Лекции по теория игр

В.И.Данилов

Данилов В.И. Лекции по теории игр. / КЛ/2002/001. - М.: Российская экономическая школа, 2002. - 1?? с.(Рус.)

Здесь представлены записи курса лекций по теории игр, который читался на первом курсе РЭШ в 1993-2001 гг. Помимо традиционного материала, такого как антагонистические игры, равновесия Нэша и кооперативная теория игр, эти лекции дают представление и о более новых (для российского читателя) вещах: совершенных и коррелированых равновесиях, повторяющихся и Байесовых играх.

Danilov V.I. Lectures on game theory. /КЛ/2002/001. - Moscow, New Economic School, 2002, - 1?? p. (Rus.)

This is a course of Game Theory included in the curriculum for students of New Economic School. The book is prepared on a base of lectures given by the author in NES during 1993-2001. Besides the tradition material such that antagonistic games, Nash equilibrium, and cooperative games, the lectures gives a presentation about more new (for Russian reader) subjects: perfect and correlated equilibria, repeated and Bayesian games.

ISBN ??????????

Оглавление

Предисловие 4
Лекция 1. Нормальная и развернутая формы игры 7
Лекция 2. Случайные ходы и лотереи 14
Лекция 3. Теория ожидаемой полезности 19
Лекция 4. Поведенческие и смешанные стратегии 24
Лекция 5. Рациональные игроки 29
Лекция 6. Осторожное поведение 33
Лекция 7. Доминирование стратегий 40
Лекция 8. Исключение доминируемых стратегий 43
Лекция 9. Равновесия Нэша 49
Лекция 10. Равновесия Нэша (продолжение) 54
Лекция 11. Равновесия Нэша в смешанных стратегиях 61
Лекция 12. Равновесия Нэша (окончание) 66
Лекция 13. Рафинирование равновесий для развернутой формы . . . 71
Лекция 14. Секвенциальные равновесия 76
Лекция 15. Совершенные равновесия для нормальной формы 82
Лекция 16. Повторяющиеся игры 85
Лекция 17. Игры с сообщениями 92
Лекция 18. Игры с неполной информацией 98
Лекция 19. Задача торга 104
Лекция 20. Кооперативные игры 111
Лекция 21. Решения коалиционных игр 116
Лекция 22. Ядро 120
Лекция 23. Вектор Шепли 129
Лекция 24. Механизмы группового выбора 134

Предисловие

Здесь представлен базовый курс лекций "Теория игр", который читался автором для студентов 1-го года магистратуры РЭШ в 1993-2001 гг. Курс рассчитан на 28 лекций (хотя формально в книге материал разбит на 24 лекции). Занятия были построены следующим образом: еженедельно читались две лекции, проводился семинар, давалось задание на дом, которое проверялось и оценивалось ассистентом. После каждых 14 лекций проводился экзамен.

Как известно, теоретико-игровой подход сейчас прочно вошел в арсенал методов экономического анализа. Особенно это касается микроэкономики. Все стандартные учебники по микроэкономике (Масколей и др., Крепс, Пиндайк и Рубенфельд) включают главы, посвященные теории игр. Собственно, основоположники теории игр - фон Нейман и Моргенштерн - развивали (вводили, понимали) эту теорию как адекватный формальный аппарат для изучения экономического поведения. В академической программе РЭШ теория игр выделена как отдельный курс.

Хотя на русском языке имеется довольно много книг, посвященных теории игр, подходящего пособия мне найти не удалось (о рекомендуемой литературе будет сказано ниже). Все-таки большая часть учебников на русском языке посвящена играм с нулевой суммой и в лучшем случае заканчивается равновесиями Нэша. Дальнейшие разработки понятия равновесия Нэша, такие как совершенные и коррелированные равновесия, игры с неполной информацией, не нашли соответствующего освещения. А они играют важную роль в экономических приложениях.

Скажем кратко о структуре курса. Первые 4 лекции посвящены как бы основаниям. Нормальная и развернутая формы игры и переход от одной к другой, понятие вероятностных смесей (стратегий и исходов), теория ожидаемой полезности. Начиная с пятой лекции мы переходим к основной задаче - что будут делать игроки, то есть к понятию решения. Мы рассматриваем последовательно несколько понятий - осторожное поведение, доминирующие стратегии, последовательное исключение доминируемых стратегий. Венцом является понятие равновесия Нэша, разным сторонам которого посвящены лекции 9-12. Затем мы рассматриваем некоторые усиления и модификации равновесий Нэша - понятия совершенных (в том или ином смысле) равновесий, коррелированные равновесия, повторяющиеся игры и игры с неполной информацией. На этом заканчивается некооперативная часть теории. Лекция 19 (задача торга) служит переходным мостиком уже к кооперативной части теории (лекции 20-23). Особое внимание здесь мы уделяем понятиям ядра и вектора Шепли; другие понятия решения упомянуты лишь вскользь. Заключительная лекция о механизмах группового выбора может рассматриваться как введение в теорию конструирования экономических механизмов (mechanism design).

Эти лекции адресовались экономистам: и я старался иллюстрировать положения теории на экономических примерах. Тем не менее стиль здесь скорее теоретический и математический. Основное внимание в них уделялось больше концепциям и принципам, нежели применениям к экономическим моделям. Все-таки это лекции по ТЕОРИИ игр; применение теории игр к экономике могло бы быть предметом отдельного курса.

Более мелким шрифтом набран материал, который можно пропустить при первом чтении.

О литературе, которая может оказаться полезной при изучении этого курса. Ближе всего к нему находится книга

R.B.Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press, Cambridge, London, England, 1991.

Фактически все темы, освещаемые в данном курсе, можно найти в этой книге. Кроме всего, эта книга имеется в достаточном числе экземпляров в библиотеке РЭШ.

Чуть в меньшей степени сказанное относится и к учебнику

A.Mas-Colell, M.Whinston, J.Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New-York, 1995.

Формально посвященная микроэкономике, она содержит несколько глав, где довольно полно освещается теория игр, включая понятие секвенциального равновесия. Аналогичную структуру (даже с еще большим акцентом на теорию игр) имеет книга

D.M.Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press, 1990,

однако я не решился бы рекомендовать ее для первого чтения.

Очень интересно написана книга

K.Binmore, *Fun and Games*, Heath and Company, Lexington, 1992.

В ней нет фундаментального изложения теории, но с шутками и прибаутками автор рассказывает про довольно тонкие вещи типа общего знания или аукционов.

Наконец, стоит отметить две книги, в которых имеется много экономических примеров. Это

R.Gibbins, *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, Princeton, 1992,

и имеющаяся на русском языке книга

Р.С.Пиндайк, Д.Л.Рубинфельд, *Микроэкономика*, Дело, Москва, 2000.

Как уже говорилось, главные применения в микроэкономике используют некооперативную теорию игр. Почти уникальной является поэтому книга Э.Мулена, посвященная применению кооперативной теории к микроэкономике:

H.Moulin, *Cooperative Microeconomics: A Game-Theoretic Introduction*, Prentice Hall, London, 1995.

Из имеющихся на русском языке книг по теории игр я бы отметил

Э.Мулен, *Теория игр. С примерами из математической экономики.* Мир, Москва, 1985,

Г.Оуэн, *Теория игр.* Мир, Москва, 1971,

и прекрасно написанную, хотя и безнадежно устаревшую

Р.Д.Льюс, Х.Райфа, *Игры и решения.* Москва, ИЛ, 1961.

Подробнее познакомиться с теорией механизмов можно по монографии

В.И.Данилов, А.И.Сотсков, *Механизмы группового выбора.* М., Наука, 1991.

Лекция 1. Нормальная и развернутая формы игры

Предмет теории игр. Теория игр изучает ситуации принятия решений несколькими взаимодействующими индивидами (агентами, участниками, в дальнейшем называемыми *игроками*). Такие ситуации часто возникают в экономической, политической, биологической и др. обстановке. Нас будут интересовать в основном экономические ситуации. Стандартный пример - изучение олигополии, но имеется и множество других - торги и аукционы, международная торговля и т.п. Поэтому теория игр стала составной частью курсов микроэкономики, отчасти ее языком. Обучение этому языку - задача минимум данного курса.

Теория игр условно делится на некооперативную и кооперативную части. В первой субъектом принятия решений служит индивид, во второй - группа или коалиция. В первой индивид характеризуется стратегиями и предпочтениями, во второй исходным материалом служат возможности коалиций. В первой индивиды принимают решения независимо (что не исключает переговоров между ними), во второй допускается возможность *обязывающих* соглашений. Мы начнем и долгое время будем иметь дело с некооперативной частью. И лишь последние 5-6 лекций посвящены кооперативной теории.

Анализ конфликтной ситуации начинается с построения формальной модели, т.е. превращения ее в игру. Есть несколько разных способов представления игры. Наиболее важные - развернутая (экстенсивная, или позиционная) и стратегическая (нормальная) формы, есть также Байесова форма. Начнем с более простой - нормальной формы.

Нормальная форма игры. Игра *в нормальной* (или стратегической) *форме* состоит из спецификации трех вещей:

1. Списка *игроков*,

2. Для каждого игрока задается список (множество) *стратегий*,

3. Для каждого профиля стратегий указывается профиль *платежей* (выигрышей) игроков.

Поясним смысл этих данных. Обозначим множество игроков через N. (Всюду ниже оно предполагается конечным и может быть отождествлено с

$\{1, 2, ..., n\}$. Однако следует помнить, что такое упорядочение игроков - это некоторый волюнтаризм, и лучше представлять множество N неструктурированым.) Типичный игрок обозначается символом i. Далее, для каждого $i \in N$ задается множество стратегий S_i; типичная стратегия - s_i. Профиль стратегий - это набор по стратегии для каждого игрока, т.е. $s_N = (s_1, s_2, ..., s_n)$; это элемент декартова произведения множеств $S_N = \times_{i \in N} S_i$. Наконец, для каждого игрока указывается функция его выигрыша $u_i : S_N \longrightarrow \mathbb{R}$ (для простоты, можно считать, что выигрыш дается в рублях или долларах; позже мы вернемся к этому вопросу).

Неформально, каждый игрок выбирает некоторую стратегию $s_i \in S_i$; когда это сделают все, становится ясен его выигрыш $u_i(s_N)$. Каждый игрок стремится получить выигрыш побольше. Основная трудность в том, что этот выигрыш зависит не только от его действий, но и от действий (стратегий) остальных игроков. И каждый игрок должен (или может) учитывать это в своем поведении. Можно сказать и так: в игре в нормальной форме игроки стратегически независимы, они могут выбирать любые стратегии, но остаются связанными через полезности. К центральному вопросу о том, как будут вести себя игроки, мы еще вернемся, а пока займемся чисто постановочной задачей.

Примеры. Особенно просто задавать игры двух лиц. Для этого некоторого игрока условно называют первым, а другого - вторым. И рисуют таблицу, где строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы - стратегиям второго. В клетках записывают выигрыши - сначала первого, затем второго. По этой причине такие игры называют биматричными. Проведем три простейших (игрушечных) примера, которые будут часто встречаться.

1. *Орлянка* (или матч пенни)

	t1	t2
s1	1,-1	-1,1
s2	-1,1	1,-1

Это пример игры с т.н. нулевой суммой.

2. *Дилемма заключенных*

	t1	t2
s1	5,5	-1,6
s2	6,-1	0,0

Первые стратегии можно назвать "кооперативными", вторые - эгоистическими. К такой игре приводит простейший вариант дуополии, когда первые стратегии - высокие цены, а второй - низкие.

3. *Семейный спор* (или перекресток, или чикен)

	t1	t2
s1	5,4	1,1
s2	0,0	4,5

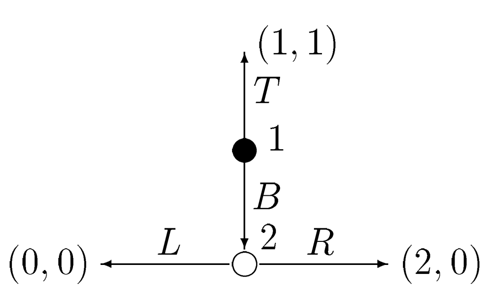
Неформально: первый игрок - муж, второй - жена. Первые стратегии - идти на бокс, вторые - в театр. Мужу больше хочется пойти на бокс, жене - в театр, но им лучше вместе.

В совсем утрированном виде эта игра превращается в игру координации ("встреча в Нью-Йорке") с таблицей

1,1	0,0
0,0	1,1

Развернутая форма игры. При таком задании игры больше внимания уделяется порядку ходов и той информации, которая при этом открывается игроку. Начнем с простейших, т.н. позиционных игр, или игр с полной информацией. Главное здесь - дерево игры; это направленный граф без циклов с выделенной вершиной - корнем. Стрелки идут в направлении от корня. Вершины дерева изображают позиции игры, места, где какие-то игроки должны выбрать ход - одну из стрелок, выходящую из этой вершины. Поэтому у каждой (нетерминальной) вершины стоит метка того игрока, который делает ход (говорят еще - контролирует эту вершину). В терминальных вершинах (где игра заканчивается) стоит вектор (профиль) выигрышей игроков.

Вот простейшая позиционная игра. Игра начинается в позиции, где первый игрок выбирает ход: вверх или вниз. Потом ходит второй - направо или налево, и игра заканчивается. Дерево игры выглядит так:



Более сложный пример представляет игра в крестики-нолики на доске 3×3. В начальной позиции у первого игрока 9 ходов, затем у второго по 8 ходов в каждой из этих 9 позиций, затем у первого игрока по 7 ходов в каждой из получающихся 72 позиций, и т.д.

Стратегии. Казалось бы, что в игре в развернутой форме действия одного игрока ограничивают возможности другого. Это действительно верно в отношении *ходов*. Однако если мы правильно определим понятие стратегии, мы получим стратегическую независимость и, тем самым, игру в нормальной форме. Что назвать *стратегией* для позиционной игры? Каждый игрок в каждой позиции, которой он управляет, должен указать некоторый ход. Таким образом, у него "много" стратегий (прикиньте приблизительно, сколько их в игре "крестики-нолики"). Если все игроки выбрали по стратегии, то из каждой (нетерминальной) вершины выходит указанный ход, и можно двигаться от корневой вершины по этим отобранным стрелкам. В конце концов мы доберемся до конечной (терминальной) вершины (если дерево конечно, что молчаливо предполагается), а там указаны выигрыши.

Тем самым, по каждой позиционной игре можно канонически построить игру в нормальной форме.

Однако мы сразу видим, что ни одну из форм 1, 2, 3 нельзя представить как позиционную игру. Почему? Дело в том, что в этих играх игроки делают ходы одновременно, и никто не знает, кто какой выбрал ход. А в позиционных порядок ходов четко определен, и второй игрок знает, что сделал первый. Игроки в нормальной форме не знают, что выбрали другие. Чтобы учесть такое "незнание", нужно модифицировать развернутую форму игры, введя туда "информационные множества".

Информационные множества. Когда игрок должен выбрать свой ход, он может не знать, в какой из позиций игры он находится, потому что не знает, какой ход был сделан на предыдущем(х) ходе(ах). И все такие "неразличимые" для него позиции объединяют в одно информационное множество (на рисунках их обводят контурами и т.п.). В каком-то смысле для игрока это одна и та же позиция, хотя реально они различаются и дальнейшая эволюция игры зависит от настоящей позиции.

Но если игрок не может различить позиции, то и ходы, возможные в этих позициях, должны быть "одинаковыми". Более точно, для каждого информационного множества h должно быть указано соответствующее множество $M(h)$ "ходов", а также для каждой вершины $x \in h$ "реализация" множества

$M(h)$ стрелками, выходящими из x. Находясь в любой позиции $x \in h$, игрок выбирает ход $m \in M(h)$. Грубо говоря, ход игрока должен быть одним и тем же во всех "неразличимых" для него позиций. Поэтому мы должны модифицировать понятие стратегии: это выбор хода для каждого информационного множества, контролируемого игроком. С учетом этого замечания мы опять по развернутой форме можем построить нормальную форму. И теперь уже любая игра в нормальной форме может быть представлена (неоднозначно!) игрой в развернутой форме. Мы оставляем без ответа тонкий вопрос - эквивалентны ли различные "развернутые" представления одной и той же "нормальной" формы.

Формальное описание игры в развернутой форме. После предыдущих неформальных объяснений пора дать точное определение (а заодно и ввести обозначения, которыми мы будем дальше пользоваться) этого довольно запутанного понятия. Игра в *развернутой форме* состоит из четырех вещей: a) дерева игры Γ, b) распределения вершин-позиций по игрокам, c) информационных разбиений позиций каждого игрока, d) выигрышей. Уточним каждый пункт.

a) *Дерево игры* Γ состоит из (конечного) множества вершин (позиций) X и множества стрелок $A \subset X \times X$. Множество стрелок, выходящих из вершины x, обозначается $A(x)$. Кроме того есть выделенная "начальная" позиция (*корень* дерева). Предполагается, что, выходя из корня и двигаясь по стрелкам, можно достичь любой позиции и притом единственным образом.

b) *Порядок ходов.* Вершина $x \in X$ называется *терминальной*, если $A(x) = \emptyset$. Множество терминальных вершин обозначим T. Порядок ходов задается отображением $\iota : X \setminus T \longrightarrow N$, где N - множество игроков. Для игрока $i \in N$ обозначим через $X_i = \iota^{-1}(i)$ множество позиций, "контролируемых" данным игроком.

c) *Информация.* Для каждого игрока i задано разбиение множества X_i на "информационные множества". Типичный элемент этого разбиения (то есть информационное множество) обозначается h; а множество таких множеств как H_i. Таким образом $X_i = \coprod_{h \in H_i} h$. Далее, для каждого h задано множество $M(h)$ ходов (или их "меток"), доступных в информационном множестве h. Наконец, для каждой позиции $x \in h$ задано отображение $a_x : M(h) \longrightarrow A(x)$.

d) *Выигрыши.* Для каждой терминальной вершины $t \in T$ указан вектор $u(t) = (u_i(t)) \in \mathbb{R}^N$. i-ая координата $u_i(t)$ этого вектора специфицирует выигрыш, который получает игрок i, если игра заканчивается в позиции t.

Игра в нормальной форме, связанная с развернутой формой, определяется так. Множество стратегий i-го игрока - $S_i = \times_{h \in H_i} M(h)$. Если все игроки определились со своими стратегиями, мы снова получаем, что из каждой (нетерминальной) вершины x выходит одна отмеченная стрелка $a_x(h)$, где h - это то единственное информационное множество, которое содержит x. И снова, двигаясь из корня по этим отмеченным стрелкам, мы добираемся до терминальной вершины и получаем профиль платежей.

Если разные вершины имеют разные информационные метки (то есть фактически если мы имеем дело с позиционной игрой), то говорят об игре с *совершенной информацией*. Это наиболее простые игры; такими являются шашки, шахматы, но не карточные игры.

Приведенная нормальная форма. Приведем удобный способ записи стратегий. Допустим, что нам нужно записывать стратегии второго игрока. Тогда пометим символами 2, $2'$, $2''$ и т.д. все информационные множества этого игрока (желательно по мере удаленности их от корня). Допустим, $A, B, C, ...$ - символы ходов в информационном множестве 2, $a, b, c, ...$ - в $2'$, $\alpha, \beta, \gamma, ...$ - в $2''$ и т.д. Тогда стратегии второго игрока - это последовательности вида $Ba\gamma...$, $Aa\beta...$ и т.п. Пользуясь таким представлением, вы не будете путаться между ходами и стратегиями и правильно представлять себе число последних.

Ясно, что в общем случае число стратегий "большое". Заметим, однако, что многие стратегии являются "эквивалентными". Рассмотрим, например, игру (в развернутой форме), где первый игрок может пойти наверх (U), и тогда игра заканчивается, или пойти вниз и после этого ходит второй, затем снова первый и т.д. Формально у первого игрока имеется масса стратегий вида $U...$, где ... указывают его действия в "нижних" позициях (или информационных множествах). Но совершенно ясно, что ни на что эта спецификация "нижних" действий или ходов не влияет. В принципе, для многих вопросов достаточно было бы рассмотреть одну "склеенную" стратегию U.

Гибридная форма игры. Кроме нормальной и развернутой формы иногда бывает полезной гибридная форма. Взглянем на позиционную игру. Фактически в каждой позиции этой игры происходит как бы миниигра одного игрока, который выбирает ход. Остальные игроки в этот момент как бы не участвуют (или участвуют фиктивно). Идея состоит в том, чтобы в каждой (нетерминальной) позиции x разыгрывалась своя миниигра в нормальной форме $G(x)$ с множествами стратегий $S_i(x)$, $i \in N$. Единственная отличие состоит в том, что вместо отображения выигрышей тут задается отображение $a_x : S_N(x) \longrightarrow A(x)$. То есть результат этой игры - следующая позиция на дереве игры Г.

Контрольный вопрос - как по гибридной игре построить игру в нормальной форме?

Кстати, то, что структура игры задается деревом, не так уж и важно. Важно только то, что двигаясь от корня по стрелкам, мы рано или поздно упираемся в терминальную вершину.

Представление информации. Выше мы информацию игрока о том, в какой позиции находится игра, задавали с помощью разбиения на информационные множества. Отметим несколько других (эквивалентных) способов задавать информацию. При этом мы отвлекаемся от игровой специфике и обсудим общую ситуацию.

Некоторый "наблюдатель" интересуется "состоянием" природы; множество возможных состояний обозначим X. У него есть "прибор", который выдает некоторый сигнал или сообщение. Работа этого прибора описывается отображением $f : X \longrightarrow M$, где M - множество возможных сообщений. Получив какой-то сигнал m, наблюдатель понимает, что "природа" находится в состоянии из подмножества $f^{-1}(m) \subset X$. А сам прибор задает разбиение P_f множества X на "информационные множества" $f^{-1}(m)$, $m \in M$. (Реально все конечно сложнее - мы можем не знать точно функцию f, и сигналы воспринимать с искажениями, но пока отвлечемся от этого.)

Вместо разбиений P (или приборов f) можно работать с отношениями эквивалентности. Скажем, что состояния x и y эквивалентны ("неразличимы" прибором f, $x \sim y$), если $f(x) = f(y)$. Тогда разбиение - это разбиение на классы эквивалентности. А сам "прибор" можно восстановить как каноническое отображение X на множество $X/\sim$ классов эквивалентности.

Наконец, можно говорить в терминах Булевых алгебр. Подмножество $A \subset X$ назовем *измеримым*, если оно составлено из некоторых информационных множеств (или, в терминах отношения эквивалентности, если $x \in A$ и $y \sim x$ следует, что $y \in A$). Измеримые подмножества замкнуты относительно объединений, пересечений и дополнений, то есть образуют Булеву алгебру. Обратно, если дана Булева алгебра $\mathcal{B}$ подмножеств X, мы можем восстановить отношение эквивалентности $\sim$, полагая $x \sim y$ в том случае, если y принадлежит любому $A \in \mathcal{B}$, содержащему x.

Отображение $g : X \longrightarrow M'$ называется *измеримым* (относительно Булевой алгебры $\mathcal{B}$), если $f^{-1}(m') \in \mathcal{B}$ для любого $m' \in M'$. Легко понять, что g измеримо относительно алгебры $\mathcal{B}_f$, построенной по прибору f, тогда и только тогда, когда g пропускается через f, то есть является композицией f с некоторым отображением $M \longrightarrow M'$.

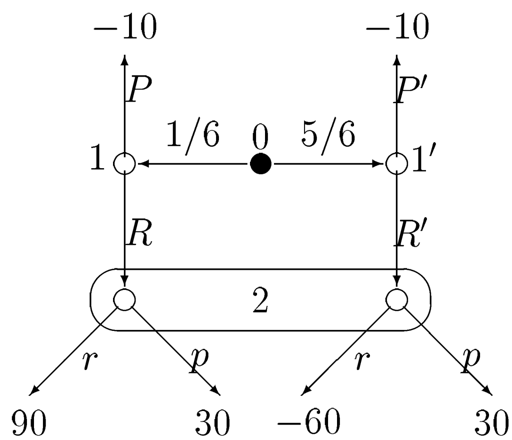
Возвращаясь к играм и стратегиям, мы можем сказать, что стратегиями (для игры с информационными множествами) являются измеримые отображения их позиций в ходы.

Мы предоставляем читателю модифицировать данное выше определение гибридной формы с учетом несовершенной информированности игроков.

Лекция 2. Случайные ходы и лотереи

Случайные ходы. Имеется еще один источник неопределенности игроков относительно состояния позиции - случай. Например, в карточных играх игроки обычно не знают карты партнеров (недаром их тщательно перетасовывают перед раздачей), и это тоже нужно отразить в описании игры. Однако, в отличие от предыдущей неопределенности, эта неопределенность носит вероятностный характер и имплантируется сравнительно легко. Формально просто к списку игроков добавляется фиктивный игрок - природа, которая тоже выбирает свои ходы, но делает это не свободно, как обычные игроки, а с предписанными вероятностями.

Для примера рассмотрим следующую пародию на "покер". Первый игрок (Ваня) получает карту, которая в 1/6 случаев благоприятна для него. Посмотрев карту, он может либо "повысить ставку" (R), либо "спасовать" (P). Во втором случае игра заканчивается, и Ваня отдает второму игроку (Маше) 10 р. В первом случае Маша, не видя карты, может либо "принять повышение" (r), либо тоже "спасовать" (p). Выигрыши Вани (так как игра с нулевой суммой) в различных ситуациях приведены на рисунке ниже



Здесь у Вани два информационных множества 1 и $1'$, а у Маши - одно (так как она не видит карту).

Можно ли по такой игре образовать нормальную форму? Со стратегиями особых проблем нет. Снова каждый игрок должен решить, как он ведет себя (какой ход выбирает) в каждом своем информационном множестве. Ваня должен решить - что он делает при хорошей карте (в позиции 1) и что - при плохой, в позиции $1'$. Так что у него 4 стратегии: RR', RP', PR' и PP'. У Маши - две стратегии: r и p.

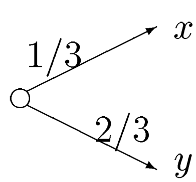
А вот с выигрышами возникает некоторая проблема. Допустим, Ваня выбрал стратегию RR', а Маша - r. Если карта хорошая, Ваня получает 90 р., если плохая - теряет 60 р. Как же оценить его выигрыш? Простейший выход - посчитать математическое ожидание $90 \cdot 1/6 - 60 \cdot 5/6 = -35$. Аналогично можно заполнить остальные клеточки.

Однако насколько правильно брать математическое ожидание? К этому вопросу мы вернемся на лекции 3. А пока освоимся с лотереями.

Понятие лотереи. Формально говоря, в предыдущей игре исход для первого игрока - это не число, а более сложный объект - выигрыш, зависящий от случая. В жизни с такими вещами постоянно приходится сталкиваться. Примеры - рулетки, лотереи, карточные игры, лошадиные бега, спортивные игры и т.п. Урожай зависит от капризов погоды, выручка - от конъюнктуры. Страхование - целая индустрия, построенная на неопределенности. Как же оценивать такие неопределенные вещи. Далее мы ограничимся тем случаем, когда существуют вероятности наступления того или иного исхода. Для контраста стоит отметить, что в играх приходится иметь дело с неопределенностью более суровой, чем вероятностная - это неопределенность выбора стратегий партнерами по игре. Можно ли считать, что их действия всегда можно описать в вероятностных терминах?

Исход, зависящий от случая, формализуется понятием *лотереи*, или случайного исхода. Пусть дано множество X "чистых" исходов; простоты ради будем считать X конечным. Тогда лотерея π (на X) задается указанием вероятностей $\pi(x)$ наступления каждого исхода $x \in X$. Числа $\pi(x)$ неотрицательные и в сумме равны нулю. Итак, лотерея - это просто формальная комбинация вида $\sum_x \pi(x) \otimes x$, где x пробегает X, $\pi(x) \geq 0$ для любого x и $\sum_x \pi(x) = 1$. На более математическом языке это вероятностная мера на X. *Носителем* лотереи (меры) π называется подмножество $\mathrm{supp}(\pi) = \{x \in X,\ \pi(x) \neq 0\}$.

Лотереи рисуют схемами типа



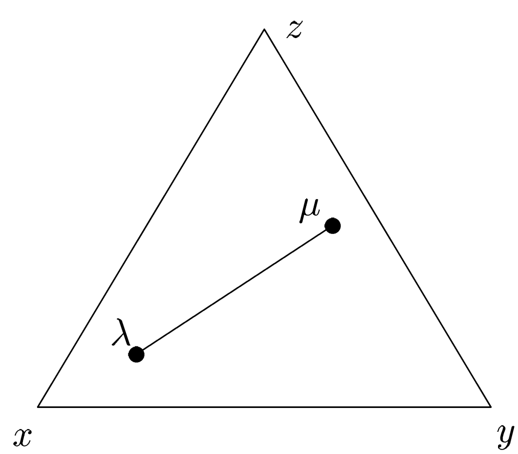
(в данном случае тут изображена лотерея $1/3 \otimes x + 2/3 \otimes y$) или таблицами вроде

получить 100 руб.	попасть в тюрьму на 10 лет	побьют
0.3	0.5	0.2

Операции с лотереями. Несомненно, вы знакомы с понятием вероятности. Но теперь нас будет интересовать не одна какая-то вероятность или лотерея, а множество всех лотерей и, в частности, естественные операции с лотереями.

Обозначим через $\Delta(X)$ множество всех лотерей на множестве X. Важнейшей структурой на $\Delta(X)$ является выпуклость. Это означает, что если имеются две лотереи λ и μ, а также число $\alpha \in [0,1]$, то можно образовать *составную* лотерею $\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu$. По определению $\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu = \sum_x (\alpha\lambda(x) + (1-\alpha)\mu(x)) \otimes x$. Иначе говоря, $\Delta(X)$ является выпуклым подмножеством в векторном пространстве $\mathbb{R} \otimes X$, порожденном X.

Далее, с каждым "чистым" исходом $x \in X$ можно связать "вырожденную" лотерею $1 \otimes x$ (или просто x), гарантированно дающую этот исход x. Тем самым исходное множество X реализуется как подмножество $\Delta(X)$, причем именно как множество вершин. То есть геометрически $\Delta(X)$ - это симплекс, натянутый на X. Если X состоит из 2 элементов, то $\Delta(X)$ - отрезок, если из трех - треугольник, если из четырех - тетраэдр, и т.д.



Операция Δ функториальна. Это значит, что если $f : X \longrightarrow Y$ - отображение множеств, то оно продолжается естественным образом до отображения $\Delta(f) = f_* : \Delta(X) \longrightarrow \Delta(Y)$. Подробнее: если μ - лотерея (мера) на X, то лотерея $f_*(\mu)$ устроена так: для $y \in Y$

$$f_*(\mu)(y) = \sum_{f(x)=y} \mu(x).$$

В экономической терминологии мера $f_*(\mu)$ называется *маргинальной*. Причем отображение $f_* : \Delta(X) \longrightarrow \Delta(Y)$ согласовано с выпуклыми структурами на $\Delta(X)$ и $\Delta(Y)$.

На это можно взглянуть и иначе. Пусть f - отображение X в *выпуклое* множество C; тогда f по "линейности" (а точнее, по аффинности) продолжается до аффинного отображения $\hat{f} : \Delta(X) \longrightarrow C$. Обычно в качестве C берется некоторое векторное пространство (а чаще всего - просто прямая $\mathbb{R}$); в этом случае f называется *случайной величиной*, и тогда $\hat{f}$ называется *интегралом* (или средним значением) f. Точнее, для меры (лотереи) μ

$$\hat{f}(\mu) = \int_X f d\mu = E_\mu(f).$$

В частности, для любого подмножества $A \subset X$ можно проинтегрировать характеристическую функцию $\mathbf{1}_A$ и получить меру $\mu(A)$ множества A.

Последняя важная операция - произведение мер или лотерей. Пусть даны два множества X и Y, и лотереи: λ на X и μ на Y. Тогда можно образовать меру (лотерею) $\lambda \otimes \mu$ на $X \times Y$, полагая

$$(\lambda \otimes \mu)(x, y) = \lambda(x)\mu(y).$$

Проекция $\lambda \otimes \mu$ на X и Y дает как раз λ и μ. Содержательно произведение мер-лотерей отражает их независимость.

Байесова интерпретация функториальности. Вернемся к вопросу о наблюдениях и информации, затронутых в лекции 1. Снова X - состояния "природы", и $f : X \longrightarrow M$ - прибор. Однако теперь мы предположим, что на X имеется "априорное" распределение вероятности $\mu \in \Delta(X)$. Тогда функториальность Δ дает вероятностное распределение получаемых наблюдений, $f_*(\mu) \in \Delta(M)$. Кроме того, каждый полученный сигнал $m \in M$ позволяет сказать не только то, что состояние природы находится в подмножестве $X_m = f^{-1}(m)$, но и пересчитать вероятности с учетом этого сигнала. А именно, можно образовать новую меру μ_m на X, полагая

$$\mu_m(x) = 0, \text{ если } f(x) \neq m, \text{ и } \mu_m(x) = \mu(x)/\mu(f^{-1}(m)), \text{ если } f(x) = m.$$

Конечно, это не что иное как условная вероятность. (Здесь неявно подразумевается, что $\mu(f^{-1}(m)) \neq 0$; в противном случае мы не могли бы получить сигнал m.) Носитель μ_m лежит в множестве X_m, поэтому можно считать, что μ_m - мера на X_m.

Обратно, знание условных вероятностей μ_m $(m \in M)$ и маргинальной меры $f_*(\mu)$ позволяет восстановить исходную меру μ. А именно,

$$\mu = \int_M \mu_m d(f_*(\mu)(m)).$$

Лекция 3. Теория ожидаемой полезности

Вернемся теперь к вопросу, поднятому в начале лекции 2. Насколько оправдано использование средних (ожидаемых) значений при оценке полезности лотереи?

Теория Неймана-Моргенштерна. Эта теория говорит о том, как устроены предпочтения на симплексе лотерей $\Delta(X)$, удовлетворяющие некоторым "естественным" условиям.

Будем называть *предпочтением* на произвольном множестве X бинарное отношение $\succeq$ ("не хуже") на этом множестве, которое является слабым порядком (т.е. полное и транзитивное). Типичные предпочтения задаются функциями полезности; если имеется функция $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ на нашем множестве, то можно положить $x \preceq_U y \Leftrightarrow U(x) \leq U(y)$. И обратно, "практически всегда" любое предпочтение имеет такой вид.

Обратимся к лотереям на множестве X. Предположим, что у нашего агента имеется функция полезности $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$. *Ожидаемой полезностью* лотереи $\pi \in \Delta(X)$ называется математическое ожидание u, т.е. число

$$U(\pi) = \sum_x \pi(x)u(x).$$

Такая (аффинная) функция U на $\Delta(X)$ позволяет сравнивать лотереи. Теорема Неймана-Моргенштерна об ожидаемой полезности утверждает обратное: если предпочтение на $\Delta(X)$ удовлетворяет некоторым простым аксиомам, то оно имеет приведенный выше вид, т.е. является ожидаемой полезностью для некоторой функции $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Более того, функция u определена однозначно с точностью до (монотонного) аффинного преобразования. Такая функция u называется *полезностью Неймана-Моргенштерна.*

Теорема об ожидаемой полезности.

Пусть $\succeq$ - бинарное отношение на $\Delta(X)$. Сформулируем некоторые требования (условия, аксиомы) на это бинарное отношение (где p, q, r - лотереи на X):

1. $\succeq$ - слабый порядок.

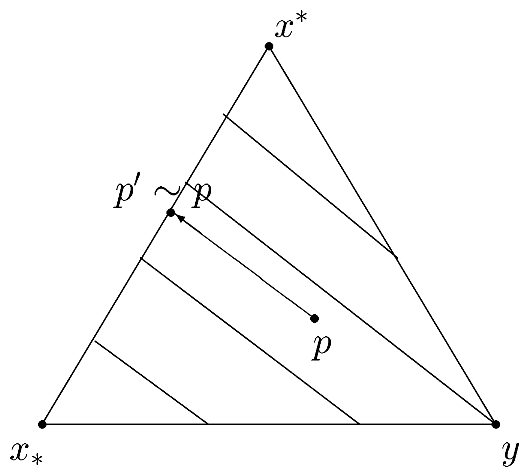
2 (аксиома замещения, или независимости). Если $p \succeq q$, то для любой лотереи r и любого α (между 0 и 1) выполняется $\alpha p+(1-\alpha)r \succeq \alpha q+(1-\alpha)r$.

3 (непрерывность). Отношение $\preceq$ замкнуто (или: нижние и верхние "конуса" $\preceq$ замкнуты).

Ясно, что ожидаемая полезность удовлетворяет этим аксиомам. Верно и обратное:

Теорема (Нейман-Моргенштерн). *Пусть X - конечное множество, и предпочтение $\succeq$ на $\Delta(X)$ удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3. Тогда существует функция u на X, такая что предпочтение $\succeq$ задается ожидаемой полезностью $U(q) = \sum_x q(x)u(x)$. При этом функция u определена с точностью до положительного аффинного преобразования.*

В чем суть ожидаемой полезности U? В том, что это *линейная* (или точнее - аффинная) функция на $\Delta(X)$. Тогда ее "кривые безразличия" параллельны. Но именно это и дает аксиома замещения, мотор этой теоремы.



Мы наметим доказательство теоремы, оставляя детали слушателям. Обозначим через x^* максимальный элемент множества X относительно $\succeq$ (понимая X как подмножество $\Delta(X)$). В силу конечности X он существует. Как видно из следующей леммы, он будет максимальным не только на X, но и на всем $\Delta(X)$.

