18

0	3	6	9
5	2	2	6
5	8	8	6
4	2	4	7

3.19

3	2	6	9
6	1	7	2
6	7	6	8
1	7	2	7

3.20

5	4	9	7
4	0	2	6
5	2	6	9
8	3	0	7

3.21

9	1	2	6
0	2	4	5
6	2	4	5
5	1	6	7

3.22

6	3	4	8
0	1	2	8
5	0	3	5
7	3	2	6

3.23

4	5	3	1
6	6	7	0
8	3	6	2
4	0	5	2

3.24

3	2	4	5
5	2	0	3
4	3	8	4
9	3	1	6

3.25

9	1	1	6
6	9	5	8
3	8	0	9
2	7	5	7

3.26

1	0	3	0
0	1	7	1
3	8	5	3
5	2	6	0

3.27

3	5	0	2
6	4	4	8
9	8	4	3
9	1	3	2

3.28

1	5	0	4
9	7	5	8
1	0	3	7
8	9	1	6

3.29

7	7	4	0
3	3	6	9
1	5	4	5
7	9	8	7

3.30

6	5	7	5
3	1	4	2
3	6	9	0
9	9	6	4

3.31

3	4	5	3
6	7	9	6
3	9	2	7
6	6	2	5

3.32

5	8	7	5
6	6	3	0
5	5	2	3
0	1	3	1

В задании 3 для нахождения решения игры достаточно использовать приемы нахождения нижней и верхней цен игры (примеры 1а, 1б и др.). Упрощение матриц путем выявления и исключения стратегий, заведомо невыгодных для игроков (примеры 3а и 3б), продуктивно, но не приводит к окончательному ответу, однако после такого упрощения матрицы, когда у одного из игроков остается две стратегии, возможно применение графического метода выявления активных стратегий (пример 4а, 4б и 4в).

Задание 4

4.01

9	2	1	5
7	1	6	3
6	6	8	7
6	4	5	1

4.02

3	6	2	4
3	4	8	5
4	9	5	7
2	9	8	0

4.03

9	9	1	3
4	1	0	0
3	0	7	3
5	4	5	4

4.04

2	3	1	7
6	6	8	7
1	5	0	9
7	3	9	3

4.05

0	5	8	9
3	0	7	5
3	1	3	0
7	5	6	9

4.06

0	1	5	8
9	3	5	4
4	1	2	6
9	2	1	2

4.07

4	6	2	9
4	4	1	0
6	8	8	6
2	5	5	7

4.08

8	8	0	5
8	5	7	5
1	9	9	2
7	1	3	1

4.09

1	2	0	3
3	4	5	9
9	4	4	6
7	2	7	3

4.10

5	2	5	0
0	2	6	7
3	3	5	9
5	0	1	0

4.11

5	3	6	0
9	0	0	5
3	1	5	2
7	8	5	5

4.12

5	8	3	8
9	1	1	2
0	0	5	7
6	9	6	7

4.13

0	4	2	0
4	6	4	9
5	6	3	8
6	1	0	2

4.14

7	4	7	4
0	5	9	0
9	0	4	2
8	6	7	9

4.15

9	4	6	2
3	9	0	4
6	8	4	0
5	9	6	4

4.16

3	6	7	5
3	1	9	4
0	9	5	1
2	3	6	0

4.17

6	6	3	3
4	4	0	2
0	1	5	3
3	9	1	0

4.18

3	4	7	6
9	7	8	6
4	0	9	4
2	3	9	3

4.19

5	8	4	7
7	8	3	0
7	9	0	6
0	7	4	6

4.20

3	6	3	6
3	0	1	5
1	7	6	9
0	8	0	3

4.21

0	4	4	2
3	5	4	9
8	3	1	8
8	9	6	7

4.22

5	4	6	4
6	0	0	1
6	1	8	5
1	3	9	2

4.23

6	3	9	3
0	6	0	2
6	6	8	5
8	9	7	2

4.24

2	4	2	1
8	0	5	6
3	9	0	5
7	6	6	8

4.25

5	2	1	8
6	0	9	9
6	5	9	7
1	2	2	5

4.26

5	5	8	8
5	3	5	4
1	2	9	0
2	6	4	7

4.27

2	6	3	0
6	7	6	9
1	3	7	6
6	8	1	0

4.28

8	3	3	6
4	6	2	4
7	8	8	7
3	9	1	6

4.29

4	9	4	7
8	9	0	7
2	5	3	1
9	4	4	1

4.30

7	5	3	6
0	8	2	7
9	9	5	5
8	7	4	0

4.31

7	5	5	7
7	3	1	0
4	4	8	8
9	2	7	9

4.32

6	3	3	4
7	1	2	3
0	1	2	2
0	8	0	9

В задании 4 для нахождения решения игры достаточно использовать приемы нахождения нижней и верхней цен игры (примеры 1а и 1б), а применение графического метода невозможно даже после исключения стратегий, заведомо невыгодных для игроков.

4. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЕ «В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ»

Для данных платежных матриц:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;
– упростить данную платежную матрицу, исключив из неё доминируемые строки и столбцы, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям Получателя и Плательщика;
– выявить активные стратегии игроков графическим методом при условии его применимости;
– найти решение игры: смешанные стратегии игроков и цену игры.

Задание 5

5.01

6	0
1	8

5.02

2	3
4	1

5.03

3	6
7	4

5.04

0	8
7	5

5.05

8	4
5	6

5.06

3	6
7	4

5.07

5	9
7	0

5.08

5	9
7	6

5.09

8	5
1	7

5.10
8	3
4	5

5.11
2	4
8	3

5.12
2	9
6	1

5.13
0	9
6	2

5.14
2	9
8	4

5.15
6	8
7	6

5.16
4	8
9	3

5.17
5	1
4	7

5.18
2	4
8	0

5.19
7	2
4	8

5.20
2	0
1	7

5.21
1	7
6	5

5.22
5	0
1	4

5.23
9	0
2	7

5.24
2	5
8	0

5.25
9	2
7	8

5.26
3	9
5	2

5.27
1	8
6	3

5.28
0	6
9	4

5.29
8	0
4	6

5.30
2	7
9	1

5.31
5	0
2	4

5.32
6	0
4	5

Для приближенного нахождения решения этих игр можно использовать графический метод (примеры 4а и 4б) или, после установления факта отсутствия седловой точки и ненулевой вероятности применения всех стратегий, – решение системы уравнений, как показано в примере 5.

В учебных целях полезно повторно получить полученный результат с помощью линейного программирования (примеры 6а и 6б).

Задание 6

6.01

1	3	9	4
8	9	9	3
0	5	5	1
5	8	4	2

6.02

4	9	9	7
1	2	7	1
2	5	4	7
5	9	2	8

6.03

5	3	2	7
1	7	2	6
6	8	4	9
1	5	5	8

6.04

6	9	4	2
5	1	0	5
7	3	1	8
4	0	0	1

6.05

6	1	0	4
3	6	5	8
6	5	4	6
9	8	4	7

6.06

5	0	7	5
0	6	1	1
0	8	4	3
5	1	7	8

6.07

9	9	8	6
5	8	3	6
5	7	2	8
9	7	2	9

6.08

1	5	0	6
7	5	6	5
5	1	5	2
5	8	4	8

6.09

1	2	3	2
5	0	2	2
1	4	7	7
7	3	9	7

6.10

8	8	4	7
4	3	4	3
2	5	0	0
4	9	5	3

6.11

5	6	0	7
1	1	6	5
4	8	9	8
1	4	6	8

6.12

7	1	7	9
9	4	2	4
5	3	0	0
6	4	1	4

6.13

0	1	6	5
1	8	9	5
6	9	4	6
0	4	9	0

6.14

4	9	9	8
2	4	7	3
7	7	3	2
2	5	4	3

6.15

6	1	3	1
6	1	3	5
4	3	8	4
9	8	9	4

6.16

3	1	7	0
9	5	8	3
5	4	7	1
9	1	4	8

6.17

5	4	9	9
1	1	4	4
9	6	8	1
4	0	7	1

6.18

1	4	5	4
5	6	8	3
3	5	5	7
6	9	8	4

6.19

2	7	6	2
8	5	4	8
3	4	0	1
2	4	4	2

6.20

6	9	2	7
0	5	0	6
2	8	0	7
4	8	9	5

6.21

6	5	3	2
4	6	2	3
7	1	6	0
7	6	4	5

6.22

1	9	7	0
0	1	0	3
8	9	8	2
0	4	1	4

6.23

3	5	8	1
9	3	8	7
8	0	2	5
1	3	6	0

6.24

7	6	2	5
3	1	2	0
4	5	3	1
2	5	1	3

6.25

2	6	7	9
7	3	8	5
3	1	8	5
6	9	7	9

6.26

9	6	4	8
5	0	4	0
4	0	8	5
7	1	3	8

6.27

0	1	4	4
1	0	1	0
3	8	4	8
6	2	6	7

6.28

2	3	9	7
2	6	0	8
5	7	2	5
7	9	3	8

6.29

2	1	4	3
9	8	2	0
7	1	2	0
2	2	7	4

6.30

9	8	4	9
6	9	6	0
8	8	1	7
4	7	3	1

6.31

4	8	9	6
0	1	8	6
8	9	5	9
1	6	5	7

6.32

9	4	6	8
7	9	1	6
5	0	3	8
7	1	0	5

В задании 6 применение графического метода выявления активных стратегий и приближенного решения (примеры 4а и 4б) возможно только после такого упрощения матрицы, когда у одного из игроков остается две стратегии. Нахождение решения игры в ситуации, когда выявлено множество активных стратегий обоих игроков (пример 5), приведено выше.

