Случайные графы. Лекция 28.10. Эволюция случайного графа. Часть 3. Внутри фазового перехода

Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики

28.10.2025

Модель $G_n(\lambda)$

На прошлой лекции мы начали изучать модель $G_n(\lambda)$.

Модель $G_n(\lambda)$

На прошлой лекции мы начали изучать модель $G_n(\lambda)$. Пусть $X(n,k,\ell)$ — число ℓ-компонент размера k в $G_n(\lambda)$. Тогда выполнено.

Лемма (3.6)

В модели $G_n(\lambda)$ при фиксированном $\ell \geqslant -1$ выполнено
1) если $k = o(n^{3/4})$, то

$$\mathsf{E}X(n,k,\ell) = \left(1 + \ell\lambda n^{-1/3} + O\left(n^{-2/3}\right) + O\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{k^4}{n^3}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot n^{-\ell} C(k,k+\ell)\frac{e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)},$$

2) для произвольного k

$$\mathsf{E}X(n,k,\ell) = O\left(n^{-\ell}C(k,k+\ell)\frac{e^{-k}}{k!}\right)e^{-F(x_k)-c\frac{k^4}{n^3}},$$

где $x_k = k/n^{2/3}$, $F(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2\lambda + 3x\lambda^2) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3 + \lambda^3)$.

Среднее число вершин в разных компонентах

Теперь докажем лемму о среднем количестве вершин, занимаемом древесными и унициклическими компонентами в $G_n(\lambda)$.

Лемма (3.7)

В модели $G_n(\lambda)$ выполнено

1)

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = n - n^{2/3}\left(f_{-1}(\lambda) + O(n^{-1/3})\right),$$

2)

$$\mathsf{E}Y(n,0) = n^{2/3}\left(f_0(\lambda) + O(n^{-1/3})\right),$$

где

$$f_{-1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^{-3/2}(1-e^{-F(x)})dx + \lambda, \quad f_0(\lambda) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} e^{-F(x)}dx.$$

Доказательство леммы 3.7

1) Разобьем $\mathsf{E}Y(n,-1)$ на две суммы:

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = \sum_{k \leqslant n^{\alpha}} k\mathsf{E}X(n,k,-1) + \sum_{k > n^{\alpha}} k\mathsf{E}X(n,k,-1),$$

где $\alpha \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ — некоторое фиксированное число.

Доказательство леммы 3.7

1) Разобьем $\mathsf{E}Y(n,-1)$ на две суммы:

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = \sum_{k\leqslant n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1) + \sum_{k>n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1),$$

где $\alpha \in (\frac{2}{3},\frac{3}{4})$ — некоторое фиксированное число. Рассмотрим сначала первую сумму:

$$\sum_{k\leqslant n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1) = |\text{ лемма 3.6 п. 1)}| =$$

$$= \left(1 - \lambda n^{-1/3} + O(n^{-2/3})\right) n \sum_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} + R_n,$$

где

$$R_n = O\left(\sum_{k\geqslant 1} \frac{k^k e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} + n^{-2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{k^{k+3}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right).$$

Доказательство леммы 3.7

Далее,

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^k e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-F(x_k)}\right) =$$

Доказательство леммы 3.7

Далее,

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^k e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(подставляем $k = x_k \cdot n^{2/3}$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = n^{-2/3}$)

$$= O\left(n^{1/3}\sum_{k\geqslant 1} x_k^{-1/2}e^{-F(x_k)}\Delta x_k\right) = O\left(n^{1/3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{1/3}\right).$$

Доказательство леммы 3.7

Далее,

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^k e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(подставляем $k = x_k \cdot n^{2/3}$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = n^{-2/3}$)

$$= O\left(n^{1/3}\sum_{k\geqslant 1} x_k^{-1/2}e^{-F(x_k)}\Delta x_k\right) = O\left(n^{1/3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{1/3}\right).$$

Точно также получаем, что

$$n^{-2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^{k+3}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(n^{-2}\sum_{k\geqslant 1}x_k^{5/2}n^{5/3}e^{-F(x_k)}\right) =$$

$$= O\left(n^{1/3}\int\limits_0^{+\infty}x^{5/2}e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{1/3}\right).$$

Доказательство леммы 3.7

Далее,

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^k e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(подставляем $k = x_k \cdot n^{2/3}$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = n^{-2/3}$)

$$= O\left(n^{1/3}\sum_{k\geqslant 1} x_k^{-1/2}e^{-F(x_k)}\Delta x_k\right) = O\left(n^{1/3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{1/3}\right).$$

Точно также получаем, что

$$n^{-2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^{k+3}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} = O\left(n^{-2}\sum_{k\geqslant 1}x_k^{5/2}n^{5/3}e^{-F(x_k)}\right) =$$

$$= O\left(n^{1/3}\int\limits_0^{+\infty}x^{5/2}e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{1/3}\right).$$

Следовательно, $R_n = O(n^{1/3})$.

Доказательство леммы 3.7

Теперь оценим вторую сумму

$$\sum_{k>n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1) = |\text{ лемма 3.6 п. 2)}| = O\left(n\sum_{k>n^\alpha}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