Лемма. *Если $p \succeq q$ и $p \succeq r$, то $p \succeq$ любой смеси q и r.*

Действительно, $\alpha q + (1-\alpha)r \preceq \alpha p + (1-\alpha)r \preceq \alpha p + (1-\alpha)p = p$. $\square$

Аналогично существует минимальный элемент x_*.

Возможны два случая. Первый - когда $x^* \sim x_*$ (отношение "безразличия" $\sim$ означает, что выполняется одновременно $\preceq$ и $\succeq$). В этом случае все лотереи эквивалентны, и в качестве функции полезности u можно взять любую постоянную функцию на X. Второй, и основной случай, когда $x^* \succ x_*$. Тут мы поступим так: альтернативе x^* припишем полезность 1, а x_* - полезность 0. Полезности остальных лотерей будем определять с помощью аксиомы 3.

Возьмем любую лотерею $p \in \Delta(X)$ и на отрезке $[x^*, x_*]$ отметим те точки, которые $\succeq p$, и которые $\preceq p$. Это два замкнутых отрезка (замкнутых в силу аксиомы 3), первый содержит x^*, второй - x_*. Конечно, они пересекаются, причем по одной точке (доказать!). Иначе говоря, существует (однозначно определенное) число $U(p)$ между 0 и 1, такое что

$$p \sim U(p)x^* + (1 - U(p))x_*.$$

Ясно, что U представляет предпочтение $\preceq$.

Мы утверждаем теперь, что так определенная функция U на $\Delta(X)$ коммутирует с образованием вероятностных смесей, т.е. что

$$U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q).$$

Проверим это. По определению,

$$p \sim U(p)x^* + (1 - U(p))x_* \text{ и } q \sim U(q)x^* + (1 - U(q))x_*$$

По аксиоме замещения получаем, что $\alpha p + (1-\alpha)q$ эквивалентна лотерее

$$\alpha(U(p)x^* + (1 - U(p))x_*) + (1-\alpha)(U(q)x^* + (1 - U(q))x_*),$$

которая равна $(\alpha U(p) + (1-\alpha)U(q))x^* + (\alpha(1-U(p)) + (1-\alpha)(1-U(q)))x_*$. Остается заметить, что $\alpha(1-U(p)) + (1-\alpha)(1-U(q)) = 1 - (\alpha U(p) + (1-\alpha)U(q))$.

Теперь уже видно, что если лотерея p равна $\sum_x p(x) \otimes x$, т.е. является смесью чистых альтернатив x с весами $p(x)$, то $U(p) = \sum_x p(x)U(x)$. Т.е. функция U является ожидаемой полезностью.

Утверждение про единственность U довольно легкое. Грубо говоря, единственное место, где был произвол в построении - это когда мы приписали 1 альтернативе x^* и 0 альтернативе x_*. Назначение других чисел даст монотонное аффинное изменение функции u. $\square$

Полезность денег. Одно из стандартных применений теории ожидаемой полезности относится к деньгам. Хотя во многих случаях полезность можно отождествлять с деньгами, при более тонких и реалистичных рассмотрениях полезность денег нелинейна. Наиболее яркий довод в пользу нелинейности дает т.н. Петербургский парадокс.

Представим себе лотерею (правда, бесконечную)

Приз	2	4	8	...	2^k	...
Вероятность	1/2	1/4	1/8	...	$1/2^k$	...

Математичнское ожидание этой лотереи равно

$$2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + ... = 1 + 1 + ...$$

т.е. бесконечности. Значит ли это, что вы готовы пожертвовать любым богатством, чтобы купить билет для участия в такой лотерее? Заметим, что вероятность получить выигрыш более 1000 руб. меньше одной тысячной. Мало людей согласятся много заплатить за такую лотерею, и дело как раз в том, что полезность денег нелинейная. Так, если $u(x) = x^{1/2}$, то полезность этой лотереи равна

$$\sqrt{2} \cdot 1/2 + \sqrt{4} \cdot 1/4 + ... = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{4} + ... = 1/\sqrt{2}(1 - 1/\sqrt{2}) \sim 2.44$$

Денежный эквивалент этой лотереи равен $(2.44)^2 \sim 5.95$.

Довольно естественно считать, что полезность Н-М в случае денежных лотерей обладает свойством монотонности. А если, как это часто бывает, имеется еще и отвращение к риску, то u вогнута. Отвращение к риску означает, что среднее (барицентр) лотереи предпочтительнее самой лотереи. Впрочем, тем не менее, многие люди участвуют в лотереях, что свидетельствует о нарушении для них этой аксиомы.

Численной мерой отвращения к риску (или вогнутости функции Н-М u) в точке x служит число $k(u, x) = -u''(x)/u'(x)$. Оно называется *коэффициентом абсолютного отвращения к риску* в точке x. Функция u восстанавливается по $k(u, \cdot)$ с точностью до аффинного преобразования.

Индивид называется *нейтральным к риску*, если его полезность u линейна, т.е. если коэффициент отвращения к риску тождественно равен 0. В этом случае полезность лотереи p равна его ожиданию Ep.

Подробнее об отвращении к риску, стохастическом доминировании, страховании и т.п. мы рекомендуем книгу МасКолея и др.

Теория Сэвиджа. Она относится к более суровой неопределенности, когда нет объективных вероятностей (в этом случае говорят иногда о *лошадиных скачках*). Сэвидж предложил систему аксиом, которая объясняет поведение индивида двумя вещами: функцией полезности u на исходах X и субъективной вероятностью π на множестве состояний природы Ω; индивид при этом максимизирует ожидаемое (по π) значение u. Смысл этого подхода в том, что (субъективные) вероятности событий извлекаются из предпочтений индивида.

Скажем кратко об этом. Примитивные понятия: множество X чистых исходов, множество $\Delta(X)$ лотерейных исходов, Ω - конечное множество состояний природы. Действие - это отображение $f : \Omega \longrightarrow \Delta(X)$; множество их обозначается $\mathcal{L}$. На $\mathcal{L}$ задано предпочтение $\preceq$, которое удовлетворяет тем же аксиомам: слабый порядок, независимость и непрерывность. Тогда $\preceq$ представляется обобщенной ожидаемой полезностью вида $\sum_{\omega \in \Omega} U_\omega(f(\omega))$. Фактически это уже было доказано.

Новое появляется, если мы потребуем, чтобы полезности U_ω не зависели от состояния природы ω. Например, этого можно добиться, добавив к уже упомянутым трем аксиомам аксиому монотонности. Чтобы ее сформулировать, заметим, что постоянные лотереи позволяют индуцировать на симплекс $\Delta(X)$ предпочтение $\preceq$ с множества $\mathcal{L}$, которое изображается той же буквой.

4. Аксиома монотонности. Пусть f и g - два действия, и для любого $\omega \in \Omega$ $f(\omega) \succeq g(\omega)$, тогда $f \succeq g$.

Как легко понять, в этом случае предпочтения на $\Delta(X)$, индуцированные функциями U_ω, не зависят от ω. Из единственности полезности Н-М следует, что $U_\omega = \pi(\omega)U + \alpha(\omega)$, и $\pi(\omega) > 0$. Нормируя π, можно считать, что $\sum_\omega \pi(\omega) = 1$, т.е. является требуемой вероятностью на Ω. Полезность на $\mathcal{L}$ в этом случае представляется функцией $f \mapsto \int_\Omega U(f(\omega))d\pi(\omega)$.

Лекция 4. Поведенческие и смешанные стратегии

Поведенческие стратегии. Вооружившись вероятностными понятиями, вернемся к играм в развернутой форме со случайными ходами. Пусть игроки определились со стратегиями; тогда из каждой позиции дерева игры, контролируемой игроками, выходит некоторая отмеченная стрелка. Однако есть еще и позиции, где ход делает "природа", и эти ходы имеют случайный характер. Вследствие этого траектория игры теряет определенность и тоже становится случайной.

Объясним это более формально, но предварительно заметим следующее. Раз уж мы допускаем случайные ходы природой, можно предоставить эту возможность и игрокам. Это означает, что находясь в некоторой позиции (точнее, в информационном множестве h), игрок может, "бросив монету", сделать случайный ход, то есть выбрать не "чистый" ход (элемент из $M(h)$), а "смешанный" (то есть элемент из $\Delta(M(h))$). Заметим, что такое вторжение случая не ограничивает суверенитет игрока: выбор по-прежнему принадлежит ему, и при желании он может выбрать "чистый" ход. Зачем ему обращаться к "рулетке" - это отдельный вопрос, к которому мы еще вернемся.

Так мы приходим к понятию *поведенческой* стратегии. Это выбор игроком i смешанного хода $\beta(h) \in \Delta(M(h))$ в каждом "своем" информационном множестве $h \in H_i$.

Траектория игры. Когда все игроки выберут поведенческие стратегии, то для каждой нетерминальной позиции x дерева игры Γ будет указан случайный ход (или стрелка) $\beta(x) \in \Delta(A(x))$ (напомним, что $A(x)$ - это множество стрелок, выходящих из вершины x). Каким будет исход (конечно, тоже случайный) в этой ситуации? Иначе говоря, что назвать траекторией развития игры? Ясно, что эта траектория будет "смешанной"; так вот как приписать вероятности каждой конкретной траектории?

Делается это постепенно. Мы припишем число $\pi(x)$ каждой позиции x (вероятность прохождения игры через эту позицию x). Корневой (начальной) позиции приписывается число 1. Остальным позициям числа приписываются по индукции. Пусть x - некорневая позиция. Тогда существует единственная стрелка a, которая входит в x. Обозначим через y начало этой стрелки, так что $a = (y, x)$. Позиция y находится "ближе к корню" и поэтому для нее уже определено число $\pi(y)$. Положим теперь $\pi(x) = \pi(y)\beta(y)(a)$. (Неявно тут содержится предположение о независимости рандомизации в разных вершинах, но оно невинно.) Так шаг за шагом мы припишем числа всем позициям, в том числе терминальным. Легко понять (докажите!), что сумма чисел $\pi(x)$ по всем терминальным позициям ($x \in T$) равна 1, то есть мы получаем вероятностную меру на T. Это и есть исход игры; конечно, он зависит от выбора поведенческих стратегий.

Если в терминальных вершинах указаны выигрыши (в терминах полезности Неймана-Моргенштерна), мы можем перейти к средним и получить уже числовые выигрыши. Тем самым мы по игре в развернутой форме получили некоторую игру в нормальной форме - *поведенческое расширение.*

Смешанные стратегии. Выше мы исходили из игры в развернутой форме. Похожую операцию "смешанного расширения", и даже еще проще, можно сделать и для игры в нормальной форме. Пусть дана игра в нормальной форме $u : \times_i S_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$, или лучше - игровая форма (механизм) $r : S_N \longrightarrow A$. *Смешанной* стратегией игрока i называется лотерея $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ на множестве чистых стратегий S_i. Грубо говоря, вместо того, чтобы четко придерживаться всегда одной и той же стратегии s_i, игрок "бросает монету" и в зависимости от этого применяет ту или иную стратегию.

Что же считать исходом, если игроки придерживаются смешанных стратегий σ_i? Конечно, лотерею $r_*(\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_n) \in \Delta(A)$. Неявно тут предполагается, что рандомизации отдельных игроков некоррелированы, независимы. В противном случае мы получаем т.н. *коррелированные* стратегии, о которых еще поговорим в свое время. Если же нас интересуют численные значения выигрышей, мы должны брать средние выигрыши, то есть $\int u_i d(\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_n)$. Иначе говоря, (средний) выигрыш игрока i при профиле смешанных стратегий $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ равен

$$\sum u_i(s_1, \ldots, s_n)\sigma_1(s_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_n(s_n);$$

суммирование ведется по S_N, то есть по всем профилям чистых стратегий. Полученная игра (в нормальной форме)

$$\times_i \Delta(S_i) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

называется *смешанным расширением* игры G и обозначается G^m.

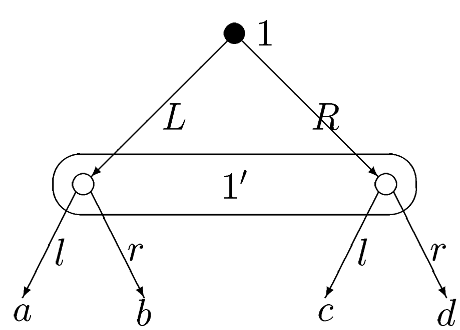
Сравнение смешанных и поведенческих стратегий. Таким образом, есть два способа введения рандомизации в игру, заданную развернутой формой Г. Один - взять поведенческое расширение. Второй - образовать сначала нормальную форму G и затем ее смешанное расширение. Заматим, что формально они различаются - у них разные стратегические множества. В первой игре стратегия игрока i - это элемент множества $\times_{h\in H_i}\Delta(M_i(h))$, тогда как во второй - элемент множества $\Delta(\times_{h\in H_i}M_i(h))$.

Кто-то предложил такую аналогию. Чистая стратегия - это книга, страницы которой соответствуют информационным множествам, а на каждой странице записан тот ход, который нужно сделать в этом месте. Набор всех чистых стратегий - библиотека. Чтобы реализовать смешанную стратегию, нужно случайно выбрать книгу. А поведенческая стратегия - это снова книга, только на каждой странице указан не один ход, а вероятности выбора ходов.

Довольно ясно, что между этими двумя вариантами рандомизации имеется тесная связь. Скажем об этом более точно. Так как речь будет идти про каждого игрока отдельно, мы опускаем индекс игрока i. Тогда поведенческая стратегия - это элемент множества $\times_{h\in H}\Delta(M(h))$, а смешанная стратегия - элемент множества $\Delta(\times_{h\in H}M(h))$. Задавшись поведенческой стратегией $\beta = (\beta(h), h \in H)$, мы легко образуем смешанную стратегию $\sigma = \otimes_h\beta(h)$. Обратно, если дана смешанная стратегия $\sigma \in \Delta(\times_{h\in H}M(h))$, можно спроектировать эту меру на каждое $M(h)$ и получить набор $(\beta(h), h \in H)$, то есть поведенческую стратегию β.

Однако, несмотря на естественность этих операций, соответствующие друг другу смешанная σ и поведенческая β стратегии могут приводить к разным исходам. Поясним это на примере.

Пример. Игрок на первом шаге может пойти либо направо R, либо налево L. После этого он "забывает", что делал на первом шаге, и снова стоит перед выбором r или l.



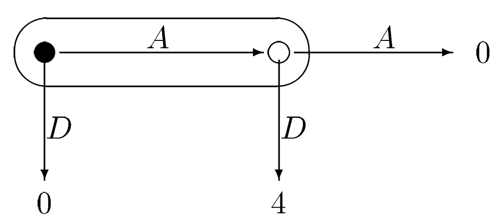
Пример забывчивого игрока

Соответствующие 4 исхода обозначим a, b, c и d.

Игрок имеет 4 чистые стратегии: (L, l) с исходом a, (L, r) с исходом b и т.д. Рассмотрим смешанную стратегию $\sigma = 0.5 \otimes (L, l) + 0.5 \otimes (R, r)$; она приводит к исходу $0.5 \otimes a + 0.5 \otimes d$. Ассоциированная поведенческая стратегия советует в каждом из информационных множеств с равными вероятностями идти направо или налево; иначе говоря, $\beta(1) = 0.5 \otimes L + 0.5 \otimes R$ и $\beta(1') = 0.5 \otimes l + 0.5 \otimes r$. Такая поведенческая стратегия с равными шансами (по 1/4) приводит к исходам a, b, c и d.

Более внимательный анализ показывает, что такая "патология" возможна только при несовершенной памяти. Наш игрок не помнит, что он делал на предыдущих ходах. Если же игра с совершенной памятью, то, как показал Кун (1953), любая смешанная стратегия эквивалентна ассоциированной с ней поведенческой. В дальнейшем мы будем всюду предполагать совершенную память. Поэтому мы не будем различать смешанные и поведенческие стратегии при рассмотрении рандомизации развернутых форм.

Совершенная память. Еще более разительный пример отсутствия памяти дает следующий пример (снова с одним игроком).



Забывчивый шофер

Здесь всего два хода и две (чистые) стратегии: A (вперед) и D (вниз). Обе дают выигрыш, равный 0. Соответственно, любая смешанная стратегия дает нулевой выигрыш. Однако поведенческая стратегия $\beta = 0.5 \otimes A + 0.5 \otimes D$ в среднем дает выигрыш, равный 1!

Не вдаваясь в точные определения и доказательства (см. Майерсона), поясним все же, что означает совершенство памяти. Совершенство памяти означает три требования. Первое. Предположим, что в позиции x игрок делает ход и переводит игру в позицию y. Тогда x и y не входят в одно информационное множество этого игрока. Неформально - игрок помнит, сделал ли он ход. Во втором примере это требование нарушено. Второе. Предположим, что некоторый игрок в позиции x может сделать два хода, переводящие игру в позиции y и y'. Пусть, далее, позиция z встречается после y, а позиция z' - после y'. Тогда z и z' не могут входить в одно информационное множество для нашего игрока. Это требование нарушено в первом примере этой лекции. Наконец, если y и y' - две позиции, находящиеся в разных информационных множествах, а y и y' как раньше, то снова z и z' не могут входить в одно информационное множество для нашего игрока.

Тем не менее, даже в случае совершенной памяти, нужно немного модифицировать конструкцию поведенческой стратегии β по смешанной стратегии σ. Пусть дано информационное множество $h \in H_i$ игрока i; мы должны указать вероятностную меру $\beta(h) \in M_i(h)$. Приведенное выше "наивное" определение состояло в том, что мы брали в качестве $\beta(h)$ усредненный по σ ход в позиции h. То есть считали, что $\beta(h)(m) = \sum_s \sigma(s)s(h)$ (здесь $m \in M_i(h)$, а s пробегает множество S_i чистых стратегий. Правильное определение состоит в том, что мы вместо усреднения по σ должны усреднять по условной мере, полученной при условии, что стратегия s в принципе допускает прохождение траектории игры через h. Более точно, скажем, что стратегия *s допускает прохождение игры через h*, если существуют стратегии других игроков, при которых вероятность $\pi(h)$ прохождения траектории игры через h положительна. Обозначим через $S_i^*(h) \subset S_i$ множество стратегий i-го игрока, которые допускают прохождение игры через h. И тогда

$$\beta(h)(m) = (\sum_{s \in S_i^*(h)} \sigma(s)s(h))/(\sum_{s \in S_i^*(h)} \sigma(s)).$$

Лекция 5. Рациональные игроки

Задача теории игр. Напомним еще раз, что игра - это игровая форма (или *механизм*) $\rho : S_N = \times_{i \in N} S_i \longrightarrow A$, дополненная полезностями (выигрышами, *payoffs*) игроков. Выигрыш игрока i задается функцией $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ и считается полезностью Неймана-Моргенштерна (т.е. распространяется на лотереи как математическое ожидание); компонируя с ρ, можно считать, что u_i заданы на S_N, и тем самым исключить A. Таким образом, игра - это тройка $(N, (S_i), (u_i))$.

Основная задача некооперативной теории игр заключается в том, чтобы дать ответ на вопрос - что же произойдет в каждой конкретной игре, как она будет разыграна? Иначе говоря, какую (или какие) стратегию $s_i \in S_i$ выберет каждый игрок i? При этом (молчаливо или явно) исходят из следующих предположений (предпосылок):

I. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

II. Каждый из игроков знает игру.

III. Свои стратегии игроки выбирают одновременно и независимо.

IV. Игра играется однократно.

Как легко понять, приведенные (и довольно расплывчатые) требования не определяют однозначно решение игры, но являются лишь некоторыми наводящими соображениями для поиска определения. Обсудим эти предположения.

Обсуждение предпосылок.

I. Как уже отмечалось, главная трудность тут состоит в том, что выигрыш игрока i зависит не только от его стратегии, но и от стратегий остальных. Пытаясь уйти от этой неопределенности, теория игр пытается апеллировать к понятию *рациональности.* Игрок рационален, если он максимизирует свой ожидаемый выигрыш с учетом всей имеющейся у него информации. Таким образом, первая предпосылка формулируется как предположение о рациональности всех игроков. Но даже если согласиться с этим, остается вопрос - а какая есть информация у игроков. На это отвечает вторая предпосылка.

II. В первую очередь это означает, что каждый из игроков знает свой выигрыш u_i. Но также выигрыши остальных игроков (u_{-i}). И если первое кажется совершенно естественным, то вторая часть вызывает сильное сомнение и выглядит весьма спорным. Можно допустить, что игрок i знает "физические" исходы (т.е. элементы A), но откуда он может знать полезность их для других игроков? Даже если допустить, что исходы выражены в денежной форме и что все участники любят деньги, даже в этом случае, как мы знаем, полезность денег может быть нелинейной. Откуда игрок i может знать такие тонкие вещи, как коэффициенты отвращения к риску других игроков? Кроме того, в полезность исхода для одного игрока может входить учет полезности другого (с положительным или отрицательным знаком); это тоже вряд ли кому точно известно, кроме самого игрока. Некоторые попытки устранить эти трудности обсуждаются в лекции про игры с неполной информацией.

Более того, ортодоксальная теория вводит постулат, что знание игры (как и рациональность участников игры) является *общим знанием*: игрок i не только знает выигрыши всех игроков, но знает также, что остальные знают выигрыши всех, и что все знают, что он знает об этом и т.д. до бесконечности.

III. Смысл этого требования направлен на уточнение пункта II. Принимая свое решение, игрок не знает о выборе стратегий другими игроками. Это не исключает того, что на основе доступной ему информации он может делать умозаключении о вероятности использования другими их стратегий. Однако точной формулировки интеллектуальных способностей я нигде не встречал.

Сюда же естественно включается предпосылка об отсутствии обмена информацией между игроками (доигровых переговоров, сговора, угроз, обязывающих соглашений и т.п.)

IV. Смысл этой предпосылки ясен. Игроки встретились, сыграли и навеки разошлись; никакой мести или благодарности (или, как принято в теоретико-игровой терминологии - трансферов). Если игра проводится многократно, это уже другая игра.

Понятие решения. Самое печальное в том, что даже приняв жесткие и совершенно нереалистические предпосылки об общем знании игры, ортодоксальная теория не преуспела в решении своей основной задачи - определении понятия решения игры. Сомнительно, чтобы это можно сделать вообще. Взамен она предлагает много понятий решения (доминирующие стратегии, осторожные стратегии, исключение доминируемых стратегий и, как венец, равновесие Нэша), оказывающихся полезными в тех или иных ситуациях. Ниже мы будем знакомиться с ними более подробно.

Естественный способ поставить понятие решения игры на твердую почву - это формализовать поведение игроков. Конечно, и после этого можно будет возражать, говоря, что предложенная формализация не учитывает то и то, но это уже другое дело. Таким фундаментом представляется гипотеза о рациональности игроков. Как мы уже говорили, рациональный игрок максимизирует свою полезность (ожидаемую) на основе всей имеющейся у него информации. Это определение требует уточнения двух моментов: что же знает игрок (т.е. какая у него информация), и как на основе этой информации формировать ожидаемую полезность.

Необайесовский подход. В соответствии с неоБайесовским подходом (изложенным в конце лекции 3) в задаче игрока (обозначим его i) имеется неопределенность относительно стратегий остальных, то есть относительно множества $\Omega = S_{-i} = \times_{j \neq i} S_j$. Каждая стратегия s_i нашего игрока порождает функцию на Ω (действие), это $u_i(s_i, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Ему нужно выбрать "наилучшую" стратегию. Чтобы сделать это, нашему игроку i, в соответствии с теорией Сэвиджа, нужно приписать "субъективные" вероятности событиям из Ω. То есть сделать вероятностные "догадки" $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$. Как только он это сделает, каждая его стратегия s_i получает "ожидаемую" полезность $U_i(s_i) = u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \int u_i(s_i, \cdot) d\sigma_{-i}(\cdot)$. И игроку остается взять (любую) стратегию, дающую максимум U_i.

Тут все понятно, кроме одного - откуда игроку взять свою "догадку" σ_{-i}? Создается впечатление, что мы исходную задачу (о выборе игроком i своей стратегии s_i) свели к другой, более сложной - угадать, что будут делать противники. Если он (игрок i) такой "догадливый", почему бы ему сразу не угадать, что будет делать он сам?

Тем не менее, такая постановка имеет некоторый смысл. То, что будут делать его противники-партнеры, зависит от их полезностей (ведь они тоже рациональные игроки!). А значит и наша догадка должна основываться на наших знаниях о полезностях противников. Другая важная (кроме полезности) составляющая выбора противников - их догадки о выборе других, и поэтому наша догадка должна учитывать наше знание о знании противников.

Мое объяснение неудачи с определением понятия решения игры заключается в том, что одних полезностей мало для того, чтобы сказать, что будет делать игрок. К полезностям нужно добавить еще, что игрок знает (и чего не знает!) о других игроках: об их полезностях, об их знаниях, об их "догадливости" и т.п.

Хотя необайесовский подход не позволяет сформулировать в общем случае, что будут делать рациональные игроки, в некоторых частных ситуациях он работает. Ниже мы обсудим несколько таких ситуаций (осторожные стратегии, доминирующие стратегии, принцип исключения доминируемых стратегий). А затем перейдем к самому общему понятию равновесия Нэша, основанному на принципе согласованности догадок с реальным поведением. Если угодно, это принцип *совершенного предвидения* или *рациональных ожиданий*, часто используемый в экономике.

Лекция 6. Осторожное поведение

Осторожные стратегии. Рассмотрим ситуацию, когда участнику совершенно неизвестны предпочтения остальных. В этом случае он не может сделать никаких предсказаний о стратегиях остальных и должен ориентироваться на самый плохой (для себя) исход.

Пусть игрок i выберет стратегию s_i. Тогда его выигрыш в самой плохой ситуации, то есть гарантированный выигрыш, равен

$$\underline{u}_i(s_i) = \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Руководствуясь такими ожиданиями, он должен выбрать стратегию с наибольшим гарантированным выигрышем

$$\max_{s_i} \underline{u}_i(s_i) = \max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Это число обозначается как α_i. Стратегия s_{*i}, дающая максимум функции $\underline{u}_i(\cdot)$, называется *осторожной* (prudent) стратегией игрока i а число α_i - *гарантированным результатом* (security level) или *максимином.*

Если все игроки ведут себя осторожно, мы получаем *равновесие в осторожных стратегиях* (s_{*N}). Заметим, что в общем случае выигрыши в таком равновесии превосходят пессимистические ожидания, т.е. $u_i(s_{*N}) > \alpha_i$.

Интерес гарантированных результатов (т.е. чисел α_i) в том, что никакое разумное решение не может дать игроку меньший выигрыш. В самом деле, он всегда может перейти на осторожную стратегию и получить выигрыш, не меньший α_i.

Наряду с числом α_i полезно рассматривать другое число (минимакс)

$$\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Его отличие от α_i в том, что "первыми" должны сходить противники, а игрок i уже на их ход делает свой s_i. Отсюда совершенно ясно, что выполнено фундаментальное неравенство

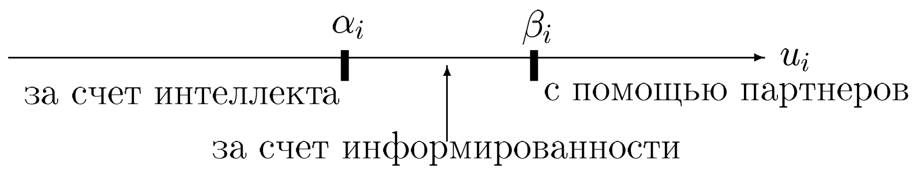
$$\max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \alpha_i \leq \beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Впрочем, это неравенство легко доказать и формально. В самом деле, пусть дана функция u от двух переменных, x и y. Тогда, для любых x и y имеет место неравенство

$$\min_2 u(x,\cdot) \le u(x,y) \le \max_1 u(\cdot,y)$$

(здесь $\min_2$ означает минимум по второму аргументу, а $\max_1$ - максимум по первому). Пусть A означает множество "левых" чисел (то есть чисел вида $\min_2 u(x,\cdot)$, при всевозможных x. Аналогично B означает множество "правых" чисел. Предыдущее неравенство говорит, что любое левое число $\le$ любого правого. Но тогда и максимум (или супремум) левых чисел $\le$ минимума (инфимума) правых.

Ситуацию с α и β в игре удобно понимать с помощью следующей картинки.



Выигрыш, который может получить игрок i.

Она говорит, что выигрыш меньше α игрок получает только если ведет себя глупо или азартно. Если у него имеется какая-то информация о ходах партнеров по игре, он может рассчитывать увеличить свой выигрыш до β; однако его партнеры имеют возможность не дать ему выиграть больше β. Выиграть больше β он может только в том случае, если партнеры ему не противодействуют.

Антагонистические игры. Понятие гарантированного результата α_i представляет интерес для любой игры, так как никакая разумная стратегия s_i не может дать игроку меньше, чем α_i. Осторожные же стратегии представляют меньший интерес. Тем не менее имеется класс игр (исторически игравший большую роль), где осторожные стратегии также представляют интерес. Это так называемые *антагонистические игры*. Под антагонистической игрой мы будем понимать игру двух лиц с нулевой суммой, когда выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу второго, $u_1 = -u_2$. По этой причине часто указывают только выигрыш первого игрока и называют такие игры матричными (а не биматричными). Под u мы понимаем u_1.

Пусть $\alpha = \alpha_1 = \max_{s_1}\min_{s_2} u(s_1,s_2)$ - гарантированный выигрыш 1-го. Тогда

$$\alpha_2 = \max_{s_2}\min_{s_1} u_2(s_1,s_2) = \max_{s_2}\min_{s_1}(-u(s_1,s_2)) =$$
$$= \max_{s_2}(-\max_{s_1} u(s_1,s_2)) = -\min_{s_2}\max_{s_1} u(s_1,s_2) = -\beta_1 = -\beta.$$

Напомним, что $\alpha \leq \beta$. Смысл его мы уже объясняли: при "правильной" игре игрок 1 никогда не получит меньше α, при "правильной" игре второго игрок 1 никогда не получит больше β. Особый интерес представляет тот случай, когда α и β совпадают. В этом случае при "правильной" игре (более точно, при использовании осторожных стратегий обоими игроками) первый игрок получает ровно α (а второй получает $-\alpha$). В этом случае говорят, что игра *имеет цену* α.

Можно дать другую формулировку. Вообще, пусть есть (числовая) функция u на произведении $X \times Y$ двух множеств. *Седловой точкой* (или *седловой парой*) для функции u называется пара (x_*, y_*), такая что

$$u(x, y_*) \leq u(x_*, y_*) \leq u(x_*, y)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Предложение. *Антагонистическая игра имеет цену тогда и только тогда, когда функция u имеет седловую точку.*

Доказательство. Пусть s_{1*} - осторожная стратегия первого игрока. Тогда, по определению, $\alpha \leq u(s_{1*}, s_2)$. Аналогично для второго имеем $\beta \geq u(s_1, s_{2*})$. Если игра имеет цену, т.е. $\alpha = \beta$, то

$$u(s_{1*}, s_2) \geq \alpha = \beta \geq u(s_1, s_{2*}),$$

для любых s_1 и s_2, что и значит, что (s_{1*}, s_{2*}) - седловая пара.

Обратно, пусть есть седловая пара (s_{1*}, s_{2*}); тогда выполняется неравенство

$$u(s_{1*}, s_2) \geq u(s_1, s_{2*})$$

для любых s_1 и s_2. Значит $u(s_{1*}, s_2) \geq u(s_{1*}, s_{2*})$ для любых s_2, и, в частности, $\min_2 u(s_{1*}, \cdot) \geq u(s_{1*}, s_{2*})$. Тем более α, как максимум левых чисел, больше или равно правого,

$$\alpha \geq u(s_{1*}, s_{2*}).$$

Симметрично, $\beta \leq u(s_{1*}, s_{2*})$. Получаем, что $\alpha \geq \beta$. С другой стороны, всегда $\alpha \leq \beta$, значит, $\alpha = \beta$. $\square$

Разумеется, седловая точка вполне может не существовать (т.е. игра может оказаться существенной). Вот простой пример (орлянка)

$1, -1$	$-1, 1$
$-1, 1$	$1, -1$

Здесь нет седловой точки, как нет и цены игры.

Выпуклый случай. Покажем, что в одном важном случае седловая точка существует. А именно, мы будем считать, что

1) Множества стратегий X и Y суть $\Delta(S_1)$ и $\Delta(S_2)$ - симплексы смешанных стратегий;

2) Функция выигрыша $u(x, y)$ аффинна по $x \in X$ (при фиксированном y) и аффинна по $y \in Y$ (при фиксированном x).

Именно такая ситуация возникает при смешанном расширении игры.

Теорема (фон Нейман). *В этом случае существует седловая точка.*

Приводимое ниже рассуждение дает не только существование седловой точки, но и способ ее нахождения. Для этого полезно геометрически представить данные задачи. Как мы увидим далее, такое представление полезно не только при анализе антагонистических игр.

Геометрическое представление задачи игрока. Будем представлять стратегии игрока (в данном случае - первого) как векторы в пространстве $\mathbb{R}^{S_2}$. А именно, стратегии $s_1 \in S_1$ сопоставляет вектор $u(s_1, \cdot) \in \mathbb{R}^{S_2}$. (Особенно удобно это, когда у второго игрока всего две стратегии; тогда все рисуется на плоскости.) В результате множество S_1 реализуется как подмножество в $\mathbb{R}^{S_2}$.

Выпустим теперь из точки s_1 "отрицательный ортант" $s_1 - \mathbb{R}_+^{S_2}$. Важную роль играет пересечение его с "биссектрисой", или правильнее - с диагональю, в $\mathbb{R}^{S_2}$. Диагональю мы называем множество векторов с равными координатами, $\Delta = \{(x, ..., x)\} \subset \mathbb{R}^{S_2}$. Так вот, пересечение нашего ортанта (точнее, его границы) с Δ в точности указывает гарантированный выигрыш при использовании стратегии s_1.

Отсюда вывод. Рассмотрим объединение $\mathcal{A}$ множеств $s_1 - \mathbb{R}_+^{S_2}$ по всем $s_1 \in S_1$; я буду называть его "внутренней оболочкой" множества S_1. Смысл его такой: пересечение его границы $\partial\mathcal{A}$ с диагональю Δ - это в точности точка $(\alpha, \ldots, \alpha)$.

Аналогично мы можем изобразить β, только для этого нам придется рассмотреть "внешнюю оболочку" $\mathcal{B}$ нашего множества S_1. Она задается системой линейных неравенств

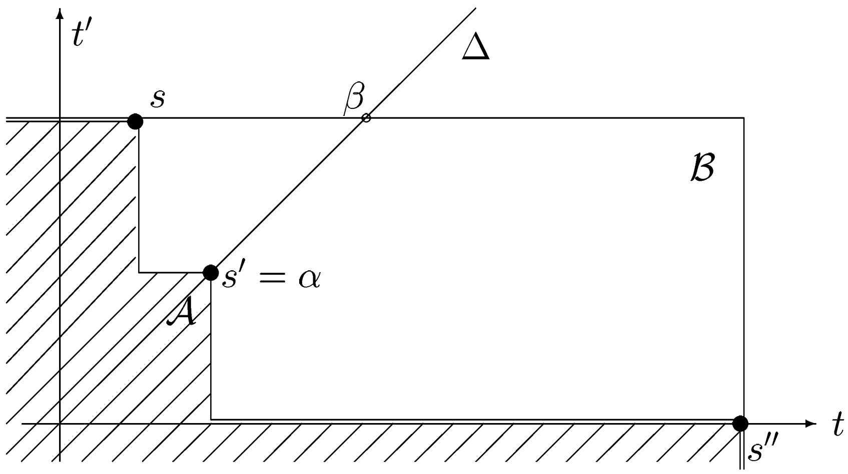
$$x(s_2) \le \max_1 u(\cdot, s_2), s_2 \in S_2.$$

И снова небольшое размышление делает понятным, что β соответствует точке пересечения диагонали Δ с границей $\partial\mathcal{B}$. Неравенство $\alpha \le \beta$ видно из очевидного включения $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Чтобы все это не выглядело слишком абстрактным, рассмотрим конкретный пример

	t	t'
s	1	4
s'	2	2
s''	9	0

Соответствующая картинка выглядит так:



Представление смешанных стратегий. Посмотрим теперь, что происходит, когда мы добавляем смешанные стратегии. Начнем с первого игрока. Как изобразить на этом рисунке смесь $0.5 \otimes s + 0.5 \otimes s''$?. Ясно, что эта стратегия дает ожидаемый выигрыш $0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 9 = 5$, если второй применяет t, и 2, если второй применяет t'. Но это как раз середина отрезка, соединяющего точки s и s''. Точно так же обстоит дело и в общем случае. И если мы добавим все смешанные стратегии первого участника, мы получим новое множество $\mathcal{A}^m = \mathrm{co}(\mathcal{A}) = \mathrm{co}(S_1) - \mathbb{R}_+^{S_2}$. Здесь и далее $\mathrm{co}(X)$ означает выпуклую оболочку множества X. Видно, что α^m - α для смешанного расширения - будучи точкой пересечения диагонали Δ с большим множеством $\mathcal{A}^m$, тоже выросло.

Теперь подумаем, как представлять смешанные стратегии второго игрока. Его чистые стратегии соответствовали координатным функциям на $\mathbb{R}^{S_2}$; $u(s_1, s_2)$ - это по определению s_2-ая координата вектора $u(s_1, \cdot)$. Рассмотрим смесь $\sigma_2 = 0.5 \otimes s_2 + 0.5 \otimes s_2'$. Ясно, что

$$u(s_1, \sigma_2) = 0.5u(s_1, s_2) + 0.5u(s_1, s_2').$$

Так что $u(s_1, \sigma_2)$ - это не что иное, как значение линейного функционала $0.5s_2 + 0.5s_2'$ в точке s_1. И это верно в общем случае. Таким образом мы видим, что смешанные стратегии второго игрока изображаются (неотрицательными) линейными функционалами на $\mathbb{R}^{S_2}$.