Задание 7

7.01а

9	9	6	8
8	6	0	8
9	0	7	2
1	0	5	4

7.02а

4	5	0	2
4	7	4	6
8	0	8	4
1	4	0	1

7.03а

5	9	8	7
1	8	5	5
2	1	7	7
8	3	8	5

7.04а

8	6	9	5
1	3	8	1
9	6	2	9
6	2	8	3

7.05а

9	4	2	7
1	6	8	9
3	1	2	2
1	3	1	3

7.06а

1	2	8	0
0	6	5	4
7	8	6	9
2	6	6	0

7.07а

6	1	3	6
6	0	9	5
7	9	0	5
9	7	9	8

7.08а

0	4	6	1
9	8	6	6
0	6	9	9
6	2	5	1

7.09а

4	3	5	9
2	3	4	8
6	7	2	5
2	1	5	8

7.10а

4	2	9	8
3	8	4	1
2	0	7	2
2	0	4	3

7.11а

5	0	9	7
4	8	8	2
1	5	6	1
4	0	7	0

7.12а

1	0	2	2
7	1	4	2
4	8	3	1
7	5	9	9

7.13a

6	3	6	7
0	9	8	7
7	1	3	8
9	6	8	9

7.14a

0	8	2	0
4	5	7	3
4	7	0	5
5	8	4	8

7.15a

6	9	9	8
1	3	9	6
2	2	3	0
9	0	0	5

7.16a

4	5	5	6
6	9	9	7
1	2	0	5
8	9	3	7

7.17a

6	7	1	0
7	5	6	6
9	9	2	1
8	6	7	9

7.18a

7	0	2	6
7	2	5	0
9	7	3	8
5	6	2	7

7.19a

7	8	9	3
3	9	0	4
5	4	3	1
2	3	3	1

7.20a

4	2	2	3
5	4	9	9
3	6	0	1
5	1	5	7

7.21a

6	3	0	9
5	5	4	8
1	2	8	4
9	6	5	9

7.22a

0	3	5	3
8	2	1	1
0	0	7	6
2	6	9	7

7.23a

1	4	2	3
6	5	2	0
0	8	4	6
8	8	5	3

7.24a

0	7	7	4
8	6	4	5
6	5	1	1
2	6	0	4

7.25a

8	8	6	5
1	2	3	0
1	4	5	9
4	7	2	3

7.26a

0	8	0	1
9	1	5	5
9	3	9	8
6	3	2	6

7.27a

6	1	9	6
3	1	2	1
9	8	4	6
6	6	4	3

7.28a

6	3	8	8
4	1	5	4
5	6	6	4
4	1	1	7

7.29а

1	8	0	1
6	9	9	7
8	9	0	2
2	5	9	7

7.30а

7	8	9	9
6	0	2	2
4	2	1	7
8	1	0	3

7.31а

6	2	0	2
9	6	9	5
6	8	2	9
8	1	4	5

7.32а

5	6	6	9
6	0	4	1
9	7	7	6
4	0	3	0

7.01б

7	1	0	3
8	3	2	0
4	1	1	2
9	6	6	1

7.02б

3	0	8	3
2	7	7	9
0	8	4	0
0	2	5	5

7.03б

1	2	7	1
4	7	0	4
3	4	5	0
5	6	6	2

7.04б

3	5	5	4
8	9	8	1
7	7	4	1
2	9	6	6

7.05б

4	9	4	0
8	6	9	7
4	5	6	1
6	8	5	1

7.06б

3	1	9	0
8	6	5	6
6	7	7	4
6	5	7	2

7.07б

6	4	8	5
7	0	0	4
0	2	4	2
1	5	7	9

7.08б

6	8	2	8
0	2	8	8
5	7	7	6
1	2	1	6

7.09б

5	3	7	7
4	1	3	8
8	1	5	9
7	6	6	0

7.10б

0	0	3	3
7	0	9	9
8	5	9	4
7	1	6	5

7.11б

7	5	1	7
4	8	5	9
9	5	0	1
4	6	2	2

7.12б

4	8	2	0
5	3	8	1
1	7	9	5
6	8	3	0

7.13б

2	4	9	9
5	7	9	3
5	5	8	2
7	9	6	1

7.14б

1	1	2	4
7	1	9	8
5	7	8	9
6	3	7	7

7.15б

4	0	6	6
0	0	4	9
8	6	8	0
9	1	9	8

7.16б

2	2	4	6
2	1	1	8
8	4	8	0
7	1	9	8

7.17б

0	2	0	5
3	4	4	8
0	9	6	3
7	9	3	9

7.18б

6	5	3	4
9	7	1	9
5	1	5	9
0	0	1	5

7.19б

8	1	3	2
5	0	0	7
9	0	4	6
9	2	0	9

7.20б

1	5	0	1
1	7	0	1
9	5	3	4
6	2	6	9

7.21б

4	5	0	8
9	0	9	1
9	1	8	7
4	8	0	9

7.22б

0	4	0	1
4	8	5	9
5	5	3	4
9	6	0	8

7.23б

5	7	7	4
3	6	5	1
1	6	4	8
6	9	9	3

7.24б

4	6	4	9
6	9	8	0
5	8	7	6
0	1	8	0

7.25б

6	9	4	1
2	6	0	6
3	4	0	1
8	9	2	3

7.26б

0	9	6	3
8	5	2	8
4	5	5	9
0	2	1	1

7.27б

4	5	2	2
5	9	3	7
8	7	6	5
8	8	0	9

7.28б

9	7	4	7
3	3	6	9
9	0	0	1
4	2	7	3

7.29б

1	9	6	5
1	0	2	1
7	1	8	7
3	6	4	5

7.30б

0	0	7	5
7	6	9	0
9	4	6	6
9	3	7	9

7.31б

6	1	7	2
9	3	8	4
5	8	2	0
2	5	2	1

7.32б

3	9	9	8
1	8	6	4
8	4	6	4
6	8	7	7

В задании 7 рекомендуется в первую очередь провести упрощение платежных матриц путем исключения доминируемых рядов (примеры 3а и 3б), затем появляется возможность выявить активные стратегии обоих игроков графическим методом (примеры 4а и 4б). Далее – нахождение решения игры в ситуации, когда выявлено множество активных стратегий обоих игроков, как показано в примере 5. Также полезны примеры 7 и 8.

Пример 7. Для данной платежной матрицы:

7	3	8	2
3	7	5	9
1	5	4	8
2	7	3	4

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– упростить данную платежную матрицу, исключив из неё доминируемые строки и столбцы, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям игроков;

– выявить активные стратегии игроков графическим методом;

– найти решение игры: смешанные стратегии игроков и цену игры.

Решение

1. Введем обозначения стратегий первого игрока (Получателя) и второго игрока (Плательщика)

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	7	3	8	2
$A2$	3	7	5	9
3	1	5	4	8
$A4$	2	7	3	4

2. В каждой строке выявим наименьшее значение, а из этих результатов – наибольшее

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$\min\limits_j (a_{ij})$
$A1$	7	3	8	2	2
$A2$	3	7	5	9	3
$A3$	1	5	4	8	1
$A4$	2	7	3	4	2

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j(a_{ij})) = \max(2; 3; 1; 2) = 3$ (реализуется при использовании Получателем стратегии $A2$).

3. В каждом столбце выявим наибольшее значение, а из этих результатов – наименьшее

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	7	3	8	2
$A2$	3	7	5	9
$A3$	1	5	4	8
$A4$	2	7	3	4
$\max\limits_i (a_{ij})$	7	7	8	9

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_j(\max\limits_i(a_{ij})) = \min(7; 7; 8; 9) = 7$ (реализуется при использовании Плательщиком стратегий $B1$ и $B2$).

4. По результатам п. 2, 3 сделаем выводы: верхняя и нижняя цены игры не совпадают, значит, игра не имеет решения в чистых стратегиях (следует искать смешанную стратегию), цена игры лежит в диапазоне $3 = \alpha < \nu < \beta = 7$.