Доказательство леммы 3.7

Теперь оценим вторую сумму

$$\sum_{k>n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1) = \left|\text{ лемма 3.6 п. 2)}\right| = O\left(n\sum_{k>n^\alpha}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(т.к. при больших x выполнено $F(x) \geqslant \frac{x^3}{7}$ и $x_k = k/n^{2/3} > n^{\alpha-2/3}$)

$$= O\left(n\sum_{k>n^\alpha}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-x_k^3/7}\right) = \left|\text{ ряд } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \text{ сходится}\right| =$$

$$= O\left(ne^{-n^{3\alpha-2}/7}\right) = o(n^{-1}).$$

Доказательство леммы 3.7

Теперь оценим вторую сумму

$$\sum_{k>n^\alpha} k\mathsf{E}X(n,k,-1) = \Big|\text{ лемма 3.6 п. 2)}\Big| = O\left(n\sum_{k>n^\alpha}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(т.к. при больших x выполнено $F(x) \geqslant \frac{x^3}{7}$ и $x_k = k/n^{2/3} > n^{\alpha-2/3}$)

$$= O\left(n\sum_{k>n^\alpha}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-x_k^3/7}\right) = \left|\text{ ряд } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \text{ сходится}\right| =$$

$$= O\left(ne^{-n^{3\alpha-2}/7}\right) = o(n^{-1}).$$

Значит, эта сумма стремится к нулю. В итоге, собирая все вместе, получаем, что

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = \left(1-\lambda n^{-1/3} + O(n^{-2/3})\right) n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)} + O(n^{1/3}).$$

Доказательство леммы 3.7

Будем работать с оставшейся суммой. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \left(1 - e^{-F(x_k)}\right). \qquad (1)$$

Доказательство леммы 3.7

Будем работать с оставшейся суммой. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \left(1 - e^{-F(x_k)}\right). \tag{1}$$

Далее, нам понадобится следующее “упражнение”.

Упражнение

Для любого $c \in (0, 1]$ выполнено

$$t(c) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} c^{k-1} e^{-ck} = 1.$$

Доказательство леммы 3.7

Будем работать с оставшейся суммой. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \left(1 - e^{-F(x_k)}\right). \qquad (1)$$

Далее, нам понадобится следующее “упражнение”.

Упражнение

Для любого $c \in (0, 1]$ выполнено

$$t(c) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} c^{k-1} e^{-ck} = 1.$$

Стало быть, первая сумма в (1) равна 1. И нам остается найти асимптотику второй. Мы хотим показать, что она быстро сходится к нужному интегралу, умноженному на $n^{-1/3}$.

Доказательство леммы 3.7

Во-первых, заметим, что при $k = o(n^{2/3})$ выполнено $\left(1 - e^{-F(x_k)}\right) = O(x_k) = O(k \cdot n^{-2/3})$, поэтому, например, сумма до фиксированного K_0 дает $O(n^{-2/3})$.

Доказательство леммы 3.7

Во-первых, заметим, что при $k = o(n^{2/3})$ выполнено $\left(1 - e^{-F(x_k)}\right) = O(x_k) = O(k \cdot n^{-2/3})$, поэтому, например, сумма до фиксированного K_0 дает $O(n^{-2/3})$.

Во-вторых, при $k > K_0$ у нас есть разложение для факториала $k! = \sqrt{2\pi k}(k/e)^k(1 + O(1/k))$. Тогда

$$\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Доказательство леммы 3.7

Во-первых, заметим, что при $k = o(n^{2/3})$ выполнено $\left(1 - e^{-F(x_k)}\right) = O(x_k) = O(k \cdot n^{-2/3})$, поэтому, например, сумма до фиксированного K_0 дает $O(n^{-2/3})$.

Во-вторых, при $k > K_0$ у нас есть разложение для факториала $k! = \sqrt{2\pi k}(k/e)^k(1 + O(1/k))$. Тогда

$$\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Рассмотрим остаток $O\left(\sum_{k=K_0}^{+\infty} k^{-5/2}\left(1 - e^{-F(x_k)}\right)\right)$. Сумма до $n^{2/3}/\ln n$ оценивается очень просто:

$$\sum_{k=K_0}^{\frac{n^{2/3}}{\ln n}} k^{-5/2}\left(1 - e^{-F(x_k)}\right) = n^{-2/3} O\left(\sum_{k=K_0}^{\frac{n^{2/3}}{\ln n}} k^{-3/2}\right) = O(n^{-2/3}).$$

Доказательство леммы 3.7

Сумма же после $n^{2/3}/\ln n$ также очень мала. Она есть

$$O\left(\sum_{k>\frac{n^{2/3}}{\ln n}} k^{-5/2}\right) = O\left(\frac{\ln^{3/2} n}{n}\right) = O(n^{-2/3}).$$

Доказательство леммы 3.7

Сумма же после $n^{2/3}/\ln n$ также очень мала. Она есть

$$O\left(\sum_{k>\frac{n^{2/3}}{\ln n}} k^{-5/2}\right) = O\left(\frac{\ln^{3/2} n}{n}\right) = O(n^{-2/3}).$$

Остается правильно оценить сумму

$$\sum_{k=K_0}^{+\infty} k^{-3/2}\left(1-e^{-F(x_k)}\right) = n^{-1/3}\sum_{k=K_0}^{+\infty} x_k^{-3/2}\Delta x_k\left(1-e^{-F(x_k)}\right).$$

Несложным техническим анализом можно показать, что

$$\left|\sum_{k=K_0}^{+\infty} x_k^{-3/2}\Delta x_k\left(1-e^{-F(x_k)}\right) - \int\limits_0^{+\infty} x^{-3/2}(1-e^{-F(x)})dx\right| = O(n^{-1/3}).$$

Доказательство леммы 3.7

В итоге, собирая все оценки вместе, мы получаем искомое представление для $\mathsf{E}Y(n,-1)$:

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = n - n^{2/3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^{-3/2}(1-e^{-F(x)})dx + \lambda\right) + O(n^{1/3}).$$

Доказательство леммы 3.7

В итоге, собирая все оценки вместе, мы получаем искомое представление для $\mathsf{E}Y(n,-1)$:

$$\mathsf{E}Y(n,-1) = n - n^{2/3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^{-3/2}(1-e^{-F(x)})dx + \lambda\right) + O(n^{1/3}).$$

2) Формула для $\mathsf{E}Y(n,0)$ доказывается полностью аналогично. $\square$

Следствия

Обозначим через $Y(n, \geqslant 1)$ общее число вершин $G_n(\lambda)$, занимаемых сложными компонентами. Первое быстрое следствие из леммы 3.7 дает нам порядок роста математического ожидания этой величины.