Теперь уже ясно, как построить "внешнюю оболочку" $\mathcal{B}^m$ для смешанного расширения: она задается аналогичной системой линейных неравенств, только наряду с координатными функциями мы должны рассмотреть все неотрицательные:

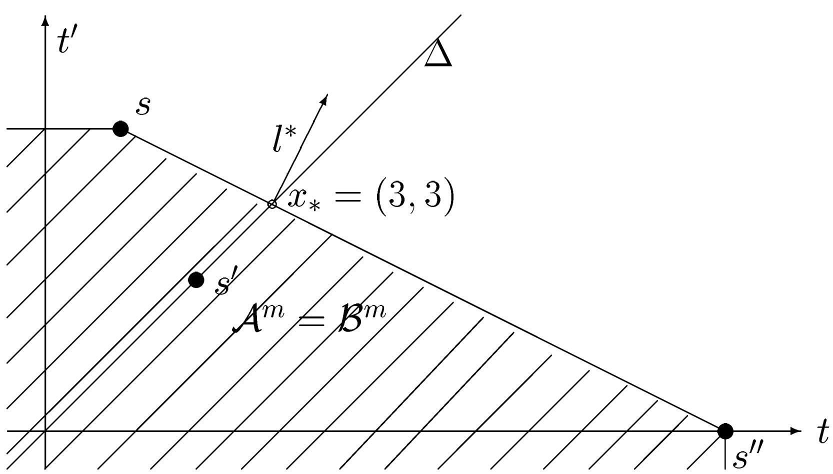
$$l(x) \leq \max_{s_1 \in S_1} l(s_1),$$

где l пробегает все (неотрицательные) линейные функционалы на $\mathbb{R}^{S_2}$. Геометрически - $\mathcal{B}^m$ есть пересечение всех полупространств, содержащих S_1 (точнее, содержащих $\mathcal{A}$). И β^m - β для смешанного расширения - соответствует пересечению диагонали Δ с $\mathcal{B}^m$.

Итак, мы видим, что $\mathcal{A}^m$ - это выпуклая оболочка со$\mathcal{A}$, а $\mathcal{B}^m$ - это пересечение полупространств, содержащих $\mathcal{A}$. Но основная теорема о выпуклых множествах утверждает, что эти два множества СОВПАДАЮТ! В частности, $\alpha^m = \beta^m$, то есть смешанное расширение имеет цену.

На самом деле мы получаем сразу и осторожные смешанные стратегии игроков. Для первого - это точка x_* пересечения диагонали с границей множества $\mathcal{A}^m = \mathcal{B}^m$. А для второго - это функционал l_*, опорный к $\mathcal{A}^m = \mathcal{B}^m$ в точке x_*.

В нашем примере картина такая:



Точка $x_* = (3,3)$; нужно только представить ее как смесь точек из S_1. В данном случае это делается однозначно: $x_* = (3/4) \otimes s + (1/4) \otimes s''$. В качестве l_* нужно взять функционал $(1/3)t + (2/3)t'$.

Теорема об отделении выпуклых множеств. Выше, когда мы заявляли, что $\mathcal{A}^m$

и $\mathcal{B}^m$ совпадают, мы пользовались следующим фундаментальным утверждением, которое установил Минковский. Пусть K - выпуклое замкнутое подмножество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда K совпадает с пересечением (замкнутых) полупространств в $\mathbb{R}^n$, содержащих K.

Иначе говоря, если точка x НЕ принадлежит K, то ее можно отделить от K гиперплоскостью. Проще всего в этом убедиться так. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^n$ евклидову метрику. Пусть теперь y - ближайшая к x точка из K. В качестве гиперплоскости H, отделяющей x от K, можно взять гиперлоскость, проходящую через середину отрезка $[x.y]$ и перпендикулярную к этому отрезку.

Лекция 7. Доминирование стратегий

Доминирование. В общем случае две стратегии игрока несравнимы - в одних ситуациях лучше одна, в других - другая. Однако встречаются ситуации, когда одна стратегия несомненно лучше другой.

Определение. Стратегия s_i игрока i *сильно доминирует* стратегию s'_i если $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ для любой $s_{-i} \in S_{-i}$. Если всюду стоят $\geq$, то говорят о *слабом доминировании.*

Контрольный вопрос: может ли доминироваться осторожная стратегия?

В терминах геометрического представления из предыдущей лекции доминирование означает, что точка s_i лежит "выше" точки s'_i в пространстве $\mathbb{R}^{S_{-i}}$. Если стратегия s_i сильно доминирует стратегию s'_i, то $u_i(s_i, \sigma_{-i}) > u_i(s'_i, \sigma_{-i})$ для любой (коррелированной) смешанной стратегии $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ (и обратно, конечно). Это означает, что ни при каких "догадках" игрока i относительно поведения остальных игроков ему невыгодно использовать стратегию s'_i. Импликациями этого замечания для нахождения решения игры мы займемся в следующей лекции. А в этой обсудим совсем уж редчайший случай - когда существует доминирующая стратегия.

Доминирующие стратегии. Определение. Стратегия s_i игрока i называется *доминирующей* (или доминантной), если она (слабо) доминирует любую стратегию из S_i.

Использование доминирующей стратегии рационально при любых догадках. Если у игрока i есть такая стратегия, то ему не нужно строить никаких догадок, и в частности, вообще знать что-либо о полезности остальных. И очень правдоподобно, что рациональный игрок будет использовать доминирующую стратегию, если она у него имеется.

Применение доминирующих стратегий на первый взгляд представляется бесспорным. Но так ли это на самом деле? Рассмотрим пример

$101, 0$	$1, 1$
$100, 100$	$0, 0$

Здесь стратегия $s1$ доминирующая и на нее ответ $t2$. В результате оба получают по 1. Но представим, что изредка (с частотой 0.02) 1-й игрок использует "плохую" стратегию $s2$. Тогда для 2-го игрока станет более привлекательной стратегия $t1$ и они получат: первый по прежнему больше 100, а второй - около 20. Стоит ли 1-му гоняться за мелочевкой, чтобы в результате получить худший исход?

Поэтому очень здорово, когда хотя бы у одного игрока имеется доминирующая стратегия. Тогда его поведение можно считать известным, что позволяет исключить его из числа игроков. Идеальная же ситуация - когда доминирующая стратегия есть у каждого игрока.

Ситуация (или профиль стратегий) $s_N = (s_1, \ldots, s_n)$ называется *равновесием в доминирующих стратегиях*, если для любого игрока i стратегия s_i является доминирующей. Если такие равновесия существуют, их с большим основанием можно считать решениями игры.

Тут стоит сделать одно предостережение. Может случиться, что есть несколько доминирующих стратегий. Конечно, они равноценны для игрока i, но могут давать разные выигрыши другим. Простой пример:

$10, 10$	$0, 10$
$10, 0$	$0, 0$

Первому все равно - $s1$ или $s2$, но второму не все равно! Что выберет 1-й, если он не знает полезностей партнера? А если знает?

Интуитивно ясно, что доминирующие стратегии бывают очень редко. Тем не менее встречаются игры, в которых есть равновесия в доминирующих стратегиях.

Дилемма заключенных. Наличие доминирующих стратегий дает редкую возможность игроку найти оптимальное решение даже не зная предпочтений остальных. Но не нужно думать, что полученное решение всегда хорошее. Контрпример доставляет знаменитая *дилемма заключенных* с таблицей

$5, 5$	$-3, 8$
$8, -3$	$0, 0$

Такую игру можно интерпретировать как дуополию. Если участники договорятся продавать товар по высокой цене, они выручат по 5. Но если при этом один снизит цену, а второй будет продолжать продавать по высокой цене, он захватит рынок и получит большую прибыль, тогда как его соперник останется в проигрыше. Если они оба торгуют по низким ценам, прибыли нулевые.

В этой игре существуют доминирующие стратегии, это $s2$ и $t2$ (обычно их называют эгоистическими, или некооперативными). Но они дают не лучший (прямо скажем, плохой) исход. Это, впрочем, общее место: некооперативное поведение в общем случае плохо согласуется с коллективными интересами. Мы еще вернемся к этой игре и проблеме неэффективности при обсуждении игр с сообщениями и повторяющихся игр.

Аукцион второй цены. Предположим, что некто хочет продать свой дом, и есть два покупателя, A и B. Будем считать, что полезность дома для покупателей равна 3 или 4 млн. руб. Как же организовать аукцион?

Простейший выход видится таким: покупатели в запечатанном конверте предлагают цену. Конверты вскрывают и дом передается тому, кто предложил большую цену, которую он и платит. Для простоты можно считать, что множества стратегий - интервал $[3, 4]$. Если ценность для индивида A равна 3, то ему нет смысла предлагать более 3. А вот если ценность для индивида равна 4 млн., то ему лучше всего предложить чуть больше, чем предлагает его соперник. Так что у него нет в этом случае доминирующей стратегии.

Однако возможен другой способ организации аукциона (т.н. аукцион второй цены, или аукцион Викри). В нем победитель определяется как раньше, но цена, которую он платит за дом, равна предложению второго покупателя. В этом случае у покупателя A (как и у B) есть доминирующая стратегия, а именно, сообщить свою истинную оценку. В самом деле, пусть предложение B равно y. Если ценность для A равна 3, то все ясно. Пусть теперь ценность равна 4. Если предложение $A \leq y$, то он дом не получает, но ничего и не платит. Т.е. по нулям. Если же его предложение $> y$, то дом он получает, и платит y. Т.е. эффект тот же, как если он назовет 4 млн.

Конкретные числа (3 и 4 млн.), а также то, что покупателя всего два, не имеют значения. На аукционе второй цены у каждого покупателя имеется доминирующая стратегия. Более того, это простейшая стратегия - говорить правду, называть свою истинную оценку.

Лекция 8. Исключение доминируемых стратегий

Информация и выбор. В предыдущих двух лекциях мы рассмотрели два случая, когда оптимальная стратегия игрока определялась исключительно его собственными полезностями. Первый - когда игрок совсем не знает полезностей других и ориентируется на осторожную стратегию. Второй - когда у него есть доминирующая стратегия, и ему просто не важно, какие полезности у других.

В общем случае поведение игрока зависит от его информации о других игроках, в частности, об их полезностях. Пусть, для простоты, два игрока. Если первый знает полезности второго и знает, что второй не знает его полезности, он будет уверен, что второй применит осторожную стратегию s_{*2}, и тогда сам применит свой наилучший ответ на s_{*2}. А как быть, если первый знает полезности второго, но не знает, знает ли второй его полезности? В дальнейшем мы сосредоточим внимание на частном, можно сказать - вырожденном - случае, которым только и занималась ортодоксальная теория игр, на случае *полной информации.* Под этим понимается, что все игроки знают полезности друг друга, знают, что все это знают и т.д.

Метод исключения. На предыдущей лекции мы показали, что рациональный игрок не использует доминируемые стратегии. Рассмотрим игру

	$t1$	$t2$	$t3$
$s1$	$4,3$	$2,7$	$0,4$
$s2$	$5,5$	$5,-1$	$-4,-2$

Видно, что стратегия $t3$ явно плохая для второго игрока; более точно, она доминируется (сильно) стратегией $t2$. Поэтому 2-й игрок ее применять не будет. У 1-го игрока доминируемых стратегий нет. Однако если он знает полезности 2-го, то он понимает, что 2-й не будет применять $t3$. Но тогда игра редуцируется к

	$t1$	$t2$
$s1$	$4,3$	$2,7$
$s2$	$5,5$	$5,-1$

Но в этом случае у игрока 1 стратегия $s2$ сильно доминирует стратегию $s1$, и он будет использовать только $s2$. Наконец, так как 2-й игрок знает полезности 1-го и *знает*, что 1-й знает его (2-го) полезности, он может заключить, что первый использует $s2$, а значит ему нужно применять $t1$.

Подводя итог, мы видим, что в этой игре есть естественное решение $(s2, t1)$ с неплохими выигрышами (5,5). Подчеркнем лишний раз, что предложенный способ рассуждения очень сильно опирается на информационные гипотезы: решение второго игрока применять $t1$ основано на его уверенности в том, что первый будет использовать $s2$. Но почему второй уверен в этом? Потому что он знает, что первый знает его (второго) полезности и понимает, что второй не будет использовать $t3$, а тогда для первого лучше всего $s2$.

Метод, который был здесь использован, называется *последовательным исключением строго доминируемых альтернатив.* Игры, где такой процесс приводит к успеху (т.е. исключает все стратегии, кроме одной), называются *разрешимыми по доминированию.* Дадим формальное определение. Процессом последовательного исключения доминируемых стратегий называется последовательность множеств

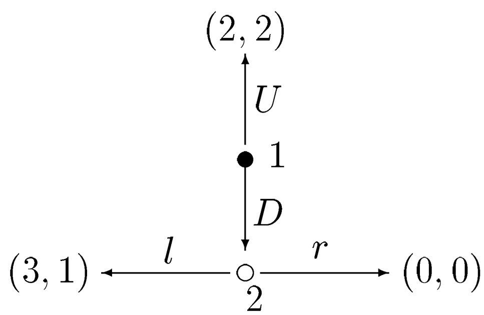
$$S_i = S_i^0 \supset S_i^1 \supset \ldots \supset S_i^k \supset \ldots$$

для каждого игрока i, где S_i^{k+1} состоит из недоминируемых стратегий в игре $(N, (S_i^k), u_i|S^k)$. Ясно, что (в силу конечности множеств S_i) эта последовательность стабилизируется на множествах, которые мы условно обозначим S_i^∞. Игра разрешима по доминированию, если все S_i^∞ состоят из единственной стратегии (или из эквивалентных стратегий для игрока i).

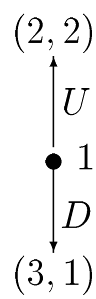
Игры с совершенной информацией. Напомним, что игра в развернутой форме называется игрой с *совершенной информацией*, если каждое информационное множество одноэлементное. Т.е. в любой позиции игры любой игрок полностью контролирует ситуацию. К таким играм применима процедура, очень напоминающая исключение доминируемых стратегий.

А именно, рассмотрим предфинальную вершину y. В ней делает ход игрок i. И совершенно ясно, какой он сделает ход - тот который дает максимальное значение u_i. (Может, правда, оказаться, что есть несколько ходов с максимальным u_i. Это источник неоднозначности процедуры, однако если выигрыши всех игроков во всех финальных вершинах разные, то процедура уже однозначна, т.е. является алгоритмом.) В этом случае мы можем сделать нашу предфинальную вершину y финальной, поместив туда платежи той финальной вершины x, в которую пойдет игрок i. И так шаг за шагом мы редуцируем всю игру в начальную вершину. Все это называются *алгоритмом Цермело-Куна.*

Покажем это на примере игры



Игрок 2, поставленный перед выбором ходов l и r, несомненно выберет l. Поэтому мы можем редуцировать исходную игру к виду



После этого ясно, что 1-й выберет D, и мы приходим к решению (D, l).

Видно, что эти аргументы близки к аргументам исключения доминируемых стратегий, и это действительно так. Те стратегии, которые получаются алгоритмом Куна, выживают при исключении по (слабому) доминированию, а остальные исключаются. Это утверждение известно как *теорема Куна.* Доказательство см. в книге Мулена, гл. 2.

Общее знание. Заметим, что разрешение по доминированию существенно опирается на знание всеми предпочтений всех, а также на рациональность всех игроков. Но не только. Вернемся к первому примеру. Игрок 2 исключает стратегию $t3$, потому что рационален, но откуда первый игрок знает, что второй ее исключит? Для этого нужно предположить, что 1-й игрок знает, что второй рационален. А второй применяет стратегию $t1$ потому, что знает, что первый знает, что второй рационален, а также, что первый рационален (чтобы исключить $s1$).

Одним словом, не только каждый игрок рационален, но этот факт является, как говорится, *общим знанием* (common knowledge). Некий факт A является общим знанием, если все знают A, все знают, что все знают A, все знают, что все знают, что все знают A, и т.д. Чтобы лучше прочувствовать это, приведем одну (быть может, не самую лучшую, но простую) байку про общее знание.

Реально рассказ более сложный, и я упростил его до предела. Представим, что в купе вагона Викторианской эпохи находятся Боб и его племянница Алиса. У каждого испачкано лицо. Однако никто не краснеет от стыда, хотя любой Викторианский пассажир покраснел бы, зная, другой человек видит его грязным. Отсюда мы делаем вывод, что никто из пассажиров не знает, что его лицо грязное, хотя каждый видит грязное лицо своего компаньона.

В это время в купе заглядывает Проводник и объявляет, что в вагоне находится человек с грязным лицом. После этого Алиса покраснела. Она поняла, что ее лицо испачкано. Но почему она поняла это? Разве проводник не сообщил то, что она *уже знала*?

Проследим цепочку рассуждений Алисы.

Алиса: Предположим, мое лицо чистое. Тогда Боб, зная, что кто-то из нас грязный, должен сделать вывод, что грязный он, и покраснеть. Раз он не краснеет, значит, моя посылка про мое чистое лицо ложная, мое лицо грязное, и я должна покраснеть.

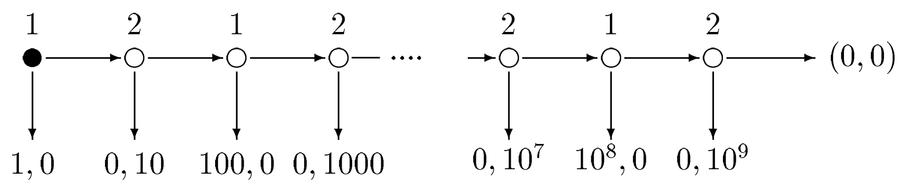
Проводник добавил к информации, известной Алисе, информацию о знаниях Боба. До этого она не знала, что Боб знает, что кто-то из них испачкан. Короче, сообщение проводника превратило знание о том, что в кабине есть человек с грязным лицом, в *общее знание*.

Фактически, это упрощенный вариант байки про мудрецов в красных колпаках. Обычно ее преподносят в более сложном варианте с тремя мудрецами. Сидят три умника, на каждом надет колпак красного цвета. Каждый видит колпаки других, но не видит, какой колпак на нем. И каждому, чтобы показать свою проницательность, нужно угадать цвет своего колпака. Прохожий (или экзаменатор) объявляет всем, что один из колпаков красный. Тогда один из мудрецов понимает, что на нем красный колпак. Рассуждает он так: допустим, на мне надет белый колпак. Тогда два оставшихся умника, узнав подсказку прохожего, быстро сообразили бы (смотри предыдущий рассказ про Боба и Алису), что на ком-то из них красный колпак, и объявили бы об этом. А раз они молчат, значит на мне красный колпак.

Конечно, тут можно поставить любое число мудрецов.

Как уже говорилось, классическим постулатом ортодоксальной теории игр является предположение о всеобщем знании игры (в частности, полезностей), а также рациональности игроков. Насколько реалистична эта гипотеза, показывает следующий парадоксальный пример.

Сороконожка. Рассмотрим вариант сороконожки Розенталя. Один эксцентричный филантроп готов подарить университету миллиард долларов. Он приглашает президентов университетов Йелбриджа и Харфорда и объясняет, что они должны разыграть следующую игру. Дерево ее имеет вид



На первом ходе филантроп предлагает президенту Йелбриджа 1 доллар, который тот может принять или отказаться. Если он отказывается, филантроп предлагает президенту Харфорда 10 долларов и т.д., повышая ставки каждый раз в 10 раз.

Применяя алгоритм Цермело, мы видим, что каждому из президентов надо принимать предложение. Поэтому игра должна закончится на первом же ходу - президент Йелбриджа схватит 1 доллар! Чувствуется, что здесь что-то не так.

Рассмотрим, например, ситуацию в вершине 4, когда президент Харфорда решает - взять 1000 долларов или отказаться. Обратная индукция (алгоритм Цермело) говорит, что надо соглашаться. Почему? Потому что президент Йелбриджа рациональный и т.д. и поэтому на следующем шаге хапнет 10000. Но если он такой рациональный, то что же он на предыдущем шаге отказался от 100 долларов? А как бы вы сами играли в этой игре[1]?

Одним словом, мы должны признать, что аргументы, на которых основана обратная индукция, включают не только гипотезу о рациональности, но и гипотезу о непоколебимой уверенности в рациональности несмотря на явные свидетельства о нерациональности на предыдущих шагах.

Ослабления. Иногда процедура исключения приводит к единственному исходу, но чаще - нет.

Можно было бы исключать и слабо доминируемые стратегии, как это по существу и делается в алгоритме Цермело-Куна. Однако исключение слабо доминируемых стратегий уже не столь несомненно (и не выводится из гипотез о рациональности игроков). Во-первых, начинает играть роль порядок исключения. Но это полбеды. Хуже, что слабо доминируемые стратегии могут входить в равновесия. Рассмотрим игру

	$t1$	$t2$
$s1$	$1, 1$	$100, 0$
$s2$	$0, 100$	$100, 100$

[1]Здесь можно увидеть аналогию с рассказом о ”неожиданной проверке”. Учительница говорит ученикам, что она устроит им проверку в один из дней будущей недели. Когда? - спросили ученики. Когда вы не ожидаете этого, ответила учительница. Они решили, что это не может быть пятница, но тогда и не четверг, и т.д. Так они решили, что проверки не будет, и не готовились. Но в понедельник учительница устроила проверку, и для всех это оказалось неожиданным!

Здесь первый столбец слабо доминирует второй, как и первая строка слабо доминирует вторую. Исключение таких "слабых"стратегий дает выигрыши (1,1). Но есть более хорошее решение $(s2, t2)$.

Доминируемые стратегии. Выше мы исключали те стратегии s, которые сильно доминировались некоторой более лучшей стратегией s'. На самом деле можно немного расширить список исключаемых стратегий. Такие "плохие" стратегии будут называться *доминируемыми.* Мы приведем два определения доминируемости и затем покажем, что они эквивалентны. Здесь мы фиксируем одного игрока и пишем S вместо S_i. Множество стратегий остальных игроков обозначим как Ω.

Первое определение. Стратегия s *доминируется*, если для любой "смешанной" точки $\mu \in \Delta(\Omega)$ найдется стратегия $s' \in S$, такая что $s(\mu) < s'(\mu)$.

Конечно, если некоторая стратегия s' доминирует s, ее можно использовать в первом определении. Однако в общем случае "победитель" стратегии s зависит от ситуации (то есть от μ).

Второе определение. Стратегия s *доминируется*, если найдется "смешанная" стратегия $\sigma \in \Delta(S)$, которая сильно доминирует s.

Видно, что второе понятие посильнее. Замечательно, что на самом деле они совпадают. Это следствие теоремы о разделении выпуклых множеств и фактически уже выло установлено в Лекции 6. Однако не мешает и повторить.

Предложение. *Оба предыдущих понятия доминируемости совпадают.*

Доказательство. Снова будем стратегии из S мы изображать векторами в пространстве $\mathbb{R}^\Omega$. Так что S реализуется как конечное подмножество в $\mathbb{R}^\Omega$. Если теперь $\mathcal{A}$ - "внутренняя оболочка" S в смысле Лекции 6, то стратегия s доминируется во втором смысле, если она попала во внутренность $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что стратегия s не доминируется во втором смысле, то есть не попадает внутрь $\mathcal{A}$. Тогда она лежит на границе $\mathcal{A}$ (и даже на той части границы, которая попадает в выпуклую оболочку S). Но тогда по теореме об отделении выпуклых множеств существует линейный функционал p на $\mathbb{R}^\Omega$, который (нестрого) отделяет s от $\mathcal{A}$. Это значит, что $p(s) \geq \max p\mathcal{A}$. Очевидно, что p положительный; если отнормировать его, мы получим смесь $\mu \subset \Delta(\Omega)$ такую что $s(\mu) \geq \sigma(\mu)$ для любого $\sigma \in \mathcal{A}$. В частности, $s(\mu) \geq s'(\mu)$ для любого $s' \in S$. Но это означает, стратегия s не доминируется в первом смысле. $\square$

Лекция 9. Равновесия Нэша

Рассмотренные до сих пор понятия решения (доминирующие стратегии, осторожные стратегии и последовательное исключение доминируемых стратегий) носили в чем-то механический характер. Теперь мы отказываемся от такого прямолинейного подхода, от претензий на предсказание того, что будет делать каждый игрок. Вместо этого мы формулируем некоторые желательные свойства решения. После этого решений может оказаться несколько (и тогда возникает вопрос, какое из них осуществится) или ни одного (и тогда данная концепция не работает).

Равновесие Нэша. Рациональный подход к нахождению решения игры предполагает, что каждый игрок i формирует "догадку" $s_{-i}^{(i)}$ о действиях остальных и выбирает в качестве s_i свой наилучший ответ на эту догадку. Как уже отмечалось, трудность здесь в том, как формировать эту догадку. Все же одно требование согласованности выглядит почти несомненным или, во всяком случае, желательным: догадки $s_{-i}^{(i)}$ должны совпадать с реальным выбором s_{-i}. В этом случае получается логически стройная картина: я выбираю s_i, потому что это лучший ответ на вашу s_{-i}, а ваш ответ наилучший на мою стратегию s_i. Можно сказать также, что равновесие Нэша устойчиво к откровению. Выбирая свою стратегию s_i, вы не знаете, что выбрали остальные. Изменится ли ваше решение, если вы узнаете действия остальных?

Определение. Ситуация s_N^* в игре называется *равновесием Нэша*, если для любого игрока i и любой его стратегии $s_i \in S_i$ выполняется неравенство

$$u_i(s_N^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Иначе говоря, s_i^* - наилучший ответ на s_{-i}^* для каждого игрока i. Это такая ситуация, что никому не выгодно отклоняться от нее, если остальные ее придерживаются.

Наилучшие ответы. Здесь стоит сказать о понятии наилучшего ответа.

Определение. Стратегия s_i игрока i называется *наилучшим ответом* на профиль стратегий s_{-i} остальных игроков, если в точке s_i достигает максимум функция $u_i(\cdot, s_{-i})$.

Множество наилучших ответов, $\mathrm{Argmax}(u_i(\cdot, s_{-i}))$, обозначим $Best_i(s_{-i})$. Это подмножество в S_i, непустое при довольно слабых условиях. Соответствия $Best_i : S_{-i} \Longrightarrow S_i$ наилучших ответов играют важнейшую роль при анализе поведения игрока i. Например, s_N - равновесие Нэша тогда и только тогда, когда $s_i \in Best_i(s_{-i})$ для любого i.

Аналогично определяется наилучший ответ на "смешанную" догадку $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$. Обычно в этом случае в качестве ответов также привлекают смешанные стратегии. Контрольный вопрос: что можно сказать о стратегии s_i, которая является наилучшим ответом на любую $s_{-i} \in S_{-i}$? А если s_i никогда не является наилучшим ответом?

Обсуждение понятия равновесия. Равновесие Нэша - главная концепция решения в некооперативном случае. Поэтому стоит подробнее обсудить ее смысл и значение. Хотя понятие равновесия Нэша и выглядит вполне разумным, оно уже не столь бесспорно, как равновесие в доминирующих стратегиях.

Понятие равновесия Нэша соединяет две гипотезы о поведении игроков. Первая - если ситуация s_N неравновесна, то ее нельзя рассматривать как устойчивое состояние. Т.е. если какой-то игрок i видит, что отклонение от s_i принесет ему больший выигрыш (в надежде, что остальные сохранят свои стратегии), то он непременно отклонится, поддастся соблазну. Это согласуется с гипотезой рациональности (даже диктуется ею). Однако игрок не может не понимать, что его отклонение может вызвать непредсказуемую цепь ответных реакций остальных игроков, конечные последствия которой трудно оценить.

Вот пример. Два участника, каждый называет целое неотрицательное число. Если оба назвали одно и то же число, каждый получает по 100 руб. Если разные, то тот, кто назвал большее, получает 101 руб., а другой - 0. Разумно каждому назвать нуль, но это не равновесие.

Такое отклонение (улучшающее по сравнению со статус кво s^*) оправданно только в том случае, если есть уверенность, что остальные действительно сохранят неизменными свои стратегии. А в общем случае нужна какая-то модель реакции остальных.

Вторая гипотеза - если каждый игрок видит, что отклонения от s_i^* не дают ему улучшения, то он сохранит эту стратегию s_i^*, как бы нелепа она ни была. В дальнейшем мы еще встретим много нелепых, дурацких равновесий.

Вот пкрвый такой пример. Пусть три участника по правилу большинства выбирают из двух альтернатив x и y, и для всех x лучше y. Предположим, что все назвали y4. Тогда никто индивидуально не может улучшить исход y, так что формально это равновесие. Но трудно представить, как такая ситуация может возникнуть.

Значение равновесий Нэша можно суммировать так. Пусть теория (или советник) предписывает каждому игроку некую стратегию, и все они знают это предписание и следуют ему; тогда либо это должно быть равновесием Нэша, либо кто-то ведет себя иррационально.

Мы не утверждаем, что *любое* равновесие Нэша годится как предсказание исхода (тем более, что могут быть несколько равновесий). Равновесность по Нэшу - это лишь необходимое условие "правильного" ответа, предсказания. Теоретико-игровики предприняли много усилий, чтобы среди равновесий Нэша оставить только разумные. Эта программа называется очищением (refinement), или утоньчением, и мы позже обсудим более детально эти вопросы.

Сценарии. Рассмотрим теперь вопрос о том, как игроки могли бы прийти к равновесию Нэша. И здесь нет полной ясности. Не удается дать разумного объяснения, оставаясь полностью на некооперативной точке зрения. Поэтому некоторые теоретики считают равновесие Нэша полукооперативным понятием. Ниже мы предлагаем несколько сценариев появления равновесия по Нэшу.

Первый. Игра разыгрывается многократно, и из прошлого опыта игроки начинают представлять, как будут играть партнеры, выбирают наилучшие ответы, и (в конце концов) попадают (?) в ситуацию равновесия, в которой и остаются. К этому же можно отнести и процедуру нащупывания Курно. Однако предположение, что игра разыгрывается многократно, сильно меняет всю картину. Формально, мы попадаем в новую игру. Об этом будет рассказано в лекции о повторяющихся играх.

Второй сценарий. Участники фиктивно разыгрывают игру, им разрешено в определенном порядке менять свои стратегии. Когда положение стабилизировалось, т.е. мы попали в устойчивое состояние, игра разыгрывается реально. Устойчивое состояние - это равновесие Нэша (может, не любое). Возражения как выше. В обоих этих сценариях игроку не нужно знать полезности других игроков.

Третий сценарий. Каждый игрок сам анализирует игру и находит ситуацию равновесия. Этот сценарий почти идеален, если равновесие единственно. Но при нескольких неравноценных равновесиях возникает вопрос, как выбирать среди них. Например, в игре

	$t1$	$t2$
$s1$	$3,3$	$0,1$
$s2$	$1,0$	$2,2$

(похожей на встречу в Нью-Йорке) есть два равновесия $(s1, t1)$ и $(s2, t2)$. На какое из них ориентироваться игроку 1? Казалось бы, первое равновесие лучше для обоих игроков, и естественно было бы остановиться на нем. Но первый игрок (как и второй) может рассуждать так. Допустим: я выберу $s1$ в расчете на сообразительность второго. А вдруг он поступит иначе и выберет $t2$? Тогда я получу только 0. Если же я выберу вторую строчку, то гарантированно получу 1. Так что не факт, что будет выбрано первое равновесие.

Но даже если равновесие единственно, снова не факт, что игроки выберут его. Рассмотрим игру

3,5	4,8	3,-1000
5,-1000	6,8	3,10

В ней единственное равновесие $(s2, t3)$. Но чтобы решиться на $t3$, второй игрок должен быть очень сильно уверен, что 1-й использует $s2$, что он не отклонится от $s2$ даже в результате случайной ошибки. (Кстати, первому в этой ситуации абсолютно все равно, что использовать - $s1$ или $s2$.) Более надежной является стратегия $t2$, с гарантией дающая 2-му выигрыш 8.

Четвертый сценарий. Игроки перед игрой затевают переговоры и приходят к некоторому (необязывающему) соглашению s_N. Если это соглашение s_N является равновесием Нэша, то есть основания ожидать, что они будут следовать этому соглашению. Однако тут тоже надо формализовать процесс переговоров и заключения соглашения, это новая игра. Мы обсудим этот и следующий сценарий в лекции об играх с сообщениями.

Пятый, обещающий, сценарий тесно связан с четвертым. Игроки обращаются к посреднику (или аналитику), который анализирует игру и предлагает всем следовать некоторому профилю стратегий s_N^* (который он громко объявляет всем). В принципе каждый может отказаться и выбрать другую стратегию. Однако если посредник предлагает равновесие Нэша, то всем выгодно следовать указанию. Конечно, и тут возникают свои вопросы. Например, какое равновесие предложить посреднику, если их много? Или - уверен ли игрок, что его партнер услышал указание посредника?

Еще замечания. Первое - равновесие может быть *неэффективным.* Второе - может быть *много равновесий*.

Пример к первому утверждению дает Дилемма заключенных. Мы уже обсуждали его. Это пример того, как рациональное преследование своих интересов может вести к плохому исходу для всех.

Пример с несколькими равновесиями - семейный спор и т.п.

Лекция 10. Равновесия Нэша (продолжение)

Сравнение с предыдущими понятиями. Равновесие Нэша тесно связано с предыдущими понятиями решения и хорошо согласуется с ними.

a) *Доминирующие стратегии.* Очевидно, что равновесие в доминирующих стратегиях является равновесием Нэша.

Впрочем, наряду с доминирующими равновесиями могут встречаться и другие, как правило, дурацкие. Рассмотрим, например, аукцион второй цены. Он интересен тем, что при его использовании у каждого участника есть доминирующая стратегия. Однако есть и много других, "плохих" равновесий Нэша. А именно (если участников ≥ 3), для любого участника i и любого числа $p \leq u_i$ существует равновесие Нэша, при котором участник i получает предмет за цену p. Для этого все, кроме i-го, предлагают цену p, а он предлагает цену, большую $\max(u_j)$. В этом "дурацком" равновесии предмет торга достается и дешевле, и не тому.

b) *Осторожные стратегии.* Осторожные стратегии в общем случае слабо связаны с равновесиями Нэша. Однако для антагонистических игр связь усиливается. Равновесие Нэша в такой игре является седловой парой (и обратно), поэтому равновесные стратегии являются осторожными. Однако если игра не имеет цены, то осторожные стратегии не образуют равновесие.

Отмечу еще, что в случае антагонистических игр равновесия Нэша обладают двумя дополнительным ценными чертами, вытекающими из того, что они состоят из осторожных стратегий.

Первая - что для нахождения равновесной (=осторожной) стратегии каждый из игроков может действовать индивидуально. В отличие от общего случая, ему не нужно знать или делать догадки относительно s^*_{-i}. Глядя только на таблицу (своих) выигрышей он может выделить множество P_i своих осторожных стратегий и выбрать *произвольный* элемент в нем в качестве s^*_i. В частности, множество NE равновесий Нэша устроено как произведение $P_1 \times P_2$ и любое равновесие дает участнику одну и ту же полезность.

Вторая - что равновесие обладает дополнительным свойством устойчивости. По определению, равновесие Нэша устойчиво по отношению к собственным отклонениям: если противник придерживается равновесной стратегии, то ваши отклонения от равновесия ничего не дадут. В случае осторожной стратегии любые отклонения противника *не уменьшат* ваш выигрыш, а могут только увеличить его.

Вернемся снова к общим играм. Имеет место следующее общее утверждение: равновесный выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня

α_i. Можно сказать, что Нэшевские исходы индивидуально рациональны.

Лемма. *Если s_N^* - равновесие Нэша, то $u_i(s_N^*) \geq \alpha_i$ для любого игрока i.*

В самом деле, сравним равновесную стратегию s_i^* с осторожной s_{*i}. Мы имеем $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{*i}, s_{-i}^*) \geq \alpha_i$.□

На самом деле верно (и столь же просто доказывается), что равновесные выигрыши не меньше β_i.

c) *Исключение доминируемых стратегий.* Наиболее интересна связь с исключением доминируемых стратегий. Как легко понять, сильно доминируемая стратегия не может быть равновесной. На самом деле верно более сильное утверждение: если стратегия входит в равновесие, то она выживает при последовательном исключении сильно доминируемых стратегий. Это следует из сделанного выше замечания и тривиальной

Леммы. *Пусть для каждого i заданы подмножества $S_i' \subset S_i$. Предположим, что s_N^* - равновесие в игре $(N, (S_i), (u_i))$, и кроме того $s_i^* \in S_i'$ для любого i. Тогда s_N^* является равновесием в игре $(N, (S_i'), (u_i|_{S_i'}))$.*□

Если G^∞ - игра, полученная после итеративного исключения сильно доминируемых стратегий, то предыдущее замечание дает включение

$$NE(G) \subset NE(G^\infty).$$

На самом деле, можно показать, что любое равновесие в игре G^∞ является равновесием и в исходной игре G, т.е.

$$NE(G) = NE(G^\infty).$$

Это равенство объясняет смысл исключения сильно доминируемых стратегий. Если после последовательного исключения остается один профиль, он равновесен в исходной игре. А если осталось несколько, надо среди них поискать равновесный.

Предыдущее относилось к сильному доминированию. Что касается слабо доминируемых стратегий, то, как мы уже говорили, они могут входить в равновесия. Рассмотрим игру

$1, 1$	$100, 0$
$0, 100$	$100, 100$

Здесь стратегия $s2$ слабо доминируется стратегией $s1$, но пара $(s2, t2)$ образует равновесие, причем неплохое.