5. Для выявления доминируемых строк платежной матрицы проведем их поэлементное сравнение

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$ и $A2$	$7 \geq 3$	$3 \leq 7$	$8 \geq 5$	$2 \leq 9$
$A1$ и $A3$	$7 \geq 1$	$3 \leq 5$	$8 \geq 4$	$2 \leq 8$
$A1$ и $A4$	$7 \geq 2$	$3 \leq 7$	$8 \geq 3$	$2 \leq 4$
$A2$ и $A3$	$\mathbf{3 \geq 1}$	$\mathbf{7 \geq 5}$	$\mathbf{5 \geq 4}$	$\mathbf{9 \geq 8}$
$A2$ и $A4$	$\mathbf{3 \geq 2}$	$\mathbf{7 = 7}$	$\mathbf{5 \geq 3}$	$\mathbf{9 \geq 4}$
$A3$ и $A4$	—	—	—	—

Вывод: в выделенных строках таблицы знаки неравенств – одинаковые, по сравнению со строкой № 2 из платежной матрицы можно исключить строки № 3, 4 (стратегия $A2$ доминирует стратегии $A3$ и $A4$). Сравнение доминируемых стратегий между собой не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемых стратегий Получателя, платежная матрица принимает вид

$$\begin{array}{c|cccc|} & B1 & B2 & B3 & B4 \\ \hline A1 & 7 & 3 & 8 & 2 \\ A2 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ \mathbf{A3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{A4} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc|} & B1 & B2 & B3 & B4 \\ \hline A1 & 7 & 3 & 8 & 2 \\ A2 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ \hline \end{array}$$

6. Для выявления доминируемых столбцов проведем их поэлементное сравнение

	$B1$ и $B2$	$B1$ и $B3$	$B1$ и $B4$	$B2$ и $B3$	$B2$ и $B4$	$B3$ и $B4$
$A1$	$7 \geq 3$	**$7 \leq 8$**	$7 \geq 2$	—	$3 \geq 2$	—
$A2$	$3 \leq 7$	**$3 \leq 5$**	$3 \leq 9$	—	$7 \leq 9$	—

Вывод: в выделенном столбце знаки неравенств – одинаковые, столбец, соответствующий стратегии Плательщика $B3$, можно исключить из платежной матрицы (стратегия $B1$ доминирует стратегию $B3$). Дальнейшее сравнение с доминируемой стратегией B3 не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемых стратегий Плательщика, платежная матрица принимает вид

$$\begin{array}{c|cccc|} & B1 & B2 & \mathbf{B3} & B4 \\ \hline A1 & 7 & 3 & \mathbf{8} & 2 \\ A2 & 3 & 7 & \mathbf{5} & 9 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|} & B1 & B2 & B4 \\ \hline A1 & 7 & 3 & 2 \\ A2 & 3 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

7. Проведем проверку оставшихся стратегий Получателя и сделаем выводы:

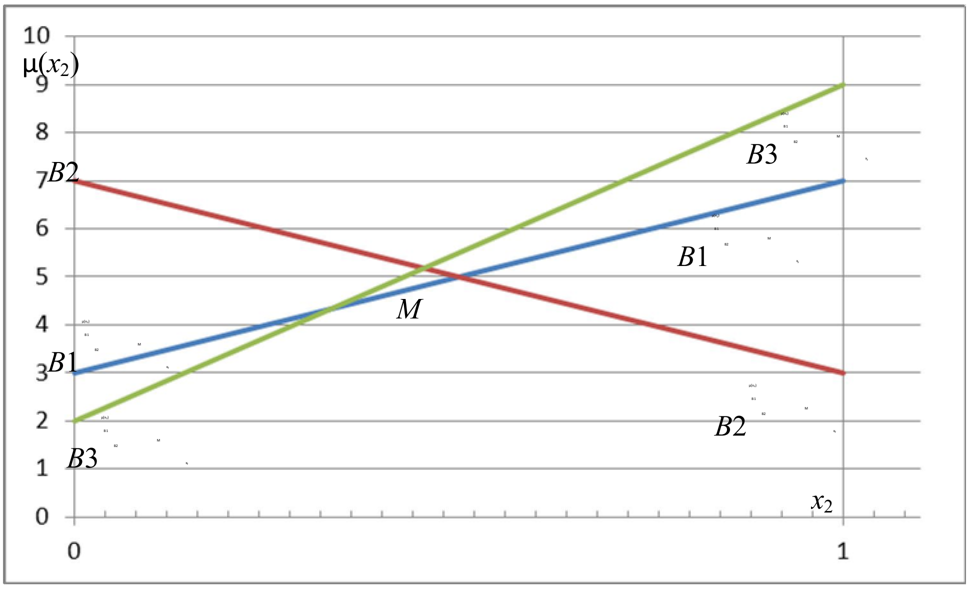
	$B1$	$B2$	$B4$
$A1$ и $A2$	$7 \geq 3$	$3 \leq 7$	$2 \geq 9$

– знаки неравенств – разные, дальнейшее упрощение платежной матрицы путем выявления и исключения доминируемых (заведомо невыгодных) стратегий невозможно;

– путем последовательного упрощения платежной матрицы свести её к единственному элементу нельзя. Обе стратегии Получателя и, по меньшей мере, две из трех стратегий Плательщика являются активными, а решение игры следует искать «в смешанных стратегиях». Этот вывод полностью согласуется с результатами, полученными в п. 4.

8. Так как Получатель имеет (это видно после упрощения платежной матрицы) только две стратегии, и обе они являются активными, есть возможность провести графическое сравнение стратегий Плательщика при разных смешанных стратегиях Получателя.

Обозначим x_2 – вероятность использования Получателем стратегии $A2$. Выполним графическое построение: отрезок, соответствующий стратегии $B1$, соединяет величины платежа $a_{11} = 7$ (при $x_2 = 0$) и $a_{21} = 3$ (при $x_2 = 1$). Отрезок, соответствующий стратегии $B2$, соединяет величины платежа $a_{12} = 3$ (при $x_2 = 0$) и $a_{22} = 7$ (при $x_2 = 1$). Отрезок, соответствующий стратегии $B3$, соединяет величины платежа $a_{13} = 2$ (при $x_2 = 0$) и $a_{23} = 9$ (при $x_2 = 1$).



Найдем такую точку M на нижней границе получившейся фигуры, которая наиболее удалена от оси абсцисс, и сделаем выводы:

– точка M имеет координаты $x_2 \approx 0{,}5$ (т. е. $0 < x_2 < 1$) и $\mu(x_2) \approx 5{,}0$ – обе стратегии Получателя являются активными, позволяя ему достигать цену игры, превосходящую значение $\alpha = 3$;

– точка M соответствует пересечению отрезков, соответствующих стратегиям Плательщика $B1$ и $B2$, – именно эти стратегии являются активными;

– платежную матрицу можно упростить.

$$\begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \end{array}\begin{array}{ccc} B1 & B2 & \mathbf{B4} \\ \hline 7 & 3 & \mathbf{2} \\ 3 & 7 & \mathbf{9} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \end{array}\begin{array}{cc} B1 & B2 \\ \hline 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{array}$$

9. Так как множество активных стратегий обоих игроков выявлено, решение игры можно найти, строго приравнивая среднюю величину платежа цене игры

$$\begin{array}{l} B1: \\ B2: \\ \end{array} \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = \nu; \\ 3x_1 + 7x_2 = \nu; \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0{,}5; \\ x_2 = 0{,}5; \\ \nu = 5. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \\ \end{array} \begin{cases} 7y_1 + 3y_2 = \nu; \\ 3y_1 + 7y_2 = \nu; \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} y_1 = 0{,}5; \\ y_2 = 0{,}5; \\ \nu = 5. \end{cases}$$

Ответ:

– нижняя цена игры $\alpha = 3$, верхняя цена игры $\beta = 7$; несовпадение этих значений указывает на существование смешанной стратегии, более выгодной, чем любая из «чистых»;

– поэлементное сравнение стратегий позволяет выявить и исключить из рассмотрения заведомо невыгодные стратегии игроков $A3$, $A4$ и $B3$. Активные стратегии Получателя – $A1$ и $A2$;

– графический метод позволяет выявить активные стратегии Плательщика – $B1$ и $B2$;

– для выявленных активных стратегий Плательщца и Получателя установлено: смешанная стратегия Получателя состоит в применении стратегий $A1$ и $A2$ с равной вероятностью $x_1 = x_2 = 0{,}5$; смешанная стратегия Плательщика состоит в применении стратегий $B1$ и $B2$ с равной вероятностью $y_1 = y_2 = 0{,}5$;

– цена игры $\nu = 5$.

Пример 8. Для данной платежной матрицы:

6	4	0	0
3	2	1	2
7	9	0	1
0	7	5	5

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– упростить данную платежную матрицу, исключив из неё доминируемые строки и столбцы, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям игроков;

– выявить активные стратегии игроков графическим методом;

– найти решение игры: смешанные стратегии игроков и цену игры.

Решение

1. Введем обозначения стратегий первого игрока (Получателя) и второго игрока (Плательщика)

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	6	4	0	0
$A2$	3	2	1	2
$A3$	7	9	0	1
$A4$	0	7	5	5

2. В каждой строке выявим наименьшее значение, а из этих результатов – наибольшее

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$\min\limits_{j}(a_{ij})$
$A1$	6	4	0	0	0
$A2$	3	2	1	2	1
$A3$	7	9	0	1	0
$A4$	0	7	5	5	0

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{i}(\min\limits_{j}(a_{ij})) = \max(0; 1; 0; 0) = 1$ (реализуется при использовании Получателем стратегии $A2$).

3. В каждом столбце выявим наибольшее значение, а из этих результатов – наименьшее

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	6	4	0	0
$A2$	3	2	1	2
$A3$	7	9	0	1
$A4$	0	7	5	5
$\max\limits_{i}(a_{ij})$	7	9	5	5

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{j}(\max\limits_{i}(a_{ij})) = \min(7;9;5;5) = 5$ (реализуется при использовании Плательщиком стратегий $B3$ и $B4$).

4. По результатам п. 2, 3 сделаем выводы: верхняя и нижняя цены игры не совпадают, значит, игра не имеет решения в чистых стратегиях (следует искать смешанную стратегию), цена игры лежит в диапазоне $1 = \alpha < \nu < \beta = 5$.