Следствия

Обозначим через $Y(n, \geqslant 1)$ общее число вершин $G_n(\lambda)$, занимаемых сложными компонентами. Первое быстрое следствие из леммы 3.7 дает нам порядок роста математического ожидания этой величины.

Следствие (3.5)

В модели $G_n(\lambda)$ выполнено

$$\mathsf{E}Y(n, \geqslant 1) = n^{2/3}(f_{-1}(\lambda) - f_0(\lambda) + O(n^{-1/3})).$$

Следствия

Обозначим через $Y(n, \geqslant 1)$ общее число вершин $G_n(\lambda)$, занимаемых сложными компонентами. Первое быстрое следствие из леммы 3.7 дает нам порядок роста математического ожидания этой величины.

Следствие (3.5)

В модели $G_n(\lambda)$ выполнено

$$\mathsf{E}Y(n, \geqslant 1) = n^{2/3}(f_{-1}(\lambda) - f_0(\lambda) + O(n^{-1/3})).$$

Второе простое следствие говорит нам, что в случайном графе $G_n(\lambda)$ не может быть слишком больших недревесных компонент.

Следствие (3.6)

В модели $G_n(\lambda)$ максимальный размер недревесной компоненты равен $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Доказательство следствия 3.6

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\text{в } G_n(\lambda) \text{ есть недревесная компонента размера } \geqslant w(n)n^{2/3}\right) \leqslant$$

Доказательство следствия 3.6

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\text{в } G_n(\lambda) \text{ есть недревесная компонента размера } \geqslant w(n)n^{2/3}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(Y(n,0) + Y(n, \geqslant 1) \geqslant w(n)n^{2/3}\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}Y(n,0) + \mathsf{E}Y(n, \geqslant 1)}{w(n)n^{2/3}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

$\square$

Древесные компоненты $G_n(\lambda)$

Теперь поймем, что происходит с древесными компонентами. Следующее утверждение показывает, что и древесные компоненты имеют максимальный размер $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, что в сочетании со следствием 3.6 показывает, что в случайном графе $G_n(\lambda)$ максимальный размер компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Древесные компоненты $G_n(\lambda)$

Теперь поймем, что происходит с древесными компонентами. Следующее утверждение показывает, что и древесные компоненты имеют максимальный размер $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, что в сочетании со следствием 3.6 показывает, что в случайном графе $G_n(\lambda)$ максимальный размер компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Утверждение (3.5)

В модели $G_n(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты равен $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Древесные компоненты $G_n(\lambda)$

Теперь поймем, что происходит с древесными компонентами. Следующее утверждение показывает, что и древесные компоненты имеют максимальный размер $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, что в сочетании со следствием 3.6 показывает, что в случайном графе $G_n(\lambda)$ максимальный размер компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Утверждение (3.5)

В модели $G_n(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты равен $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

В то же время, в $G(\lambda)$ с большой вероятностью найдутся деревья размера почти $n^{2/3}$.

Упражнение

Докажите, что в модели $G_n(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \to +\infty$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3}/w(n)$.

Доказательство утверждения 3.5

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Оценим математическое ожидание числа древесных компонент размера больше $w(n)n^{2/3}$. Для этого воспользуемся леммой 3.6 п. 2):

Доказательство утверждения 3.5

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Оценим математическое ожидание числа древесных компонент размера больше $w(n)n^{2/3}$. Для этого воспользуемся леммой 3.6 п. 2):

$$\sum_{k>w(n)n^{2/3}} \mathsf{E}X(n,k,-1) = \sum_{k>w(n)n^{2/3}} O\left(n\frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

Доказательство утверждения 3.5

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Оценим математическое ожидание числа древесных компонент размера больше $w(n)n^{2/3}$. Для этого воспользуемся леммой 3.6 п. 2):

$$\sum_{k > w(n)n^{2/3}} \mathsf{E}X(n,k,-1) = \sum_{k > w(n)n^{2/3}} O\left(n\frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(при больших $x_k = k \cdot n^{-2/3} \geqslant w(n)$ выполнено $F(x_k) \geqslant x_k^3/7$)

$$= O\left(\sum_{k > w(n)n^{2/3}} n\frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!}e^{-x_k^3/7}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3(n)}{7}} n \sum_{k > w(n)n^{2/3}} k^{-5/2}\right) =$$

$$= O\left(e^{-\frac{w^3(n)}{7}} n \left(w(n)n^{2/3}\right)^{-3/2}\right) = O\left(w^{-3/2}(n)e^{-\frac{w^3(n)}{7}}\right) \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$.

Доказательство утверждения 3.5

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Оценим математическое ожидание числа древесных компонент размера больше $w(n)n^{2/3}$. Для этого воспользуемся леммой 3.6 п. 2):

$$\sum_{k > w(n)n^{2/3}} \mathsf{E}X(n,k,-1) = \sum_{k > w(n)n^{2/3}} O\left(n\frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!}e^{-F(x_k)}\right) =$$

(при больших $x_k = k \cdot n^{-2/3} \geqslant w(n)$ выполнено $F(x_k) \geqslant x_k^3/7$)

$$= O\left(\sum_{k > w(n)n^{2/3}} n\frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!}e^{-x_k^3/7}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3(n)}{7}} n \sum_{k > w(n)n^{2/3}} k^{-5/2}\right) =$$

$$= O\left(e^{-\frac{w^3(n)}{7}} n \left(w(n)n^{2/3}\right)^{-3/2}\right) = O\left(w^{-3/2}(n)e^{-\frac{w^3(n)}{7}}\right) \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. Значит,

$$\mathsf{P}(\text{в } G_n(\lambda) \text{ есть древесная компонента размера } \geqslant n^{2/3}w(n)) \to 0.$$

Величины $C(k, k+\ell)$

Осталось понять, что происходит со сложными компонентами в случайном графе $G_n(\lambda)$. Для этого нам понадобятся оценки чисел $C(k, k+\ell)$, количеств связных графов на k вершинах с $k+\ell$ ребрами.