Если мы выбросили некоторую слабо доминируемую стратегию (и обозначили полученную игру как G'), то легко показать (покажите!), что

$$NE(G') \subset NE(G).$$

По индукции мы имеем аналогичное соотношение после нескольких исключений. В частности, алгоритм Цермело-Куна для позиционных игр дает равновесия Нэша.

Равновесия Нэша и конкурентные равновесия. Конкурентные равновесия, которые встречаются в теории общего экономического равновесия, очень похожи на равновесия Нэша. Опишем в самых общих чертах общее равновесие. Там имеется несколько агентов, которые реагируя на цены p, принимают какие-то (оптимальные) решения x_i. Конкурентность проявляется в том, что они только реагируют на цены, но сами на них не влияют, не пытаются менять. Равновесие - когда решения x_i удовлетворяют неким балансам, например, когда $\sum_i x_i \le 0$.

Тут полезно ввести фиктивного игрока 0, который контролирует цены и занимается достижением баланса. Обычно ему приписывается фиктивная полезность, равная $p(\sum_i x_i)$. Тогда равновесие Нэша $(p^*, (x_i^*))$ в этой вспомогательной игре дает конкурентное экономическое равновесие. В самом деле, по определению x_i^* - наилучшие ответы агентов при цене p^*, и остается проверить, что выполнены балансы. Если некоторые компоненты вектора $\sum x_i^*$ положительны, то оптимальное (для игрока 0) значение $p^*(\sum x_i^*) > 0$. С другой стороны из закона Вальраса стоимость $\sum x_i^*$ в текущих ценах равна 0. Полученное противоречие и дает, что $\sum x_i^* \le 0$.

Приведенный выше трюк позволяет иногда устанавливать существование конкурентного равновесия.

Голосования с опросом. Идея, близкая к равновесию, применима и для исследования схем голосования. Пусть X - множество альтернатив (или кандидатов); у каждого игрока функция полезности u_i на X. Голосование производится путем заполнения бюллетеней; обычно они одинаковы для всех игроков, но мы все равно обозначим через S_i множество заполнений для игрока (избирателя) i. Схема голосования задается отображением $f : \times S_i \longrightarrow X$. Так возникает игра.

Однако в ней сложно разобраться, поэтому делается такой методологический трюк. Говорится, что "до голосования" производится опрос населения и эти результаты доводятся до сведения публики. Множество возможных результатов опроса обозначим Y; это может быть $\Delta(X)$ - предсказание о шансах кандидатов, а может быть предсказание о распределении голосов. Главный смысл опроса - что он помогает определиться избирателям, помогаем им решить, за кого голосовать (как заполнять бюллетени). Мы ударимся в крайность и будем считать, что у каждого избирателя есть своя функция $\phi_i : Y \longrightarrow S_i$ (зависящая от предпочтений u_i). Тем самым определено отображение $\Psi : Y \longrightarrow X$.

Как проводится опрос и как подводятся итоги, модель не уточняет. Вместо этого требуется, чтобы результаты опроса как-то согласовывались с реальным исходом голосования. Последнее задается отображением (быть может, многозначным) $\Psi : X \longrightarrow Y$. Равновесием в такой системе называется пара (x^*, y^*) из реального исхода голосования x^* и опроса y^*, такая что $\Psi(x^*) = y^*$, а $\phi(y^*) = x^*$.

Применения к олигополии. Равновесия Нэша незаменимы при изучении олигополии, когда несколько фирм конкурируют на одном рынке. Собственно, тут впервые это понятие и возникло (у Курно в 1838 г.), хотя и не было оформлено как теоретико-игровая концепция, потому что сама теория игр появилась только лет сто спустя.

Ограничимся для простоты двумя фирмами. Пусть их издержки (при выпуске товара в количестве q) задаются функциями $C_i(q)$. Каждая фирма независимо принимает решение о выпуске q_i. Полный выпуск $Q = q_1 + q_2$. Цена, по которой он может быть продан, задается (обратной) функцией спроса $P = P(Q)$. Поэтому прибыль каждой фирмы равна

$$\pi_i = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i).$$

Каждая фирма стремится максимизировать π_i. Курно, который впервые исследовал эту задачу, предположил, что при этом выпуск другой фирмы неизменен. Поэтому условия максимизации первого порядка имеют вид

$$P(q_1 + q_2) + q_i P'(q_1 + q_2) = (dC_i/dq_i)(q_i).$$

Упростим все, считая издержки линейными, $C_i(q) = cq$, а $P(Q) = M - Q$ (так что M - это максимальная цена, по которой можно продать товар). Тогда

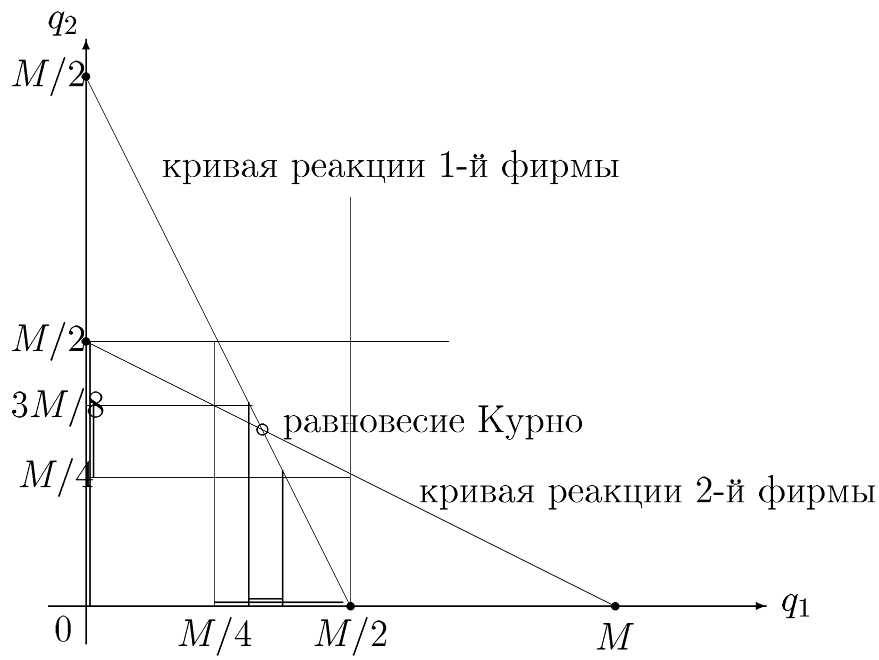
$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_i.$$

Найдем лучший ответ 1-й фирмы на выбор q_2. $\partial\pi_1/\partial q_1 = M - c - 2q_1 - q_2$; приравнивая его нулю, мы получаем

$$q_1^* = R_1(q_2) = (M - c - q_2)/2.$$

Аналогично для второй фирмы. Равновесие получается в точке пересечения кривых реакций, и $q_i^* = (M - c)/3$. Цены равны $p^* = (M + 2c)/3$.

Этот же результат можно получить методом последовательного исключения сильно доминируемых стратегий. Нужно нарисовать кривые реакции и постепенно стирать доминируемые стратегии; в пределе останутся равновесия.



Первая фирма видит, что вторая использует стратегии от 0 до $M/2$. Поэтому ее наилучшие ответы расположены на отрезке $[M/4, M/2]$. Соответственно наилучшие ответы второй фирмы находятся на отрезке $[M/4, 3M/8]$. Тогда наилучшие ответы первой фирмы располагаются на отрезке $[5M/16, 3M/8]$. И так далее. Эти вложенные отрезки сходятся к точкам $M/3$. Здесь для простоты $c = 0$.

Заметим, что если бы была монополия, т.е. одна фирма с теми же издержками, то ее прибыль максимизировалась бы при $q = (M - c)/2$ по цене $p^m = (M + c)/2$ (конечно, считается, что $M > c$). Т.е. при монополии цены выше, а выпуски меньше. При конкуренции цена $p^c = c$, а выпуск равен $M - c$. Кстати, конкуренцию можно рассматривать как олигополию с большим числом фирм.

Добровольное финансирование общественного блага. Представим, что группа индивидов имеет технологию, способную преобразовывать деньги t в общественное благо $y = f(t)$. Если трансферабельная полезность общественного блага для индивида i задается функцией $u_i(y)$, мы получаем игру. Стратегии игрока i задаются числами t_i (сколько он жертвует на общественное благо), а выигрыши измеряются функциями

$$u_i(f(\sum_j t_j)) - t_i.$$

После этого можно искать равновесия Нэша. Рассмотрим два более конкретных примера.

Пример 1. 20 соседей в деревне думают построить бассейн для купания. Полезность бассейна для каждого равна 16, а весь проект стоит 200. Что произойдет - сказать трудно, ибо имеется масса равновесий.

Пример 2. Картель из 9 фирм хочет протолкнуть законопроект, сулящий (в случае принятия) каждой фирме прибавок в 40 000 долларов. Для лоббирования этого законопроекта фирмы добровольно вносят по t_i тысяч. Вероятность прохождения проекта равна $p = t/(10+t)$, где $t = \sum_i t_i$.

Найдем равновесие Нэша. Ожидаемый выигрыш фирмы равен (в тысячах долларов) $40(t/(10+t)) - t_i$. Дифференцируя, получаем $40 \cdot 10 = (t+10)^2$, т.е. $t = 10$. Итого будет собрано 10 тысяч (в среднем с каждой фирмы по 1.100). Полная прибыль картеля составит 170 тысяч. В то же время оптимальный для картеля уровень затрат находится из максимизации функции $9 \cdot 40(t/(10+t)) - t$, что дает $t = 50$ (примерно по 5.5 с фирмы). Полная прибыль картеля составила бы тогда 300-50=250 тысяч.

Существование равновесий Нэша. Несомненно, одним из важных атрибутов любого понятия является его существование. Мы уже убедились, что равновесие Нэша - довольно разумное понятие, и поэтому пора более обстоятельно заняться его существованием. Понятно, что равновесий может не быть совсем. С другой стороны, мы знаем два частных результата о существовании:

1) если игра с нулевой суммой, то седловая точка дает равновесие;

2) алгоритм Цермело-Куна дает равновесие в "развернутой" игре с совершенной информацией.

Существование (и вычисление) равновесий в общем случае основано на анализе соответствий наилучших ответов. Раньше мы для каждого игрока i определили соответствие $Best_i : S_{-i} \Longrightarrow S_i$, или подмножество $Best_i \subset S_N$. Так вот множество равновесий Нэша - это в точности общие точки всех $Best_i$.

Пользуясь этим, можно находить равновесия в биматричных играх. Нужно в каждом столбце отметить наилучшие ответы первого игрока, а в каждой строчке - наилучшие ответы второго. Пересечения и будут соответствовать равновесиям. Например, рассмотрим матричную игру

0♡	1	♣7
4	♣2♡	3
♣9	0♡	0♡

Здесь мы знаком ♣ отмечали лучшие ответы первого игрока, а знаком ♡ -

лучшие ответы второго. Оба значка стоят в клетке с 2; это и есть равновесие Нэша в данной игре.

Это же показывает, почему равновесий может не быть - "скачки и дыры". Но если дыр и скачков нет, можно рассчитывать на существование равновесий. Классический результат в этом направлении установил Нэш в 1951 г. Грубо говоря, он утверждает, что в выпуклой ситуации равновесия существуют.

Теорема Нэша. *Предположим, что в игре* $(N, (S_i), (u_i))$ *все множества* S_i *- выпуклые компакты, а функции выигрыша* u_i *- непрерывны и вогнуты по своей переменной (т.е.* u_i *вогнута по* s_i*). Тогда существует хоть одно равновесие Нэша.*

Доказательство фактически уже приводилось в Лекциях о неподвижных точках. Напомним его основные моменты. Для каждой ситуации $s_N \in S_N = S_1 \times ... \times S_n$ и каждого игрока i рассмотрим его наилучший ответ $Best_i(s_N) = \mathrm{Argmax}(u_i(\cdot, s_{-i}))$. Это непустое (непрерывность u_i) и выпуклое (вогнутость u_i) подмножество S_i. Рассмотрим теперь соответствие $F : S_N \Longrightarrow S_N$, которое точку s_N переводит в множество $Best_1(s_N) \times ... \times Best_n(s_N)$. Довольно легко проверить (проверьте!), что это замкнутое (или полунепрерывное сверху) соответствие. Поэтому применима теорема Какутани, которая утверждает существование неподвижной точки $s_N^* \in F(s_N^*)$. Понятно, что s_N^* будет равновесием Нэша.□

Полезно сравнить этот результат с аналогичной теоремой фон Неймана в антагонистическом случае. Ясно, что теорема Нэша посильнее, тогда как теорема Неймана явно более "элементарная".

В общем случае следует ожидать, что существует *конечное* число равновесий, и что все они неоптимальны по Парето. В нашем примере с дуополией и финансированием общественного блага было именно так.

Лекция 11. Равновесия Нэша в смешанных стратегиях

Рандомизированные стратегии. Классическое применение теоремы Нэша относится к существованию равновесий в смешанных расширениях, или смешанных стратегиях. Как уже говорилось, многие игры не имеют равновесия (в чистых стратегиях). Рассмотрим игру

$1, -1$	$-1, 1$
$-1, 1$	$1, -1$

Знание игроком 1 хода игрока 2 позволяет ему добиться преимущества и получать выигрыш. Значит 2-му (как и первому) нужно скрыть свои намерения. Но где взять гарантии, что ваш противник не узнает ваш ход?

К счастью, есть способ сделать собственный выбор непредсказуемым (даже для себя!) - это сделать его случайным, использовать, как говорится, рандомизированную стратегию. Конечно, нужно позаботиться, чтобы противник не видел результатов работы вашего датчика случайных чисел.

Формально это означает, что игрок от множества "чистых" стратегий S_i переходит к множеству "смешанных" стратегий $\Delta(S_i)$. Выигрыши определяются с помощью ожидаемой полезности. Собственно, здесь впервые становятся важными численные значения выигрышей, а не соответствующие предпочтения. Переход от игры $G = (N, (S_i), (u_i))$ к игре $G^m = (N, (\Delta(S_i)), (U_i))$ называется *смешанным расширением.* Мы уже говорили об этом в Лекции 4.

Смешанные равновесия. Так называются равновесия Нэша в смешанном расширении, или равновесия в рандомизированных стратегиях. Вообще, полезно сравнить исходную игру G с ее смешанным расширением G^m. Например, как изменятся α_i и β_i? Нас же интересуют равновесия Нэша. Положение дел с равновесиями проясняют следующие утверждения.

А) **Лемма.** *Каждое равновесие в игре G является равновесием в смешанном расширении G^m.*

В самом деле, пусть s_N^* - равновесие в G, т.е.

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

для любой (чистой) стратегии s_i игрока i. Нужно проверить, что то же будет для любой смешанной стратегии σ_i. Но

$$u_i(\sigma_i, s^*_{-i}) = \sum_{s_i} u_i(s_i, s^*_{-i})\sigma_i(s_i) \leq u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \sum_{s_i} \sigma_i(s_i) = u_i(s^*_i, s^*_{-i}).\square$$

Б) *Если профиль чистых стратегий s_N является равновесием в G^m, то s_N - равновесие в исходной игре G.*$\square$

Эти два утверждения можно выразить одной формулой

$$NE(G) = NE(G^m) \cap S_N.$$

В) Могут появиться новые смешанные равновесия. Рассмотрим приведенную выше игру "орлянка", в которой нет чистых равновесий. В смешанных стратегиях равновесие есть: нужно первому использовать стратегию $0.5 \otimes s1 + 0.5 \otimes s2$, а второму также с равными шансами замешивать $t1$ и $t2$.

Г) Принципиальным фактом является то, что в рандомизированых стратегиях равновесия всегда существуют.

Теорема (Нэш). *Для любой конечной игры G существуют равновесия в смешанном расширении G^m.*

В самом деле, стратегические множества $\Delta(S_i)$ игры G^m - выпуклые компакты, а функции выигрыша U_i аффинны (значит вогнуты) по переменной σ_i и непрерывны. Значит применима предыдущая теорема.$\square$

Обсуждение смешанных равновесий. Нужно отдавать себе отчет, что использование рандомизированых стратегий само по себе не ведет к увеличению выигрыша. Смешанная стратегия не может дать больше, чем чистые стратегии из ее носителя. Напомним, что *носителем* рандомизированной стратегии $\sigma \in \Delta(S_i)$ называется множество

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{s_i \in S_i,\ \sigma(s_i) > 0\}.$$

Более того, если σ_i - лучший ответ на σ_{-i}, то выигрыш при σ_i равен выигрышу при использовании любой чистой стратегии из носителя σ_i.

Это очень важное место! Оказывается, у игрока i (почти) нет никаких стимулов, чтобы выбирать именно равновесный набор вероятностей из $\mathrm{supp}(\sigma^*_i)$. Все стратегии из $\Delta(\mathrm{supp}(\sigma^*_i))$ являются наилучшими ответами на σ^*_{-i}. Это дает основания сомневаться в практической значимости смешанных равновесий. Если в игре нет чистых равновесий, это обычно говорит о том, что задача плохо поставлена.

Единственное оправдание смешанных стратегий в том, что они запутывают противника, порождают у него неопределенность, тревогу и вызывают нужную реакцию. "Ксенофонт писал, что знание того, что где-то находится отряд противника без знания его местоположения и сил, разрушает безопасность, и все места неизбежно становятся подозрительными" (Гюйбо). Вспомним в этой связи сказку Пушкина о золотом петушке.

Блеф. Можно также сказать, что рандомизация - это математическое выражение идеи *блефа*. Поясним это неформальным обсуждением одной упрощенной карточной игры. Игроки (Джон и Мэри) ставят по рублю и затем Мэри получает случайную карту. Карта с равными шансами может быть хорошей или плохой. При хорошей карте выигрывает Мэри и может получить рубль. Однако, поглядев на карту, она может удвоить ставку. А Джон - принять это удвоение, или спасовать.

Если Мэри будет удваивать только при хорошей карте, это будет явным сигналом для Джона, что у нее хорошая карта, и он будет пасовать. В результате при хорошей карте Мэри выигрывает 1, а при плохой - проигрывает 1 (в среднем). Для получения более лучшего результата ей нужно блефовать, т.е. удваивать иногда и при плохой карте. Как часто - об этом и говорит смешанное равновесие.

Видимо, смешанные равновесия представляют интерес только в подобных многократно повторяющихся играх.

Вычисление равновесий Нэша. Вообще, нет какого-то простого рецепта нахождения равновесий (смешанных), потому что это связано с нахождением неподвижных точек (с теоремой Какутани или Брауэра). Однако некоторые соображения могут оказаться полезными.

1) Первое из них - все то же исключение доминируемых стратегий. Иногда полезно использовать симметрию.

2) Второе связано в перебором вариантов. Множество тех чистых стратегий, которые входят с ненулевой вероятностью в равновесные стратегии (т.е. носитель), есть важный качественный аспект равновесия. Для нахождения равновесий можно для начала перебирать все подмножества $D_i \subset S_i$ и для каждого пытаться решить соответствующую систему равенств (и неравенств), приравнивая выигрыши некоторому (искомому) значению ω_i. Более подробно, для каждого i мы имеем следующую систему равенств

$$U_i(x, \sigma_{-i}) = U_i(y, \sigma_{-i})$$

для любых $x, y \in D_i$ и условия

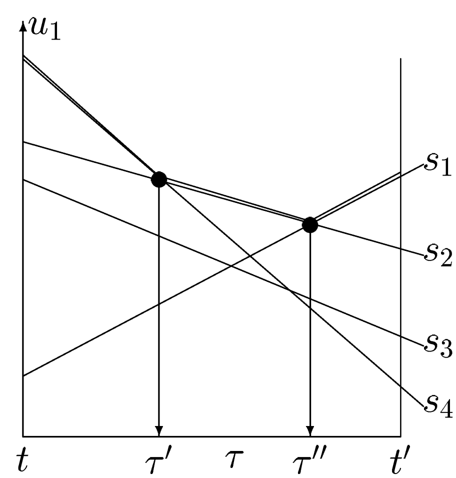
$$\mathrm{supp}(\sigma_i) \subset D_i$$

(плюс, конечно, неравенства $U_i(x, \sigma_{-i}) \geq U_i(z, \sigma_{-i})$ для $z \notin D_i$). Каждое i дает $D_i - 1$ уравнение, так что уравнений столько же, сколько неизвестных. Получаются в общем случае нелинейные уравнения. Тем не менее в общем случае у них конечное число решений.

Конечно, для больших игр такой алгоритм работает плохо.

3) Положение чуть упрощается, если всего два игрока. Тогда приведенные выше уравнения (и неравенства) являются линейными. При этом если $D_1 \neq D_2$, то (снова в общем случае) решений нет. В самом деле, если $D_1 > D_2$, то мы получаем подсистему из D_1 уравнений с D_2 неизвестными.

4) Пусть снова два игрока, причем у второго всего две стратегии - t и t'. Смешанная стратегия второго - точка τ на отрезке $[t, t']$. Тогда стратегии первого можно изображать как аффинные функции на этом отрезке, $s_i(t)$. Конечно, для любого τ есть наилучший ответ $s^*(\tau)$, единственный в случае общего τ. И если τ, в свою очередь, является наилучшим ответом на $s^*(\tau)$, мы получаем равновесие (в общем случае такое может случиться только когда $\tau = t$ или t'). Но в некоторых точках будет два (опять в общем случае) наилучших ответа первого игрока. Тогда нужно проверить это все на предмет наилучших ответов второго.



Например, в ситуации на рисунке есть два "подозрительных" значения τ.

Особенно просто все, когда и у первого две стратегии. Тут надо рисовать трехзвенные зигзаги. Мулен разбивает общие такие игры на три класса. Первый - когда у кого-то есть доминирующая стратегия (нетипичный представитель - Дилемма Заключенных). Второй - когда нет чистых равновесий (это "орел-решка"). Тут появляется одно смешанное равновесие. Третий - когда есть два чистых равновесия (типичный представитель - "семейный спор"). Кроме двух чистых, есть еще одно смешанное равновесие.

5) В случае антагонистической игры, если у одного (второго) игрока всего две стратегии, равновесия можно искать способом, приведенным в лекции 6.

Например, в задаче о блефе выигрыши Мэри - четыре строчки: $(0,0)$, $(0,1/2)$, $(1,-1/2)$, $(1,0)$. Если нарисовать, мы получим отрезок, соединяющий $(0,1/2)$ с $(1,0)$; он пересекает биссектрису в точке $(1/3,1/3)$. Отсюда видно цену игры (она равна $1/3$ для Мэри) и равновесные стратегии. В частности, Мэри с вероятностью $1/3$ должна блефовать, т.е. удваивать ставки несмотря на плохую карту.

Пример. У хозяина работает работник; он может работать хорошо (Х) или сачковать (С). Хозяин может либо проверять его (П), либо нет (Н). Таблица выигрышей такова

	Х	С
П	$10,2$	$4,0$
Н	$10,2$	$4,3$

В этой игре два равновесия, но, конечно, хозяину лучше проверять.

Представим теперь, что у хозяина два работника, но проверить он может только одного (а выигрыши для хозяина складываются). Тогда у него есть два равновесия: проверять первого работника (и тогда первый старается, а второй сачкует; выигрыш хозяина равен 14) или проверять второго. Но представим, что хозяин использует смешанную стратегию и с равными вероятностями проверяет того и другого. Как легко понять, в этом случае каждый работник будет стараться, и хозяин получит выигрыш 20.

Не противоречит ли этот пример сделанному выше замечанию, что смешанная стратегия не может дать больше чистой?

Лекция 12. Равновесия Нэша (окончание)

Я думал закончить с равновесиями Нэша, но кое-какая мелочь осталась, и не хотелось бы бросать.

Еще раз доминирование. Я уже говорил, что при нахождении равновесий можно исключать (сильно) доминируемые стратегии. Все же стоит сказать об этом еще раз и поточнее.

В любой игре сильно доминируемая стратегия не может входить в равновесие по Нэшу. Иначе говоря, если $s_N^* = (s_N^*) \in NE(G)$, то для любого игрока i стратегия s_i^* не строго доминируется. Это очевидно.

Второе замечание относится уже к смешанному расширению. Пусть G^m - смешанное расширение (конечной) игры G. Пусть σ_i и σ_i' - две (смешанные) стратегии игрока i. Как понимать что σ_i доминирует σ_i', на чистых стратегиях остальных, или на любых смешанных? Очевидно, что все равно как.

Третье замечание. Если в смешанную стратегию входит с ненулевой вероятностью сильно доминируемая стратегия, то и смешанная сильно доминируется. В самом деле, пусть $\sigma = \alpha \otimes s + (1-\alpha)\tau$, $\alpha > 0$ и стратегия s доминируется стратегией s' (можно даже смешанной). Тогда смешанная стратегия $\sigma' = \alpha \otimes s' + (1-\alpha)\tau$ (сильно) доминирует стратегию σ.

Собирая все вместе, мы получаем утверждение, обобщающее приведенный ранее факт: *пусть множества S_i' содержатся в S_i и получены удалением сильно доминируемых стратегий. Тогда*

$$NE(G'^m) = NE(G^m).$$

Если же мы удаляем слабо доминируемые стратегии, то имеет место формула

$$NE(G'^m) = NE(G^m) \cap G'^m.$$

Эффект фокальной точки. Как показывает игра "семейный спор", равновесий может быть много. Позже мы рассмотрим несколько утоньчений (рафинирований) Нэша, но даже эти рафинации могут быть множественными.

Когда равновесий много, позиции теоретика становятся шаткими. Любое из равновесий, ожидаемое игроками, обладает самооправдывающим свойством. Что же могло бы заставить игроков имплементировать некоторое специальное равновесие? Да любая вещь, заставляющая их фокусировать внимание именно на этом равновесии. Шеллинг в книге *The Strategy of Conflict*, Cambridge (1960), назвал это *эффектом фокальной точки.* Это любое свойство, выделяющее конкретное равновесие среди всех остальных. Им могут быть традиции, статус кво и т.п., то есть как правило, внемодельные вещи.

Фокальное равновесие может определяться и свойствами функций полезности. Рассмотрим игру - *дележка долларов.* Есть 100 долларов; каждый называет число от 0 до 100. Если сумма ≤ 100, каждый получает что просил; иначе по нулям. Есть масса равновесий (например, $(91, 9)$ и даже $(100, 100)$), но среди них есть и фокальное: $(50, 50)$, т.к. каждый игрок понимает, что это эффективное и справедливое решение. Конечно, это не значит, что любой эффективный и справедливый исход может быть равновесием.

С теоретико-игровой точки зрения *культурные нормы* - это правила, которые общество использует для выделения фокальных равновесий в конфликтных ситуациях. Например, правило ездить по дороге с правой стороны.

Бесконечные стратегии. До сих пор мы в основном рассматривали конечные игры. Сделано это было главным образом для простоты, чтобы избежать математических усложнений. Теперь мы кратко рассмотрим случай, когда множества стратегий S_i - метрические компакты. Грубо говоря, "все" результаты для конечных множеств остаются верными, когда условия конечности заменяются на компактность.

Прежде всего, нам нужно перенести определение $\Delta(X)$ с конечных множеств X на метрические компакты. Наметим вкратце, как это сделать. Первое: определим простые лотереи на X как конечные "выпуклые" комбинации $\sum_i \sigma_i \otimes x_i$ ($\sigma_i \geq 0$, $\sum \sigma_i = 1$); множество простых лотерей обозначим $\Delta_0(X)$. Второе - перенесем на $\Delta_0(X)$ метрику ρ с X. Делается это так. Пусть μ и ν - две такие лотереи (или распределенные единичные массы). Расстояние между ними - это минимальная стоимость перевозки массы μ в ν; стоимость берется в "тонно-километрах". Наконец, $\Delta(X)$ - это пополнение $\Delta_0(X)$ в этой метрике. Мы автоматически получаем на $\Delta(X)$ метрику (продолжающую метрику ρ на X и называемую продолжением Канторовича-Рубинштейна) и компактность $\Delta(X)$.

Мы утверждаем, что если все стратегические множества S_i являются метрическими компактами (участников по-прежнему конечное число), а функции выигрыша непрерывны на произведении X_i (в топологии произведения), то существует (смешанное) равновесие Нэша.

Теорема (Гликсберг, 1952). *Если стратегические множества S_i компактны, а полезности u_i непрерывны, то существует равновесие Нэша в рандомизированных стратегиях.*

Доказательство. Можно воспользоваться "бесконечномерным" обобщением теоремы Какутани. Однако есть и более элементарный путь, который мы наметим в общих чертах. Он основан на конечной аппроксимации нашей (бесконечной) игры. Здесь полезно следующее понятие. Скажем, что ситуация s^*_N является *ε-равновесием*, если для любого игрока i и любой s_i

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^i_{-i}) - \varepsilon.$$

Приступим к доказательству. Так как функции выигрыша u_i непрерывные, они равномерно непрерывны, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что $|u_i(s) - u_i(s')| < \varepsilon$ при $\rho(s, s') < \delta$. Возьмем для каждого игрока i конечную δ-сеть $X_i \subset S_i$. Тогда можно рассмотреть конечную игру $(N, (X_i), (u_i|_{X_i}))$ и в ней некоторое (смешанное) равновесие $\sigma_N \in \times_i \Delta(X_i)$. Конечно, этот профиль смешанных стратегий не обязан быть равновесием в исходной игре (точнее, в ее смешанном расширении). Однако, как легко понять, σ_N является ε-равновесием в G^m.

В самом деле, пусть σ_i - произвольная стратегия из $\Delta(S_i)$; мы утверждаем, что

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - \varepsilon \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Ясно, что мы можем считать σ_i простой смесью, то есть $\sigma_i = \sum \alpha(j)s(j)$, где $\alpha(j)$ - веса, а $s(j) \in S_i$. Если для каждой точки $s(j)$ взять ближайшую к ней точку $x(j)$ из X_i и образовать $\sigma'_i = \sum \alpha(j)x(j)$, то $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ отличается от $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ менее чем на ε. А $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ уже из определения равновесия.

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ мы нашли ε-равновесие. Остается устремить ε к нулю и воспользоваться компактностью $\Delta(S)$.□

Пример. *Китайский покер.* Чтобы вы не обольщались, приведу стандартный пример бесконечной игры, где равновесий (даже смешанных) нет. Два игрока, каждый называет натуральное число; назвавший меньшее число платит 1 рубль другому. Здесь множество S чистых стратегий - $\mathbb{N}$, конечно, это некомпактное множество. Ясно, что чистых равновесий здесь нет, и каждая стратегия (слабо) доминируется. Но в действительности нет и смешанных равновесий.

Отметим, что тут совершенно ясно, что считать смешанной стратегий, так что проблема не в этом. Смешанная стратегия σ - это последовательность $(\sigma(n))$ неотрицательных чисел, таких что $\sum_n \sigma(n) = 1$.

Почему же нет равновесий? Пусть ваш противник использует смешанную стратегию τ. Ваша стратегия будет наилучшим ответом только тогда, когда носитель вашей стратегии σ расположен выше носителя τ; в противном случае вы можете улучшить свой ожидаемый выигрыш. В самом деле, пусть ваш (ожидаемый) выигрыш равен $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Возьмите целое число n

такое что $\tau(n) + \tau(n+1) + ... < \varepsilon/2$ и примените чистую стратегию n. Ваш выигрыш в этом случае будет равен

$$\tau(1) + ... + \tau(n-1) - \tau(n+1) - ... \ ,$$

что строго больше, чем $1-\varepsilon/2-\varepsilon/2 = 1-\varepsilon$. Итак, если у вас есть наилучший ответ, то носитель вашей стратегии расположен выше носителя противника. Но тогда ваш противник использует не оптимальную стратегию. Так что равновесий нет.

Равновесия в разрывных играх В чем же дело? Что тут не подходит под теорему Гликсберга? Проще всего сказать, что множество $\mathbb{N}$ некомпактно. А если его компактифицировать? Тогда функции выигрыша будут разрывны.

Тем не менее даже в случае разрывных функций иногда бывают равновесия. Не претендуя на охват темы, рассмотрим один пример - "дикий" аукцион доллара, или "платят все". Есть $n > 1$ участников, они называют числа $x_i \geq 0$. Назвавший наибольшее число получает доллар (считается, что ценность его для всех равна 1), и *каждый (!)* платит x_i. Таким образом, выигрыш участника (мы пренебрегаем связками) i равен

$$u(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < x^*_{-i} \\ 1 - x_i, & \text{если } x_i > x^*_{-i} \end{cases} ,$$

где $x^*_{-i} = \max(x_j, j \neq i)$. (Похожие функции выигрыша будут в олигополии Бертрана.) Довольно легко понять, что использовать числа > 1 смысла нет (хотя в реальных розыгрышах этой игры народ часто платил за доллар гораздо больше доллара!), поэтому в качестве множества стратегий S_i можно принять отрезок $[0, 1]$.

Ясно, что равновесий в чистых стратегиях нет. Однако смешанные равновесия существуют; приведем одно. Оно будет симметричным и более того, размазанным по всему отрезку $[0, 1]$. Пусть $F(x)$ - функция распределения искомой смешанной стратегии (т.е. вероятность того, что $x_i \leq x$). Найдем ожидаемый выигрыш игрока i, когда он использует (чистую) стратегию x. Его выигрыш равен $1 - x$, если все остальные назвали числа, меньшие x (а вероятность этого равна $F(x)^{n-1}$), и равен $-x$ в противном случае. Таким образом,

$$Eu_i(x) = (1-x)F(x)^{n-1} - x(1 - F(x)^{n-1}) = F(x)^{n-1} - x.$$

Игрок включает в свою равновесную стратегию те x, которые дают ему максимум этой функции. По условию все x должны быть равновыгодными, т.е.

все должны давать НУЛЕВОЙ ожидаемый выигрыш. Так мы получаем, что

$$F(x)^{n-1} = x, \text{ или } F(x) = x^{1/(n-1)}.$$

Как легко посчитать, $Ex_i = 1/n$ (грубо говоря, каждому игроку нужно называть примерно $1/n$), так что $E(\sum_i x_i) = 1$ и устроитель аукциона в среднем ничего не выигрывает! К сожалению (?), в жизни люди редко ведут себя в соответствии с этим правилом.

Лекция 13. Рафинирование равновесий для развернутой формы

Взгляд вперед. Мы обсудили равновесия Нэша, центральное понятие некооперативной теории игр. Что нас ждет дальше? Мы видели, что равновесия (во всяком случае смешанные) "всегда" существуют. Однако их может быть слишком много, и среди них могут быть дурацкие. Естественно возникает вопрос - нельзя ли наложить на равновесия некоторые более жесткие требования, которые отсекали бы "плохие, шаткие" равновесия? Это тема рафинирования Нэша и совершенных равновесий.

Вторая тема - модификации игры или понятия равновесия, которые расширяют возможности решений. К этому относятся игры с сообщениями, коррелированные равновесия и повторяющиеся игры.

Наконец, нужно обсудить важное понятие игр с несовершенной информацией и соответствующее понятие Байесова равновесия.

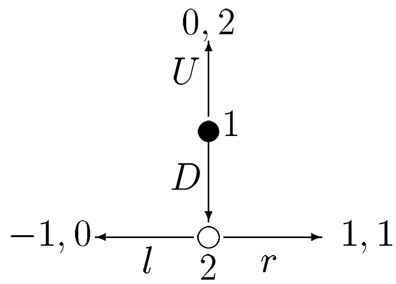
Строгие равновесия. Вспомним один пример с дурацкими равновесиями: голосование простым большинством при двух кандидатах. Все любят A, но голосуют за B. Это равновесие, но очень дурацкое. Конечно, индивидуальное переключение с B на A не улучшает исход, но и не ухудшает же! Стратегия A доминирует B (слабо, конечно). В этой частной ситуации у игрока два лучших ответа - A и B, и он выбрал не самый лучший. Подобных казусов, можно надеяться, не будет, если равновесие таково, что лучший ответ однозначен для каждого игрока.

Это хорошее понятие, единственный недостаток - что оно исключает смешанные равновесия, а поэтому не всегда и существует. Можно предложить некоторое его смягчение.

Определение. Профиль стратегий $(s_i^*) \in S_N$ называется *строгим равновесием*, если для любого игрока i стратегия s_i^* является наилучшим ответом не только на s_{-i}^*, но на любой набор s_{-i}, где $s_j \in Best_j(s_{-j}^*)$.

Недостаток опять в том, что такие равновесия не всегда существуют; пример - орлянка. Ниже мы обсудим несколько более удачных понятий рафинирования.

Неправдоподобные угрозы. Рассмотрим следующую игру



Эту игру можно понимать как простейшую форму ситуации "входа в отрасль". Фирма 1 (агрессор) может не входить (U) в некую отрасль занятую монополистом 2. Либо может войти (D), и тогда "наседка" 2 может ответить либо войной цен (l), либо пододвинется (r) и они поделят рынок. Что же произойдет в этой игре?

Алгоритм Цермело-Куна дает равновесие (D, r) с выигрышами $(1, 1)$. Однако есть другое равновесие, а именно (U, l) с выигрышами $(-1, 0)$. Здесь "наседка" как бы угрожает агрессору: "Если ты войдешь, то я буду сражаться, и ты получишь -1". Если агрессор воспримет эту угрозу как реальную, он воздержится от входа. Однако скорее всего он воспримет эту угрозу как неправдоподобную. Дело в том, что если первый все-таки войдет, то второму игроку будет невыгодно приводить угрозу в исполнение. Понимая это, первый игрок скорее всего не поверит в угрозу и проигнорирует ее.