5. Для выявления доминируемых строк платежной матрицы проведем их поэлементное сравнение

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$ и $A2$	**$6 \geq 3$**	**$4 \leq 2$**	**$0 \leq 1$**	**$0 \leq 2$**
$A1$ и $A3$	**$6 \leq 7$**	**$4 \leq 9$**	**$0 = 0$**	**$0 \leq 1$**
$A1$ и $A4$	—	—	—	—
$A2$ и $A3$	$3 \leq 7$	$2 \leq 9$	$1 \geq 0$	$2 \geq 1$
$A2$ и $A4$	$3 \geq 0$	$2 \leq 7$	$1 \leq 5$	$2 \leq 5$
$A3$ и $A4$	$7 \geq 0$	$9 \geq 7$	$0 \leq 5$	$1 \leq 5$

Вывод: в выделенной строке таблицы знаки неравенств – одинаковые, строку № 1 можно исключить из платежной матрицы по сравнению со строкой № 3 (стратегия $A3$ доминирует стратегию $A1$). Дальнейшее сравнение доминируемой стратегии $A1$ не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемой стратегий Получателя, платежная матрица принимает вид

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$			$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	**6**	**4**	**0**	**0**		$A2$	3	2	1	2
$A2$	3	2	1	2	~	$A3$	7	9	0	1
$A3$	7	9	0	1		$A4$	0	7	5	5
$A4$	0	7	5	5						

6. Для выявления доминируемых столбцов проведем их поэлементное сравнение

	$B1$ и $B2$	$B1$ и $B3$	$B1$ и $B4$	$B2$ и $B3$	$B2$ и $B4$	$B3$ и $B4$
$A2$	$3 \geq 2$	$3 \geq 1$	$3 \geq 2$	$\mathbf{2 \geq 1}$	—	$\mathbf{1 \leq 2}$
$A3$	$7 \leq 9$	$7 \geq 0$	$7 \geq 1$	$\mathbf{9 \geq 0}$	—	$\mathbf{0 \leq 1}$
$A4$	$0 \leq 7$	$0 \leq 5$	$0 \leq 5$	$\mathbf{7 \geq 5}$	—	$\mathbf{5 = 5}$

Вывод: в выделенных столбцах знаки неравенств – одинаковые, столбцы, соответствующие стратегиям Плательщика $B2$ и $B4$, можно исключить из платежной матрицы (стратегия $B3$ доминирует стратегии $B2$ и $B4$). После выявления невыгодности стратегии $B2$ дальнейшее сравнение с ней не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемых стратегий Плательщика, платежная матрица принимает вид

	$B1$	**$B2$**	$B3$	**$B4$**			$B1$	$B3$
$A2$	3	**2**	1	**2**		$A2$	3	1
$A3$	7	**9**	0	**1**	~	$A3$	7	0
$A4$	0	**7**	5	**5**		$A4$	0	5

7. Проведем проверку оставшихся стратегий Получателя и сделаем выводы:

	$B1$	$B3$
$A2$ и $A3$	$3 \leq 7$	$1 \geq 0$
$A2$ и $A4$	$3 \geq 0$	$1 \leq 5$
$A3$ и $A4$	$7 \geq 0$	$0 \leq 5$

– знаки неравенств – разные, дальнейшее упрощение платежной матрицы путем выявления и исключения доминируемых (заведомо невыгодных) стратегий невозможно;

– путем последовательного упрощения платежной матрицы свести её к единственному элементу нельзя; обе стратегии Плательщика и, по меньшей мере, две из трёх стратегий Получателя являются активными, а решение игры следует искать «в смешанных стратегиях» (этот вывод полностью согласуется с результатами, полученными в п. 4).

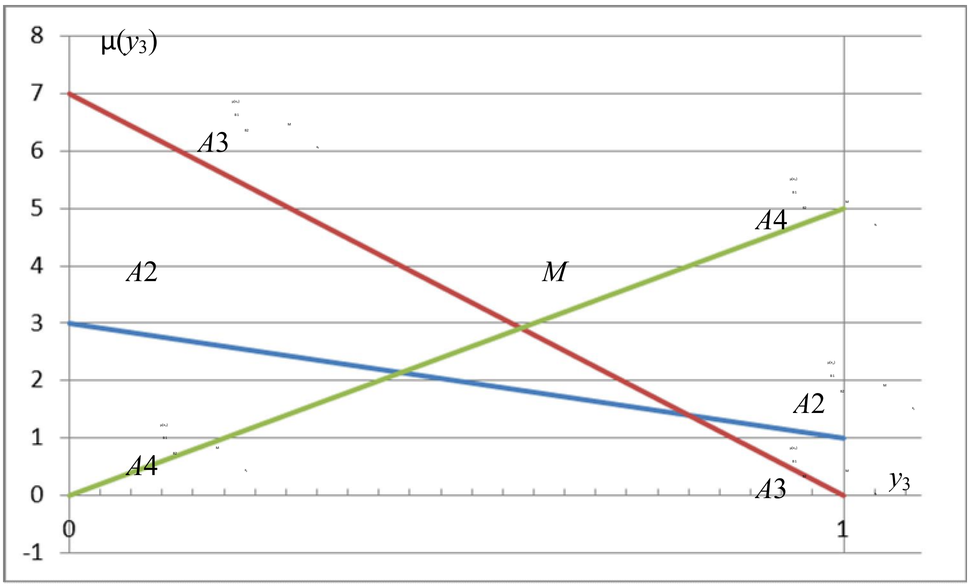
8. Так как Плательщик имеет (это видно после упрощения платежной матрицы) только две стратегии, и обе они являются активными, есть возможность провести графическое сравнение стратегий Получателя при разных смешанных стратегиях Плательщика.

Обозначим y_3 – вероятность использования Плательщиком стратегии $B3$. Выполним графическое построение:

– отрезок, соответствующий стратегии $A2$, соединяет величины платежа $a_{21} = 3$ (при $y_3 = 0$) и $a_{23} = 1$ (при $y_3 = 1$);

– отрезок, соответствующий стратегии $A3$, соединяет величины платежа $a_{31} = 7$ (при $y_3 = 0$) и $a_{33} = 0$ (при $y_3 = 1$);

– отрезок, соответствующий стратегии $A4$, соединяет величины платежа $a_{41} = 0$ (при $y_3 = 0$) и $a_{43} = 5$ (при $y_3 = 1$).



Найдем такую точку M на верхней границе получившейся фигуры, которая наименее удалена от оси абсцисс, и сделаем выводы:

– точка M имеет координаты $y_3 \approx 0{,}6$ (т. е. $0 < y_3 < 1$) и $\mu(y_3) \approx 2{,}9$ – обе стратегии Плательщика являются активными, позволяя ему достигать цену игры, превосходящую значение $\alpha = 1$;

– точка M соответствует пересечению отрезков, соответствующих стратегиям Получателя $A3$ и $A4$, – именно эти стратегии являются активными;

– платежную матрицу можно упростить.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A2} \\ A3 \\ A4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B1 & B3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{array}} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ A3 \\ A4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B1 & B3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{array}} \end{array}$$

9. Так как множество активных стратегий обоих игроков выявлено, решение игры можно найти, строго приравнивая среднюю величину платежа цене игры

$$\begin{array}{l} B1: \\ B3: \\ \end{array} \begin{cases} 7x_3 + 0x_4 = \nu; \\ 0x_3 + 5x_4 = \nu; \\ \quad x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x_3 = 5/12 \approx 0{,}42; \\ x_4 = 7/12 \approx 0{,}58; \\ \nu = 35/12 \approx 2{,}9. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} A3: \\ A4: \\ \end{array} \begin{cases} 7y_1 + 0y_3 = \nu; \\ 0y_1 + 5y_3 = \nu; \\ \quad y_1 + y_3 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} y_1 = 5/12 \approx 0{,}42; \\ y_3 = 7/12 \approx 0{,}58; \\ \nu = 35/12 \approx 2{,}9. \end{cases}$$

Ответ:

– нижняя цена игры $\alpha = 1$, верхняя цена игры $\beta = 5$;

– поэлементное сравнение стратегий позволяет выявить и исключить из рассмотрения заведомо невыгодные стратегии игроков $A1$, $B2$ и $B4$;

– активные стратегии Плательщика – $B1$ и $B3$;

– графический метод позволяет выявить активные стратегии Получателя – $A3$ и $A4$;

– для выявленных активных стратегий Плательщица и Получателя установлено: смешанная стратегия Получателя состоит в применении стратегий $A3$ и $A4$ с вероятностями $x_3 = 0{,}42$ и $x_4 = 0{,}58$ соответственно; смешанная стратегия Плательщика состоит в применении стратегий $B1$ и $B3$ с вероятностями $y_1 = 0{,}42$ и $y_3 = 0{,}58$ соответственно;

– цена игры $\nu = 2{,}9$.