Величины $C(k, k+\ell)$

Осталось понять, что происходит со сложными компонентами в случайном графе $G_n(\lambda)$. Для этого нам понадобятся оценки чисел $C(k, k+\ell)$, количеств связных графов на k вершинах с $k+\ell$ ребрами.

1. Мы знаем формулу Кэли:

$$C(k, k-1) = k^{k-2}.$$

Величины $C(k, k+\ell)$

Осталось понять, что происходит со сложными компонентами в случайном графе $G_n(\lambda)$. Для этого нам понадобятся оценки чисел $C(k, k+\ell)$, количеств связных графов на k вершинах с $k+\ell$ ребрами.

1. Мы знаем формулу Кэли:

$$C(k, k-1) = k^{k-2}.$$

2. А также формулу для числа унициклических графов:

$$C(k, k) = \frac{1}{2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}}k^{k-\frac{1}{2}}.$$

Величины $C(k, k+\ell)$

Осталось понять, что происходит со сложными компонентами в случайном графе $G_n(\lambda)$. Для этого нам понадобятся оценки чисел $C(k, k+\ell)$, количеств связных графов на k вершинах с $k+\ell$ ребрами.

1. Мы знаем формулу Кэли:
$$C(k, k-1) = k^{k-2}.$$
2. А также формулу для числа унициклических графов:
$$C(k, k) = \frac{1}{2}(k-1)! \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} k^{k-\frac{1}{2}}.$$
3. Для $\ell = 1$ асимптотическая формула была найдена Багаевым в 1973 году:
$$C(k, k+1) \sim \frac{5}{24} k^{k+1}.$$

Величины $C(k, k+\ell)$

Далее, была серия работ Райта об асимптотическом поведении $C(k, k+\ell)$ в случае малого ℓ по сравнению с k. Суммируя их результаты, можно сформулировать следующую теорему.

Величины $C(k, k+\ell)$

Далее, была серия работ Райта об асимптотическом поведении $C(k, k+\ell)$ в случае малого ℓ по сравнению с k. Суммируя их результаты, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема (3.10, Райт)

Для $\ell \geqslant 2$ и $\ell = o(k^{1/3})$ выполнено

$$C(k, k+\ell) = \gamma_\ell \cdot k^{k+\frac{3\ell-1}{2}} \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\ell^3}{k}}\right)\right),$$

где

$$\gamma_\ell = \frac{\pi^{1/2} 3^\ell (\ell-1)\delta_\ell}{2^{(5\ell-1)/2}\Gamma(\ell/2)},$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{5}{36},\ \delta_{\ell+1} = \delta_\ell + \sum_{h=1}^{\ell-1} \frac{\delta_h \delta_{\ell-h}}{\ell+1} \binom{\ell}{h}^{-1}, \ell \geqslant 2.$$

Величины $C(k, k+\ell)$

Кроме того, нам будет полезна следующая теорема Боллобаша, которая дает хорошие верхние оценки $C(k, k+\ell)$ в общем случае.

Величины $C(k, k+\ell)$

Кроме того, нам будет полезна следующая теорема Боллобаша, которая дает хорошие верхние оценки $C(k, k+\ell)$ в общем случае.

Теорема (3.11, Боллобаш)

1) Если $1 \leqslant \ell \leqslant k$, *то*

$$C(k, k+\ell) \leqslant \left(\frac{c_1}{\ell}\right)^{\ell/2} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}},$$

где $c_1 > 0$ *— некоторая абсолютная константа.*
2) Если $k \leqslant \ell \leqslant \binom{k}{2} - k$, *то*

$$C(k, k+\ell) \leqslant c_2 \ell^{-\ell/2} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}},$$

где $c_2 > 0$ *— некоторая абсолютная константа.*

Величины $C(k, k+\ell)$

Кроме того, нам будет полезна следующая теорема Боллобаша, которая дает хорошие верхние оценки $C(k, k+\ell)$ в общем случае.

Теорема (3.11, Боллобаш)

1) Если $1 \leqslant \ell \leqslant k$, то

$$C(k, k+\ell) \leqslant \left(\frac{c_1}{\ell}\right)^{\ell/2} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}},$$

где $c_1 > 0$ — некоторая абсолютная константа.
2) Если $k \leqslant \ell \leqslant \binom{k}{2} - k$, то

$$C(k, k+\ell) \leqslant c_2 \ell^{-\ell/2} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}},$$

где $c_2 > 0$ — некоторая абсолютная константа.

Вывод: всегда имеет место оценка

$$C(k, k+\ell) = O\left(k^{k+\frac{3\ell-1}{2}}\right).$$

Сложные компоненты в $G_n(\lambda)$

Перейдем к обсуждению сложных компонент. Мы уже выяснили, что максимальный размер компонент $G_n(\lambda)$ имеет порядок $\Theta_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Сложные компоненты в $G_n(\lambda)$

Перейдем к обсуждению сложных компонент. Мы уже выяснили, что максимальный размер компонент $G_n(\lambda)$ имеет порядок $\Theta_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. И, оказывается, что сложных компонент здесь либо нет вовсе, либо они имеют размер $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. почти максимально возможный. Имеет место следующее утверждение.

Сложные компоненты в $G_n(\lambda)$

Перейдем к обсуждению сложных компонент. Мы уже выяснили, что максимальный размер компонент $G_n(\lambda)$ имеет порядок $\Theta_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. И, оказывается, что сложных компонент здесь либо нет вовсе, либо они имеют размер $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. почти максимально возможный. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение (3.6)

Пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция, $\ell \geqslant 1$ — фиксировано. Тогда в модели $G_n(\lambda)$ вероятность того, что случайный граф содержит сложную ℓ-компоненту размера менее $n^{2/3}/w(n)$, стремится к нулю.