В чем же дефективность стратегии l? В том, что она находится вне равновесного пути и поэтому не подвергается реальному испытанию на оптимальность. Формально она является наилучшим ответом на стратегию первого U, но фактически это не наилучший ход в состоянии 2. Это проявляется и в том, что стратегия l слабо доминируется стратегией r.

Этот пример поднимает еще один интересный вопрос. Угроза может быть сообщена только если есть сообщения; мы же предполагаем, что игра идет молча. Как же тогда 1-й может узнать, что собирается делать 2-й в позиции, которая лежит вне пути игры? Скорее это не то, что собирается делать 2-й, а то, что 1-й думает об этом. Но тогда получается, что стратегии 2-го выбирает 1-ый!

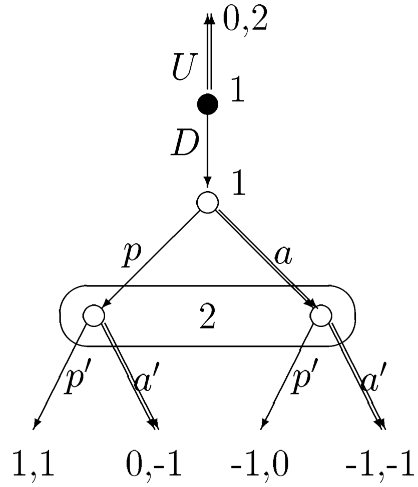
Неправдоподобные обещания. Быть может, есть похожие примеры и с неправдоподобными обещаниями, хотя мне не удалось придумать такой пример с двумя игроками. Однако подобная ситуация часто встречается в экономическом контексте. Например, фирма может пообещать покупателям, что она выпустит ограниченное число изделий и они будут редкостью. Покупатели заинтересованы купить раритет. Но где гарантии, что фирма не начнет в погоне за прибылью делать дополнительные партии изделий? Отсутствие таких гарантий (даже при честных намерениях фирмы) может привести к отказу покупателей, что плохо и тем, и другим. Но не так-то просто убедительно связать себя. Пример с киднэпингом: Джон похитил Мэри и готов отпустить ее за умеренный выкуп, но боится, что после освобождения она заложит его. Мэри чистосердечно обещает ему, что не продаст, но где гарантии? И если ей не удастся как-то убедить Джона и дать твердые гарантии, ему придется избавляться от нежеланного свидетеля.

Рафинирование равновесий Нэша. Наличие малоправдоподобных равновесий заставила теоретиков искать более сильные условия на равновесия. Эта программа известна под названием рафинирования, утоньчения, усовершенствования. Скажем сразу, что окончательного, приемлемого во всех случаях ответа получить не удалось; имеется несколько альтернативных подходов. Общее в них то, что предлагается принимать в расчет и невероятные события, которые имеют нулевую вероятность при движении по равновесному пути.

Могло бы показаться - зачем учитывать поведение в невероятных состояниях, которые не реализуются в равновесии? Дело, однако, в том, что часто нелепые равновесия возникают именно потому, что некто ведет себя иррационально вне равновесного пути, как в приведенном выше примере со входом в отрасль. Причем это состояние только потому и не встречается на равновесном пути, что там второй игрок ведет себя иррационально.

Совершенство относительно подыгр. Идея неправдоподобных угроз работает не только в случае игр с совершенной информацией (где она приводит к обратной индукции), но в некоторых других случаях. Например, когда мы обсуждали конкурентное равновесие, мы предполагали, что потребители (после выбора цен) ведут себя "конкурентно", не пытаясь своим нерациональным поведением повлиять на цены. Или, вернемся к примеру с входом в отрасль. Допустим, что если агрессор решил входить, у него тоже есть возможность вести себя пассивно или начать активную борьбу с "наседкой". Т.е. игра выглядит как на рисунке ниже.

И если второй настроен активно, то первому лучше не входить (а в случае входа - все равно как вести). А с другой стороны, в игре 2×2, начинающейся после входа, у обоих игроков есть доминирующие стратегии (p, p'), и это единственное равновесие в этой подыгре. Поэтому агрессор должен вроде понимать, что с случае его входа все закончится мирным исходом $(1, 1)$, и смело входить.



Идея совершенства - оптимальность поведения во всех подыграх, чтобы равновесие оставалось равновесием начиная с любой позиции, независимо от того, сколь ничтожна вероятность попадания в эту позицию. Однако тут же возникает вопрос, что считать подыгрой. Казалось бы, возьмем любую вершину и включим все, что идет после нее. Но ведь имеются еще информационные множества, и они не должны выводить за пределы нашей "подыгры".

Более точно, пусть t - вершина дерева игры, и $G(t)$ - множество вершин, следующих за t. Если для любой вершины $t' \in G(t)$ все информационное множество $h(t')$ лежит внутри $G(t)$, мы говорим, что t определяет подыгру $G(t)$ с началом в t.

Профиль поведенческих стратегий называется *совершенным равновесием* (относительно подыгр, subgame perfect equilibrium), если его ограничение на любую подыгру является равновесием Нэша. Это очень интересное понятие было предложено Селтеном в 1965 г.

Свойства совершенных равновесий. Для игр с совершенной информацией совершенство совпадает с алгоритмом Цермело-Куна (или обратной индукцией). Более того, это одновременно учитывает и возможную неоднозначность алгоритма, и возможность несовершенства информации (т.е. возможность информационных множеств).

Так как исходная игра тоже подыгра, совершенное равновесие является равновесием Нэша. Но, конечно, не любым, как показывают приведенные выше примеры.

Далее, подыгра любой подыгры игры G является подыгрой игры G. Поэтому совершенное равновесие остается совершенным равновесием и в любой подыгре. И вообще, подыгры игры G сами образуют дерево. Это обстоятельство подсказывает, как искать все совершенные равновесия. Нужно, как в методе обратной индукции, начинать с конца, в каждой терминальной подыгре находить равновесия, и ставить в начало этих подыгр один из получающихся исходов. Помимо прочего это дает теорему существования совершенных (к подыграм) равновесий.

Пример. *Дуополия Штаккельберга.* В 1934 Штаккельберг предложил модель дуополии с фирмой-лидером (первой выбирающей объем своего выпуска) и фирмой-последователем. Примером может служить компания "Дженерал Моторс" в автомобильной промышленности США, или *IBM* на рынке персональных компьютеров.

Реакция второй фирмы:

$$R_2(q_1) = (M - q_1 - c)/2.$$

Зная эту реакцию, первая фирма максимизирует

$$q_1(M - q_1 - R_2(q_1) - c) = q_1(M - q_1 - c),$$

и $q_1^* = (M-c)/2, q_2^* = (M-c)/4$. Напомним, что в равновесии Курно выпуски составляли треть от $M - c$. Покупателям лучше, лидеру лучше, а второй фирме - хуже.

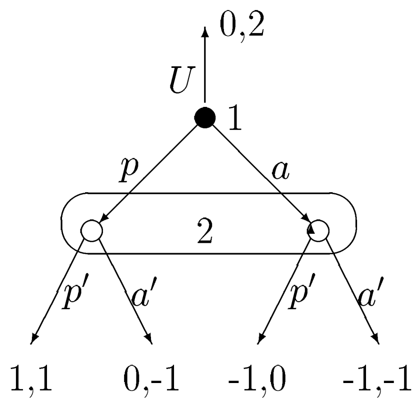
Могло бы показаться странным, что знание второй фирмой выпуска лидера ухудшает ее положение. Как это дополнительная информация может ухудшить ваше благополучие?! Ответ в том, что второй фирме вредит не ее знание q_1, а знание первой фирмы о том, что вторая знает q_1.

Пример. Рассмотрим взаимоотношения фирмы (бесконечно живущей, с дисконтом $\delta \approx 1$) и последовательностью рабочих, каждый из которых живет один период. В каждом периоде тайминг такой: сначала рабочий выбирает уровень усилий: вкалывать, производя для фирмы товар стоимостью 3 рубля и получая дизютилити 1 рубль, или сачковать. Затем фирма смотрит на выпуск и назначает зарплату w 0 этому рабочему. (Можно считать, что $w = 0$ или 2.)

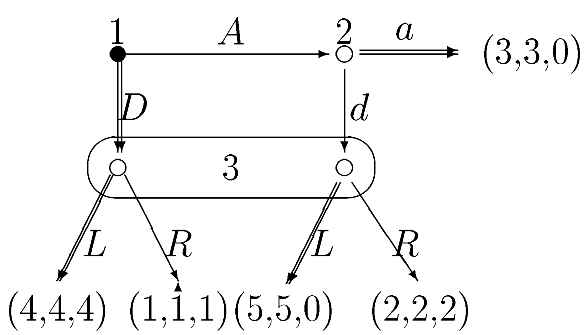
Ясно, что в однократной модели решение такое: фирма платит $w = 0$, а рабочий сачкует. Однако в бесконечной ситуация меняется: там есть и более интересные решения, если рабочие получают информацию о предыдущем течении игры. Более точно, имеется такое саб-гейм-перфектное равновесие: рабочий вкалывает, если фирма до этого оплачивала труд (а не безделье) предыдущих рабочих, и сачкует во всех остальных случаях. Фирма платит $w = 2$, если рабочий вкалывает, и не платит в противном случае.

Лекция 14. Секвенциальные равновесия

Недостаточность подыгр. Понятие совершенства равновесия по отношению к подыграм дает мощный принцип отсеивания "плохих" равновесий. Однако он плохо работает, если в игре мало подыгр. Это можно продемонстрировать на следующей модификации предыдущего примера.



По существу, это та же игра, однако теперь в ней нет собственных подыгр. Рассмотрим еще один пример (Селтен (1975)):



В ней имеется равновесие (D, a, L). Это равновесие совершенно, но только потому, что здесь нет собственных подыгр. Однако выбор вторым игроком стратегии a странен. Ведь если он уверен, что 3-й будет использовать L, то ему надо было бы выбрать d. Пусть даже шанс сделать ход для 2-го ничтожен, но d лучше a! И если он выберет d, то 1-й переключится на A, а тогда 3-й переключится на R. Но тогда 2-й вернется к a, 1-й останется на A, и это дает второе равновесие (A, a, R).

Здесь нет подыгр, и буква определения молчит, но дух совершенства требует определенно и ясно: *игрок в любой позиции должен действовать оп-*

тимально, даже если маловероятно, что удастся попасть в эту позицию. Как же придать этому смысл?

Рациональность и веры. Нужно ясно понимать, в чем заключается препятствие к понятию оптимального поведения в некоторой позиции. Мы уже отмечали, что выигрыш игрока i (контролирующего ход в позиции x) зависит от стратегий остальных. Но не это препятствие, потому что в духе равновесия Нэша тут предполагается, что стратегии всех остальных игроков фиксированы и известны. Главное препятствие в том, что выбор хода в позиции x автоматически меняет ход и во всех позициях из информационного множества $h(x)$. А значит и выигрыши на тех путях игры, которые проходят через другие позиции $x' \in h(x)$. Поэтому мы не можем просто начать "подыгру" с позиции x, нужно начинать ее из информационного множества h.

Теперь основная неопределенность нашего игрока i заключается в том, в какой из позиций в h находится игра. Тут ничего не поделаешь, для разрешения этой неопределенности нужно задаваться "верой" на h. То есть игрок i должен задаться некоторой вероятностной мерой $\mu(h) \in \Delta(h)$.[2] Как только такая вера задана, то можно образовывать ожидаемые выигрыши (в зависимости, скажем, от хода в h) и оценивать оптимальность используемого хода в h.

Заметим, что информационные множества других игроков могут "пересекать" нашу "подыгру" $G(h)$, начинающуюся из h, но это нас не должно волновать: ведь стратегии таких игроков фиксированы. А вот если информационные множества того же игрока i начнут вылезать из $G(h)$, это могло бы стать источником неприятностей. К счастью, для игр с совершенной памятью (см. Лекцию 4) такого произойти не может.

Одним словом, чтобы говорить об оптимальности в каждой позиции, нужно задаться не только стратегиями σ, но и верами μ. И эти данные - стратегии и веры - должны быть согласованы друг с другом. Мы скажем подробнее об этом чуть ниже, а пока заметим только, что и классическое равновесие Нэша можно воспринимать в таком же духе. Предположим, что для каждого игрока i заданы стратегия $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ и вера $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$; они образуют равновесие Нэша, если: а) σ_i - наилучший ответ при вере μ_i, и б) каждая вера μ_i совпадает с $\otimes_{j \neq i} \sigma_j$. Мы видим здесь согласование двоякого вида. Условия а) выражают рациональность каждого игрока при имеющихся верах. Условия б) говорят о формировании вер - они в точности совпадают с тем, что

[2]К вопросу о том, как формировать эту веру $\mu(h)$, мы еще вернемся.

делают остальные, можно сказать - *истинные*. В этом случае веры однозначно восстанавливаются по стратегиям (других игроков, заметьте!), и поэтому их можно исключить из определения. Однако в принципе можно было бы вместо б) накладывать и менее жесткие условия, например, что носитель σ_{-i} содержится в носителе μ_i (или наоборот).

Слабое секвенциальное равновесие. Как уже было сказано, секвенциальное равновесие состоит из данных двух типов - стратегий и вер. Более формально, *профиль (поведенческих) стратегий* образует семейство $\sigma = (\sigma_h, , h \in H)$, где h пробегает множество H информационных множеств нашей развернутой игры, а $\sigma_h \in \Delta(M(h))$ (напомним, что $M(h)$ - множество ходов или акций, доступных в информационном множестве h). *Системой вер* называется семейство $\mu = (\mu(h),\ h \in H)$, где $\mu(h) \in \Delta(h)$.

Чтобы быть секвенциальным равновесием, пара (σ, μ) должна удовлетворять двум условиям вроде а) и б). Первое условие требует рациональность поведения каждого игрока в каждом "своем" информационном множестве. Предположим, что дано информационное множество h_0, контролируемое игроком i_0, и некоторая вера $\mu_0 \in \Delta(h_0)$. Пусть также задан некоторый профиль поведенческих стратегий $\sigma = (\sigma_h)$.

Определение. Скажем, что игрок i_0 *секвенциально рационален в инфомационном множестве* h_0 *при вере* μ_0, если, при фиксированных стратегиях остальных игроков, ожидаемый при вере μ_0 выигрыш игрока i_0 в подыгре $G(h_0)$, начинающейся в h_0, достигает максимума именно на стратегии $(\sigma_h,\ h \in H_i)$.

Фактически, при фиксации стратегий остальных, наша игра превращается в игру одного лица. Требуется, чтобы в подыгре $G(h_0)$ игрок i_0 вел себя оптимально. Отметим, что реальное ограничение здесь накладывают только $\mu(h_0)$ и смешанные ходы нашего игрока в информационных множествах h, расположенных после h_0.

Например, в игре "ослик Селтена" стратегический профиль (D, a, L) условию рациональности в вершине 2 не удовлетворяет: если 2-й игрок считает, что 3-й играет L, то он выберет d, а не a.

Определение. Профиль стратегий σ называется *секвенциально рациональным* относительно системы вер μ, если каждый игрок секвенциально рационален во всех своих информационных множествах h.

Второе условие (уже на веры) требует, чтобы веры μ были не произвольны, но оправдывались "более ранним" поведением σ хотя бы в следующем "слабом" смысле. Если информационное множество h достигается (при профиле стратегий σ) с положительной вероятностью, то вера $\mu(h)$ должна вычисляться по правилу Байеса. Если же информационное множество h лежит вне пути игры, вера $\mu(h)$ может быть произвольной. Будем говорить в этом случае, что веры *слабо согласованы* со стратегиями. Грубо говоря, вера не должна противоречить наблюдениям за ходом игры.

Такой набор (σ, μ) называется *слабым секвенциальным равновесием.* По существу это понятие (в сильном варианте) было введено Крепсом и Уилсоном в 1982 г. Отметим, что условие на веру $\mu(h)$ в информационном множестве h накладывают только смешанные ходы $\sigma_{h'}$ в множествах h', расположенных ранее h.

Секвенциальные равновесия и равновесия Нэша. Интуитивно ясно, что понятие секвенциального равновесия является усилением понятия равновесия по Нэшу. Во всяком случае мы видели в примере, что не всякое равновесие Нэша может быть поддержано системой вер до секвенциального.

Скажем точнее. Пусть σ - профиль поведенческих стратегий, образующий равновесие Нэша. Тогда правило Байеса однозначно определяет веры $\mu(h)$ в тех информационных множествах, которые достижимы (при стратегиях σ) с положительной вероятностью (лежат на пути игры). Тогда стратегии σ секвенциально рациональны в таких информационных множествах и при таких верах. В самом деле, в противном случае игрок, делающий ход в h, мог бы получить больший (условный, в "подыгре", начинающейся в h) выигрыш, изменив стратегии в этой подыгре.

Обратно, пусть σ - профиль поведенческих стратегий, секвенциально рациональных в информационных множествах, лежащих на пути игры. Мы утверждаем, что σ - равновесие Нэша. В самом деле, представим, что некоторый игрок i может улучшить результат, применив альтернативную стратегию σ_i'. Но тогда он должен сыграть лучше σ_i в некотором своем информационном множестве h. Нужно взять самое первое такое множество; так как до него стратегии не менялись, то не менялись и веры. Но в таком случае стратегия σ_i была не секвенциально рациональной в этом h.

Так мы получаем следующее утверждение (более подробное доказательство можно найти у Майерсона или у Масколея и др., Предложение 9.С.1):

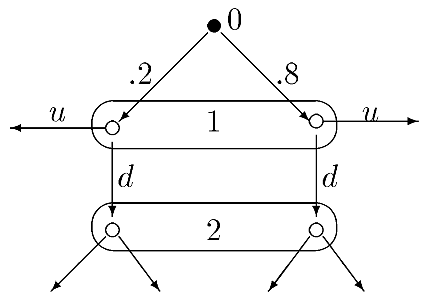
Теорема. *Профиль поведенческих стратегии σ является равновесием Нэша т. и т.т., когда найдется такая система вер μ, что*

(i) система μ слабо согласована с профилем σ;

(ii) профиль σ секвенциально рационален (при верах μ) во всех информационных множествах, лежащих на пути игры.

Отсюда можно сделать два важных вывода. Первый - вдоль пути игры (где веры однозначно определяются правилом Байеса) равновесные стратегии секвенциально рациональны. Второй - секвенциальная рациональность усиливает равновесность (по Нэшу) тем, что требует секвенциальную рациональность не только вдоль равновесного пути, но и во всех остальных информационных множествах. Этим она сближается с требованием совершенства относительно подыгр. И действительно, из приведенного выше предложения легко получить, что любое секвенциальное равновесие совершенно к подыграм.

Сильное секвенциальное равновесие. В сильном секвенциальном равновесии мы более строго подходим к формированию вер в информационных множествах, лежащих вне пути игры. Рассмотрим пример, аппеллирующий к структурной состоятельности. Пусть игра имеет вид



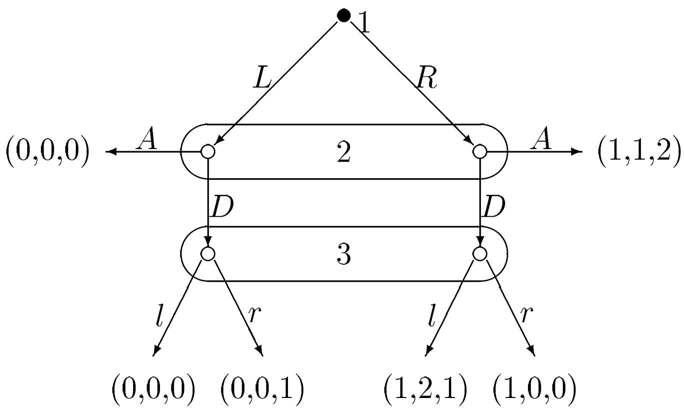
И пусть первый играет u. Каковы могут быть веры у 2-го? Так как 1-й не различает эти состояния (правое и левое), он и отклоняться в них должен одинаково. Поэтому естественно считать, что веры 2-го - это .2 и .8.

Дадим теперь общее определение сильной согласованности вер со стратегиями. Поведенческий профиль σ называется *вполне смешанным*, если любая позиция достигается с положительной вероятностью. В этом случае правило Байеса однозначно определяет согласованную с σ систему вер $\mu(\sigma)$.

Определение. Система вер μ называется *сильно согласованной* с профилем стратегий σ, если существует последовательность вполне смешанных стратегических профилей σ_n, такая что σ_n сходится к σ, а соответствующие веры $\mu_n = \mu(\sigma_n)$ сходятся к μ.

Секвенциальное равновесие - это пара (σ, μ), что μ сильно согласована с σ, а σ секвенциально рациональна относительно μ.

Следующий пример демонстрирует слабое секвенциальное равновесие, которое не сильное секвенциальное.



Пусть третий игрок верит, что реализуется левая вершина в его информационном множестве. Такая вера вместе со стратегиями (R, A, r) является слабым секвенциальным равновесием. Однако оно не является сильным секвенциальным равновесием, потому что вера третьего, сильно согласованная со стратегиями R и A, указывает на правую вершину в информационном множестве 3. Сильным секвенциальным равновесием (единственным?) здесь будет (R, D, l).

Теорема. *Любая конечная игра (в развернутой форме и с совершенной памятью) имеет сильное секвенциальное равновесия.*

Доказательство теоремы будет дано позже, после определения совершенного равновесия.

Отметим также, что даже сильные секвенциальное равновесия не всегда исключают слабо доминирующие стратегии (пример с дурацким голосованием трех).

Лекция 15. Совершенные равновесия для нормальной формы

Дрожащая рука. Как предыдущие понятия и идеи реализовать для игр в нормальной форме? Понятие секвенциального равновесия подсказывает, что искомое равновесие должно получаться как предел невырожденных "почти-равновесных" ситуаций.

Почему невырожденных? Здесь обычно рассказывают сказку про дрожащую руку. Что любой игрок может совершить ошибку и с малой вероятностью отклониться от равновесия. И мы интересуемся равновесиями, которые устойчивы к таким малым отклонениям.

Поясним это на примере. Рассмотрим игру

	$t1$	$t2$
$s1$	$10, 0$	$1, 1$
$s2$	$10, 10$	$0, 10$

Профиль $(s2, t1)$ равновесен; 1-й счастлив со стратегией $s2$, пока 2-й не использует $t2$ (заметим, правда, что это равновесие вовлекает слабо доминируемую стратегию $s2$). Но представим, что (например, из-за случайной ошибки) второй игрок использует стратегию $t2$. Тогда $s2$ становится неоптимальной, и игрок 1 довольно резко переключается на $s1$. А тогда и 2-й переключается на $t2$. И они сваливаются в равновесие $(s1, t2)$ (с худшими, надо сказать, выигрышами).

Эта идея формализуется следующим образом (Селтен, 1975):

Определение. (Смешанный) профиль стратегий $\sigma_N = (\sigma_i)$ называется *совершенным* (относительно дрожащей руки) равновесием, если существует последовательность $(\sigma_N^n,\ n = 1, 2, ...)$ вполне смешанных стратегий, которая сходится к σ_N, и такая, что для каждого игрока i и n стратегия σ_i есть наилучший ответ на профиль σ_{-i}^n.

Смешанная стратегия $\sigma \in \Delta(S_i)$ называется *вполне смешанной*, если она принадлежит внутренности симплекса $\Delta(S_i)$, то есть с ненулевыми вероятностями использует все чистые стратегии.

Иначе говоря, стратегия σ_i должна быть оптимальной не только относительно σ_{-i} (что получается предельным переходом), но и относительно *некоторых* сколь угодно малых возмущений σ_{-i}, в которые входят (пусть с ничтожно малыми вероятностями) уже все чистые стратегии остальных. К сожалению, только некоторых; стратегии σ_i становятся чуть более оптимальными - существуют невырожденные (и сколь угодно близкие к σ_{-i}) стратегические профили остальных, против которых σ_i тоже наилучший ответ. Если бы мы потребовали оптимальность стратегий σ_i против любых (сколь угодно малых) отклонений других участников от их стратегий σ_{-i}, мы заведомо потеряли бы существование.

Предложение. *Каждое совершенное равновесие является равновесием Нэша.* $\square$

Довольно очевидно, что слабо доминируемые стратегии не входят в совершенное равновесие. Крепс считает отсутствие слабо доминируемых стратегий в равновесии важной чертой "хорошего", очищенного равновесия.

Существование совершенных равновесий.

Теорема. *Для любой конечной игры существует совершенное равновесие.*

Доказательство. Обозначим для "большого" числа k через Δ^k симплекс в Δ чуть меньшего размера (когда все координаты $\geq 1/k$). Ограничим нашу (смешанную) игру на эти симплексы и обозначим получившуюся игру G^k. У нее, конечно, есть равновесия, которые мы обозначим σ_N^k. В силу компактности можно считать, что σ_i^k сходятся (при $k \to \infty$) к некоторым стратегиям $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. Мы хотим показать, что для любого игрока i стратегия σ_i будет наилучшим ответом на σ_{-i}^k при всех (достаточно больших) k. Тогда то мы получим совершенное равновесие σ_N.

Сразу этого утверждать нельзя. Однако в силу конечности числа граней у симплекса можно выбрать подпоследовательность k, такую что σ_i^k лежат на "одной и той же" грани симплекса $\Delta^k(S_i)$. Ясно, что предельная стратегия σ_i тоже лежит на "той же" грани $\Delta(S_i)$. Покажем теперь, что стратегия σ_i будет наилучшим ответом на σ_{-i}^k. Для этого напомним, что функции полезности $U_i(\cdot, \sigma_{-i}^k)$ аффинны, и если они достигают максимума в некоторой точке σ_i^k, то они принимают те же максимальные значения во всех вершинах этой грани $\Delta^k(S_i)$. Но эта грань параллельна соответствующей грани $\Delta(S_i)$. Значит функция $U_i(\cdot, \sigma_{-i}^k)$ принимает максимальные значения на той же грани симплекса $\Delta(S_i)$, и в частности, σ_i - наилучший ответ на σ_{-i}^k. $\square$

Применение к секвенциальным равновесиям. Оно опирается на связь секвенциальных и совершенных равновесий. Мы не будем подробно на этом останавливаться, а скажем очень кратко и эскизно. Пусть Γ - игра в развернутой форме, и G - соответствующая игра в нормальной форме. Как объяснялось в лекции 4, существует тесная связь поведенческих стратегий в Γ и смешанных стратегий в G. Так вот верна следующая

Лемма. *Пусть σ - совершенное равновесие в G. Тогда существует такой вектор вер μ, что (σ, μ) - секвенциальное равновесие в Γ.*

Идея доказательства. По определению совершенного равновесия существует последовательность σ_N^k стратегий (в G или Γ), которые сходятся к σ_N, которые невырождены и т.п. В силу невырожденности σ_N^k можно однозначно определить набор вер μ_k, согласующихся с σ_N^k. Остается устремить μ_k в пределу μ. Так как стратегия σ_i игрока i была наилучшим ответом на σ_{-i}^k, она будет оптимальным ответом при системе вер μ_k, и при их пределе μ. $\Box$

Следствие. *Пусть* Γ - *конечная игра с совершенной памятью. Тогда в ней существуют сильные секвенциальные равновесия.* $\Box$

Лекция 16. Повторяющиеся игры

До сих пор мы рассматривали игры, которые играются "однократно"; игроки получают выигрыши и расходятся. Однако часто приходится многократно играть "одну и ту же игру" с теми же партнерами. Такую ситуацию называют повторяющимися играми, и им посвящено много исследований. Некоторые аспекты мы и рассмотрим.

Главный интерес повторяющихся игр связан с интуицией, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Если игра играется однократно, то игрок может безнаказанно нарушать любые предварительные договоренности. Вот почему редко равновесия бывают оптимальными. Однако если игра разыгрывается многократно, то некоторые соглашения могут стать равновесиями. Потому что нарушение соглашения в одном раунде может привести к наказанию в последующих раундах. К этому же относятся вопросы репутации. Например, репутация несгибаемого, жесткого, неисправимого может быть ценным активом в будущей игре.

Повторяющиеся игры. При рассмотрении повторяющихся игр нужно уточнить следующие вещи: длительность игры, наблюдения, стратегии и выигрыши.

1. *Длительность.* Игры могут играться фиксированное конечное количество раз. Или бесконечное. Возможен и более сложный случай, когда время игры рандомизировано.

2. *Наблюдения.* Возможность наказывать противника за нарушение соглашения основана на том, что вы знаете, как он играл на предыдущих раундах. Для простоты, мы будем считать, что вся прошлая информация (о ходах, выигрышах) доступна.

3. *Стратегии.* Это уже не просто последовательность ходов в каждом раунде; у вас появляется возможность делать выбор в зависимости от имеющейся информации. Для того, чтобы сделать это более ясным, рассмотрим двухкруговую игру.

Пусть нам дана какая-нибудь простая игра двух лиц со стратегиями $s1$, $s2$ и $t1$, $t2$. Было бы ошибкой считать, что стратегические возможности игроков исчерпываются множествами $S_i \times S_i$. Главная новость - что при совершении второго хода игрок может учитывать то, что произошло в первом раунде.

Произошедшее в первом раунде (*история*) задается множеством $S_1 \times S_2 = S$. Поэтому *стратегия* игрока 1 - это пара (s, f), где s - ход в первом раунде, а f - отображение из S в S_1, возможные его реакции на историю. В нашем примере реакций $2^4 = 16$, поэтому каждый игрок имеет 32 стратегии в двухраундовой игре.

Так что стратегий довольно много. Конечно, тут много лишнего. Например, зачем игроку реагировать на свою стратегию? Более естественно ограничиться отображениями f из S_2 в S_1, их уже только 4, так что множество стратегий каждого по существу состоит из 8 элементов.

Аналогично обстоит дело и в общем случае. Если исходная игра была $(N, (S_i), (u_i))$, то стратегия игрока i на $t + 1$-ом шаге - это отображение

$$f_i^{t+1} : S_N^t \longrightarrow S_i.$$

Множество S_N^t (т.е. t-я степень S_N) есть множество всех историй развития игры до момента $t+1$. А полная стратегия - это последовательность $f_i^{\cdot} = (f_i^t)$, где t меняется от 1 до T. Если дан профиль таких стратегий $(f_i^{\cdot})$, $i \in N$, то индуктивно определяется последовательность ходов s_i^t, $t \in \{1, ..., T\}$, где

$$s_i^1 = f_i^1, s_i^2 = f_i^2(s_N^1), \ldots, s_i^{k+1} = f_i^{k+1}(s_N^1, \ldots, s_N^k), \ldots,$$

т.е. процесс игры.

Как видно, стратегий много и они могут описываться сложно.

4. *Выигрыши.* Наконец, нужно сказать про выигрыши. Если момент T окончания игры конечный, то с выигрышем все ясно: это суммарный выигрыш $\sum_{t=1}^T u_i(s_N^t)$, или лучше, средний выигрыш $(1/T)\sum_{t=1}^T u_i(s_N^t)$. Если случайный момент τ, то это ожидаемый средний выигрыш. Наиболее деликатным является определение выигрыша в случае $T = \infty$. Здесь обычно поступают одним из двух (или трех) способов.

Первый - образуют средний выигрыш $\sum_{t=1}^T u_i(s_N^t)/T$ и устремляют T к бесконечности. Небольшое препятствие состоит в том, что этот предел может не существовать. Тогда берут, например, нижний предел

$$U_i(f_N^{\cdot}) = \underline{\lim}(\sum_{t=1}^T u_i(s_N^t)/T) \tag{1}$$

при $T \to \infty$.

Второй способ - образовать дисконтированный выигрыш. Для этого фиксируют некоторый дисконт $\delta < 1$, и полагают

$$U_i(f_N^\cdot) = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s_N^t) \tag{2}$$

Умножение на $1-\delta = 1/(\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1})$ производится для удобства; тогда выигрыш можно рассматривать это как выпуклую смесь $u_i(s_N^t)$.

В случае $T=\infty$ получающаяся игра называется *суперигрой*. Итак, повторим, что набор суперстратегий $f_N^\cdot$ сначала преобразуется в последовательность ходов (s_N^t), $1 \le t < T+1$, а она - в последовательность выигрышей $u_i(s_N^t)$, по которой уже определяется "средний" выигрыш $U_i(f_N^\cdot)$.

Повторяющаяся дилемма заключенных. Начнем с Дилеммы заключенных. Удобно ее задать так. Каждый из игроков обращается к Высшему существу с одной из просьб: - дать его компаньону 2 доллара, или - чтобы оно дало ему самому 1 доллар. Таблица выигрышей имеет вид

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

Стратегии E доминирующие и приводят к исходу $(1,1)$, что хуже кооперативного исхода $(2,2)$. Казалось бы, игрокам полезно сговориться и использовать стратегии C. Однако если игра происходит один раз, и игроки делают ходы независимо и одновременно, каждому выгодно перейти на стратегию E. Изменится ли ситуация, если они играют многократно?

Пусть сначала игра играется двукратно. Довольно ясно, что равновесная стратегия будет эгоистической. Во втором периоде каждому выгодно использовать E, независимо от того, что было в первом. Но тогда и в первом раунде играются стратегии E. То же заключение сохраняется при любой конечной продолжительности T.

Однако если игра продолжается бесконечно, ситуация кардинально меняется. Рассмотрим такую "свирепую" (grim, или триггерную) стратегию поведения 1-го игрока: придерживаться C, пока это делает игрок 2; и перейти на E, как только 2-ой применит E. Аналогично ведет себя второй игрок. Выигрыши будем определять по формуле (1). При использовании приведенных выше стратегий игроки в каждом раунде получают $(2,2)$, поэтому и их средний выигрыш равен $(2,2)$. Мы утверждаем, что это равновесие.

В самом деле, пусть первый игрок будет применять другую стратегию, а второй остается при старой, свирепой. Если на шаге T первый игрок впервые применит Э, то последовательность его выигрышей имеет вид

$$2, 2, ..., 2, 3, x_{T+1}, ...,$$

где x_t при $t > T$ равны 0 или 1. Среднее значение будет ≤ 1, потому что бесконечный плохой хвост съест все преимущество, полученное на первых T раундах. Таким образом, отклонение от приведенной выше стратегии поведения не дает успеха первому. Аналогично для второго игрока.

Близкий результат дает и стратегия "зуб-за-зуб" - делать то, что ваш компаньон делал на предыдущем шаге.

Таким образом, на этом примере мы убедились, что бесконечное разыгрывание может привести к кооперативному поведению. Конечно, тут важно, что игра не имеет конца.

Дисконт. А что получится, если использовать в суперигре дисконтированную сумму выигрышей (2)? Если применяются указанные стратегии поведения, выигрыши снова равны (2,2). Пусть первый отклоняется, и получается последовательность его выигрышей, как выше. Ее оценка равна

$$(1-\delta)(2+2\delta+2\delta^2+...+2\delta^{T-1}+3\delta^T+[\text{нечто} \leq 1]\times\delta^{T+1}/(1-\delta)) \leq$$

$$\leq (1-\delta)[2(1-\delta^T)/(1-\delta)+3\delta^T+\delta^{T+1}/(1-\delta)] \leq 2+\delta T-2\delta^{T+1}.$$

Поэтому если $2\delta > 1$, т.е. если $\delta > 1/2$, то отклонение невыгодно.

Вывод: при дисконте многое зависит от того, близок ли дисконт к 1. Если $\delta \approx 1$, то возможно кооперативное поведение. Напротив, если дисконт близок к 0, то в каждой партии игрок живет сегодняшним днем, мало думая о последствиях.

В чем же дело? Далее всюду мы будем предполагать, что дисконт равен 1 (т.е. пользоваться критерием среднего выигрыша). Вопрос, который я хочу обсудить - в чем же дело с такой разницей в ответе на Дилемму в случае $T < \infty$ и $T = \infty$. Что-то здесь неправильно - но где?

Видимо, нужно усомниться в ответе с конечным повторением. Мы видели, что он получен индукцией с конца (фактически это теорема: существует единственное совершенное (к подыграм) равновесие в конечно-повторяющейся Дилемме). А это предполагает очень высокую, если не сказать - чрезмерную, степень рациональности. Мало того, что игроки рациональны и что эта рациональность является общим знанием; эта убежденность в рациональности другого должна быть непоколебимой никакими фактами. И очень важно точное знание всеми конца игры.

Если же есть сомнения в длительности игры или рациональности оппонента, выводы при конечном (но большом) числе повторений могут приближаться к бесконечно-повторяющимся. Допустим, что мой противник считает, что я буду применять свирепую стратегию: переключиться на Э, как только он применит Э. Хотя это и не лучшая моя стратегия. Тогда ему интереснее будет придерживаться стратегии К почти до самого конца игры. А в моих интересах - не разубеждать его относительно его иллюзии, и тоже играть К.

Так мы видим, что кооперация возможна и при конечном повторении Дилеммы. В реальных экономических играх бывает и то, и другое. Пиндайк и Рубинфельд приводят пример индустрии водомерных приборов, где есть молчаливая кооперация, и пример с авиаперевозками, где ее нет. Объяснение в последнем случае состоит в отсутствии прямых наблюдений стратегий. Поэтому неясно, почему конкурент меняет цены - то ли чтобы подрезать меня, то ли потому, что изменились издержки?

Некоторые общие замечания. Чтобы лучше представлять себе равновесные выигрыши в супериграх, мы сделаем два простых замечания. Первое - что равновесный (средний) выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня, т.е. что

$$U_i(f_N) \geq \alpha_i.$$

Действительно, если игрок i использует тупо свою осторожную стратегию, его средний выигрыш $\geq \alpha_i$ при любых стратегиях остальных.