Задание 8

8.01

1	-1	1	0
-1	6	4	0
-2	-1	3	6
7	6	4	3

8.02

0	3	-4	5
-1	4	-3	4
0	5	-2	0
3	4	3	-3

8.03

-1	1	-2	0
-3	2	-1	0
5	2	4	-3
-1	4	0	5

8.04

-3	-1	-2	-3
5	2	1	0
2	1	1	-1
-2	2	3	5

8.05

1	2	-3	0
1	0	0	6
5	-2	1	6
4	1	-1	-1

8.06

1	5	3	6
-1	7	5	8
6	5	1	2
7	0	-1	5

8.07

7	0	6	6
8	3	3	1
7	7	2	0
6	8	3	-1

8.08

3	-2	2	4
-3	-1	-3	-2
4	1	-4	-2
-4	4	-5	4

8.09

0	1	3	-4
-1	-1	-3	0
0	-1	-2	3
-3	-4	-5	-5

8.10

6	-2	5	4
0	5	-1	3
-2	2	2	4
1	6	3	5

8.11

1	5	4	0
7	-2	6	4
5	0	4	2
4	6	-1	-2

8.12

0	-2	-1	2
2	2	3	-4
2	-4	2	5
5	-1	2	-3

8.13

-1	-3	2	5
-1	-2	0	-2
5	3	-1	4
5	-4	5	-3

8.14

-1	0	0	3
2	5	6	4
-3	1	2	-3
4	1	-3	2

8.15

3	4	-3	5
2	-2	4	-1
3	1	1	-3
4	2	5	0

8.16

5	0	7	2
8	3	0	8
4	-1	8	6
8	1	2	1

8.17

5	5	6	-1
8	2	5	0
3	1	2	5
5	-1	5	8

8.18

3	-1	1	2
-2	-2	-3	-3
-3	-1	-5	-4
-4	1	-1	-3

8.19

0	-5	-5	-1
-2	-3	1	-2
-5	2	0	-1
4	0	2	3

8.20

0	1	-1	-1
4	6	3	7
3	4	-2	3
6	1	7	0

8.21

0	0	7	1
-2	5	3	7
2	7	7	-1
-1	1	4	6

8.22

-4	-3	1	4
-3	4	2	-2
-1	-3	-1	-3
5	4	2	-2

8.23

2	0	-2	-3
0	-4	-3	-2
-1	0	-2	-1
0	2	3	4

8.24

-2	5	3	6
1	-1	2	0
6	1	5	0
1	0	3	-2

8.25

2	2	3	-3
6	3	5	2
-2	-1	0	-2
-1	5	0	6

8.26

4	2	3	-1
2	8	3	2
0	8	7	3
3	1	6	1

8.27

1	2	0	2
0	5	7	0
7	4	0	-1
1	5	7	8

8.28

3	3	-2	-4
3	-4	2	2
2	4	-1	-5
4	-1	-1	-3

8.29

4	1	3	-4
-2	0	-3	-1
-2	3	-1	4
-4	1	-2	-1

8.30

4	-1	6	3
2	3	0	2
2	6	1	3
-1	-2	-2	0

8.31

1	7	2	1
2	0	5	0
3	1	2	-2
-1	7	6	2

8.32

2	4	-3	-4
-1	3	2	-2
5	-4	4	2
3	-2	2	0

В задании 8 применение графического метода выявления активных стратегий (примеры 4а, 4б, 7, 8) возможно только после такого упрощения матрицы, когда у одного из игроков остается две стратегии. Примеры нахождения решения игры в ситуации, когда выявлено множество активных стратегий обоих игроков (примеры 5, 7, 8) приведены выше.

Задание 9

9.01

1	3	1	2
3	6	4	0
5	0	6	6
2	6	2	5

9.02

9	0	0	8
4	5	2	2
9	5	3	5
1	4	4	2

9.03

7	5	7	6
7	6	2	3
2	0	9	7
9	9	4	7

9.04

9	9	6	2
2	2	1	5
6	6	7	4
2	0	3	0

9.05

2	5	2	6
7	5	3	0
9	6	4	1
0	9	4	5

9.06

0	5	9	6
4	3	9	2
9	0	6	1
0	2	5	1

9.07

2	9	0	5
1	0	4	0
8	3	9	0
1	7	9	5

9.08

2	1	9	5
7	7	9	4
7	1	7	4
1	9	2	6

9.09

4	0	3	4
4	9	0	3
7	6	4	3
8	2	5	4

9.10

3	4	0	2
8	3	6	7
5	3	1	7
0	8	2	5

9.11

1	0	0	1
6	9	2	9
8	7	5	1
0	8	5	5

9.12

5	3	9	9
0	1	4	5
9	7	6	6
6	8	3	7

9.13

5	7	7	4
3	0	3	2
4	3	7	8
3	7	6	9

9.14

4	1	1	5
3	7	4	4
5	2	3	8
5	8	0	4

9.15

8	0	9	1
0	8	5	2
4	7	8	6
1	3	8	1

9.16

6	9	9	1
7	2	1	1
2	2	0	0
2	8	4	6

9.17

5	3	7	4
3	6	9	2
0	1	1	4
0	6	0	7

9.18

4	8	3	5
8	1	5	1
9	7	2	8
8	2	7	4

9.19

1	8	4	3
4	8	5	6
7	2	9	5
7	4	8	1

9.20

8	8	4	5
5	2	6	2
8	0	0	5
4	2	5	7

9.21

2	6	7	6
2	8	1	2
9	9	1	3
5	3	9	1

9.22

3	1	8	1
4	5	0	5
9	4	4	6
6	1	8	8

9.23

4	1	1	4
9	2	9	4
4	9	0	6
8	5	4	0

9.24

0	9	6	6
3	5	4	4
0	2	0	2
9	2	9	4

9.25

0	3	5	6
0	8	9	7
5	7	0	4
4	5	3	1

9.26

6	6	9	1
2	6	6	9
8	4	5	1
0	3	3	9

9.27

6	6	0	1
1	1	4	0
9	1	9	7
5	3	5	0

9.28

8	2	4	9
9	6	1	5
8	6	0	2
1	1	5	0

9.29

2	9	9	4
5	4	6	1
1	5	3	1
6	7	1	7

9.30

8	3	7	6
5	1	7	1
7	0	8	0
9	7	1	4

9.31

9	7	8	4
8	2	7	6
2	9	2	6
5	6	2	2

9.32

2	3	5	6
8	2	2	5
9	5	3	8
0	0	8	1

В задании 9 решение графическим способом невозможно даже после упрощения платежной матрицы путем исключения доминируемых стратегий. В этой ситуации рекомендуется применять переход к задаче линейного программирования, как показано в примере 9.

Обращаем особое внимание читателя на то, что для полного понимания процесса решения в этом случае требуется его знакомство с «симплекс-методом» линейного программирования. Изложение этого метода выходит за рамки настоящего издания. Возможная альтернатива – применение «теоремы об активных стратегиях», то есть частичная или полная замена всех требований к искомому решению, выраженных нестрогими неравенствами, на строгие равенства (для активных стратегий). Это возможно после выдвижения правдоподобной гипотезы о множестве активных стратегий, например, на основе «фиктивного разыгрывания» игровой ситуации, используемого в итеративном методе Брауна-Робинсон.

Пример 9. Для данной платежной матрицы:

3	7	7	6
6	2	7	8
6	2	4	8
4	9	9	0

– найти нижнюю и верхнюю цены игры;

– упростить данную платежную матрицу, исключив из неё доминируемые строки и столбцы, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям игроков;

– выявить активные стратегии игроков и найти решение игры: смешанные стратегии игроков и цену игры.

Решение

1. Введем обозначения стратегий первого игрока (Получателя) и второго игрока (Плательщика)

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1	3	7	7	6
*A*2	6	2	7	8
*A*3	6	2	4	8
*A*4	4	9	9	0

2. В каждой строке выявим наименьшее значение, а из этих результатов – наибольшее

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	$\min\limits_j (a_{ij})$
*A*1	3	7	7	6	3
*A*2	6	2	7	8	2
*A*3	6	2	4	8	2
*A*4	4	9	9	0	0

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j(a_{ij})) = \max(3;2;2;0) = 3$ (реализуется при использовании Получателем стратегии *A*1).

3. В каждом столбце выявим наибольшее значение, а из этих результатов – наименьшее

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1	3	7	7	6
*A*2	6	2	7	8
*A*3	6	2	4	8
*A*4	4	9	9	0
$\max\limits_i (a_{ij})$	6	9	9	8

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_j(\max\limits_i(a_{ij})) = \min(6;9;7;8) = 6$ (реализуется при использовании Плательщиком стратегии *B*1).

4. По результатам п. 2, 3 сделаем выводы: верхняя и нижняя цены игры не совпадают, значит, игра не имеет решения в чистых стратегиях (следует искать смешанную стратегию), цена игры лежит в диапазоне $3 = \alpha < \nu < \beta = 6$.

5. Для выявления доминируемых строк платежной матрицы проведем их поэлементное сравнение

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1 и *A*2	$3 \le 6$	$7 \ge 2$	$7 = 7$	$6 \le 8$
*A*1 и *A*3	$3 \le 6$	$7 \ge 2$	$7 \ge 4$	$6 \le 8$
*A*1 и *A*4	$3 \le 4$	$7 \le 9$	$7 \le 9$	$6 \ge 0$
*A*2 и *A*3	**6 = 6**	**2 = 2**	**7 ≥ 4**	**8 = 8**
*A*2 и *A*4	$6 \le 4$	$2 \le 9$	$7 \le 9$	$8 \ge 0$
*A*3 и *A*4	—	—	—	—

Вывод: в выделенной строке таблицы знаки неравенств – одинаковые, строку № 3 можно исключить из платежной матрицы по сравнению со строкой № 2 (стратегия *A*2 доминирует стратегию *A*3). Дальнейшее сравнение доминируемой стратегии *A*3 не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемой стратегий Получателя, платежная матрица принимает вид

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1	3	7	7	6
*A*2	6	2	7	8
***A*3**	**6**	**2**	**4**	**8**
*A*4	4	9	9	0

~

	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
*A*1	3	7	7	6
*A*2	6	2	7	8
*A*4	4	9	9	0

6. Для выявления доминируемых столбцов проведем их поэлементное сравнение

	*B*1 и *B*2	*B*1 и *B*3	*B*1 и *B*4	*B*2 и *B*3	*B*2 и *B*4	*B*3 и *B*4
*A*2	$3 \le 7$	**3 ≤ 7**	$3 \le 6$	—	$7 \ge 6$	—
*A*3	$6 \ge 2$	**6 ≤ 7**	$6 \le 8$	—	$2 \le 8$	—
*A*4	$4 \le 9$	**4 ≤ 9**	$4 \ge 0$	—	$9 \ge 0$	—

Вывод: в выделенном столбце знаки неравенств – одинаковые, столбец № 3 можно исключить из платежной матрицы (стратегия $B1$ доминирует стратегию $B3$). После выявления невыгодности стратегии $B3$ дальнейшее сравнение с ней не проводилось.