Доказательство утверждения 3.6

Обозначим $k_1 = n^{2/3}/w(n)$ и оценим математическое ожидание числа ℓ-компонент размера не более k_1.

Доказательство утверждения 3.6

Обозначим $k_1 = n^{2/3}/w(n)$ и оценим математическое ожидание числа ℓ-компонент размера не более k_1. Применяя лемму 3.6, п.2) и теорему 3.11, п. 2), получаем:

$$\sum_{k<k_1} \mathsf{E}X(n,k,\ell) = O\left(\sum_{k<k_1} n^{-\ell} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right) =$$

Доказательство утверждения 3.6

Обозначим $k_1 = n^{2/3}/w(n)$ и оценим математическое ожидание числа ℓ-компонент размера не более k_1. Применяя лемму 3.6, п.2) и теорему 3.11, п. 2), получаем:

$$\sum_{k<k_1} \mathsf{E}X(n,k,\ell) = O\left(\sum_{k<k_1} n^{-\ell} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k<k_1} n^{-\ell} k^{\frac{3\ell}{2}-1} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(n^{-\ell} \sum_{k<k_1} k^{\frac{3\ell}{2}-1}\right) =$$

$$= O\left(n^{-\ell} k_1^{\frac{3\ell}{2}}\right) = O\left(\frac{1}{(w(n))^{3\ell/2}}\right) \longrightarrow 0.$$

Доказательство утверждения 3.6

Обозначим $k_1 = n^{2/3}/w(n)$ и оценим математическое ожидание числа ℓ-компонент размера не более k_1. Применяя лемму 3.6, п.2) и теорему 3.11, п. 2), получаем:

$$\sum_{k<k_1} \mathsf{E}X(n,k,\ell) = O\left(\sum_{k<k_1} n^{-\ell} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k<k_1} n^{-\ell} k^{\frac{3\ell}{2}-1} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(n^{-\ell} \sum_{k<k_1} k^{\frac{3\ell}{2}-1}\right) =$$

$$= O\left(n^{-\ell} k_1^{\frac{3\ell}{2}}\right) = O\left(\frac{1}{(w(n))^{3\ell/2}}\right) \longrightarrow 0.$$

Следовательно, с вероятностью, стремящейся к 1, в $G_n(\lambda)$ не будет сложных компонент размера меньше k_1. $\square$

Максимальная сложность

Таким образом, в нашем случайном графе нет маленьких сложных компонент фиксированной сложности. Зададимся теперь вопросом, а бывают ли в $G_n(\lambda)$ компоненты большой (растущей) сложности?

Максимальная сложность

Таким образом, в нашем случайном графе нет маленьких сложных компонент фиксированной сложности. Зададимся теперь вопросом, а бывают ли в $G_n(\lambda)$ компоненты большой (растущей) сложности? Напомним, что $X(n,\ell)$ — это общее число ℓ-компонент в $G_n(\lambda)$. Введем еще одно обозначение:

$$\mathcal{L}_n = \max\{\ell \geqslant 1 : X(n,\ell) > 0\}$$

— максимальная сложность компоненты в $G_n(\lambda)$.

Максимальная сложность

Таким образом, в нашем случайном графе нет маленьких сложных компонент фиксированной сложности. Зададимся теперь вопросом, а бывают ли в $G_n(\lambda)$ компоненты большой (растущей) сложности? Напомним, что $X(n,\ell)$ — это общее число ℓ-компонент в $G_n(\lambda)$. Введем еще одно обозначение:

$$\mathcal{L}_n = \max\{\ell \geqslant 1 : X(n,\ell) > 0\}$$

— максимальная сложность компоненты в $G_n(\lambda)$.

Теорема (3.12)

В модели $G_n(\lambda)$ величина $\mathcal{L}_n$ ограничена по вероятности.

Доказательство теоремы 3.12

Пусть $\ell_0 = w(n) \to \infty$ — произвольная функция. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathsf{P}(\mathcal{L}_n \geqslant \ell_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 3.12

Пусть $\ell_0 = w(n) \to \infty$ — произвольная функция. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathsf{P}(\mathcal{L}_n \geqslant \ell_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим $w_1(n) = (w(n))^{1/4}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{4/3-\delta})$ для фиксированного малого $\delta > 0$. Будем оценивать математическое ожидание числа ℓ-компонент с $\ell \geqslant \ell_0$. Согласно следствию 3.6 нам достаточно рассматривать только компоненты размера не больше $k_0 = n^{2/3} w_1(n)$.

Доказательство теоремы 3.12

Пусть $\ell_0 = w(n) \to \infty$ — произвольная функция. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathsf{P}(\mathcal{L}_n \geqslant \ell_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим $w_1(n) = (w(n))^{1/4}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{4/3-\delta})$ для фиксированного малого $\delta > 0$. Будем оценивать математическое ожидание числа ℓ-компонент с $\ell \geqslant \ell_0$. Согласно следствию 3.6 нам достаточно рассматривать только компоненты размера не больше $k_0 = n^{2/3} w_1(n)$. Таким образом, нам необходимо показать, что следующая сумма стремится к нулю с ростом n:

$$\sum_{\substack{k \leqslant k_0, \\ \ell_0 < \ell \leqslant \binom{k}{2} - k}} \mathsf{E} X(n,k,\ell) = |\text{ утв. } 3.3| =$$