На самом деле, он не меньше $\beta_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Это видно из следующей леммы:

Лемма. *Для любого игрока i и суперстратегий f_{-i} существует суперстратегия f_i, такая что $U_i(f_i, f_{-i}) \geq \beta_i$.*

В самом деле, пусть играется t-й раунд. И пусть X_{t-1} - предыстория; для определения f_i мы должны сказать, чему равно $f_i^t(X_{t-1})$. Для этого мы положим $s_j = f_j^t(X_{t-1})$ при $j \neq i$; тем самым определены действия остальных в момент t, s_{-i}. Так вот, пусть s_i - это наилучший ответ игрока i на s_{-i}. Так как $u_i(s_i, s_{-i}) \geq \beta_i$, то выигрыш игрока i в раунде t будет не меньше β_i, а поэтому и средний выигрыш по всем временам будет $\geq \beta_i$.□

С другой стороны, довольно ясно, что (средний) выигрыш (при любых стратегиях, не обязательно равновесных) лежит в выпуклой оболочке выигрышей в исходной игре G.

Народная теорема. Она утверждает, что любой набор выигрышей (т.е. вектор $x_N \in \mathbb{R}^N$), который лежит в зоне выигрышей игры G (т.е. в выпуклой оболочке векторов $u_N(s_N)$, $s_N \in S_N$) и который индивидуально рационален (будем понимать это как $x_i \geq \beta_i$) может быть реализован некоторым равновесием в суперигре.

Результаты такого сорта называются *народной теоремой.*

Объясним основную идею доказательства народной теоремы. Сначала мы покажем, как реализовать выигрыш вида $u_N(s_N) \geq \beta_N$. Нужно предъявить равновесные стратегии f_i в суперигре. Идея построения таких суперстратегий такова: игроку i нужно применять s_i, пока все придерживаются s_N; если же некоторый (один) игрок j отклонился, то после этого (до конца) наказывать его. Уточним последнее.

Обозначим через $s^*_{-i}(i)$ такой набор стратегий игроков, отличных от i, который реализует $\mathrm{Argmin}_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Это значит, что для любой стратегии $s'_i \in S_i$ выполняется $u_i(s'_i, s^*_{-i}(i)) \leq \beta_i$. Так вот суперстратегия f_i определяется так. Пусть дана предыстория X_{t-1}. Если все ходы до момента $t-1$ включительно были равны s_N, то $f_i(X_{t-1}) = s_i$. Если же не все равны s_N, то нужно взять первый момент $\tau < t$, когда было отклонение, и взять некоторого игрока j, который отклонился (все равно какого, но для определенности с наименьшим номером), и положить для $i \neq j$ $f_i(X_{t-1}) = s^*_i(j)$. Стратегии $f_j(X_{t-1})$ определяется произвольно.

Мы утверждаем, что получается суперравновесие. В самом деле, если все придерживаются суперстратегий f_i, то выигрыш игрока i равен $u_i(s_N)$. Предположим, что он отклоняется от f_i, а все остальные придерживаются f_j. Тогда либо произойдет никаких изменений, либо в некотором раунде t s^t_i впервые будет отлично от s_i (а остальные $s^t_j = s_j$). И тогда во всех остальных раундах с номерами $> t$ участники j (отличные от i) будут делать ходы $s^*_{-i}(i)$. Последовательность выигрышей игрока i имеет вид

$$u_i(s_N)[t-1 \text{ раз}],\ ? \text{ в момент } t,\ \text{ и } u_i(?, s^*_{-i}(i)) \leq \beta_i \text{ в моменты} > t.$$

Поэтому и средний выигрыш $\leq \beta_i$.

Поясним теперь, как получать другие вектора выигрышей. Любой другой вектор представляет выпуклую смесь выигрышей вида $u_N(s_N)$, т.е. $x_N = \sum_k \lambda_k u_N(s_{N,k})$. Если λ_k - рациональные числа с периодом P, то нужно выбрать периодическую (с периодом P) траекторию s^k, в которой $s_{N,k}$ встречается нужное число раз. После этого суперстратегия f_N строится аналогично: если предыстория совпадает с траекторией $s^{\cdot}$, то $f^t(X_{t-1}) = s^t$. Если в первый раз кто отклонился, то его наказывать без конца.

В общем случае нужно приближать λ_k рациональными числами и брать все большие периоды. □

Комментарии к народной теореме.

1. За счет перехода к супериграм удается ликвидировать главный минус равновесий Нэша - их общую неэффективность.

2. Зато в суперигре получается "очень много" суперравновесий, и не очень понятно, которое из них реально осуществится. Тут снова возникают вопросы с фокальными точками.

3. Народные теоремы установлены не только для критерия среднего выигрыша. Они известны для критерия перегона (overtaking) (Рубинштейн, 1979), для дисконтированного критерия (Васин, 1977; Фуденберг и Маскин, 1986). Конечно, в последнем случае дисконт δ должен быть близок к 1.

4. *"Совершенная" народная теорема, или кто охраняет охранников.* Идея, лежащая в основе устойчивость суперравновесий, заключается в наказании уклонистов. Но вполне может оказаться (не в Дилемме), что наказывать накладно и не выгодно. Иначе говоря, рассматриваемое суперравновесие может быть несовершенным (возможная причина развала цивилизаций?!). Например, свирепая стратегия несовершенна в семейном споре. А можно ли найти совершенное? Оказывается, что ДА. Аккуратное доказательство требует возни, но идея ясна - нужно наказывать тех, кто уклоняется от наказания, и т.д.

Поясняющий пример - перекрывающиеся поколения, мать-дочь. "Хорошее" поведение - кормить мать, если она кормила свою. И не кормить, если та не кормила. Это равновесие, но не совершенное. А совершенное будет, если наказывать нон-конформистов. Игрок считается *конформистом*, если она кормит свою мать тогда и только тогда, когда та тоже конформистка.

Похожая ситуация рассматривалась в конце лекции 13 про зарплату.

Лекция 17. Игры с сообщениями

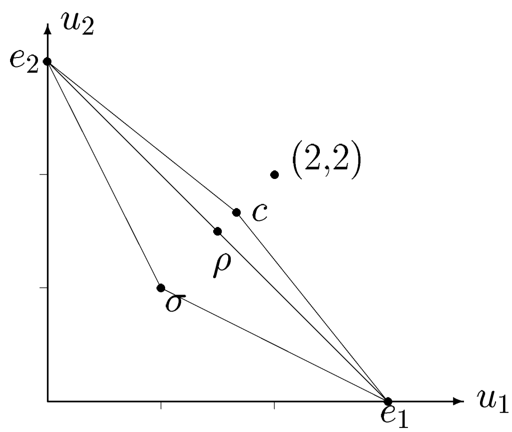
До сих пор предполагалось, что игра идет молча, что игроки не имеют возможностей сообщаться друг с другом, если это явно не предусмотрено в стратегиях. Что произойдет, если они могут поговорить перед игрой, обменяться легким трепом (cheap talk)? Есть два способа сделать это. Первый - ввести возможности переговоров явно в стратегии, перейти к новой игре, которую нужно анализировать старыми способами. Другой - изменить понятие решения, учитывая возможности переговоров в каком-то обобщенном смысле. Именно этот второй способ мы здесь в основном и обсудим.

Доигровые переговоры. Будем предполагать, что игроки перед игрой могут встретиться на полчасика и обсудить предстоящую игру. В частности, они могут договариваться о стратегиях, которые они будут применять, но это договоренности *не являются обязывающими соглашениями.* Тогда, чтобы договоренности были правдоподобными (credible), они должны быть равновесиями Нэша. Так что, казалось бы, легкий треп может помочь реализации некоторого равновесия, но не может дать новых решений.

Однако это не совсем так. Во время легкого трепа можно договориться о *контингентных* действиях, т.е. действиях, зависящих от значений некоторых совместно наблюдаемых случайных величин (событий). Поясним это на примере игры "Перекресток"

	м	в
М	$2,2$	$0,3$
В	$3,0$	$-1,-1$

У каждого игрока есть две стратегии, миролюбивая и воинственная. Здесь есть два чистых равновесия (М,в) и (В,м), и одно смешанное равновесие, когда с равными шансами используются мир и война (выигрыши тогда равны (1,1)). Игроки могут договориться о следующем: мы бросаем монету, и если выпадет орел, то играть (М,в), а если решка - то (В,м). Средний выигрыш для каждого будет по 1.5. Это хуже кооперативного (и недостижимого) исхода $(2,2)$, но лучше исхода смешанного равновесия $(1,1)$. Множество исходов, которые могут быть получены на этом пути, изображены на картинке.



Здесь e_1 и e_2 - исходы чистых равновесий, σ - исход смешанного равновесия. ρ - смесь чисто равновесных исходов. c - исход коррелированного равновесия.

Фактически, если появляется какая-то наблюдаемая величина (эта пародия на сообщение), то меняется игра: начальный ход делает природа и игроки видят результат. Так что переговоры опять сводятся к договоренности о равновесии Нэша в этой новой игре.

Игры с посредником, или коррелированные стратегии. Еще больше возможностей появляется, когда игроки могут обратиться за помощью к посреднику. А он может предложить им некоторую коррелированную стратегию.

Определение. *Коррелированной стратегией* называется произвольный элемент $\mu \in \Delta(S_N)$.

Отличие от ранее использованных смешанных стратегий в том, что теперь не требуется независимость выборов игроков. Использование такой коррелированной стратегии дает игроку i ожидаемый платеж

$$U_i(\mu) = \sum_s \mu(s_N) u_i(s_N).$$

Представим, что посредник выбирает (быть может, по согласованию с игроками) некоторую коррелированную стратегию μ и сообщает об этом всем игрокам, так что μ становится общим знанием. Затем он с помощью рандомизатора выбирает некоторый профиль стратегий s_N из носителя μ, и сообщает секретно (!) каждому игроку i ту стратегию s_i, которую он ему рекомендует использовать в данном случае.

В нашем примере с перекрестком, рассмотрим коррелированную стратегию, которая с равными шансами (по 1/3) выбирает ситуации (М,м), (М,в) и (В,м). Если игроки следуют указаниям посредника, они получают выигрыши

$$(2,2)/3 + (3,0)/3 + (0,3)/3 = (5/3, 5/3),$$

что больше, чем старый рекорд $(3/2, 3/2)$.

Однако будут ли указания посредника выполняться? Будут ли они самоподдерживающимися (self-enforcing)? Более точно, выгодно ли игрокам следовать рекомендациям посредника? Рассмотрим первого игрока. Если он получает указание использовать стратегию "В", то он знает (зная μ), что второй игрок получил указание "м". Предполагая, что 2-й игрок будет следовать указанию, первый игрок тоже последует данному ему указанию, так как оно - наилучший его ответ на "м".

Представим теперь, что он получает указание применить стратегию "М". Теперь он уже не может определенно знать, что было рекомендовано второму. Однако он может сделать вероятностное суждение, основанное на условных вероятностях. Условная вероятность того, что второй получил указание "м", равна

$$\mu(\text{М,м})/(\mu(\text{М,м}) + \mu(\text{М,в})) = (1/3 + 1/3)/3 = 1/2.$$

Аналогично условная вероятность указания "в" равна также 1/2. Ожидаемый выигрыш 1-го при использовании указания "М" равен $.5 \cdot 2 + .5 \cdot 0 = 1$. Ожидаемый выигрыш 1-го при использовании стратегии "В" тоже равен $.5 \cdot 3 + .5(-1) = 1$. Поэтому 1-му нет выгоды отклоняться от предложенной ему стратегии М. То же для второго.

Коррелированные равновесия. Теперь можно дать общее определение, предложенное Ауманном (1974).

Определение. Коррелированная стратегия $\mu \in \Delta(S_N)$ называется *коррелированным равновесием*, если для любого игрока i и любого отображения (отклонения) $\delta_i : S_i \longrightarrow S_i$ выполняется неравенство

$$U_i(\mu) \geq \sum_{s_N} \mu(s_N) u_i(\delta_i(s_i), s_{-i}).$$

Здесь δ_i - это план реакции игрока i на рекомендации посредника. А $U_i(\mu)$ - это ожидаемый выигрыш i, если он следует указаниям посредника. Таким образом, эти неравенства говорят, что отклонение от рекомендаций не дают улучшения. Их можно рассматривать, как обобщение условий Нэша на равновесие.

Приведенное выше условия равносильны следующей системе неравенств: для любого i и любых стратегий $s_i, e_i \in S_i$

$$\sum_{s_{-i}} \mu(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}} \mu(s_i, s_{-i}) u_i(e_i, s_{-i}) \tag{3}$$

При фиксированном s_i это означает, что условный (при получении указания s_i) выигрыш от стратегии s_i не меньше, чем от стратегии e_i.

Эти условия можно понимать также как *совместимость с побуждениями (incentive compatibility)* предлагаемой коррелированной стратегии μ. Отметим, что множество коррелированных равновесий μ - выпуклый многогранник, ибо оно задается линейными неравенствами (3) (плюс условие, что μ - вероятность). Поэтому выпуклым многогранником является и область выигрышей при коррелированных равновесиях. Она, конечно, содержит все равновесия Нэша, но может быть больше выпуклой оболочки таких равновесий.

Неформально понятие коррелированного равновесия предполагает, что: а) имеется посредник, и б) имеется канал связи, позволяющий посреднику посылать секретное сообщение каждому игроку.

Игра с наблюдениями. Является ли понятие коррелированного равновесия чем-то принципиально новым по сравнению с равновесием Нэша? Нет, просто мы заменяем исходную игру некоторой ее модификацией. Сначала ход делает природа (ξ) с предписанными вероятностями, затем наблюдения делают игроки (видят ξ_i). Наконец, разыгрывается первоначальная игра G. А уже в этой новой, видоизмененной с помощью информационной системы ξ, игре $G(\xi)$ рассматриваются равновесия Нэша. Конечно, нужно помнить, что стратегии игрока теперь s_i могут зависеть от наблюдаемого значения ξ_i, т.е. являются функциями $s_i : \Xi_i \longrightarrow S_i$.

Стоит, быть может, привести понятие *информационной системы*. Это объект, состоящий из: множества Ω состояний природы, отображений $\Omega \longrightarrow \Xi_i$ (информация, получаемая i-м игроком) и приора (вероятности) $\nu \in \Delta(\Omega)$. Если перенести вероятность вперед, то можно ограничиться более частным понятием информационной системы: это множество-произведение $\Xi = \times_i \Xi_i$ с вероятностной мерой ν на нем.

В случае игры с посредником множества Ξ_i совпадали с S_i; более того, наблюдаемое значение было просто подсказкой игроку - как играть. Коррелированное равновесие тогда - это "послушное", тождественное равновесие в "расширенной", оснащенной игре. Казалось бы, выше было предложено гораздо более общее понятие. Оказывается, что по существу мы не получаем ничего нового. Любая игра с наблюдениями сводится к коррелированному равновесию. Здесь впервые проявляет себя довольно общий и простой *принцип выявления* (the revelation principle). Он состоит в том, что любое равновесие в любой игре с наблюдениями сводится (эквивалентно в каком-то смысле) к коррелированному равновесию, т.е. к игре с прямыми указаниями о том, что делать.

Объясним, в чем тут дело. Пусть $s_i^*(\cdot)$ - равновесные стратегии в игре $G(\xi)$ со случайной величиной $\xi \in \Delta(\times_i \Xi_i)$. Рассмотрим тогда отображение $s^* : \Xi_N \longrightarrow S$, перенесем с его помощью вероятностную меру с Ξ_N на S и обозначим маргинал как μ. Ясно, что при этом получится коррелированное равновесие. В самом деле, если игрок i найдет для себя выгодным использовать другую (нетождественную) стратегию $\delta_i : S_i \longrightarrow S_i$, то и в игре $G(\xi)$ ему было бы выгоднее применять стратегию $\delta_i(s_i^*)$, что противоречило бы Нэшевости s^*.

Уже это простое соображение помогает описать множество всех платежей, достижимых равновесиями в играх с наблюдениями. Так как они совпадают с коррелированными равновесиями, это указанный выше многогранник.

Явный учет сообщений. Выше мы позволили игрокам что-то наблюдать. Чтобы замоделировать переговоры, мы должны включить в картину и сообщения, посылаемые участниками другим участникам. Рассмотрим одну из возможных моделей.

Представим, что игрок i имеет множество R_i посланий, которые он может отправить (куда? в систему сообщений), и пусть M_i - множество сообщений, которые он может получить. Система сообщений (коммуникаций) перерабатывает посылаемые сообщения в получаемые. Если $R = \times_i R_i$, а $M = \times_i M_i$, то работу системы без помех можно изобразить отображением $\gamma : R \longrightarrow M$. Однако полезно сразу же допустить возможность случайных помех, и тогда система коммуникаций - это отображение $\gamma : R \longrightarrow \Delta(M)$.

Стратегическое множество игрока i превращается теперь в

$$B_i = \{(r, \delta),\ r \in R_i,\ \delta : M_i \longrightarrow S_i\}.$$

Т.е. участник решает, какое сообщение ему послать, и как отреагировать на полученное сообщение. Выигрыши U_i также легко выписываются: это

$$\sum_m \gamma(m|r) u_i((\delta_i(m_i)).$$

Более наглядно это можно понимать так. Для каждого участника i и его "стратегии реагирования" δ_i мы имеем отображения

$$R \xrightarrow{\gamma} \Delta(M) \xrightarrow{pr_i} \Delta(M_i) \xrightarrow{\delta_i} \Delta(S_i).$$

Теперь, если дан профиль стратегий $((r_i, \delta_i))$, можно образовать $r \in R$ и его образ в $\times_i \Delta(S_i)$ (или в $\Delta(\times_i S_i)$). Последнее множество выпукло, поэтому для любой смеси профилей можно смешать образы и получить элемент из $\Delta(S)$, т.е. коррелированную стратегию. Теперь можно перейти к полезностям.

Таким образом, коммуникационная система $\gamma : R \longrightarrow \Delta(M)$ порождает новую *коммуникационную игру* $G(\gamma)$ со стратегиями B_i и выигрышами U_i. И можно начинать анализировать равновесия в игре $G(\gamma)$, сравнивать их со старыми и т.п. Например, если множество R вырождено (из одной точки), коммуникационная система превращается в элемент $\Delta(M)$, т.е. в информационную систему. Да и в общем случае, после того как все послания r_i отправлены (зафиксированы), мы получаем информационную систему. Поэтому не удивительно, что каждое равновесие в $G(\gamma)$ также эквивалентно некоторому коррелированному равновесию в исходной игре G. Это снова проявление принципа выявления.

Лекция 18. Игры с неполной информацией

Игры с неполной информацией. До сих пор при описании игры мы предполагали, что все игроки знают все о структуре игре (и что это даже общее знание), в частности, они знают выигрыши всех других игроков. Однако предположение это далеко от реальности; обычно мы весьма приблизительно представляем предпочтения других. Это же может относиться и к другим элементам игры, например, к знаниям о состоянии природы. Одним словом, игроки могут еще до начала игры иметь какую-то личную информацию, которая отсутствует у других. Другая информация известна всем, третья может открывается по мере развития игры.

Как же анализировать такие ситуации? Начнем с простого примера.

Пример. *Дуополия Курно с асимметричной информацией.* Дуополия Курно, рыночный спрос задается ценами $P(Q) = M - Q$, где $Q = q_1 + q_2$ - суммарный выпуск двух фирм. Издержки (удельные) первой фирмы известны всем и равны c. Издержки (тоже удельные) второй фирмы равны либо c', либо c'' ($c' < c''$), с вероятностями θ и $1 - \theta$ соответственно. Вторая фирма знает точно свои издержки, но первая знает только вероятности θ.

Естественно, что вторая фирма будет вести себя по разному при больших или малых издержках. Обозначим эти количества q' и q''; выпуск первой фирмы обозначим q_1.

Вторая фирма при низких издержках c' решает задачу

$$q(M - q - q_1 - c') \longrightarrow \max,$$

и решение ее (как функция от q_1) равно

$$q' = (M - q_1 - c')/2.$$

Аналогично,

$$q'' = (M - q_1 - c'')/2.$$

Первая фирма не может различать эти случаи и должна выбирать единое q_1; ее задача

$$q_1[\theta(M - q_1 - q' - c)/2 + (1 - \theta)(M - q_1 - q'' - c)/2] \longrightarrow \max,$$

и решение

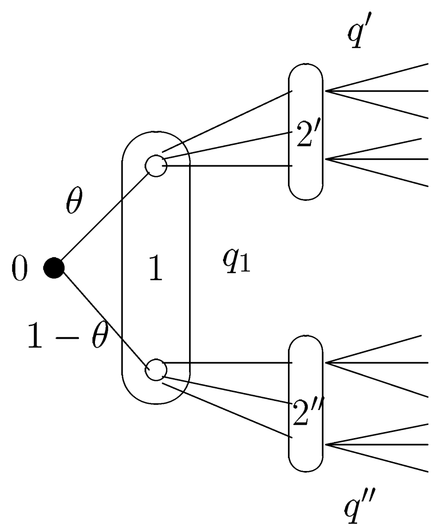
$$q_1 = (M - c - \theta q' - (1-\theta)q'')/2.$$

(мы всюду предполагаем решение внутренним). Ответ для первой фирмы такой:

$$q_1^* = [M - 2c - \theta c' - (1-\theta)c'']/3,$$

и похожие ответы для второй фирмы ($(M - 2c' + c)/3$ минус некоторый добавок в случае низких издержек и $(M - 2c'' + c)/3$ плюс некоторый добавок в случае высоких издержек). То есть выпуск второй фирмы больше при высоких издержках по сравнению со случаем полной информированности. (Почему? Потому что первая фирма из-за незнания снижает свой выпуск (ибо могло бы случиться, что у второй низкие издержки и она предложит больше на рынок), а поэтому вторая фирма может немного увеличить свой выпуск.)

Посмотрите, что мы сделали. Мы представили ситуацию с неполной информацией игрой в развернутой форме, где неполнота информации 1-й фирмы о типе 2-й фирмы выражается как несовершенство информации 1-ым игроком относительно хода природы. Несовершенство информации фирм относительно ходов друг друга отражается как обычно.



Развернутая игровая форма для дуополии. Выигрыши не указаны.

Байесовы игры. Харшаньи (1967-68) предложил общий способ представления игр с неполной информацией. Личная информация отражается при этом *типом* игрока, который включает в себя полезности, информированность и представления об остальных. Такое представление называется *Байесовой игрой*. Байесовы игры почти столь же просты, как и игры в нормальной форме.

Для задания Байесовой игры нужно указать множество игроков N, и для каждого игрока $i \in N$ задать множество его возможных *действий* A_i. Это все было раньше. Новым является задание для каждого игрока i множества возможных типов T_i этого игрока. Тип игрока отражает его полезности (выигрыши) и его информацию. Это делается с помощью функций полезности $u_i : A_N \times T_N \longrightarrow \mathbb{R}$ (часто полезность u_i зависит только от типа игрока i) и с помощью его вер $p_i : T_i \longrightarrow \Delta(T_{-i})$.

Поясним две последние вещи. С полезностями все ясно. Выигрыш игрока i зависит не только от выбора действий a_N (это было и раньше), но и от типа i (и, быть может, от типов остальных). Перед началом игры каждый игрок знает свой тип; что касается типов остальных игроков, то он имеет о них лишь вероятностные представления (веры). Представление (знание, вера) игрока типа t_i о типах остальных задается как вероятностная мера $p_i(t_i) = (p_i(t_{-i}|t_i))$ на $T_{-i} = \times_{j \neq i} T_j$. Например, эта вера может быть его субъективным представлением, никак не связанным с реальным типом его партнера. Однако на практике обычно считается, что имеется некоторое априорное распределение вероятности P на T_N. И тогда индивидуальные вероятности p_i формируются как условные вероятности, т.е.$p_i(t_{-i}|t_i) = P(t)/(\sum_{r_{-i}} P(r_{-i}, t_i)$ для всевозможных $t = (t_i, t_{-i})$ и i. Эти данные (T_i, u_i, p_i) считаются известными всем и даже предполагаются общим знанием.

Как же мыслится развитие игры? Сначала природа (руководствуясь вероятностью P) выбирает тип t_N. Затем каждый игрок узнает свой собственный тип t_i и поэтому свою полезность и свои веры. После этого он должен выбрать свои действия (зависящие от его информации, то есть от типа t_i). Поэтому *стратегией* называют отображение $s_i : T_i \longrightarrow A_i$ из типов в действия.

Могло бы показаться странным - зачем игроку нужно фиксировать весь свой набор действий при всевозможных его типах, когда он знает свой текущий тип и ему нужно выбрать соответствующее действие. Дело в том, что другие не знают его тип; чтобы им найти наилучший ответ, им нужно знать его действия во всех ситуациях. В примере с асимметричной дуаполией Курно первая фирма, чтобы найти оптимальный ответ, должна знать и q', и q''.

Байесовы равновесия. Что же считать равновесием в Байесовой игре $(N, (A_i, T_i, u_i, p_i,\ \ i \in N))$? Как обычно, взаимно наилучшие ответы. Пусть игроки выбрали по стратегии $s_i : T_i \longrightarrow A_i$. Каков их выигрыш, точнее, каков выигрыш игрока i, имеющего тип $t_i \in T_i$? Еще более точно, как оценивает свой выигрыш такой игрок, *зная* стратегии s_{-i}? Представим на минуту, что он знает типы t_{-i} остальных игроков. Тогда он знает их действия $s_{-i}(t_{-i})$, и может посчитать свой выигрыш как $u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}); (t_i, t_{-i}))$. Однако он не знает в точности t_{-i}, а знает только вероятности $p_i(t_{-i}|t_i)$. Поэтому он может посчитать *ожидаемое* значение своего выигрыша

$$U_i(s_N|t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p_i(t_{-i}|t_i)u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}); (t_i, t_{-i})).$$

Теперь *равновесием (Байесовым)* будет такой набор стратегий s_N, что для любого i, любого $t_i \in T_i$ и любой другой стратегии $r_i : T_i \longrightarrow S_i$ выполняются неравенства

$$U_i(s_N|t_i) \geq U_i(r_i, s_{-i}|t_i).$$

Аналогично определяются равновесия в смешанных стратегиях.

Фактически мы превратили Байесову игру в обычную игру в нормальной форме и использовали в ней понятие равновесия Нэша. Более точно, мы ввели вместо каждого игрока i множество T_i его типов, так что число игроков резко увеличилось. Однако у каждого такого игрока стратегии старые - A_i. Есть другой, по существу эквивалентный способ образовать игру в нормальной форме. В ней множество игроков остается старым, но каждый игрок может действовать в зависимости от приходящей к нему информации (о его "типе", так что его стратегии - это отображения из T_i в A_i); выигрыш же он усредняет по всему множеству T_N. Тут полезно вспомнить об играх с сообщениями (или наблюдениями); единственное новшество здесь в том, что выигрыш может зависеть от типа (или наблюдения).

Аукционы. Понятие Байесова равновесия незаменимо при анализе аукционов. Начнем с простейшего примера.

Два покупателя (биддера) хотят купить некий предмет. Оценка предмета v для каждого равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Действует аукцион первой цены (то есть предмет достается тому, кто предложит наибольший бид, и он платит предложенную цену; проигравший ничего не получает и не платит). Биддеры нейтральны к риску.

Чтобы сделать это Байесовой игрой, нужно уточнить действия, типы, веры и выигрыши. Тут все ясно. Стратегии - отображения отрезка в $\mathbb{R}_+$ (неявно это означает, что полезность предмета для продавца равна 0). Для упрощения будем искать равновесие в аффинных стратегиях; то есть $b_1(v_1) = a_1 + c_1 v_1$, где $c_1 \geq 0$, и аналогично для второго. (Конечно, выбирать оптимальную стратегию они могут как угодно, мы просто ищем равновесие такого специального вида.) Мы обнаружим, что в равновесии $b_i(v_i) = v_i/2$. То есть агенты называют половину своей оценки.

Итак, пусть игрок j применяет стратегию $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$. При данном v_i выигрыш игрока i равен

$$(v_i - b_i)\mathrm{Prob}(b_i > a_j + c_j v_j).$$

Ясно, что b_i нужно назначать на отрезке $[a_j, a_j + c_j]$, и что для таких b_i $\mathrm{Prob}(b_i > a_j + c_j v_j) = (b_i - a_j)/c_j$. Отсюда легко понять (максимизируя квадратичную по b_i функцию), что наилучший ответ

$$b_i(v_i) = (v_i + a_j)/2, \text{ если } v_i \geq a_j, \text{ и } = a_j \text{ в противном случае.}$$

Мы видим отсюда, что $c_i = 1/2$, и что $a_i = a_j/2$. Так как симметрично $c_j = 1/2$ и $a_j = a_i/2$, то $a_i = a_j = 0$.

Конечно, если распределение оценок неравномерное, нужно искать решение в нелинейных стратегиях.

Более общий пример. Пусть n игроков борются за один (неделимый) предмет. Каждый знает, насколько предмет ценен для него; что же касается остальных, то ценности распределены на интервале $[0, M]$ с кумулятивным распределением F (F дифференцируемая неубывающая функция). Игроки делают предложения (запечатанные биды) $b_i \geq 0$; действует аукцион первой цены.

Будем искать симметричное равновесие в соответствии с некоторой возрастающей функцией β (от его истиной оценки v). Пусть при истиной ценности v игрок делает вид, что ценит в w. Тогда его ожидаемый выигрыш равен

$$(v - \beta(w))F(w)^{n-1},$$

так как $F(w)^{n-1}$ - это вероятность того, что все остальные ценят предмет меньше w и наш игрок побеждает на аукционе. Условие первого порядка дает соотношение

$$(v - \beta(w))(n-1)F'(w) = \beta'(w)$$

для оптимального w. По определению, w должно совпадать с v, причем при всех v. Поэтому мы получаем дифференциальное уравнение для функции β:

$$\beta'(v) = (n-1)(v - \beta(v))F'(v).$$

Решая это уравнение, получаем

$$\beta(x) = F(x)^{1-n}(n-1)\int_0^x tF(t)^{n-2}F'(t)dt.$$

В случае равномерного распределения это дает функцию

$$\beta(v) = (1 - 1/n)v \text{ на } [0, M].$$

В случае $n = 2$ мы приходим к старому ответу: предлагать половину стоимости.

Более подробно про аукционы можно почитать у Майерсона или Бинмора.

Сравнение аукционов. Сравним рассмотренный выше аукцион первой цены (для простоты - с двумя участниками и равномерным распределением ценности на отрезке $[0, 1]$) с аукционом второй цены. А именно, посмотрим, сколько в среднем получает продавец предмета при аукционе первой цены. Мы видели, что при ценностях (v_1, v_2), когда $v_1 \geq v_2$, продавец получает $v_1/2$. Поэтому его ожидаемый выигрыш в этой ситуации задается интегралом

$$1/2 \int_0^1 (\int_0^{v_1} dv_2) v_1 dv_1 = 1/2 \int_0^1 v_1^2 dv_1 = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6.$$

Вторая половина ситуации (когда $v_1 \leq v_2$) дает еще столько же, так что полный (ожидаемый) выигрыш продавца равен $1/3$.

При аукционе второй цены, когда $v_1 \geq v_2$, предмет достается первому игроку, и он платит v_2. Поэтому выигрыш продавца при таких условиях задается интегралом

$$\int_0^1 (\int_{v_2}^1 dv_1) v_2 dv_2 = \int_0^1 (1 - v_2) v_2 dv_2 = 1/6.$$

Вторая половина (когда $v_1 \leq v_2$) дает столько же, и продавец снова получает $1/3$.

Мы видим, что два таких разных аукциона дают в среднем один и тот же выигрыш продавцу (и покупателям, если проделать аналогичные вычисления). И это не случайное совпадение. Знаменитая теорема об эквивалентности аукционов утверждает, что, грубо говоря, любые аукционы (с любым числом симметричных покупателей) эквивалентны в том смысле, что ожидаемый выигрыш любого участника не зависит от выбранного аукциона.

Лекция 19. Задача торга

Начиная с этой лекции мы будем постепенно переходить к кооперативной теории. Центр внимания будет переноситься с индивидуальных действий на кооперативные. Соответственно акцент будет уже не на стратегиях, а на выигрышах, получаемых от совместных стратегий. Кооперация означает сотрудничество, совместные действия. Тут возможны два подхода. Первый - когда индивиды целиком растворяются в новом субъекте - коллективе, у которого как-то формируется своя цель, быть может, слабо связанная с целями индивидов. Мы не будем этим заниматься. Второй - когда индивидуальные интересы сохраняются, а кооперация совершается для того, чтобы всем "кооператорам" стало лучше. Вот это будет предметом нашего рассмотрения.

Мы начинаем со случая двух игроков (можно представлять, что жених и невеста обсуждают варианты брачного договора, или два компаньона обсуждают варианты контракта). Для постановки задачи нужно учесть две вещи. Первая - возможности, которые доставляет кооперация. Вторая - то, что произойдет при отсутствии кооперации, то есть что получают участники, действуя индивидуально.

Формальная задача. Два игрока. То, что могут получить игроки в результате совместных действий, изображается множеством X в $\mathbb{R}^2$ пространстве полезностей. Точка $(x_1, x_2) \in X$ означает, что имеется (за кадром) некоторое совместное действие, дающее в результате полезность x_1 первому и полезность x_2 второму игроку. Кроме того, указывается точка $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ *разногласия* (disagreement point) или *статус кво*. Она говорит, какую полезность получат игроки, если не смогут договориться.

Таким образом, формально *задача торга* - это пара (X, d) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Обычно предполагается, что множество X замкнуто, ограничено (хотя бы сверху), выпукло, и что $d \in X$. Решить задачу торга - значит указать некоторую "хорошую" точку $x^* \in X$.

Вот некоторые примеры появления задачи торга.

1. Пусть дана игра двух лиц в нормальной форме. Тогда в качестве X можно взять множество $u(S_N)$, состоящее из пар $(u_1(s_N), u_2(s_N))$, где s_N пробегает все стратегические профили. В качестве d берут обычно точку гаран-

тированных выигрышей, т.е.

$$d_i = \alpha_i = \max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Заметим, что в общем случае d может не принадлежать X. Чтобы избежать этого неудобства, вместо множества $X = \{u(s_N), s_N \in S_N\}$ обычно рассматривают множество $X = \bigcup_{s_N}(u(s_N) - \mathbb{R}^N_+)$. Содержательно это означает, что если игрокам доступен некоторый дележ, то доступен и любой худший. Ясно, что такая модификация переговорного множества безобидна.

Интерпретация этой задачи такая. До игры игроки могут попытаться договориться относительно любого исхода. Если они договариваются, они заключают обязывающее соглашение. Если не договариваются, они должны независимо выбрать стратегии и получить результат. Можно надеяться, что он не будет хуже α_i (см. лекцию про осторожные стратегии).

2. Снова игра, но X состоит только из полезностей равновесных ситуаций; d как раньше. Заметим, что любое равновесие лежит "выше" d.

3. Вспомним про коррелированные стратегии. Это элементы из $\Delta(S_N)$. Если изображать выигрыши, мы получим выпуклую оболочку множества $u(S_N)$. Точка разногласия d как раньше.

4. Брать в качестве X множество полезностей для коррелированных равновесий; оно чуть меньше предыдущего. Это понимается так. Коррелированные равновесия предлагает посредник, арбитр. Но их много, какое же предложить? Арбитр может исходить при этом из соображений справедливости и эффективности.

И вообще, тут уместно говорить об арбитре, поэтому задачи торга часто называют *арбитражными схемами.*

5. Задача торга может возникать и сама по себе, без игры. Классическая задача - "поделим доллар". Двум участникам предлагают поделить между собой доллар; если они не договорятся, они не получат ничего. В зависимости от постановки можно считать, что X либо отрезок $\{(x_1, x_2), x_i \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$, либо треугольник $\{(x_1, x_2), x_i \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Здесь $d = (0, 0)$.

6. Точка разногласия может формироваться и более сложно.

Решение задачи торга. Поговорим теперь о том, что следовало бы считать решением задачи торга. Мы уже говорили, что это означает выбор некоторой точки x из X. Но одни точки лучше для первого, другие - для второго, так что однозначного ответа ожидать трудно. Все же некоторые требования представляются естественными.

Первое. По самому смыслу точки разногласия решение x не должно быть хуже d. Это условие известно как требование *индивидуальной рациональности.* Никто не согласится получать меньше, чем при отсутствии соглашения.

Второе. Решение x должно быть Парето-эффективной точкой в X. В самом деле, арбитр, предложивший неэффективную точку, будет подвергнут критике и смещен.

Множество точек X, которые эффективны и индивидуально рациональны, иногда называют *переговорным множеством.* Это близко к понятию кривой контракта Эджворта.

Третье. Часто нужно предложить решение не для одной конкретной задачи торга, а для целого класса. И тогда естественным выглядит требование, чтобы решения отдельных задач были согласованы в каком-то смысле.

Итак, под решение задачи торга мы будем понимать следующее. Дан класс $\mathcal{B}$ задач (X, d). *Решением* называется отображение $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $\phi(X, d) \in X$ для любого $X \in \mathcal{B}$.

Утилитаризм и эгалитаризм. Как мы знаем, хороший выбор бывает при максимизации функции полезности. Поэтому можно зафиксировать некоторую функцию U на $\mathbb{R}^2$, и точку $\phi(X, d)$ искать как точку максимума U на X. Более точно, чтобы сразу удовлетворить условию индивидуальной рациональности, лучше искать максимум на множестве

$$X_d = \{x \in X, x \geq d\} = X \cap (d + \mathbb{R}^2_+).$$

Оно непусто, если $d \in X$. А чтобы получать эффективные точки, нужно требовать от U монотонность: U растет, если обе координаты точки возрастают.

