Программа курса «Основы модальной логики».

лектор — доцент А.В. Кудинов

кафедра дискретной математики МФТИ,

магистратура 1 семестр

1. Пропозициональные модальные формулы. Шкалы Крипке и модели Крипке. Истинность модальной формулы в мире (точке) модели Крипке. Истинность в модели Крипке. Общезначимость в шкале Крипке.

2. Корректность семантики Крипке относительно нормальных модальных логик. Многообразия шкал Крипке. Логика класса шкал Крипке. Полные модальные логики.

3. Нормальная модальная логика. Примеры модальных логик. Пример построения вывода.

4. Бисимуляция. Сохранение истинности формул при бисимуляциях.

5. Конусы. Порожденная подмодель. p-морфизм. Сохранение истинности и общезначимости: доказательство сведением к бисимуляции.

6. Логика Гёделя-Лёба GL и ее многообразие. Доказательство неканоничности.

7. Связь модальной и классической логики. Стандартный перевод. Доказательтво эквивалентности. Чему в классической логике соответствуют истинность в модели и общезначимости в шкале модальной формулы? Перенос результатов теорем о компактности и о понижении мощности на модальную логику.

8. Многообразия модальный логик $\mathsf{D}, \mathsf{T}, \mathsf{B}, \mathsf{K}$, $\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$, $\mathsf{S5}$.

9. Каноническая модель. Теорема о канонической модели. Канонические модальные логики. Каноничность формул без переменных. Каноничность логик $\mathsf{D}, \mathsf{T}, \mathsf{B}, \mathsf{K}$, $\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$, $\mathsf{S5}$.

10. Каноничность логик с аксиомой $A2$.

11. Логика Гёделя-Лёба GL. Доказательство неканоничности.

12. Финитная аппроксимируемость. Разрешимость конечноаксиоматизированных финитноаппроксимируеммых логик (теорема Харропа).

13. Фильтрация. Лемма о фильтрации. Наименьшая фильтрации. Финитная аппроксимируемость логик $\mathsf{D}, \mathsf{T}, \mathsf{B}, \mathsf{K}$.

14. Транзитивные фильтрации. Финитная аппроксимируемость логик $\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$. $\mathsf{S5}$.

15. Финитная аппроксимируемость логик $\mathsf{K4.2}, \mathsf{D4.2}, \mathsf{S4.2}$.

16. Развертка шкал Крипке. Полнота логики K относительно деревьев.

17. Полнота логик D, T, $\mathsf{K4}$, $\mathsf{D4}$, $\mathsf{S4}$ относительно соответствующих классов деревовидных шкал.

18. Модальная глубина формулы. Доказательство полноты K относительно конечных деревьев.

19. Полнота $\mathsf{S4}$ относительно бесконечного бинарного дерева.

20. Логика $Log(\mathbb{N}, \neq)$. Доказательство отсутствия конечной аксиоматизации.

21. Ультрарасширения. Лемма об ультрасширении. Главные ультрафильтры. Лемма о главных ультрафильтрах и антисохранении общезначимости. Изоморфность ультрарасширения конечной шкалы и самой шкалы.

22. Нетривиальный пример ультрарасширения. Пример модальнонеопределимого свойства, сохраняющегося при p-морфизме, дизъюнктных суммах и порожденных подшкалах.

23. Логика универсальной модальности. Полнота логики $\mathsf{S5}$ относительно шкал вида $(W, W \times W)$.

24. Каноничность логики $\mathsf{L.U}$. Совпадение логик $\mathsf{L.U}$ и $\mathsf{L}_\forall$ для канонических логик.

25. Аксиома связности AC. Доказательство соответствия общезначимости этой формулы связности рефлексивных шкал.

Задачи по курсу «Основы модальной логики».