Доказательство теоремы 3.12

Пусть $\ell_0 = w(n) \to \infty$ — произвольная функция. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathsf{P}(\mathcal{L}_n \geqslant \ell_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим $w_1(n) = (w(n))^{1/4}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{4/3-\delta})$ для фиксированного малого $\delta > 0$. Будем оценивать математическое ожидание числа ℓ-компонент с $\ell \geqslant \ell_0$. Согласно следствию 3.6 нам достаточно рассматривать только компоненты размера не больше $k_0 = n^{2/3}w_1(n)$. Таким образом, нам необходимо показать, что следующая сумма стремится к нулю с ростом n:

$$\sum_{\substack{k \leqslant k_0, \\ \ell_0 < \ell \leqslant \binom{k}{2} - k}} \mathsf{E}X(n,k,\ell) = |\text{ утв. } 3.3| =$$

$$= \sum_{\substack{k \leqslant k_0, \\ \ell_0 < \ell \leqslant \binom{k}{2} - k}} \binom{n}{k} C(k, k+\ell) p^{k+\ell} (1-p)^{\binom{k}{2} - (k+\ell) + k(n-k)}. \qquad (2)$$

Доказательство теоремы 3.12

Пусть $\ell_0 = w(n) \to \infty$ — произвольная функция. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что $\mathsf{P}(\mathcal{L}_n \geqslant \ell_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим $w_1(n) = (w(n))^{1/4}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{4/3-\delta})$ для фиксированного малого $\delta > 0$. Будем оценивать математическое ожидание числа ℓ-компонент с $\ell \geqslant \ell_0$. Согласно следствию 3.6 нам достаточно рассматривать только компоненты размера не больше $k_0 = n^{2/3} w_1(n)$. Таким образом, нам необходимо показать, что следующая сумма стремится к нулю с ростом n:

$$\sum_{\substack{k \leqslant k_0, \\ \ell_0 < \ell \leqslant \binom{k}{2} - k}} \mathsf{E} X(n,k,\ell) = |\text{ утв. } 3.3| =$$

$$= \sum_{\substack{k \leqslant k_0, \\ \ell_0 < \ell \leqslant \binom{k}{2} - k}} \binom{n}{k} C(k, k+\ell) p^{k+\ell} (1-p)^{\binom{k}{2} - (k+\ell) + k(n-k)}. \qquad (2)$$

Будем использовать обозначение $\varepsilon = \lambda n^{-1/3}$. Тогда

Доказательство теоремы 3.12

$$\binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}\right), \quad p^{k+\ell} = \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+\ell} \leqslant p^\ell e^{\varepsilon k}\frac{1}{n^k},$$

Доказательство теоремы 3.12

$$\binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}\right), \quad p^{k+\ell} = \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+\ell} \leqslant p^\ell e^{\varepsilon k}\frac{1}{n^k},$$

$$(1-p)^{\binom{k}{2}-(k+\ell)+k(n-k)} = O\left((1-p)^{-\ell}(1-p)^{kn-k^2/2}\right) =$$

$$= O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)(kn-k^2/2)/n}\right) = O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)k+(1+\varepsilon)k^2/(2n)}\right).$$

Доказательство теоремы 3.12

$$\binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}\right), \quad p^{k+\ell} = \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+\ell} \leqslant p^\ell e^{\varepsilon k}\frac{1}{n^k},$$

$$(1-p)^{\binom{k}{2}-(k+\ell)+k(n-k)} = O\left((1-p)^{-\ell}(1-p)^{kn-k^2/2}\right) =$$

$$= O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)(kn-k^2/2)/n}\right) = O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)k+(1+\varepsilon)k^2/(2n)}\right).$$

Далее, в силу определения k_0:

$$\frac{k^2|\varepsilon|}{n} \leqslant \frac{k_0^2|\varepsilon|}{n} = |\lambda|w_1(n)^2 = |\lambda|(w(n))^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 3.12

$$\binom{n}{k} = O\left(\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}\right), \quad p^{k+\ell} = \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+\ell} \leqslant p^{\ell} e^{\varepsilon k}\frac{1}{n^k},$$

$$(1-p)^{\binom{k}{2}-(k+\ell)+k(n-k)} = O\left((1-p)^{-\ell}(1-p)^{kn-k^2/2}\right) =$$

$$= O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)(kn-k^2/2)/n}\right) = O\left((1-p)^{-\ell}e^{-(1+\varepsilon)k+(1+\varepsilon)k^2/(2n)}\right).$$

Далее, в силу определения k_0:

$$\frac{k^2|\varepsilon|}{n} \leqslant \frac{k_0^2|\varepsilon|}{n} = |\lambda| w_1(n)^2 = |\lambda|(w(n))^{1/2}.$$

Применяя все эти оценки, получаем, что сумма в (2) не превосходит

$$O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}} \sum_{\substack{k\leqslant k_0,\\ \ell_0<\ell\leqslant\binom{k}{2}-k}} \frac{C(k,k+\ell)}{k!}e^{-k}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right).$$

Разобьем оставшуюся сумму на две: Σ_1 для $k<\ell$ и Σ_2 для $k \geqslant \ell$, и оценим их по-отдельности.

Доказательство теоремы 3.12

Для оценки Σ_1 воспользуемся тем, что при $\ell \geqslant k$ выполнено $C(k, k+\ell) = O(k^{k+\ell})$ (теорема 3.11 п. 2)) и $k! > (k/e)^k$.