Здесь сразу приходят на ум два простых принципа - *равной выгоды* и *наибольшего блага.* В первом случае участник говорит: "Вы должны сделать это для меня, потому что я делаю больше для вас"; во втором - "сделайте нечто, потому что это принесет мне пользы больше, чем вам - вреда". В первом случае мы приходим к *эгалитарному* решению, когда равны приращения по сравнению с d. Во втором - к *утилитарному*, когда максимизируется сумма $x_1 + x_2$. В первом случае максимизируется функция $\min(x_1 - d_1, x_2 - d_2)$.

Обобщение. В предыдущем случае как бы подразумевалось, что имеется общая единица для измерения полезностей обоих участников. Но можно делать то же самое, взвешивая полезности, т.е. учитывая полезности игроков с разными весами. Зафиксируем пару положительных чисел-*весов* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Определение. λ-*эгалитарным решением* называется точка из X_d, в которой достигает максимума функция $\min(\lambda_1(x_1-d_1), \lambda_2(x_2-d_2))$. Грубо говоря, это наилучшая точка, где $\lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2)$.

λ-*утилитарным решением* называется точка из X_d, в которой максимальна функция $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Отметим, что при росте λ_1 платеж 1-го участника убывает в λ-эгалитарном и возрастает в λ-утилитарном решении. Это намекает, что существуют такие веса λ, при которых λ-эгалитарное решение совпадает с λ-утилитарным. Такие веса λ дают *естественную шкалу* для задачи (X, d).

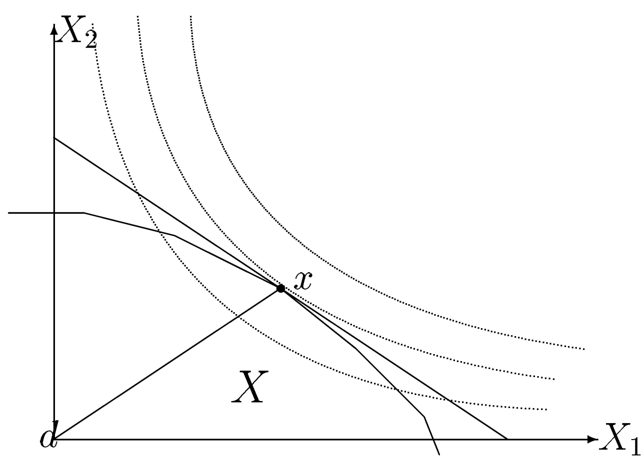
Решение Нэша. Впервые задачу торга рассмотрел Нэш, который и предложил интересное и наиболее популярное решение. Он ограничился следующим классом задач (X, d):

a) множества X выпуклые, замкнутые, нормальные и ограниченные сверху. Нормальность означает, что вместе с каждой точкой x множество X содержит и все меньшие точки. Ограниченность сверху можно понимать как существование такой точки $M \in \mathbb{R}^2$, что $X \leq M$.

b) точка d лежит во внутренности X.

В этой ситуации Нэш предложил в качестве решения точку из X, в которой достигает максимума т.н. *произведение Нэша*

$$U(x) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2).$$



Какими хорошими свойствами обладает решение Нэша? Во-первых, оно единственно. Во-вторых, оно не зависит от добавления констант к полезностям. Поэтому всегда можно считать, что точка d находится в нуле. В-третьих, если мы проведем через точку-решение x касательную к гиперболе

$X_1X_2 = x_1x_2$ (а она будет касательной и к множеству X), то отрезок касательной между координатными осями разобьется точкой x пополам. Это нетрудно подсчитать (см. рисунок выше).

Это означает, как легко понять, что решение не зависит и от выбора масштаба полезностей. Кроме того, это означает, что если в качестве λ_i взять $1/x_i$, то точка Нэша является одновременно λ-эгалитарным и λ-утилитарным решением. Выполняется также свойство симметрии: если множество X симметрично относительно диагонали (подразумевается, что $d = 0$), то $x_1 = x_2$. Наконец, это решение обладает следующим свойством *независимости от посторонних альтернатив*: если $Y \subset X$ и $x = \phi(X, 0) \in Y$, то $x = \phi(Y, 0)$.

Нэш показал, что верно и обратное. Более точно, пусть класс $\mathcal{B}$ задач выбора такой как выше, и решение $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ удовлетворяет следующим 5 аксиомам:

Аксиома 1 (эффективность). $\phi(X, d) \in X$, и если $x \geq \phi(X, d)$ для x из X, то $x = \phi(X, d)$.

Аксиома 2 (индивидуальная рациональность). $\phi(X, d) \geq d$.

Аксиома 3 (скалярная ковариантность). Пусть $A(z) = \lambda z + \gamma$ - преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) > 0$, а $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ произвольный элемент $\mathbb{R}^2$. Тогда $\phi(A(X), A(d)) = A(\phi(X, d))$.

Аксиома 4 (независимость от посторонних альтернатив). Если $Y \subset X$ и $\phi(X, d) \in Y$, то $\phi(Y, d) = \phi(X, d)$.

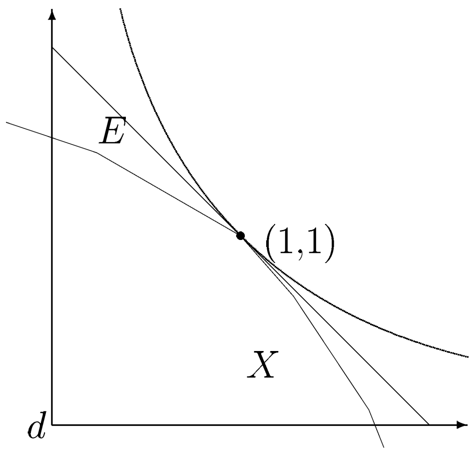
Аксиома 5 (симметрия). Если $d_1 = d_2$ и X симметрично, то

$$\phi_1(X, d) = \phi_2(X, d).$$

Теорема. *Единственное решение ϕ, удовлетворяющее аксиомам 1-5, это решение Нэша* (максимизирующее функцию $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$).

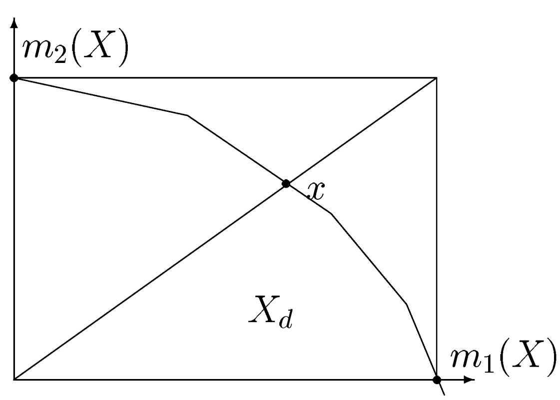
Доказательство. Пусть максимум достигается в точке x. Делая линейное преобразование, можно считать, что $x = (1, 1)$, а $d = (0, 0)$. Гипербола в точке x имеет наклон -1. Поэтому рассмотрим множество $E = \{z, z_1 + z_2 \leq 2\}$; $X \subset E$.

Согласно симметрии и эффективности $\phi(E, 0) = (1, 1) = x$. По аксиоме 4 мы имеем $\phi(X, 0) = x$. $\square$



Другие решения. Нэш предложил свое решение в работе 1950 г. Позже были предложены и другие решения. Например, можно отказаться от симметрии, оставив остальные 4 аксиомы. Тогда мы придем к максимизации *обобщенного произведения Нэша* $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.

Калаи и Смородински (1975) предложили решение, основанное на соображениях монотонности. Будем снова считать, что $d = 0$. Определим числа $m_i(X)$ как максимум y_i, где $y \in X$ и $y \geq 0$. Тогда они предлагают делить x пропорционально m.



Для этого решения также имеется аксиоматическая характеризация. Здесь нарушается аксиома независимости. Они вместо нее предлагают аксиому *индивидуальной монотонности*: предположим, что $m_1(X) = m_1(Y)$, и $Y \subset X$. Тогда $\phi_2(Y) \leq \phi_2(X)$; и аналогично для второго игрока.

Многомерное обобщение. Решение Нэша (и другие решения) допускают многомерное обобщение, когда игроков более двух. Однако они менее интересны, поскольку в них не учитываются возможности коалиций. Этим мы займемся более подробно в следующих лекциях, посвященных уже целиком кооперативным аспектам. Случай торга двух лиц лежал на грани некооперативной и кооперативной теории.

Лекция 20. Кооперативные игры

Переход к коалиционной теории. Теперь мы окончательно переходим к кооперативным играм. Как уже отмечалось, упор здесь переносится со стратегических аспектов на возможности коалиций. Подразумевается, что игроки могут образовывать всевозможные коалиции и внутри них подписывать обязывающие соглашения и договора. Это значит, что для каждой коалиции имеется множество тех полезностей, которые она может обеспечить своим членам.

Здесь и далее используется следующая терминология. *Коалиция* - это подмножество игроков $K \subset N$; коалиция N называется *тотальной.* Для набора стратегий $s_N = (s_i,\ i \in N)$ через s_K обозначается его проекция на $S_K = \times_{i \in K} S_i$; аналогично понимается s_{-K}.

Предположим, что у нас имеется игра $G = (N, (S_i), (u_i))$ в нормальной форме. Если все игроки договорятся использовать стратегический профиль s_N, то выигрыши игроков удобно изображать вектором $u(s_N) = (u_i(s_N)) \in \mathbb{R}^N$. Когда мы переберем все стратегические профили из S_N, мы получим некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^N$, которое обычно обозначают как $V(N)$. Если игра конечная, то получается конечное множество, и это не совсем удобно. Поэтому обычно с каждым вектором в $V(N)$ включают и все меньшие. (Если допускать коррелированные стратегии, т.е. вместо S_N использовать $\Delta(S_N)$, то множество $V(N)$ получается даже выпуклым.)

Похожие множества $V(K)$ можно связать не только с тотальной коалицией, но и с каждой коалицией K, хотя это можно сделать разными способами. Мы обсудим сейчас наиболее естественный и употребимый способ. Скажем, что коалиция K *гарантирует* вектор полезностей x из $\mathbb{R}^K$, если существует коррелированная стратегия $\sigma_K \in \Delta(S_K)$, такая что для любой σ_{-K} выполнены неравенства

$$u_i(\sigma_K, \sigma_{-K}) \geq x_i \quad \forall i \in K.$$

Обозначим через $V^\alpha(K)$, или просто через $V(K)$, множество тех векторов в пространстве $\mathbb{R}^K$, которые может гарантировать K. По существу, это минимаксная идеология.

Что можно сказать про эти множества $V(K)$? Во-первых, они выпуклые (проверьте сами!) и нормальные (в том смысле, что с любой точкой содержат меньшие). Во-вторых, они замкнутые и ограниченные сверху (когда игра конечна). В третьих, выполнено следующее свойство *супераддитивности*: если коалиции K и K' не пересекаются, то $V(K \cup K')$ содержит произведение $V(K) \times V(K')$. Проверьте!

Коалиционные игры. Обобщая предыдущую конструкцию, введем понятие коалиционной игры, или игры в коалиционной форме.

Пусть N - множество игроков. *Коалиционной игрой* называется задание для каждой коалиции $K \subset N$ непустого множества $V(K) \subset \mathbb{R}^K$. Множество $V(K)$ отмечает множество тех платежей (полезностей), которые коалиция K может гарантировать своим членам. Обычно предполагается, что множества $V(K)$ замкнутые, нормальные, ограниченные сверху. Часто, хотя и не всегда, предполагается супераддитивность. В случае двух участников эти данные фактически совпадают с данными задачи торга.

Пример 1. *Игра рынка.* Пусть каждый участник i владеет некоторым начальным запасом $\omega(i)$, принадлежащим пространству товаров $\mathbb{R}^l_+$, и имеет функцию полезности $u_i : \mathbb{R}^l_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Коалиция K может перераспределить свои ресурсы (т.е. перейти к набору $x(i) \subset \mathbb{R}^l_+$, такому что $x(K) := \sum_{i \in K} x(i) = \omega(K)$). Здесь $V(K) = \{u_i(x(i)),\ i \in K,\ x(K) = \omega(K)\}$ (или нормализация этого множества).

Пример 2. *Марьяж.* Имеется множество мужчин M и женщин W, которые могут заключать браки (моногамные и гетеросексуальные). Считается, что у каждого участника есть функция полезности $u_i \geq 0$ на множестве потенциальных партнеров (например, если $i \in M$, то $u_i : W \longrightarrow \mathbb{R}_+$). Полезность одиночки (для простоты) равна 0.

Как это представить коалиционной игрой? В качестве N возьмем объединение множеств M и W. Объясним сначала, как определить множество $V(N)$ для тотальной коалиции. Исходом естественно считать паросочетание некоторых мужчин и женщин; остальные остаются холостыми. Формально паросочетание - это биекция μ части мужчин $M' \subset M$ и части женщин $W' \subset W$. С каждым таким паросочетанием (матчингом) μ свяжем вектор $x_\mu \in \mathbb{R}^N$. "Мужские" координаты этого вектора равны $u_m(\mu(m))$, если $m \in M'$, и равны 0 в противном случае. Аналогично задаются "женские" координаты: $x_w = u_w(\mu^{-1}(w))$, если $w \in W'$, и нулевые, если женщина w одиночка. Наконец, множество $V(N)$ есть объединение множеств $x_\mu - \mathbb{R}^N_+$, когда μ пробегает все матчинги.

Аналогично определяется множество $V(K)$ для произвольной коалиции

$K \subset N$. Нужно только M и W заменить на $M \cap K$ и $W \cap K$. В результате мы получаем коалиционную игру V.

Трансферабельные полезности. Сразу можно выделить один важный частный случай - случай т.н. *трансферабельных полезностей*, или кооперативных игр *с побочными платежами* (в общем случае говорят про игры *без побочных платежей*). А именно, предположим, что в системе имеется безгранично делимый и желательный товар - *деньги*, и что участники могут свободно передавать его друг другу. Более того, предположим, что полезность этого товара линейно входит в функцию полезности, так что добавление единицы денег увеличивает полезность каждого на единицу. Тогда вместе с каждой точкой x в множество $V(K)$ входит и любая точка y с той же суммой координат. Для краткости мы используем обозначения: $x(K) = \sum_{i \in K} x_i$. Тогда $x \in V(K)$ и $y \in \mathbb{R}^K$, $x(K) \geq y(K)$ влечет, что $y \in V(K)$. В случае трансферабельных полезностей вместо множеств $V(K)$ задают числа

$$v(K) = \max x(K), \text{ где } x \text{ пробегает } V(K).$$

В свою очередь,

$$V(K) = \{x \in \mathbb{R}^K, x(K) \leq v(K)\}.$$

Таким образом, коалиционная игра с побочными платежами - это семейство v чисел $(v(K), K \subset N)$, параметризованное коалициями K. Говорят также про игру в *характеристической форме.*

Пример 3. *Сбросы в озеро.* Вокруг озера расположены n фабрик, которые используют для своих производственных нужд чистую воду. Стоимость очистки собственной использованной воды равна C. Если m фабрик сбросили в озеро неочищенную воду, то стоимость очистки озерной воды равна mc. Предполагается, что $c < C < nc$.

Как это естественно представить в виде игры в характеристической форме? Под $v(K)$ мы будем понимать издержки коалиции. Конечно, $v(K)$ равно минимальным издержкам коалиции K. Пока коалиция мала, ей выгоднее не очищать сброс, и тогда $v(K) = knc$, где $k = |K|$. Однако как только размер коалиции станет больше, чем C/c, ей выгоднее очищать свои сбросы, и в этом случае $v(K) = k(C + (n - k)c)$. Это пример т.н. симметричной (или анонимной) игры, так как $v(K)$ зависит только от размера $|K|$ коалиции K.

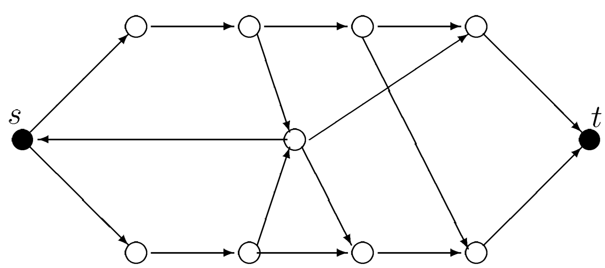
Пример 4. *Простые игры.* Это когда $v(K) = 0$ или 1. Такие игры встречаются при анализе схем голосования. Обычно предполагается, что $v(\emptyset) = 0$, $v(N) = 1$, и v монотонна.

Пример 5. *Игры производства.* Будем называть технологией функцию $f : \mathbb{R}^l_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, которая описывает, как ресурсы (в количестве l) преобразуются в выпуск (в денежной форме). Пусть каждый участник i владеет набором ресурсов $\omega(i)$. Тогда коалиция K владеет ресурсом $\omega(K) = \sum_{i \in K} \omega(i)$ и может получить $v(K) = f(\omega(K))$ денег. Получается коалиционная игра v.

Один более конкретный пример игры производства мы рассмотрим в следующем примере.

Пример 6. *Потоки в сетях.* Сначала несколько общих понятий. Ориентированным графом (*орграфом*) называется пара (V, A), где V - (конечное) множество вершин, а $A \subset V \times V$ - множество стрелок или дуг. Нужно представлять, что речь идет о некой транспортной системе (дорог, трубопроводов и т.п.) Чтобы усилить эту трактовку, выделим две вершины, s - источник, и t - сток.

Сетью называется орграф (V, A) вместе с функцией $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$; $\psi(a)$ - это пропускная способность "трубы" $a \in A$. Поток в такой сети - это отображение $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ($\phi(a)$ - поток по трубе a), такое что для любой вершины v, отличной от s и t, сколько втекает, столько и вытекает; кроме того должно выполняться ограничение $\phi(a) \leq \psi(a)$ на пропускные способности. Легко понять, что из источника вытекает столько же, сколько втекает в сток; эта общая величина называется *величиной потока* ϕ. Через $f(\psi)$ обозначим максимальное значение величины потока через сеть ψ (коротко - *максимальный поток*).



Представим теперь, что каждый участник i владеет некоторыми стрелками (дугами, трубами). Его выигрыш - то, что он может перекинуть по своим трубам. Аналогично выигрыш коалиции K - тот максимальный поток, который можно перебросить по трубам, принадлежащим K. Формально можно представить, что участник i владеет сетью ψ_i, а коалиция - соответствующей суммой. И тогда $v(K) = f(\sum_{i \in K} \psi_i)$. Так что это частный случай производственной игры.

Распределения. Вернемся к общим коалиционным играм. *Распределением* (distribution) будем называть произвольный вектор x из $\mathbb{R}^N$; *допустимое распределение* - вектор из $V(N)$. Решение коалиционной игры должно указывать некоторое допустимое распределение, которое получается в результате рациональных действий (договоров) игроков. Снова тут нет однозначного ответа. Обычно теория идет по пути формулировки некоторых требований к решению, которые представляются разумными. Например, естественно требовать, чтобы решение давало каждому игроку не меньше того, что он может добиться в одиночку (требование *индивидуальной рациональности*). Но аналогичное требование можно высказать и по отношению к любой коалиции (если она может образоваться, что мы неявно предполагаем). Тут удобно ввести соответствующий язык.

Доминирование. Для двух распределений x и y из $\mathbb{R}^N$ и коалиции K будем писать

$$x >_K y, \text{ если } x_i > y_i \ \ \forall\, i \in K.$$

Говорят, что распределение x *доминирует* распределение y, если найдется (непустая) коалиция K, такая что $x >_K y$ и $x_K \in V(K)$.

Смысл этого в том, что коалиция K не согласится на вектор платежей y, если, действуя самостоятельно, она может получить более лучший для нее набор полезностей x_K. Тут замешаны два разных свойства: чтобы x был лучше для коалиции K, и одновременно, чтобы x был достижим коалицией K.

Отметим сразу, что отношение доминирования на множестве всех распределений в общем случае не является транзитивным или антисимметричным (потому что K может меняться от случая к случаю). Тем не менее оно позволяет как-то анализировать допустимые распределения. Естественно, наибольший интерес вызывают максимальные элементы относительно доминирования, или недоминируемые распределения. Это приводит к понятию ядра и другим понятия решения коалиционных игр.

Лекция 21. Решения коалиционных игр

Ядро. *Ядром* коалиционной игры V называется множество всех допустимых недоминируемых распределений; обозначается оно $C(V)$.

В силу важности этого понятия слегка перепишем определение. Пусть дано распределение x. Скажем, что коалиция K *отвергает* x (или может его улучшить), если существует такой вектор y_K из $V(K)$, что для любого игрока i из коалиции K выполнено $y_i > x_i$. Тогда ядро состоит из таких допустимых распределений (т.е. элементов $V(N)$), которые не отвергаются никакой коалицией. Можно и так переписать: *элемент x принадлежит ядру $C(V)$ тогда и только тогда, когда*

a. $x \in V(N)$, и

b. Для любой (непустой) коалиции K проекция x_K не принадлежит внутренности множества $V(K)$.

Отсюда видно, что ядро - замкнутое и ограниченное подмножество в $V(N)$.

Элементы из ядра могут претендовать на звание хорошего решения игры. Они оптимальны по Парето (лежат на границе Парето $V(N)$), и индивидуально рациональны. Ядро может оказаться большим (и тогда предстоят приятных хлопоты с выделением какого-то "самого хорошего" элемента из ядра). Менее приятно, если ядро пусто. А так бывает довольно часто. Например, пусть трое делят 100 руб., и любая пара может обеспечить себе 100 руб. Тут ядро пусто, и они вряд ли договорятся. Ниже мы немного скажем, что делать при пустом ядре.

Ядро экономики. Понятие ядра интересно тем, что оно естественно возникает в экономике. Собственно, как и понятие равновесия, оно там впервые и появилось, хотя и в частном случае. У Эджворта, в 1881 г., за много лет до появления его в теории игр (Джиллис, 1959).

Представим, что имеется экономика обмена. Это значит, что участники i имеют начальные запасы ω_i, принадлежащие пространству товаров $\mathbb{R}^n_+$. Кроме того у каждого участника имеется функция полезности u_i, определенная на этом ортанте.

Распределением (allocation) называется семейство векторов $x_i \in \mathbb{R}^n_+$, $i \in N$, такое что $\sum_i x_i = \sum_i \omega_i$ (или $\leq$, в зависимости от постановки). Спрашивается, как им "правильно" перераспределить свои начальные запасы? Конечно, каждый участник откажется участвовать в обмене, если он в результате получит меньше (в смысле полезности), чем свой начальный запас ω_i. Но то же можно сказать и о любой коалиции. Коалиция K отвергнет распределение (x_i), если пользуясь только своими начальными запасами ω_i, где $i \in K$, она может так перераспределить их, что полезность для ее членов будет больше, чем $u_i(x_i)$. Это и есть ядро. Сам Эджворт говорил о кривой контракта, потому что рассматривал случай двух участников и рисовал "ящик Эджворта".

Большой удачей является то, что ядро экономики непусто при простых условиях. Видимо, проще всего убедиться в этом с помощью понятия конкурентных равновесий. Напомним, что так называется распределение (x_i), для которого найдется цена (т.е. вектор $p \in \mathbb{R}^n_+$), такой что для каждого i набор x_i является наилучшим в бюджетном множестве $B_i(p) = \{x, px \leq p\omega_i\}$. Как легко понять, любое равновесное распределение принадлежит ядру. Действительно, предположим, что коалиция K может так перераспределить свой начальный запас $(y_i, \sum_{i \in K} y_i = \sum_{i \in K} \omega_i)$, что y_i стали лучше, чем x_i (для $i \in K$). Так как x_i были наилучшими в бюджетных множествах, мы должны заключить, что их стоимости превышают стоимости начальных запасов, $py_i > p\omega_i$. Складывая по $i \in K$, мы получаем, что $p(\sum_{i \in K} y_i) > p(\sum_{i \in K} \omega_i)$, что противоречит равенству $\sum_{i \in K} y_i = \sum_{i \in K} \omega_i$. $\square$

Остается заметить, что при довольно слабых условиях (типа выпуклости предпочтений) конкурентные равновесия существуют.

Интересная экономическая проблема, также поднятая Эджвортом, состоит в приближении равновесий ядром. Дело в том, что в основе конкурентного поведения лежит постулат, что каждый участник настолько мал, что не может повлиять на цену. Поэтому можно ожидать, что когда участники малы, то ядро "почти" совпадает с конкурентными равновесиями. Имеется довольно много результатов, которые уточняют это утверждение. В наиболее чистом виде оно реализовано Ауманном: если имеется континуум участников, то ядро в точности совпадает с множеством конкурентных равновесий.

Решение Неймана-Моргенштерна. Вернемся к коалиционным играм. Возможная пустота ядра вынудила искать другие, более слабые понятия решения. И тут нельзя не упомянуть исторически первое понятие решения по Нейману-Моргенштерну (или Н-М-решение).

Назовем *дележом* (импутацией) оптимальный и индивидуально рациональный вектор x из $V(N)$; иначе говоря, x должен лежать на границе Парето множества $V(N)$ и для любого i должно выполняться неравенство $x_i \geq \max(y, y \in V(\{i\})) = v_i$. Обозначим через $E(V)$ множество всех дележей игры V.

Определение. *Н-М-решением* игры V называется подмножество $Z \subset E(V)$, которое удовлетворяет двум условиям:

(*) если $y \in E(V) \setminus Z$, то найдется $x \in Z$, который доминирует y.

(**) если же x и y из Z, то x не доминирует y.

Можно сказать, что (**) - это условие внутренней стабильности Z, тогда как (*) - условие внешней стабильности. Грубо говоря, решение в совокупности доминирует все, а внутри себя свободно от доминирования.

Например, в игре большинства (дележка 300 долларов; $v(1, 2, 3) = 300$, v(2-элементных коалиций)=300, v(игрока)=0) множество из трех распределений $(150,150,0)$, $(150,0,150)$, $(0,150,150)$ образует Н-М-решение. В самом деле, как легко понять, никакой из этих дележей друг друга не доминирует. С другой стороны, возьмем произвольный дележ (x_1, x_2, x_3); это значит, что x_i неотрицательны и в сумме равны 300. Но тогда два числа из трех меньше или равны 150. Пусть $x_1, x_2 < 150$. Тогда этот дележ доминируется дележом $(150, 150, 0)$.

Кстати, в этой игре есть много других НМ-решений.

Небольшой комментарий. Надо сказать, что Нейман и Моргенштерн, предложившие понятие НМ-решения, не упоминали о ядре (оно было введено явно лет через 15). Это выглядит поразительным. Мне представляется, что они сознательно не говорили про ядро, понимая, что часто ядро пусто. Они же хотели предложить такое решение, которое "всегда" существует. И ради этого они пошли на три жертвы. Во-первых, утаили понятие ядра. Во-вторых, смирились с тем, что решение - это не дележ, а система дележей (множество Z). В третьих, пришлось все еще допускать множественность решений.

Их надежды не оправдались. В 1967 г. был построен пример игры (10 лиц) без Н-М-решения. Это сильно подорвало интерес к Н-М-решениям.

Тем не менее понятие НМ-решения является фундаментальным, и должно бы всегда существовать. Мы вернемся еще к этому вопросу и покажем, что "дробный" вариант НМ-решения действительно существует всегда.

Нуклеолус. Это понятие применимо только к играм с побочными платежами. Начнем с технического термина. *Эксцесс* коалиции S при данном платежном векторе x есть число

$$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Дележ x принадлежит ядру тогда и только тогда, когда все эксцессы ≤ 0. ε-ядро - когда все эксцессы $\leq \varepsilon$. *Около-ядро* (near-core) - наименьшее непустое ε-ядро. Это выпуклое множество. Если идти еще дальше (сдвигая стенки многогранника, задающего ядро), мы придем к единственной точке, называемой *нуклеолусом.*

В отличие от вектора Шепли (о котором мы еще скажем подробнее), нуклеолус является кусочно-линейной функцией на множестве всех игр. Геометрически это "центральная точка" ядра, когда оно непусто.

Переговорное множество. *Переговорная точка* игры v - это такая импутация α, что для любых двух игроков i и j любое "возражение" i против j наталкивается на "контрвозражение" j против i. Здесь *возражение* (objection) - это коалиция S (содержащая i, но не j) и импутация β, доступная S и лучшая по сравнению с α для всех членов S. Контрвозражение - коалиция T

(содержащая j без i) и допустимая для T импутация γ, которая (слабо) лучше, чем β, для членов $S \cap T$, и (слабо же) лучше, чем α, для членов $T - S$.

Такое понятие было инспирировано наблюдением за игроками в экспериментальных ситуциях. По сравнению с НМ-решением, оно выражает стабильность *единственной* импутации, а не целого множества. Существует вариант определения, где индивиды i и j заменяются коалициями.

В следующих двух лекциях мы более подробно остановимся на понятиях ядра и вектора Шепли.

Лекция 22. Ядро

Напоминания. Пусть N - множество игроков, и $V = (V(K), K \subset N)$ - коалиционная игра. Напомним, что ядро $C(V)$ состоит из таких векторов выигрышей $x \in V(N)$, что x_K не принадлежит внутренности $V(K)$ ни для какой (непустой) коалиции K.

Как уже говорилось, ядро часто бывает пустым. Здесь мы займемся условиями, которые гарантируют непустоту ядра. И начнем с более простого случая игр с побочными платежами. Это значит, что для каждой коалиции K задано число $v(K)$ - "ценность" коалиции. Хотя это не так важно, можно считать, что $v(i) = 0$ для любого игрока i, что функция v монотонна и супераддитивна. Ядро в трансферабельном случае состоит из таких векторов $x \in \mathbb{R}^N$, что

a) $x(N) = v(N)$, и

b) $x(K) \geq v(K)$ для любой (непустой) коалиции K.

Здесь для коалиции K $x(K)$ обозначает $\sum_{i \in K} x_i$. Отметим, что в данном случае ядро задается набором линейных неравенств, и поэтому является выпуклым (ограниченным) множеством в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Супермодулярные игры. Функция v на булевой решетке 2^N (такие функции называют также функциями множеств) называется *супермодулярной* (или *выпуклой*) *игрой*, если для любых двух коалиций K и K' выполняется неравенство

$$v(K) + v(K') \leq v(K \cap K') + v(K \cup K'). \tag{4}$$

Мы считаем также, что $v(\emptyset) = 0$. Отметим, что супермодулярность влечет супераддитивность. В каком-то смысле это означает, что выгодно образовывать все большие коалиции.

Довольно легко проверить, что субмодулярность эквивалентна выполнению более экономной системы неравенств:

$$v(S) + v(S \cup i \cup j) \geq v(S \cup i) + v(S \cup j)$$

(для любых $S \subset N$ и $i, j \in N$). Интерпретация через предельные ценности игроков (их рост).

Главный интерес выпуклых игр в том, что ядро всегда непусто.

Теорема (Шепли). *Если игра v супермодулярна, то ядро $C(v)$ непусто.*

Более того, можно явно указать элемент из ядра (и даже целое семейство). Расскажем об этой конструкции более подробно.

Упорядочим как-то игроков, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, и обозначим через K_i коалицию $\{1, 2, \dots, i\}$ первых i игроков. После этого определим дележ x по формуле

$$x_i = v(K_i) - v(K_{i-1}).$$

Смысл тут простой. Коалиции K_i образуются по очереди, путем присоединения нового игрока, и этот игрок i получает всю дополнительную (или маргинальную) прибыль $v(1, \dots, i) - v(1, \dots, i-1)$. Очевидно, что $x(N) = v(N)$, и остается только проверить, что этот дележ устраивает любую коалицию K. Т.е. что выполнены неравенства $x(K) \geq v(K)$. Это утверждение мы будем доказывать индукцией по числу членов K; для $K = \emptyset$ оно очевидно.

Пусть i - наибольший номер участника, попавшего в коалицию K. Это значит, что $K \subset K_i$, и K не содержится в K_{i-1}. Из определения супермодулярности (4) мы имеем

$$v(K) + v(K_{i-1}) \leq v(K \cap K_{i-1}) + v(K \cup K_{i-1}).$$

При этом $K \cup K_{i-1} = K_i$, а $K \cap K_{i-1}$ содержит меньшее число членов, и к нему применимо индуктивное предположение. Поэтому мы получаем

$$v(K) \leq v(K \cap K_{i-1}) + v(K_i) - v(K_{i-1}) \leq x(K \cap K_{i-1}) + x(K_i) - x(K_{i-1}) = x(K).$$

□

На самом деле для любого упорядочивания π множества N мы получаем свою точку x_π из ядра, так что мы предъявили даже $n!$ точек из ядра (такие точки называются почему-то *точками Вебера*). Более принципиальным является следующее утверждение.

Предложение. *Для выпуклой игры v ядро $C(v)$ является выпуклой оболочкой точек x_π. Более того, точки x_π являются вершинами выпуклого многогранника $C(v)$.*

Это довольно легкий факт, но мы не будем его доказывать. Интерес его в том, что любое распределение из ядра можно реализовать как выпуклую (или вероятностную) смесь точек вида x_π.

ПРИМЕРЫ выпуклых игр.

1) Игра "единогласия". Пусть $v(N) = 1$ и $v(S) = 0$ для всех $S \neq N$. Очевидно эта игра выпукла. Вообще, для любой (непустой) коалиции S можно определить "олигархическую" игру v_S по правилу:

$$v_S(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K \supset S, \text{ и} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите ее ядро.

2) Игра "заговор". Свяжем с коалицией S такую странную игру γ_S:

$$\gamma_S(K) = \begin{cases} 0, & \text{если } K \subset S, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этой игре появление хотя бы одного "плохого игрока" (не из S) портит всю коалицию K (предатель, ложка дегтя). Довольно легко понять из определения, что это тоже выпуклая игра. Пользуясь Предложением, покажите, что ядро этой игры равно $-\Delta(N - S)$.

3) Игра "емкости". Пусть игроку i нужно (неэластично) некоторое "общественное" благо в размере y_i, производство которого стоит $c(y)$. Возникает игра v, для которой

$$v(K) = -c(\max(y_i, i \in K)).$$

Примеры таких ситуаций: строительство взлетной полосы, лифт, асфальтирование дороги куда-то.

Утверждается, что если c монотонна (что естественно для издержек), то эта игра супермодулярна. Это довольно очевидно из критерия предельной ценности игрока, особенно если упорядочить игроков так, чтобы $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$. По другому это утверждение можно получить из представления такой игры как (положительной) линейной комбинации игр γ_S.

Стабильные системы коалиций. Интуитивно ясно, что ядро бывает пусто тогда, когда претензии "малых" коалиций велики по сравнению с возможностями тотальной коалиции N. В этом разделе мы рассмотрим тот случай, когда некоторые коалиции вообще не могут образовываться (например, по той причине, что велики издержки их формирования, или по другим физическим или юридическим причинам). В некоторых таких ситуациях непустота ядра следует уже из "супераддитивности".

Представим, например, что любая нетривиальная (неодноэлементная) коалиция должна содержать игрока 1 (организатор, или вето-игрок). Тогда можно отдать игроку 1 весь сюрплюс, то есть дать ему $x_1 = v(N) - \sum_{j \neq 1} v(j)$, а остальным дать $x_j = v(j)$. Ядерность этого дележа (например, что $x_1 \geq v(1)$) следует из супераддитивности: $v(N) \geq \sum_i v(i)$.

Теперь можно дать общее определение. Пусть задано семейство $\mathcal{F}$ "допустимых" коалиций; мы будем считать, что $\{i\} \in \mathcal{F}$ для любого игрока $i \in N$ и что $N \in \mathcal{F}$. Назовем *$\mathcal{F}$-игрой* отображение $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ядром $\mathcal{F}$-игры называется дележ $x = (x_i)$, такой что $x(N) = v(N)$ и $x(S) \geq v(S)$ для любой "допустимой" коалиции $S \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$-игра $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *супераддитивной*, если для любого разбиения $S = \coprod_j S_j$, где все S_j и S "допустимы", выполнено неравенство $v(S) \geq \sum_j v(S_j)$.

Определение. Семейство коалиций $\mathcal{F}$ называется *стабильным*, если для любой супераддитивной $\mathcal{F}$-игры v ее ядро $C(v)$ непусто.

Выше мы уже приводили простой пример стабильного семейства. Дадим два более интересных и сложных примера.

1. Пример - марьяж. Фактически это пример 2 из Лекции 20. В этой игре дележ x принадлежит ядру, если выполнены соотношения двух типов:

a) индивидуальная рациональность: $x_i \geq 0$ для любого $i \in N = M \cup W$;

b) стабильность: нет такой пары (m, w), что $x_m < u_m(w)$ и $x_w < u_w(m)$.

Короче - система браков должна быть *стабильна*: для любого потенциального брака (m, w) либо жена m не хуже w, либо муж w не хуже m.

В этом примере семейство коалиций $\mathcal{F}$ состоит из всевозможных пар (i, j), где $i \in M$, $j \in W$ (и одиночек). Оказывается, что это семейство коалиций $\mathcal{F}$ универсально стабильно, то есть всегда существует стабильный марьяж.

Для доказательства Гейл и Шепли предложили такую процедуру: каждый мужчина сватается к наилучшей (с его точки зрения) женщине; каждая женщина выбирает из женихов наилучшего для себя и временно ангажирует его. Оставшиеся мужчины повторяют сватовство (не обращаясь повторно к отвергнувшим их женщинам); женщины снова выбирают (среди новых женихов плюс ангажированный мужчина). И так далее. В результате получается стабильный марьяж. В самом деле, рассмотрим потенциальную пару (m, w). Если w более привлекательна для m, чем его жена, то по конструкции процедуры он уже делал предложение w и получил отказ; это значит, что m хуже для w, чем ее нынешний супруг.