В итоге, после выявления и исключения доминируемой стратегии Плательщика, платежная матрица принимает вид

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & B1 & B2 & \mathbf{B3} & B4 \\
\hline
A1 & 3 & 7 & \mathbf{7} & 6 \\
A2 & 6 & 2 & \mathbf{7} & 8 \\
A4 & 4 & 9 & \mathbf{9} & 0 \\
\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{c|ccc|}
 & B1 & B2 & B4 \\
\hline
A1 & 3 & 7 & 6 \\
A2 & 6 & 2 & 8 \\
A4 & 4 & 9 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

7. Проведем проверку оставшихся стратегий Получателя и сделаем выводы:

	$B1$	$B2$	$B4$
$A1$ и $A2$	$3 \le 6$	$7 \ge 2$	$6 \le 8$
$A1$ и $A4$	$3 \le 4$	$7 \le 9$	$6 \ge 0$
$A2$ и $A4$	$6 \ge 4$	$2 \le 9$	$8 \ge 0$

– знаки неравенств – разные, дальнейшее упрощение платежной матрицы путем выявления и исключения доминируемых (заведомо невыгодных) стратегий невозможно;

– путем последовательного упрощения платежной матрицы свести ее к единственному элементу нельзя. По меньшей мере, две из трех стратегий Получателя и две из трех стратегий Плательщика являются активными, а решение игры следует искать «в смешанных стратегиях». Этот вывод полностью согласуется с результатами, полученными в п. 4.

8. Так как ни для Получателя, ни для Плательщика не выявлена пара активных стратегий, применить графический метод (на плоскости) для выявления активных стратегий другого игрока невозможно. Для нахождения решения игры следует сформулировать соответствующую задачу линейного программирования (ЛП) и, получив ее решение хотя бы для одного из игроков, вернуться к рассмотрению «игровой» задачи.

8.1. Сформулируем требования для решения «игровой» задачи со стороны Плательщика, обозначив вероятности применения его стратегий $B1$, $B2$ и $B4$ величинами y_1, y_2 и y_4 (соответственно номеру стратегии)

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \\ A4: \\ \end{array} \begin{cases} 3y_1 + 7y_2 + 6y_4 \le \nu; \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_4 \le \nu; \\ 4y_1 + 9y_2 + 0y_4 \le \nu; \\ \quad y_1 + y_2 + y_4 = 1. \end{cases}$$

8.2. Поделим все выражения на цену игры $\nu > 0$, вводя ЛП-переменные $Y_1 = y_1 / \nu$, $Y_2 = y_2 / \nu$, $Y_4 = y_4 / \nu$ и вводя условие поиска решения $G = 1 / \nu \to \max$

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \\ A4: \\ \end{array} \begin{cases} \qquad 3Y_1 + 7Y_2 + 6Y_4 \le 1; \\ \qquad 6Y_1 + 2Y_2 + 8Y_4 \le 1; \\ \qquad 4Y_1 + 9Y_2 + 0Y_4 \le 1; \\ G = Y_1 + Y_2 + Y_4 = 1 / \nu \to \max. \end{cases}$$

8.3. Полученную ЛП задачу решаем симплекс-методом линейного программирования (Y_5, Y_6, Y_7 – формальные переменные для приведения задачи к каноническому виду)

c_i	**БП**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$G(\vec{Y})$
		Y_1	Y_2	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	b_i
0	Y_5	3	7	6	1	0	0	1
0	Y_6	6	2	8	0	1	0	1
0	Y_7	4	**9**	0	0	0	1	1
	Δ_j	-1	-1	-1	0	0	0	0

c_i	**БП**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$G(\vec{Y})$
		Y_1	Y_2	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	b_i
0	Y_5	-0,111	0	**6**	1	0	-0,777	0,2222
0	Y_6	5,1111	0	8	0	1	-0,222	0,7777
1	Y_2	0,4444	1	0	0	0	0,1111	0,1111
	Δ_j	-0,555	0	-1	0	0	0,1111	0,1111

c_i	БП	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$G(\vec{Y})$
		Y_1	Y_2	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	b_i
1	Y_4	-0,0185	0	1	0,1666	0	-0,1296	0,0370
0	Y_6	**5,2592**	0	0	-1,3333	1	0,8148	0,4814
1	Y_2	0,4444	1	0	0	0	0,1111	0,1111
	Δ_j	-0,5740	0	0	0,1666	0	-0,0185	0,1481

c_i	БП	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$G(\vec{Y})$
		Y_1	Y_2	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	b_i
1	Y_4	0	0	1	0,1619	0,0035	-0,1267	0,0387
1	Y_1	1	0	0	-0,2535	0,1901	0,1549	0,0915
1	Y_2	0	1	0	0,1126	-0,0845	0,0422	0,0704
	Δ_j	0	0	0	0,0211	0,1091	0,0704	0,2007

Решение ЛП- задачи: $Y_1 = 0{,}092$; $Y_2 = 0{,}070$, $Y_4 = 0{,}039$, $G_{\max} = 0{,}201$.

8.4. Выполним переход к исходным переменным: $\nu = 1\ /G_{\max} = 5{,}0$; $y_1 = Y_1 \cdot \nu = 0{,}46$; $y_2 = Y_2 \cdot \nu = 0{,}35$; $y_4 = Y_4 \cdot \nu = 0{,}19$.

8.5. Проведем проверку найденной смешанной стратегии Плательщика по всем стратегиям Получателя и сделаем выводы:

$$\begin{array}{l} A1: \\ A2: \\ A4: \\ \\ \end{array} \begin{cases} 3y_1 + 7y_2 + 6y_4 = 5{,}0 = \nu; \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_4 = 5{,}0 = \nu; \\ 4y_1 + 9y_2 + 0y_4 = 5{,}0 = \nu; \\ \quad y_1 + y_2 + y_4 = 1. \end{cases}$$

– найденная смешанная стратегия Плательщика удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к ней: независимо от стратегии, выбранной Получателем, она гарантирует среднюю величину платежа, близкую $\nu = 5{,}0 < \beta = 6$ (в продолжительной серии игр);

– среди стратегий Получателя, которые не доминируют друг друга, не выявлено такой стратегии, которая была бы особо выгодна Плательщику. Следовательно, все три стратегии Получателя $A1$, $A2$ и $A4$ являются активными.

9. Так как множество активных стратегий обоих игроков выявлено, решение игры для Получателя можно найти, строго приравнивая среднюю величину платежа цене игры для всех активных стратегий

$$\begin{array}{l} B1: \\ B2: \\ B4: \\ \\ \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 5{,}0 = \nu; \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_4 = 5{,}0 = \nu; \\ 6x_1 + 8x_2 + 0x_4 = 5{,}0 = \nu; \\ \quad x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0{,}11; \\ x_2 = 0{,}54; \\ x_4 = 0{,}35; \\ \nu = 5{,}0. \end{cases}$$

Ответ:

– нижняя цена игры $\alpha = 3$, верхняя цена игры $\beta = 6$;

– поэлементное сравнение стратегий позволяет выявить и исключить из рассмотрения заведомо невыгодные стратегии игроков *A*3 и *B*3;

– переход к задаче линейного программирования (для Плательщика) и ее решение симплекс-методом позволили получить смешанную стратегию Плательщика: $y_1 = 0{,}46$; $y_2 = 0{,}35$; $y_4 = 0{,}19$ и цену игры $\nu = 5{,}0$;

– проверка величины среднего платежа при применении Получателем разных стратегий позволила признать активными все его стратегии, не доминирующие друг друга;

– смешанная стратегия Получателя состоит в использовании его чистых стратегий с вероятностями $x_1 = 0{,}11$; $x_2 = 0{,}54$; $x_4 = 0{,}35$.

5. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Задание 10

Для данных матриц:

– упростить матрицу, исключив из неё доминируемые строки, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям активного игрока;

– восстановить пропущенную вероятность одной из гипотез о «поведении природы» и выявить оптимальную стратегию активного игрока по математическому ожиданию прибыли;

–выявить оптимальные стратегии активного игрока, применяя оптимистический и пессимистический (Вальде) критерии, критерии Гурвица (при $\gamma = 0{,}3$), Сэвиджа.