Доказательство теоремы 3.12

Для оценки Σ_1 воспользуемся тем, что при $\ell \geqslant k$ выполнено $C(k, k+\ell) = O(k^{k+\ell})$ (теорема 3.11 п. 2)) и $k! > (k/e)^k$. Тогда

$$\Sigma_1 = O\left[\sum_{k=1}^{k_0} \frac{e^{-k}}{k!} \left(\sum_{\ell \geqslant \max(k,\ell_0)} k^{k+\ell} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell} \right)\right] =$$

$$= O\left[\sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{\ell \geqslant \max(k,\ell_0)} \left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\ell} \right)\right] =$$

Доказательство теоремы 3.12

Для оценки Σ_1 воспользуемся тем, что при $\ell \geqslant k$ выполнено $C(k, k+\ell) = O(k^{k+\ell})$ (теорема 3.11 п. 2)) и $k! > (k/e)^k$. Тогда

$$\Sigma_1 = O\left[\sum_{k=1}^{k_0} \frac{e^{-k}}{k!}\left(\sum_{\ell\geqslant\max(k,\ell_0)} k^{k+\ell}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

$$= O\left[\sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{\ell\geqslant\max(k,\ell_0)}\left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

(т.к. при больших n выполнено $k_0 p/(1-p) \leqslant 1/2$)

$$= O\left[\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\max(k,\ell_0)}\right] = O\left(\ell_0\left(\frac{k_0 p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right) = O\left(w(n)\left(\frac{w_1(n)}{n^{1/3}}\right)^{w(n)}\right) =$$

Доказательство теоремы 3.12

Для оценки Σ_1 воспользуемся тем, что при $\ell \geqslant k$ выполнено $C(k, k+\ell) = O(k^{k+\ell})$ (теорема 3.11 п. 2)) и $k! > (k/e)^k$. Тогда

$$\Sigma_1 = O\left[\sum_{k=1}^{k_0} \frac{e^{-k}}{k!}\left(\sum_{\ell \geqslant \max(k,\ell_0)} k^{k+\ell}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

$$= O\left[\sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{\ell \geqslant \max(k,\ell_0)}\left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

(т.к. при больших n выполнено $k_0 p/(1-p) \leqslant 1/2$)

$$= O\left[\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\max(k,\ell_0)}\right] = O\left(\ell_0\left(\frac{k_0 p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right) = O\left(w(n)\left(\frac{w_1(n)}{n^{1/3}}\right)^{w(n)}\right) =$$

(при больших n $w(n)^{1/w(n)} \leqslant 2$)

$$= O\left(\left(\frac{2w_1(n)}{n^{1/3}}\right)^{w(n)}\right) = O\left(\left(\frac{2}{n^{\delta/4}}\right)^{w(n)}\right).$$

Доказательство теоремы 3.12

В итоге,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\left(\frac{2}{n^{\delta/4}}\right)^{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 3.12

В итоге,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\left(\frac{2}{n^{\delta/4}}\right)^{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

Осталось рассмотреть сумму Σ_2. Здесь мы напрямую воспользуемся оценкой $C(k,k+\ell) = O(\ell^{-\ell/2}k^{k+(3\ell-1)/2})$. Тогда

$$\Sigma_2 = O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0}\frac{e^{-k}}{k!}\left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k}\ell^{-\ell/2}k^{k+\frac{3\ell-1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

Доказательство теоремы 3.12

В итоге,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\left(\frac{2}{n^{\delta/4}}\right)^{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

Осталось рассмотреть сумму Σ_2. Здесь мы напрямую воспользуемся оценкой $C(k,k+\ell) = O(\ell^{-\ell/2}k^{k+(3\ell-1)/2})$. Тогда

$$\Sigma_2 = O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0}\frac{e^{-k}}{k!}\left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k}\ell^{-\ell/2}k^{k+\frac{3\ell-1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

(используем формулу Стирлинга)

$$= O\left[\sum_{k=l_0}^{k_0}\left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k}\ell^{-\ell/2}k^{\frac{3\ell-2}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right].$$

Доказательство теоремы 3.12

В итоге,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}}\left(\frac{2}{n^{\delta/4}}\right)^{w(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

Осталось рассмотреть сумму Σ_2. Здесь мы напрямую воспользуемся оценкой $C(k, k+\ell) = O(\ell^{-\ell/2}k^{k+(3\ell-1)/2})$. Тогда

$$\Sigma_2 = O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0}\frac{e^{-k}}{k!}\left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k}\ell^{-\ell/2}k^{k+\frac{3\ell-1}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right] =$$

(используем формулу Стирлинга)

$$= O\left[\sum_{k=l_0}^{k_0}\left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k}\ell^{-\ell/2}k^{\frac{3\ell-2}{2}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell}\right)\right].$$

Заметим, что отношение слагаемых с индексами $\ell+1$ и ℓ мало:

$$\frac{\ell^{\ell/2}}{(\ell+1)^{(\ell+1)/2}}k^{3/2}\frac{p}{1-p} = O\left(\frac{k_0^{3/2}}{n\ell_0^{1/2}}\right) = O\left(\frac{1}{(w(n))^{1/8}}\right).$$

Доказательство теоремы 3.12

Поэтому сворачивая геометрическую прогрессию, получаем оценку

$$= O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0} \ell_0^{-\ell_0/2} k^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right] = O\left(k_0 \ell_0^{-\ell_0/2} k_0^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{k_0^{3/2} p}{\ell_0^{1/2}(1-p)}\right)^{\ell_0}\right) = O\left(\left(\frac{2}{(w(n))^{1/8}}\right)^{w(n)}\right).$$

Доказательство теоремы 3.12

Поэтому сворачивая геометрическую прогрессию, получаем оценку

$$= O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0} \ell_0^{-\ell_0/2} k^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right] = O\left(k_0 \ell_0^{-\ell_0/2} k_0^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{k_0^{3/2} p}{\ell_0^{1/2}(1-p)}\right)^{\ell_0}\right) = O\left(\left(\frac{2}{(w(n))^{1/8}}\right)^{w(n)}\right).$$

Следовательно,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}} \Sigma_2 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}} \left(\frac{2}{(w(n))^{1/8}}\right)^{w(n)}\right) \to 0.$$

Доказательство теоремы 3.12

Поэтому сворачивая геометрическую прогрессию, получаем оценку

$$= O\left[\sum_{k=\ell_0}^{k_0} \ell_0^{-\ell_0/2} k^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right] = O\left(k_0 \ell_0^{-\ell_0/2} k_0^{\frac{3\ell_0-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\ell_0}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{k_0^{3/2} p}{\ell_0^{1/2}(1-p)}\right)^{\ell_0}\right) = O\left(\left(\frac{2}{(w(n))^{1/8}}\right)^{w(n)}\right).$$