2. Пример. Предположим, что участники расположены в вершинах некоторого дерева T. Тогда естественно считать, что "допустимые коалиции" должны содержать всех "промежуточных" участников. Иначе говоря, семейство $\mathcal{F}$ состоит из связных подграфов (поддеревьев) дерева T. Хорошее упражнение

- проверить, что $\mathcal{F}$ стабильно.

Сбалансированные игры. Условие супермодулярности игры с побочными платежами достаточно для непустоты ядра, но не является необходимым. Иначе говоря, бывают невыпуклые игры с непустыми ядрами.

Оказывается, можно написать и необходимые условия непустоты ядра. Начнем с простого случая игры трех лиц. Если вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит ядру, то

$$x_i \geq v(i) \text{ для } i = 1, 2, 3,$$

$$x_1 + x_2 \geq v(1, 2), x_1 + x_3 \geq v(1, 3), x_2 + x_3 \geq v(2, 3),$$

и

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3).$$

Отсюда мы получаем, что

$$v(1) + v(2) + v(3) \leq v(1, 2, 3),$$

$$v(1, 2) + v(3) \leq v(1, 2, 3), v(1, 3) + v(2) \leq v(1, 2, 3), v(2, 3) + v(1) \leq v(1, 2, 3),$$

и

$$v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) \leq 2v(1, 2, 3).$$

Можно убедиться, что эти условия также и достаточны для непустоты ядра.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть дана игра v, т.е. семейство чисел $(v(K), K \subset N)$. В пространстве $\mathbb{R}^N$ рассмотрим многогранник $P(v) = P$, заданный неравенствами $x(K) \geq v(K)$, $K \subset N$. Точки этого многогранника изображают "претензии" коалиций, то есть такие распределения, которые устраивают все коалиции. Обозначим через Min минимум линейной функции $\mathbf{1}(x) = \mathbf{1}_N(x) = \sum_i x_i$ на P. Очевидно, что Min$\geq v(N)$, и что ядро непусто т. и т. т., когда $v(N) =$Min.

Основной факт выпуклого анализа (теорема двойственности) позволяет другим способом выразить этот минимум Min. Для этого нужно всевозможными способами представить функционал $\mathbf{1}$ в виде (неотрицательных) комбинаций функционалов $\mathbf{1}_K$ ($\mathbf{1}_K(x) = x(K)$). Пусть $\mathbf{1} = \sum_K \lambda_K \mathbf{1}_K$, где $\lambda_K \geq 0$. Так как для любого $x \in P$ выполнено $\mathbf{1}_K(x) \geq v(K)$, то складывая эти неравенства, получаем $\mathbf{1}(x) \geq \sum_K \lambda_K v(K)$, откуда Min$\geq \sum_K \lambda_K v(K)$. Теорема двойственности утверждает, что

$$\text{Min} = \max_\lambda \sum_K \lambda_K v(K).$$

Здесь удобно ввести следуюшие

Определения. Набор чисел $\lambda = (\lambda_K, K \subset N)$ называется *сбалансированным семейством*, если $\lambda_K \geq 0$, и $\sum_{i \in K} \lambda_K = 1$ для любого $i \in N$.

Игра (с побочными платежами) называется *сбалансированной*, если для любого сбалансированного семейства λ выполняется $\sum_K \lambda_K v(K) \leq v(N)$.

Предыдущие рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема (Бондарева, 1963). *Игра v имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда она сбалансирована.*

Можно также сказать, что сделав *балансировку* игры v (т.е. заменив $v(N)$ на $\max(\sum_K \lambda_K v(K))$ по всем сбалансированным λ), мы получим игру с непустым ядром.

Пример - сетевая игра. Вспомним игру с транспортной сетью (V, A, ψ) из Лекции 20, где участники i владеют кусками A_i ($\coprod_i A_i = A$) этой сети. Выигрыш $v(K)$ коалиции K равнялся максимальному потоку по $\cup_{i \in K} A_i$. Удобно это представить так: максимальный поток в сети ψ обозначить $f(\psi)$; тогда участники владеют подсетями ψ_i, и $v(K) = f(\sum_{i \in K} \psi_i)$.

Я утверждаю, что эта игра сбалансирована. Действительно, пусть $\lambda = (\lambda_K)$ - сбалансированный набор коэффициентов (т.е. $\mathbf{1}_N = \sum \lambda_K \mathbf{1}_K$). Нам нужно показать, что $v(N) \leq \sum \lambda_K v(K)$. Обозначим через ϕ_K максимальный поток через сеть $\psi_K = \sum_{i \in K} \psi_i$. Нам нужно проверить, что поток $\sum \lambda_K \phi_K$ допустим сетью $\psi = \sum_i \psi_i = \sum \lambda_K \psi_K$. Но это тривиально следует из сложения неравенств $\phi_i \leq \psi_i$.

Получаем, что ядро сетевой игры непусто.

На самом деле, предыдущее рассуждение показывает сбалансированность любой игры производства, производственная функция которой f вогнута и однородна.

Можно более явно предложить элементы из ядра. *Разрезом* в сети называется набор D стрелок (дуг) орграфа, такой что любой простой орпуть из истока s в сток t содержит одну из стрелок D. Сумма $\psi(a)$, $a \in D$, пропускных способностей дуг разреза D называется пропускной способностью разреза D (обозначим ее $\psi(D)$). Очевидно, что величина потока в сети ψ не превышает $\psi(D)$ для любого разреза. А замечательная теорема Форда-Фалкерсона утверждает, что найдется (для данной сети ψ) разрез D (т.н. *минимальный разрез*), что $f(\psi) = \psi(D)$. Так вот, надо взять произвольный минимальный разрез D для сети $\psi = \sum_i \psi_i$, и в качестве ядерного распределения дать участнику i $x(i) = \psi_i(D)$. Очевидно, что

1) $x(N) = \sum_i \psi_i(D) = \psi(D)$=(теорема Форда-Фалкерсона)=$f(\psi) = v(N)$, и

2) $v(K)$ (т.е. максимальный поток через сеть ψ_K) не превышает $\psi_K(D) = x(K)$.

Замечание. И то, и другое показывают, что ядерное распределение нужно понимать как касательную (точнее, супердифференциал) к функции v в точке N.

Ядра игр без побочных платежей. После того, как мы разобрали случай игр с трансферабельными полезностями, можно переходить к коалиционным играм без побочных платежей. Напомним, что они задаются семейством множеств $(V(K), K \subset N), V(K) \subset \mathbb{R}^K$. Мы видели, что (в трансферабельном случае) важную роль играет условие сбалансированности. Скарф перенес это понятие на общие игры и показал, что оно также влечет непустоту ядра.

Я приведу ниже некоторое общее утверждение, следствием которого будет теорема Скарфа. В его основе лежит идея, что результатом коалиционного взаимодействия должна быть пара (x, λ), где $x = (x_i,\ i \in N)$ изображает дележ (распределение выигрыша), а $\lambda = (\lambda(K),\ K \subset N)$ отражает формирование коалиций ($\lambda(K)$ - это уровень, интенсивность функционирования коалиции K). Конечно, эта пара не произвольная. Прежде всего, должно выполняться условие сбалансированности,

I. Набор λ сбалансирован.

То есть каждый игрок должен быть полностью занят действующими коалициями. Это своеобразный баланс по труду.

Во вторых, вектор выигрышей x должен быть достижим усилиями сформировавшихся коалиций. Под этим я понимаю, что если $\lambda(K) > 0$ для некоторой коалиции K, то $x_K \in V(K)$. (То есть если коалиция K функционирует, она должна обеспечивать своих членов предписанными полезностями.) Обозначая через $V(\lambda)$ множество векторов y, таких что $y_K \in V(K)$ для любой коалиции K с $\lambda(K) > 0$, мы запишем второе условие как

II. $x \in V(\lambda)$.

Наконец, если дележ x может быть улучшен некоторой коалицией K (т.е. $x_K \in \mathrm{Int}(V(K))$), сложившаяся структура коалиций λ будет разрушена. Чтобы этого не происходило, введем требование недоминируемости

III. Для любой коалиции K точка x_K не принадлежит внутренности $V(K)$.

Набор (x, λ), удовлетворяющий I-III, назовем *B-ядерным* (или *равновесным*).

Теорема. *Для любой игры существуют B-ядерные исходы.*

Скарф называет игру V *сбалансированной*, если $V(\lambda) \subset V(N)$ для любого сбалансированного набора λ. И очевидным следствием нашей теоремы является следующая теорема Скарфа.

Следствие (Скарф, 1967). *Если игра V сбалансирована, то ее ядро непусто.*

В качестве следствия мы снова получаем, что ядро в выпуклой модели экономики чистого обмена непусто. В самом деле, легко проверить, что соответствующая игра является сбалансированной.

Доказательство теоремы. Будем смотреть на коалиционную игру с экономической точки зрения, понимая коалиции как некии фирмы, которые для своей работы приглашают участников этой коалиции. Роль цен (или лучше - зарплат) будет выполнять вектор x. В зависимости от величины x (а точнее, x_K) коалиция K либо бездействует (если не может платить такую зарплату), либо проявляет разумную активность, либо развивает бешеную активность (если может предложить всем участникам больше). В конечном итоге фирмы предъявляют спрос на участников. Если спрос на некоторого участника i превышает 1 (т.е. предложение), то x_i увеличивается, если нет, уменьшается. Неподвижная точка дает ядерный исход.

Более точно, мы обозначим через $\Lambda = \{\lambda = (\lambda(K)), 0 \leq \lambda(K) \leq 2\ \forall K\}$. X - шар большого радиуса вокруг 0 в пространстве $\mathbb{R}^N$. Мы определим сейчас (многозначное) отображение F множества $\Lambda \times X$ в себя, т.е. по паре (x, λ) определим новую пару (x', λ').

Определение x'. Это Argmax на X линейной функции $\sum_K \lambda(K)\mathbf{1}_K - \mathbf{1}_N$. Это точка на границе шара X кроме того случая, когда λ сбалансировано.

Определение λ'. Для коалиции K положим

$$\lambda'(K) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_K \text{ не принадлежит } V(K), \\ \text{любое число между 0 и 2, если } x_K \text{ лежит на границе } V(K), \\ 2, \text{ если } x_K \text{ попадает строго внутрь } V(K). \end{cases}$$

Ясно, что построенное отображение (соответствие) F замкнуто и имеет непустые выпуклые образы. Поэтому по теореме Какутани существует неподвижная точка (x^*, λ^*). Я утверждаю, что она B-ядерная.

Действительно, если x^* лежит на границе шара X, то некоторая координата x_i^* "большая". Но тогда никакая коалиция K, содержащая i, не может обеспечить участнику i такой большой выигрыш, и значит $\lambda(K) = 0$, спрос на этого участника i равен 0, и x_i^* должен упасть. Аналогично если x_i^* "сильно отрицательно", тогда $x_i^* \in \mathrm{Int}V(i)$, значит $\lambda(i) = 2$. "Спрос" на этого участника велик, и его зарплата $x_i^* > 0$, что, конечно, противоречит исходному предположению "сильной отрицательности".

Таким образом, x^* лежит внутри X, откуда λ сбалансировано. Если $\lambda(K) > 0$, то из определения λ' видно, что $x_K \in V(K)$, т.е. выполняется II. Наконец, в силу той же сбалансированности $\lambda(K) \leq 1$, т.е. x_K не попадает строго внутрь $V(K)$ ни для какой K, т.е. III.□

Применение к НМ-решению. Пусть X - некоторое множество, и D - бинарное асимметричное отношение на X ("доминирование"). (Фактически это структура орграфа на X.) (Абстрактным) НМ-решением в этой ситуации естественно считать подмножество $Z \subset X$, которое удовлетворяет двум требованием:

1) внутренняя независимость: $D|_Z$ пусто (то есть элементы внутри Z несравнимы между собой);

2) совокупное доминирование: для любого $x \notin Z$ существует $z \in Z$, такой что zDx.

(В теории графов это называется kernel.) Чуть удобнее вместо D рассмотреть рефлексивное отношение $D^* = D\cup$ "диагональ". В этих терминах требования 1) и 2) переписываются как

1') $D^*|_Z$ - тождественное отношение на Z; и

2') для любого $x \in X$ существует $z \in Z$, zD^*x.

Ясно, что НМ-решение существует не всегда. Достаточно взять цикл из трех элементов. Поэтому естественно обратиться к релаксации этого понятия, то есть к понятию *дробного НМ-решения* (ДНМР). Для его формулировки назовем *цепью* (для (X, D^*)) подмножество $C \subset X$, такое что индуцированное отношение $D^*|C$ является полным порядком на C.

Определение. *Дробным НМ-решением* называется (неотрицательная) мера μ на X, которая обладает двумя свойствами:

1") для любой цепи C $\mu(C) \leq 1$;

2") для любого $x \in X$ существует цепь C с $\mu(C) \geq 1$, такая что cD^*x для любого $c \in C$.

Например в цикле из трех элементов ДНМР является мера, при которой вес каждого из трех элементов равен 1/2.

Теорема. *Если множество X конечно, то существует ДНМР.*

Доказательство. Назовем "игроком" в нашей ситуации любую цепь C. Элементы $x \in X$ будем понимать как "коалиции" тех игроков-цепей C, которые содержат x. Такая коалиция x дает игроку C полезность, равную "высоте" x в цепи C (так что минимальный элемент имеет высоту 0, и т.д.). Кроме того, каждый игрок может "индивидуально", то есть не вступая ни в какие коалиции, получить полезность -1.

Применяя полученную выше теорему о равновесных исходах, мы получаем существование пары (u, λ), где u - некоторый вектор выигрышей наших игроков-цепей C, а $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ - вектор интенсивностей коалиций, причем эта пара обладает соответствующими свойствами I-III. Сбалансированность (условие I) дает свойство $1'')$. Свойство II интерпретируется так: если $x \in C$ и $\lambda(x) > 0$, то $u(C) \leq$ "высоты" x в цепи C. Представим теперь, что для любой цепи C', доминирующей x, $\lambda(C') < 1$. Это значит, что уже для любой цепи C, содержащей x, полезность $u(C)$ строго меньше, чем "высота" x в C. Но это противоречит свойству III, потому что тогда вектор выигрышей для игроков из "коалиции" x строго внутренний. $\square$

Лекция 23. Вектор Шепли

Вектор Шепли. Рассмотренные до сих пор решения коалиционных игр (ядро, НМ-решение) обладали двумя очевидными недостатками: их могло не быть совсем, или их могло быть много. А хотелось бы иметь такое понятие решения, которое с каждой игрой связывало бы единственный дележ. Это мечта теории игр - связать с каждой игрой ее *значение*, или *цену* игры. Одно из таких решений предложил Шепли (1953); называется оно вектором (или значением, Shapley value) Шепли. Мы изложим теорию значения Шепли для игр с побочными платежами.

Пусть имеется коалиционная игра с побочными платежами $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная своими выигрышами $v(K)$ для всевозможных коалиций K ($v(\emptyset) = 0$). Напомним, что при рассмотрении супермодулярных игр мы с каждым упорядочением игроков τ связали некоторый дележ $x^\tau \in \mathbb{R}^N$. Упорядочением (или нумерацией) игроков называется биекция $\tau : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow N$, а дележ x^τ устроен так: игрок $\tau(i)$ с номером i получает полезность $v(\tau\{1, \ldots, i\}) - v(\tau\{1, \ldots, i-1\})$. Иначе говоря, игрок получает тот прирост, который он привносит своим присоединением к коалиции предшествующих ему игроков.

В случае выпуклых игр дележи x^τ принадлежали ядру игры v, и более того, образовывали крайние точки ядра. В частности, центр тяжести точек x^τ (т.е. точка $x^* = (\sum_\tau x^\tau)/n!$) также лежит в ядре и, в некотором смысле, является наиболее справедливым ядерным дележом.

Идея Шепли заключается в том, чтобы этой же формулой определить дележ для произвольных игр. А именно, *вектором*, или *значением Шепли* игры v называется элемент $\Phi(v) \in \mathbb{R}^N$, заданный явной формулой:

$$\Phi(v) = (\sum_\tau x^\tau)/n!. \tag{5}$$

Напомним, что τ пробегает здесь все нумерации игроков.

Интерпретация. Стандартная интерпретация формулы (5) такая. Пусть игроки в случайном порядке входят в зал. При этом каждый игрок получает выплату, равную той дополнительной ценности, которую он добавляет к собравшейся до него коалиции. Я говорю - добавляет, хотя в общем случае это может быть и отрицательная величина. Средний платеж (считается, что вероятность каждого упорядочения равна $1/n!$, где n - число игроков) и есть соответствующая координата вектора Шепли.

Приведенную выше формулу можно переписать, делая акцент на значении $\Phi(v)$ для конкретного игрока i. Вот игрок i вошел в зал, и вместе с ним в зале оказалась коалиция K. В этот момент он получает выплату, равную $v(K) - v(K - i)$. Нам остается посчитать, при скольких упорядочениях τ происходит это событие (т.е. что после захода i в зале собирается коалиция K). Пусть i входит k-м по очереди, где $k = |K|$. До него была коалиция $K' = K - i$ из $k-1$ человека. Это дает $(k-1)!$ возможностей для входа участников из K' до i. После входа i остаются еще $(n-k)!$ возможностей для входа остальных игроков, из $N - K$. Таким образом полное число возможностей равно $(k-1)!(n-k)!$. И мы получаем следующую формулу для i-й координаты вектора Шепли

$$\Phi(v)_i = \sum_{i \in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}(v(K) - v(K-i)), \tag{6}$$

где $k = |K|$. Здесь суммирование идет по коалициям K, содержащим игрока i. Однако можно суммировать и по всем коалициям K, т.к. если K не содержит i, то $K - \{i\} = K$, и этот член ничего не меняет.

Свойства вектора Шепли. Если исходную игру v понимать как функцию множеств (в том смысле, что она приписывает некоторое число $v(K)$ произвольному подмножеству $K \subset N$), то значение Шепли - это *аддитивная* функция множеств. Таким образом вектор Шепли математически нужно понимать как правило, преобразующее произвольные функции множеств в аддитивные[3]. Какими свойствами обладает это правило?

Первое - эффективность. Это значит, что сумма всех координат вектора $\Phi(v)$ равна $v(N)$. В самом деле, $\Phi(v)$ есть среднее из дележей, поэтому сам является дележом.

Однако в общем случае вектор $\Phi(v)$ не лежит в ядре (ядро может быть пусто, и даже если непусто). В общем случае он даже не индивидуально рационален (если игра не супераддитивна).

Второе - симметрия, или анонимность. Значение вектора Шепли для игрока зависит только от ценностей $v(K)$, но не от имени игрока. Более формально, с каждой перестановкой $\pi : N \longrightarrow N$ игроков можно связать новую игру

[3]В некотором смысле это наилучшее линейное приближение к v, удовлетворяющее дополнительному условию совпадения в точке N.

πv по формуле:

$$\pi v(K) = v(\pi^{-1}(K)).$$

Так вот вектор $\Phi(v)$ преобразуется по той же формуле, т.е.

$$\pi\Phi(v) = \Phi(\pi v).$$

Это очевидно из формулы (5) для вектора Шепли. В частности, если два игрока симметричны в игре v, то и значения $\Phi(v)$ для них совпадают. Это свойство можно трактовать как справедливость.

Третье - линейность. Операция перехода к значению Шепли линейна в том смысле, что значение Шепли для суммы двух игр равно сумме их значений,

$$\Phi(v_1) + \Phi(v_2) = \Phi(v_1 + v_2), \Phi(\alpha v) = \alpha\Phi(v).$$

Сумма игр определяется очевидным образом: $(v + w)(K) = v(K) + w(K)$. Это тоже очевидно из формулы (5) или (6).

Четвертое свойство состоит в том, что несущественные игроки ("болваны") получают нулевую полезность. *Болваном* называется такой игрок i, что для любой коалиции K выполняется $v(K \cup i) = v(K)$. Добавление такого игрока к любой коалиции не меняет ее ценность. Из формулы (5) или (6) видно, что болван не получает ничего в векторе Шепли.

Вместо болванов можно говорить о *носителе* игры. Так называется минимальная коалиция S, что $v(K) = v(S \cap K)$ для любой коалиции K. Очевидно, что носитель - это дополнение к множеству болванов (докажите!).

Аксиоматика вектора Шепли. Оказывается, что приведенные выше четыре свойства вектора Шепли полностью его задают. Более точно, назовем *значением* любое отображение Φ из всевозможных игр (с побочными платежами) в $\mathbb{R}^N$; значение Φ на игре v обозначим $\Phi[v]$. Мы будем предполагать, что выполнены следующие свойства:

A1. Отображение Φ - это линейный оператор из $\mathbb{R}^{2^N}$ в $\mathbb{R}^N$.

A2. Φ симметрично, т.е. для любой перестановки $\pi : N \longrightarrow N$

$$\Phi[\pi v] = \pi\Phi[v].$$

A3. Для любого болвана i $F[v](i) = 0$.

A4. Сумма координат вектора $\Phi[v]$ равна $v(N)$.

Теорема (Шепли). *Существует единственное значение, удовлетворяющее аксиомам $A1 - A4$, и оно задается формулой (5).*

Доказательство. Нужно проверить лишь единственность. Для этого мы введем в рассмотрение специальные "базисные", или простые игры, которые образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2^N-\{\emptyset\}}$ всех игр. А именно, с каждой непустой коалицией S свяжем свою игру v_S, которая определяется следующей формулой:

$$v_S(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \subset K \\ 0, & \text{если } S \not\subset K \end{cases}.$$

Таких игр ровно $2^n - 1$, поэтому можно рассчитывать, что они образуют базис $(2^n - 1)$-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^{2^N-\{\emptyset\}}$ всех игр. Это видно, например, из того, что они линейно независимы (почему?). Однако можно и непосредственно убедиться, что любая игра v разлагается по v_S. В самом деле, пусть v - игра, и S минимальная коалиция, для которой $v(S)$ отлично от нуля. Тогда можно рассмотреть игру $v' = v - v(S)v_S$. Для нее $v'(S) = 0$, как и для меньших коалиций. Двигаясь таким образом, мы разложим v по v_S. Можно предложить и явную формулу:

$$v = \sum_S \mu(S) v_S, \text{ где } \mu(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} v(T). \tag{7}$$

Отметим, что для любой коалиции K

$$v(K) = \sum_{S \subset K} \mu(S),$$

что позволяет рассматривать $\mu(S)$ как вклад именно коалиции S, очищенный от вкладов меньших подкоалиций.

В силу этого единственность Φ достаточно проверять для простых игр v_S. А для них все ясно. Игроки не из S - болваны, и они получают по 0. Игроки из S все равноценны и поэтому получают поровну. А сколько - говорит аксиома A4. $\square$

Кстати, мы получаем еще одну формулу для вектора Шепли:

$$\Phi[v](i) = \sum_{i \in S} \mu(S)(1/s),$$

или

$$\Phi(v) = \sum_S \mu(S) \mathbf{1}_S / |S|, \tag{8}$$

где μ - обратное преобразование Шепли (или преобразование Мебиуса) v. Формула (8) естественно трактуется как дележ "дивидента" $\mu(S)$ коалиции S поровну между ее участникам.

Приведем еще одну индуктивную формулу, полученную Хартом и Масколеем и которую нетрудно извлечь из (5):

$$Sh(N, v) = (\sum_i (Sh(N - i, v), v(N) - v(N - i))/n. \tag{9}$$

Пример. Есть много примеров с голосованием. Мы остановимся только на игре "помещик и батраки". Пусть есть помещик (плантатор с участком земли) и $n - 1$ батрак. Будем считать, что помещик, наняв k батраков, получает от сбора урожая доход $f(k)$, часть которого он отдает батракам. Батраки сами по себе доход получить не могут. Это приводит нас к игре с побочными платежами v, где

$$v(K) = \begin{cases} f(|K| - 1), & \text{если } 0 \in K, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Посчитаем значение Шепли для помещика (игрока 0). Помещик с вероятностью $1/n$ заходит на k-м шагу, поэтому его значение равно $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)/n$. Приблизительно это площадь под кривой f. Значения для батраков равны между собой. И в сумме с выигрышем помещика равны $f(n)$.

Лекция 24. Механизмы группового выбора

Понятие механизма. Поговорим о механизмах - объектах, очень близких к играм. Предположим, что группа участников (агентов) N должна выбрать один из элементов из некоторого (фиксированного, заданного) множества альтернатив A. Выбор будет зависеть от предпочтений участников относительно A, но также и от процедуры, правила выбора. Вот это последнее и называется механизмом (группового выбора); употребим также термин game form. Формально, *механизм* (при данных N и A) - это отображение

$$f : \times_{i \in N} S_i \longrightarrow A.$$

Множества S_i называются множествами сообщений или стратегий участника i, а само отображение f - функцией исхода. Участники посылают какие-то сообщения $s_i \in S_i$; механизм выдает отобранную альтернативу $f(s_N) = f(s_1, ..., s_n) \in A$.

Как мы видим, эта структура очень похожа на игру; недостает только предпочтений или полезностей. Если задан профиль предпочтений $R_N = (R_i,\ i \in N)$ на A, или профиль полезностей $u_N = (u_i)$, мы получаем игру в нормальной форме, которая обозначается $G(f, u_N)$ или $G(f, R_N)$. Можно сказать, что механизм - это материальная часть игры (или правила игры), тогда как предпочтения (и веры) - это идеальная, надстроечная часть. Надо сказать, что многие игры задаются как механизмы. Даже если в них указаны денежные выигрыши и все стремятся максимизировать этот выигрыш, нужно уточнить по крайней мере две вещи: как агенты относятся к выигрышам других (зависть или альтруизм) и как агенты относятся к лотереям. Другой пример механизмов - аукционы. Наконец, процедуры голосования (выборов должностных лиц или общественных проектов) также доставляют примеры механизмов.

Из пройденного материала механизмы более всего напоминают Байесовы игры с сообщениями. Как и там, наиболее естественным сообщением было бы сообщение участника о своих предпочтениях. Такие механизмы, где стратегические множества S_i состоят из всех (допустимых данной задачей) предпочтений участника i, называются *прямыми*. Однако часто применяются и непрямые механизмы. Даже при голосовании вас обычно просят не упорядочить всех кандидатов, а оставить в списке одного (реже - нескольких) наиболее достойного кандидата.

Каждый участник стремится послать такое сообщение, которое дало бы наиболее предпочтительный исход. Тут мы прямо попадаем на зыбкую почву концепции решения. Как мы видели, в теории игр нет одного, пригодного во всех случаях понятия решения игры. Все зависит от привходящих обстоятельств, которые часто не оговариваются и должны уточняться отдельно. Например, могут ли участники сообщаться и координировать свои действия (стратегии)? Далее мы в основном будем придерживаться некооперативной точки зрения, хотя бы потому, что координация действий предполагает наличие отдельного механизма координации.

Другой акцент, отделяющий механизмы от игр, информационный. В играх считалось, что предпочтения всех всем известны. При механизменном подходе обычно предполагается, что предпочтения агента известны только ему. Что же до предпочтений других, то тут встречается целый спектр - от полного незнания через Байесовские априорные веры к полному знанию. Конечно, ответ относительно того, чем завершится игра, сильно зависит от этих информационных гипотез.

Доминантно-стратегические механизмы. Вопрос о предсказуемости работы механизма - один из важнейших. Дело в том, что часто приходится конструировать механизмы с заданными свойствами (mechanism design); например, желательно, чтобы механизм выдавал всегда Парето-оптимальные исходы. Но для этого нужно знать, каков будет исход; только после этого имеет смысл обсуждать достоинства этого исхода. Поясним эту мысль на одном примере.

Пусть два участника выбирают из четырех альтернатив x, y, z, t, и предпочтения их имеют вид

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ y & x \\ z & z \\ t & t \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

(как обычно, что выше, то лучше). Выборы происходят по правилу Борда. (Борда - французский ученый, живший во времена Французской революции.) Он предложил следующее правило (механизм): участники ранжируют кандидатов, и в зависимости от места в этом ранжировании каждый кандидат получает баллы (за последнее место 0 очков, за предпоследнее - 1 и т.д.). Победителем объявляется кандидат с наибольшей суммой баллов.

В нашей ситуации больше всего очков (по 5) набирают кандидаты x и y, и кто-то из них должен стать победителем. Чтобы уменьшить шансы y и увеличить шансы x на победу, первый вместо истинного ранжирования (которое знает только он) может объявить, что его ранжирование имеет вид

$$x \succ z \succ t \succ y.$$

В этом случае y набирает только 3 очка (как и z), и побеждает x. Но аналогично может поступить участник 2 и объявить своим ранжированием

$$y \succ z \succ t \succ x.$$

Теперь победителем будет кандидат z, который вообще не Парето оптимален. Что же произойдет на самом деле, сказать трудно, хотя при правдивом поведении правило Борда дает, очевидно, Паретовские исходы.

Практически имеется только один случай, когда с большой вероятностью можно предсказать некооперативный исход - это когда у каждого игрока есть доминирующая стратегия.

Определение. Механизм f называется *доминантно-стратегическим*, если для любых предпочтений участников R_N в игре $G(f, R_N)$ существует равновесие в доминирующих стратегиях.

Может показаться, что такое редко бывает. Чтобы доминирующая стратегия была у всех игроков? да еще при любых предпочтениях? Тут нужно сделать два пояснения. Во первых, взятый наугад механизм конечно не будет доминантно-стратегическим; как и вообще все хорошее, он встречается крайне редко. Но в этом и состоит задача изобретателя (дизайнера) механизма. Во вторых, как мы увидим, ситуация сильно зависит от той области предпочтений, в которой должен действовать наш механизм. Если механизм должен хорошо работать в любой обстановке (иметь доминирующие стратегии при любых мыслимых профилях предпочтений), то выбор крайне ограничен. Напротив, если обстановка достаточно узкая, ДС-механизмов может быть довольно много. Дальнейшее можно рассматривать как иллюстрацию этого общего замечания.

В случае прямых механизмов можно уточнить доминантную стратегичность. А именно, прямой механизм называется *неманипулируемым* (употребимы термины *straightforward* или *strategy-proof*), если для любых предпочтений R_i правдивая стратегия R_i является доминирующей. В этой связи можно снова вспомнить *принцип выявления.* Это довольно простое утверждение, что если есть доминантно-стратегический механизм f, то существует и прямой неманипулируемый механизм, эквивалентный в некотором смысле исходному. По этой причине в дальнейшем мы ограничим свое внимание только прямыми неманипулируемыми механизмами.

Случай одного участника. При одном участнике существует довольно много неманипулируемых механизмов, и более того, можно дать полное их описание. А именно, зафиксируем некоторое подмножество Z в множестве A, и определим механизм f формулой (здесь R - предпочтение нашего единственного участника)

$$f = \mathrm{Argmax} R|Z.$$

Т.е. механизм отбирает наилучшую альтернативу в подмножестве Z (мы игнорируем вопросы существования и неединственности максимальных элементов). Довольно явно, что это неманипулируемый механизм, и что так выглядит любой такой. При этом Z - это образ f.

Вообще, если механизм f зависит только от сообщений одного из участников (и игнорирует сообщения остальных), то говорят, что он *однобокий* (унилатеральный), или *диктаторский.*

Случай двух альтернатив. Если альтернатив всего две, тоже существует масса неманипулируемых механизмов. Простейший из них - правило простого большинства. Каждый из участников отмечает одну из альтернатив (наилучшую для себя). Побеждает та (из двух) альтернатив, которая наберет больше голосов (случаи равенства мы сейчас игнорируем). Довольно ясно, что отметив не свою лучшую альтернативу, вы не улучшите исход, так что это неманипулируемый механизм. Можно разнообразить это правило, например, придавая разным участникам разный вес.

Теорема Гиббэрда. Ну а можно ли придумать механизм, который был бы неманипулируемым при трех и более альтернативах? Конкретно, речь шла о неманипулируемых системах голосования. Довольно давно было замечено, что все известные системы голосования (простого большинства, правило Борда, многокруговые выборы и т.п.) оставляли возможности для манипулирования. В 1973 г. Гиббэрд (а позже - и Саттерсвейт) превратил это наблюдение в строгий результат. А именно, он доказал следующее утверждение. *Пусть для* *простоты A - конечное множество, а $\mathcal{P}$ - множество всех слабых (или линейных) порядков на A. Если $f : \mathcal{P}^N \longrightarrow A$ - неманипулируемый механизм, то либо f однобокий, либо образ f состоит из двух элементов.*

Иначе говоря, если мы допускаем любые предпочтения и если мы отбрасываем как малоинтересные диктаторские и дипольные механизмы, то всегда встретится такая ситуация (профиль предпочтений), когда некоторому участнику будет выгодно соврать (исказить свои предпочтения). Другое дело - пойдет он на это, или нет, но это уже задача психологии или этики, но не теории игр.

Отметим сразу, что этот результат аналогичен знаменитой теореме Эрроу, которая утверждает, что только диктаторское правило группового выбора удовлетворяет некоторым естественным требованиям (аксиомам). Как уже говорилось, один из выходов из пессимистического тупика Гиббэрда состоит в отказе от универсальности механизма, точнее, в ограничении области его применимости. Об одной такой области, наиболее экономически осмысленной, мы и расскажем.

Механизмы Кларка-Гроувса. Допустим, что мы находимся в ситуации трансферабельной полезности. Т.е. имеются деньги t, которые линейно входят в функцию полезности (так что она имеет вид $u(a, t) = v(a) + t$, где a - неденежная часть исхода) и которые можно передавать друг другу. В такой ситуации сообщениями участников естественно считать функции $v : A \longrightarrow \mathbb{R}$ - денежные оценки ими исходов из множества A. Прямой механизм перерабатывает профиль оценок $v_N = (v_i)$ в исход $(a; t_1, ..., t_n)$, где a - общественная альтернатива, а t_i - денежные платежи участнику i.

Мы уже сталкивались с примером неманипулируемого механизма в такой ситуации - с аукционом Викри (или второй цены). Там речь шла об одном предмете, каждый назначал какую-то оценку $v_i \in \mathbb{R}$, побеждал тот, кто назовет наибольшую цену, но платил он вторую цену. Чтобы обобщить этот пример, нужно правильно понять принцип, который обеспечивает неманипулируемость. Он состоит в том, что денежные трансферы должны компенсировать тот ущерб, который участник наносит остальным своим участием. Эта идея формализуется так.

Пусть v_i - сообщение участника i, и пусть $a^*(v_N)$ - та альтернатива, на которых достигает максимума суммарная полезность $\sum_{i \in N} v_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Тогда наш механизм отбирает альтернативу $a^*(v_N)$ и назначает участнику i

денежный трансфер

$$t_i = t_i(v_N) = \sum_{j \neq i} v_j(a^*(v_N)).$$

Иначе говоря, денежные выплаты участнику i равны "выигрышу" всех остальных от принятия проекта a^*. Вместе с "натуральной" частью полезности $v_i(a^*)$ игрок i получает денежную часть в размере

$$v_i(a^*) + \sum_{j \neq i} v_j(a^*) = \sum_j v_j(a^*),$$

т.е. суммарную полезность всех участников. Можно сказать, что денежные трансферы устроены так, чтобы сделать тождественными цели всех участников, стереть различие между личным и групповым интересом. В этом объяснение неманипулируемости.

Какие достоинства предложенного механизма? Первое и главное - он неманипулируем (и значит, предсказуем). Второе - он отбирает исходы a^*, которые максимизируют суммарную оценку группы. Однако сразу бросается в глаза и главный недостаток механизма - его финансовая несбалансированность. Где же взять такую прорву денег, чтобы выплачивать каждому $\sum_{j \neq i} v_j(a^*)$? Хотелось бы, чтобы суммарные выплаты (трансферы) равнялись нулю. Они же равны

$$\sum_i t_i(v_N) = \sum_i \sum_{j \neq i} v_j(a^*) = (n-1)V(a^*),$$

где $V = \sum_i v_i$ - суммарная оценка альтернатив всеми участниками группы. И это число в общем случае отлично от нуля. Кто же будет возмещать расходы по функционированию этого механизма?

Однако возможности по конструированию механизма еще не исчерпаны до конца. Это видно хотя бы из того, что сами оценки v_i определены с точностью до константы. И вообще, к денежным выплатам без ущерба для неманипулируемости можно прибавлять выражения вида $h_i(v_{N-i})$, которые не зависят от сообщений участника i (и тем самым не влияют на выбор им своего сообщения v_i). Таким образом, более общий вид денежных трансферов такой:

$$t_i(v_N) = \sum_{j \neq i} v_j(a^*(v_N)) + h_i(v_{N-i}),$$

где, напомню, $a^*(v_N)$ максимизирует суммарную оценку $V = \sum v_i$. Механизм такого вида называют *механизмом Гроувса* (Groves). Можно показать, что любой неманипулируемый механизм является механизмом Гроувса. Подбирая те или иные корректирующие добавки h_i, можно пытаться строить неманипулируемый механизм с теми или иными дополнительными свойствами.

Интересный способ корректировки денежных трансферов предложил Кларк. Идея его в том, что участник, безразличный к общественным альтернативам (т.е. у которого оценочная функция v_i является константой), не получает и не платит денег. В общем случае он платит за тот ущерб для остальных, который он наносит своим воздействием. Таким образом, t_i всегда неположительны при механизме Кларка. "Налогом" облагаются лишь те участники, которые активно влияют на выбор, т.н. ключевые (pivot) участники. Нужно отметить, что этот излишек денег не должен распределяться между остальными участниками (это нарушило бы неманипулируемость), а должен выбрасываться на ветер, сжигаться (или оставляться у организатора аукциона). Так что механизм Кларка также финансово несбалансирован, хотя и в минимальной степени.