10.01

18%	**14%**	**25%**	**?**
1	4	5	3
-1	8	6	3
-1	6	9	1
4	7	5	6
-5	4	-3	-3

10.02

14%	**19%**	**33%**	**?**
0	-1	9	6
1	-4	3	0
3	5	8	5
-5	-1	2	-4
-2	-2	2	8

10.03

14%	**33%**	**21%**	**?**
9	1	7	6
7	-2	-5	2
5	6	0	0
8	-4	3	-5
-1	6	9	-5

10.04

18%	**42%**	**11%**	**?**
2	0	-5	4
6	3	9	9
4	0	-4	6
2	5	3	-5
3	9	-2	1

10.05

15%	**19%**	**30%**	**?**
7	-5	3	4
9	5	8	7
0	7	-3	-1
9	-4	-3	9
1	-2	-5	1

10.06

29%	**11%**	**33%**	**?**
3	9	4	-2
7	-5	1	7
1	2	2	-2
4	9	8	1
9	-2	-5	-2

10.07

24%	**31%**	**25%**	**?**
-5	-4	-3	-4
-5	-3	0	4
7	9	2	-1
4	-4	6	9
2	-2	5	8

10.08

11%	**35%**	**31%**	**?**
6	1	9	-2
-2	-4	-3	5
0	2	5	7
-2	-1	-3	-3
1	-2	-5	4

10.09

54%	**17%**	**10%**	**?**
-1	0	4	3
4	1	-5	-3
-4	0	4	1
7	7	-5	0
5	0	-1	3

10.10

20%	**39%**	**29%**	**?**
-1	8	-5	-2
4	5	1	2
-1	-4	0	7
-5	3	-4	2
6	1	1	8

10.11

29%	20%	17%	?
8	-2	6	8
0	-2	-1	4
-1	1	4	0
6	-5	3	-2
9	1	0	-5

10.12

28%	30%	13%	?
-5	2	4	-3
-3	1	-5	8
2	3	1	8
2	3	-2	-5
8	-1	9	-5

10.13

46%	11%	28%	?
-2	4	-2	6
3	2	-1	9
-2	6	8	7
3	-1	-4	-2
5	9	8	0

10.14

60%	15%	12%	?
1	-2	9	9
1	5	-5	-2
2	2	-5	-3
7	7	1	-3
6	8	5	-2

10.15

22%	26%	27%	?
1	4	8	-4
5	8	-4	7
-4	-2	6	1
-4	-3	-1	-2
-2	8	-4	-1

10.16

17%	30%	25%	?
8	-1	8	9
2	-4	-2	0
6	3	0	-2
8	-1	-1	-3
-5	7	9	1

10.17

34%	32%	12%	?
6	5	-1	0
-4	0	-2	-3
6	3	9	-2
5	-4	-5	-4
0	-5	-1	7

10.18

51%	27%	10%	?
8	0	8	2
0	-5	-5	4
5	-3	1	8
6	-1	-3	8
6	0	-3	-4

10.19

21%	16%	29%	?
9	2	1	-4
7	9	0	-4
-1	6	7	-5
-1	-3	-5	3
-1	6	7	3

10.20

20%	40%	12%	?
6	1	5	2
-1	0	4	9
2	-3	-4	-2
5	-5	4	-3
6	6	4	0

10.21

28%	32%	26%	?
3	5	7	0
5	3	0	-4
6	5	9	8
8	2	1	9
9	6	1	2

10.22

23%	15%	25%	?
-1	-3	-2	-4
2	-3	7	1
5	6	9	7
9	-5	0	-1
8	0	-3	-3

10.23

24%	35%	31%	?
1	8	2	2
-1	6	-5	-2
0	-3	-2	-4
7	8	1	1
-3	4	3	2

10.24

22%	31%	28%	?
5	-3	0	-5
8	-2	3	0
2	6	4	0
-2	-5	2	4
1	1	0	0

10.25

16%	15%	32%	?
9	5	3	1
2	-4	4	-2
5	0	5	6
7	3	4	-2
2	-2	-5	-5

10.26

10%	45%	21%	?
6	2	8	0
-5	-2	8	-1
3	5	4	-3
6	-1	1	-5
1	3	8	-1

10.27

29%	19%	36%	?
5	2	6	4
7	9	-4	9
-1	-5	3	-2
3	9	5	0
0	-4	-3	2

10.28

20%	10%	40%	?
8	6	1	5
6	-2	8	7
6	3	2	5
4	2	1	4
-4	0	2	1

10.29

15%	15%	47%	?
4	-4	2	3
1	5	2	1
2	4	7	0
1	1	-2	5
9	7	3	3

10.30

31%	23%	27%	?
-1	4	3	0
2	5	4	7
1	7	2	-2
1	4	2	6
-5	3	-2	8

10.31

33%	10%	35%	?
-5	6	1	-4
-2	4	4	5
-4	2	-5	-3
9	-4	6	9
7	-4	2	-3

10.32

30%	21%	25%	?
6	-3	2	5
9	0	3	7
3	2	0	-5
4	6	7	6
1	9	5	0

При выполнении задания №10 применяются критерии, продемонстрированные в примере 10.

Пример 10. Для данной матрицы:

– упростить матрицу, исключая строки, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям активного игрока;

– восстановить пропущенную вероятность одной из гипотез о «поведении природы» и выявить оптимальную стратегию активного игрока по математическому ожиданию прибыли;

24 %	**11 %**	**38 %**	**?**
6	3	-4	6
-4	-5	2	-5
5	8	1	0
3	0	1	-5
7	-3	3	4

– выявить оптимальные стратегии активного игрока, применяя оптимистический и пессимистический (Вальде) критерии, критерии Гурвица (при γ= 0,3), Сэвиджа.

Решение

1. Первый игрок имеет пять стратегий, а второй, «природа», характеризуется четырьмя возможными гипотезами. Известны вероятности реализаций первых трех гипотез. Введем обозначения стратегий активного игрока – «получателя выгоды» и «природы»

	П1	П2	П3	П4
*A*1	6	3	-4	6
*A*2	-4	-5	2	-5
*A*3	5	8	1	0
*A*4	3	0	1	-5
*A*5	7	-3	3	4

2. Сравним строки данной платежной матрицы для выявления заведомо невыгодных игроку стратегий

	П1	П2	П3	П4
*A*1 и *A*2	$6 \geq -4$	$3 \geq -5$	$-4 \leq 2$	$6 \geq -5$
*A*1 и *A*3	$6 \geq 5$	$3 \leq 8$	$-4 \leq 1$	$6 \geq 0$
*A*1 и *A*4	$6 \geq 3$	$3 \geq 0$	$-4 \leq 1$	$6 \geq -5$
*A*1 и *A*5	$6 \leq 7$	$3 \geq -3$	$-4 \leq 3$	$6 \geq 4$
*A*2 и *A*3	$-4 \leq 5$	$-5 \leq 8$	$2 \geq 1$	$-5 \leq 0$
*A*2 и *A*4	$-4 \leq 3$	$-5 \leq 0$	$2 \geq 1$	$-5 = -5$
*A*2 и *A*5	$\mathbf{-4 \leq 7}$	$\mathbf{-5 \leq -3}$	$\mathbf{2 \leq 3}$	$\mathbf{-5 \leq 4}$
*A*3 и *A*4	$\mathbf{5 \geq 3}$	$\mathbf{8 \geq 0}$	$\mathbf{1 = 1}$	$\mathbf{0 \geq -5}$
*A*3 и *A*5	$5 \leq 7$	$8 \geq -3$	$1 \leq 3$	$0 \leq 4$
*A*4 и *A*5	—	—	—	—

Вывод: в выделенных строках знаки неравенств – одинаковые, что указывает на невыгодность стратегий активного игрока $A2$ и $A4$ относительно стратегий $A5$ и $A3$ соответственно. Дальнейшее сравнение со стратегией $A4$ не проводилось.

Платежную матрицу можно упростить, удалив из нее строки, соответствующие выявленным невыгодным стратегиям (они выделены в таблице).

	П1	П2	П3	П4
$A1$	6	3	-4	6
$\boldsymbol{A2}$	**-4**	**-5**	**2**	**-5**
$A3$	5	8	1	0
$\boldsymbol{A4}$	**3**	**0**	**1**	**-5**
$A5$	7	-3	3	4

~

	П1	П2	П3	П4
$A1$	6	3	-4	6
$A3$	5	8	1	0
$A5$	7	-3	3	4

2. Восстановим вероятность возможного варианта П4 «поведения» природы, исходя из того, что события П1, П2, П3 и П4 образуют полную группу

$$P(\text{П}1)+P(\text{П}2)+P(\text{П}3)+P(\text{П}4)=1,$$
$$P(\text{П}4)=1-P(\text{П}1)-P(\text{П}2)-P(\text{П}3)=0{,}27.$$

Рассчитаем математическое ожидание дискретной случайной величины – получаемой игроком выгоды, при возможном использовании каждой его стратегии

	П1	П2	П3	П4	M_i
P_j	**0,24**	**0,11**	**0,38**	**0,27**	
$A1$	6	3	-4	6	1,87
$A3$	5	8	1	0	2,46
$A5$	7	-3	3	4	3,57

Расшифровка

$M_1 = 6 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}11 - 4 \cdot 0{,}38 + 6 \cdot 0{,}27 = 1{,}87;$

$M_3 = 5 \cdot 0{,}24 + 8 \cdot 0{,}11 + 1 \cdot 0{,}38 + 0 \cdot 0{,}27 = 2{,}46;$

$M_5 = 7 \cdot 0{,}24 - 3 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}38 + 4 \cdot 0{,}27 = 3{,}57.$

Вывод: при многократном взаимодействии оптимальной является стратегия $A5$, обеспечивающая приближение величины среднего «платежа» к значению $\mu = 3{,}57$. При этом иногда (в одиннадцати процентах случаев) игрок будет нести убыток.