лектор — доцент А.В. Кудинов
кафедра дискретной математики МФТИ,
магистратура 1 семестр

1. Докажите, что в K выводима формула $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$.
2. Докажите, что в K выводима формула $\Diamond A \vee \Diamond B \leftrightarrow \Diamond(A \vee B)$.
3. Докажите, что в K выводима формула $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$.
4. Докажите, что $\mathsf{K} + \Diamond\top = \mathsf{K} + \Box p \to \Diamond p$.
5. Докажите, что $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Diamond q) \in \mathsf{D}$.
6. Постройте модель Крипке с 4 мирами, в каждом из которых истинна формула $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box\neg p$.
7. Являются ли теоремой минимальной модальной логики K следующая формула $\Diamond p \to \Box\Diamond(p \vee q) \vee \Box\Diamond(p \vee \neg q)$?
8. Являются ли теоремой минимальной модальной логики K следующая формула $\Box p \wedge \Diamond\top \to \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge \neg q)$?
9. Найдите многообразие шкал логики $\mathsf{S4.3} = \mathsf{S4} + \Box(\Box \mathsf{p} \to \mathsf{q}) \vee \Box(\Box \mathsf{q} \to \mathsf{p})$.
10. Найдите многообразие шкал логики $\mathsf{wK4} = \mathsf{K} + \Box p \wedge p \to \Box\Box p$. Докажите каноничность этой логики.
11. Докажите, что класс всех иррефлексивных, транзитивных, сериальных шкал не является модальным многообразием.
12. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «существования эйлерова пути».
13. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «существования гамильтонова пути».
14. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «степень всех вершин больше n».
15. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «степень всех вершин меньше n».
16. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «хроматическое число меньше 3».
17. Будем понимать граф, как симметричную шкалу Крипке. Является ли модально определимым свойство «граф планарный».
18. Докажите, что в логике $\mathsf{S5}$ имеется только конечное число неэквивалентных формул с одной переменной.
19. Найдите многообразие шкал Крипке для формулы $\Diamond\Box p \to \Box p$.
20. Докажите, что логика $\mathsf{K} + \Diamond\Box p \to \Box p$ каноническая.
21. Докажите, что логика $\mathsf{K} + \Diamond\Box p \to \Box p$ финитно аппроксимируема.
22. Найдите конечную аксиоматику для логики n-элементной клики, т.е. логики шкалы $(W, W \times W)$, где $W = \{1, 2, \ldots, n\}$.

23. Используя формулы Alt_n:
$$Alt_n = \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j)$$
покажите, что логика никакой конечной шкалы не может совпадать ни с одной из логик K, D, $\mathsf{D4}$, KB, $\mathsf{K4}$, $\mathsf{S4}$, $\mathsf{S5}$.

24. Покажите, что отношение неравенства модально неопределимо. Т.е. нет списка формул, истинных тогда и только тогда, когда отношение совпадает с отношением «не равно».

25. Если модальная формула истинна в некоторой конечной рефлексивной транзитивной модели, то она истинна в некоторой конечной модели с отношением эквивалентности.

26. Рассмотрим «ежа», то есть шкалу $E_n = (W, R)$, где $W = \{0, 1, \dots, n\}$, R рефлексивно и $0Ri$ для всех $1 \leq i \leq n$. Какое включение между логиками $Log(E_m)$ и $Log(E_n)$ имеет место при $m < n$? Строгое ли оно?
Какова логика всех конечных ежей? счетного ежа? произвольного бесконечного ежа?

27. Какому свойству отношения соответствует формула Собочинского $p \to \Box(\Diamond p \to p)$? Докажите, что эта формула каноническая.

28. Докажите, что если $\mathsf{L}_1 \subseteq \mathsf{L}_2$, то каноническая шкала логики L_2 является порожденной подшкалой канонической шкалы логики L_1.

29. Если формула первого порядка $\alpha(x)$ эквивалентна (на всех моделях Крипке с выделенной точкой) некоторому множеству модальных формул, то она эквивалентна и некоторой одной модальной формуле.

30. Докажите, что в канонической шкале логики GL континуум рефлексивных точек.

31. Приведите пример логики, не обладающей финитной аппроксимируемостью.

32. Докажите, что если в модальную логику входит формула $\Box^n \bot$, то такая логика является логикой одной конечной шкалы.