Листок с задачами № 1

Задачи надо решить письменно, подробно расписав решение, доказывая все что нужно доказать. Можно ссылаться на утверждения доказанные на лекциях. Решения можно сдать лично, но лучше загрузить в Google Classroom (ссылка в телеграме). Файл должен быть в формате pdf одним файлом. На листочках тоже должны быть указаны ФИО.

Каждая задача оценивается в 1 балл. В задачах с подпунктами каждый подпункт оценивается по 0,5 баллов. Больше 10 баллов за листок получить нельзя.

1. Покажите, что если в языке счетное число переменных, что максимальных непротиворечивых множеств — континуум.

2. Пусть $W_1 = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $W_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество чётных чисел. Определим отношения:

$$nR_1m \iff n \vdots m^1, \qquad nR_2m \iff n \vdots m.$$

   (отношения действительно одинаковые, просто на разных множествах определены). Определим шкалы $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$. Докажите, что $Log(F_1) = Log(F_2)$.

3. Определим две логики $\mathsf{Triv} = \mathsf{K} + \Box p \leftrightarrow p$ и $\mathsf{Verum} = \mathsf{K} + \Box p$.

   (a) Опишите многообразия шкал этих логик.

   (b) (Теорема Макинсона) Докажите, что любая модальная логика, многообразие которой не пусто, содержится в логике Verum или в логике Triv.

4. Докажите, что следующие свойства модально неопределимы:

   (a) шкала, как ориентированный граф является сильно связным[2];

   (b) для данного n $\forall w\, |R(w)| > n$. (Для каждого n это отдельное свойство.)

5. Докажите не ссылаясь на теорему о полноте, а построив вывод или доказав, что вывод существует:

   (a) $\mathsf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$;

   (b) $\mathsf{K} \vdash \Box(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$;

   (c) $\mathsf{K} + AB + A4 \vdash A5$;

   (d) $\mathsf{K} + A5 + AT \vdash AB$.

6. Рассмотрим следующую формулу:

$$AL \rightleftharpoons \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

   Докажите, не ссылаясь на полноту по Крипке (тем более, что мы ее и не знаем для $\mathsf{K} + AL$), что $\mathsf{K} + AL \vdash \Box p \to \Box\Box p$.

[1] $n \vdots m \iff \exists k (n = mk)$.

[2] Граф называется *сильно связным* если из любой точки есть путь в любую другую точку, т.е. $\forall w (R^*(w) = W)$.

7. Пусть $F_L = (W_L, R_L)$ — каноническая шкала. Докажите, что для $x, y \in W_L$ верно

$$xR_L^k y \iff \forall A(\underbrace{\Box \dots \Box}_{k \text{ раз}} A \in x \Rightarrow A \in y).$$

8. Докажите, что формула $\Box\Box p \to \Box p$ является канонической.

   Напомним, что

$$Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j).$$

9. Докажите, что формулы Alt_n каноничны для всех n.

10. Докажите, что логика никакой одной конечной шкалы не может совпадать ни с одной из логик K, D, $\mathsf{D4}$, KB, $\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$, $\mathsf{S5}$.