3. Оптимистический критерий состоит в выявлении такой стратегии рационального игрока, которые позволяют получить наибольшую выгоду (при наиболее удачном стечении обстоятельств). Этой стратегии соответствует максимальный элемент в платежной матрице. Критерий используется в ситуациях невысокой ответственности за возможную ошибку.

Проведем сравнение максимальных значений выгоды для каждой отдельной стратегии рационального игрока

	П1	П2	П3	П4	$\max_j(a_{ij})$
P_j	**0,24**	**0,11**	**0,38**	**0,27**	
$A1$	6	3	-4	6	6
$A3$	5	8	1	0	8
$A5$	7	-3	3	4	7

Вывод: максимальная выгода $\mu = 8$ может быть получена при реализации стратегии $A3$. (Принимая во внимание известные вероятности гипотез о «поведении природы» заметим, однако, что вероятность такого события довольно низка – 11 %).

4. Пессимистический критерий (критерий Вальде) состоит в реализации такого же подхода при выборе стратегии, как при взаимодействии с рационально действующим партнером, нацеленным на минимизацию величины платежа. Соответственно оптимальной считается стратегия, реализующая «нижнюю цену» игры. Критерий применяется в случаях чрезвычайно высокой ответственности за промах, для предотвращения катастрофических убытков.

Обратим внимание на минимальные значения в строках платежной матрицы

	П1	П2	П3	П4	$\min_j(a_{ij})$
$A1$	6	3	-4	6	-4
$A3$	5	8	1	0	0
$A5$	7	-3	3	4	-3

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = \max(-4; 0; -3) = 0$ (реализуется при использовании стратегии $A3$).

Вывод: при реализации стратегии $A3$ все платежи – неотрицательные, что обеспечивает отсутствие убытков. Выбор других стратегий может привести к убыткам.

5. Критерий Гурвица является промежуточным между двумя предыдущими и опирается на заранее оцененную «меру ответственности» – величину, принимающую значения от $\gamma_{min} = 0$ при отсутствии тяжких последствий (катастрофических убытков) до $\gamma_{max} = 1$ при их возможности. Для каждой стратегии игрока рассчитывается вспомогательная величина

$$\mathbf{\Gamma}_i = \min_j(a_{ij}) \cdot (1-\gamma) + \max_j(a_{ij}) \cdot \gamma,$$

которая является основой для принятия решения о выборе стратегии.

Произведем расчет величины Γ_i при значении $\gamma = 0{,}3$ для каждой стратегии и сделаем вывод

	П1	П2	П3	П4	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	Γ_i
$A1$	6	3	-4	6	-4	6	-1
$A3$	5	8	1	0	0	8	2,4
$A5$	7	-3	3	4	-3	7	0

Расшифровка

$$\Gamma_1 = -4 \cdot 0{,}7 + 6 \cdot 0{,}3 = 1;$$

$$\Gamma_3 = 0 \cdot 0{,}7 + 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4;$$

$$\Gamma_5 = -3 \cdot 0{,}7 + 7 \cdot 0{,}3 = 0.$$

Вывод: при данном «уровне ответственности» оптимальной является стратегия $A3$. Она обеспечивает наиболее привлекательные результаты и при наилучшем, и при наихудшем вариантах развития событий. (Отметим, что для данной платежной матрицы такой вывод повторился бы при любом значении параметра γ, так как стратегия $A3$ отвечает одновременно и оптимистическому, и пессимистическому критериям).

6. Для применения критерия Сэвиджа переработаем платежную матрицу. Предположим, что реализуется одна из гипотез о «поведении» природы. Тогда потери, вызванные неправильным выбором стратегии, определяются разностью между максимальным элементом в столбце платежной матрицы и элементом выбранной стратегии

$$r_{ij} = \max_i(a_{ij}) - a_{ij}.$$

Элементы такой матрицы («матрицы рисков») показывают величину возможного «сожаления» о том, что выбор остановился на конкретной стратегии, при условии, что «поведение» природы было бы известно. Оптимальной является стратегия, уменьшающая максимальный риск[3].

В рассматриваемом случае получаем матрицу рисков

$$\begin{array}{c} \\ A1 \\ A3 \\ A5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} П1 & П2 & П3 & П4 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 7-6 & 8-3 & 3-(-4) & 6-6 \\ 7-5 & 8-8 & 3-1 & 6-0 \\ 7-7 & 8-(-3) & 3-3 & 6-4 \end{array}} \end{array}
= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} П1 & П2 & П3 & П4 & \max_j(r_{ij}) \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 7 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 11 & 0 & 2 & 11 \end{array}} \end{array}$$

Вывод: по данному критерию оптимальной является стратегия $A3$, допускающая максимальный риск не более 6 у. е. Заметим, с учетом известных вероятностей гипотез о «поведении» природы, что стратегия $A5$ содержит два нуля, то есть дважды может быть названа наилучшей по столбцу платежной матрицы, но в ней же – наибольший риск, величиной 11 ед.

Ответ:

– исключение доминируемых строк позволяет упростить платежную матрицу, сохранив стратегии $A1$, $A3$, $A5$;

– вероятность гипотезы П4 – 27 %;

– оптимальной по математическому ожиданию прибыли является стратегия $A1$;

– оптимальной по оптимистическому и пессимистическому (Вальде) критериям, а также по критериям Гурвица (при $\gamma = 0{,}3$) и Сэвиджа является стратегия А3.

---

[3] При многократном взаимодействии можно использовать матрицу рисков совместно с информацией о вероятности стратегий природы (критерий Байеса для матрицы рисков в игре с природой). Для каждой стратегии активного игрока рассчитывается математическое ожидание величины риска, оптимальной признается стратегия, которой соответствует наименьшее математическое ожидание этой величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. *Гончарь П. С., Гончарь Л. Э., Завалищин Д. С.* Теория игр. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2011.
2. *Красс М. С.*, *Чупрынов Б. П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М. : Дело, 2006.
3. *Кремер Н. Ш.* Исследование операций в экономике. – М. : ЮНИТИ, 2004.

Дополнительная:

4. URL: http://www. ResLib.com (дата обращения: 25.05.2011).
5. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц: пер. с фр. – М. : Физматлит, 1961.
6. *Блинов А. Л.* Семантика и теория игр. – Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Блэкуэлл Д.*, *Гиршик М. А.* Теория игр и статистических решений. – М.: ИИЛ, 1958.
8. *Васин А. А.*, *Морозов В. В.* Теория игр и модели математической экономики.– М. : Макспресс, 2005.
9. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. – М. : Сов. Радио, 1972.
10. *Вентцель Е. С.* Элементы теории игр. – М. : Физматгиз, 1961.
11. *Ветошкина Е. Н.* Методы приближенного решения матричных игр. Дипломная работа. – Вятка: ВГГУ, 2007.
12. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М. : Наука, 1984.
13. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М. : Наука, 1985.
14. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М. : Наука, 1976.
15. *Губко М.В.*, *Новиков Д. А.* Теория игр в управлении организационными системами. – М. : РАО, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 2005.
16. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. – М. : Советское радио, 1964.
17. *Итеративные методы* в теории игр и программировании / под ред. В.З. Беленького, В. А. Волконского. – М. : Наука, 1974.

18. *Карлин С*. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М. : Мир, 1964.
19. *Кофман А*. Методы и модели исследования операций: пер. с фр. – М. : Мир, 1966.
20. *Крушевский А. В*. Теория игр. – Киев: «Выща школа», 1977.
21. *Куммер Б*. Игры на графах: пер. с нем. – М. : Мир, 1982.
22. *Лабскер Л. Г.*, *Бабешко Л. О*. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. – М. : Дело, 2001.
23. *Льюс Р.*, *Райфа Х*. Игры и решения: пер. с англ. – М. : ИИЛ, 1961.
24. *Мак Кинси Дж*. Введение в теорию игр: пер. с англ. – М. : Физматгиз, 1960.
25. *Мулен Э*. Теория игр с примерами из математической экономики: пер. с фр. – М. : Мир, 1985.
26. *Нейман Д.*, *Моргенштерн О*. Теория игр и экономическое поведение: пер. с англ. – М. : Наука, 1970.
27. *Оуэн Г*. Теория игр: пер. с англ. – М. : Мир, 1975.
28. *Партхасаратхи Т*, *Рагхаван Т*. Некоторые вопросы игры двух лиц: пер. с англ. – М. : Мир, 1974.
29. *Петросян Л. А.*, *Зенкевич Н. А.*, *Семина Е. А*. Теория игр. – М. : Высш. шк., 1998.
30. *Печерский С. Л.*, *Беляева А. А*. Теория игр для экономистов. Вводный курс. – СПб. : Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2001.
31. *Применение теории игр* в военном деле: сб. пер. с англ. / под ред. В. О. Ашкеназы. – М. : Сов. Радио, 1961.
32. *Шень А*. Игры и стратегии с точки зрения математики – М. : МЦНМО, 2007.
33. *Юдин Д. Б.*, *Гольдштейн Е. Г*. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. – М. : Наука, 1969.

Учебное издание

Гончарь Петр Сергеевич
Гончарь Людмила Эдуардовна
Завалищин Дмитрий Станиславович

ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ИГР С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов экономических специальностей
и направлений подготовки

Редактор *С.В. Пилюгина*

Подписано в печать 24.02.12. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,4
Тираж 100 экз. Заказ № 12

Издательство УрГУПС
620034, Екатеринбург, Колмогорова, 66