Следовательно,

$$e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}} \Sigma_2 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w(n)}}{2}} \left(\frac{2}{(w(n))^{1/8}}\right)^{w(n)}\right) \to 0.$$

Подведем итоги. Мы доказали, что математическое ожидание числа искомых компонент в случайном графе $G_n(\lambda)$ стремится к нулю. Значит, с вероятностью, стремящейся к 1, таких компонент в случайном графе не будет. $\square$

Ограниченность $X(n, \ell)$

Утверждение (3.7)

Пусть $\ell \geqslant 1$ *— фиксировано. Тогда в модели* $G_n(\lambda)$ *величина* $X(n, \ell)$ *ограничена по вероятности.*

Ограниченность $X(n, \ell)$

Утверждение (3.7)

Пусть $\ell \geqslant 1$ *— фиксировано. Тогда в модели* $G_n(\lambda)$ *величина* $X(n, \ell)$ *ограничена по вероятности.*

Доказательство. Из следствия 3.6 мы знаем, что максимальный размер сложных компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Ограниченность $X(n,\ell)$

Утверждение (3.7)

Пусть $\ell \geqslant 1$ — фиксировано. Тогда в модели $G_n(\lambda)$ величина $X(n,\ell)$ ограничена по вероятности.

Доказательство. Из следствия 3.6 мы знаем, что максимальный размер сложных компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. Возьмем некоторую функцию $w_1(n) \to +\infty$. Тогда нам достаточно проверить, что ограничена по вероятности следующая сумма: $\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} X(n,k,\ell)$. Оценим ее математическое ожидание с помощью леммы 3.6 и теоремы 3.11:

$$\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} \mathsf{E}\, X(n,k,\ell) = O\left(\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} n^{-\ell} C(k,k+\ell)\frac{e^{-k}}{k!}\right) =$$

Ограниченность $X(n, \ell)$

Утверждение (3.7)

Пусть $\ell \geqslant 1$ — фиксировано. Тогда в модели $G_n(\lambda)$ величина $X(n, \ell)$ ограничена по вероятности.

Доказательство. Из следствия 3.6 мы знаем, что максимальный размер сложных компонент имеет порядок $O_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. Возьмем некоторую функцию $w_1(n) \to +\infty$. Тогда нам достаточно проверить, что ограничена по вероятности следующая сумма: $\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} X(n, k, \ell)$. Оценим ее математическое ожидание с помощью леммы 3.6 и теоремы 3.11:

$$\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} \mathsf{E}\, X(n, k, \ell) = O\left(\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} n^{-\ell} C(k, k+\ell) \frac{e^{-k}}{k!}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} n^{-\ell} k^{k+\frac{3\ell-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!}\right) = O\left(\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} n^{-\ell} k^{\frac{3\ell}{2}-1}\right) =$$

Доказательство утверждения 3.7

$$= O\left(n^{-\ell}\left(n^{2/3}w_1(n)\right)^{\frac{3\ell}{2}}\right) = O\left(\left(w_1(n)\right)^{\frac{3\ell}{2}}\right).$$

Доказательство утверждения 3.7

$$= O\left(n^{-\ell}\left(n^{2/3}w_1(n)\right)^{\frac{3\ell}{2}}\right) = O\left(\left(w_1(n)\right)^{\frac{3\ell}{2}}\right).$$

Теперь пусть $w(n) \to +\infty$ — произвольная функция. Выберем $w_1(n)$ так, чтобы $(w_1(n))^{\frac{3\ell}{2}} = o(w(n))$. Тогда вероятность

$$\mathsf{P}\left(X(n,\ell) \geqslant w(n)\right) \leqslant o(1) + \mathsf{P}\left(\sum_{k<n^{2/3}w_1(n)} X(n,k,\ell) \geqslant w(n)\right) \leqslant$$

(неравенство Маркова)

$$\leqslant \frac{1}{w(n)} \cdot O\left(\left(w_1(n)\right)^{\frac{3\ell}{2}}\right) \longrightarrow 0.$$

□

Следствие

Замечательно следующее следствие из теорем 3.12 и утверждений 3.6 и 3.7.

Следствие

Замечательно следующее следствие из теорем 3.12 и утверждений 3.6 и 3.7.

Следствие (3.7)

Число сложных компонент в модели $G_n(\lambda)$ *ограничено по вероятности, при этом размер каждой из них есть* $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Следствие

Замечательно следующее следствие из теорем 3.12 и утверждений 3.6 и 3.7.

Следствие (3.7)

Число сложных компонент в модели $G_n(\lambda)$ ограничено по вероятности, при этом размер каждой из них есть $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Доказательство. Из теоремы 3.12 следует, что сложность компонент ограничена по вероятности, а из утверждения 3.7 — что для каждого фиксированного ℓ число ℓ-компонент ограничено. Значит, число сложных компонент тоже ограничено.

Следствие

Замечательно следующее следствие из теорем 3.12 и утверждений 3.6 и 3.7.

Следствие (3.7)

Число сложных компонент в модели $G_n(\lambda)$ ограничено по вероятности, при этом размер каждой из них есть $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$.

Доказательство. Из теоремы 3.12 следует, что сложность компонент ограничена по вероятности, а из утверждения 3.7 — что для каждого фиксированного ℓ число ℓ-компонент ограничено. Значит, число сложных компонент тоже ограничено. В свою очередь, из утверждения 3.6 вытекает, что сложных компонент маленького размера и фиксированной сложности не бывает. $\square$

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

В заключение приведем без доказательства ряд фактов относительно случайного графа $G_n(\lambda)$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

В заключение приведем без доказательства ряд фактов относительно случайного графа $G_n(\lambda)$.

I. В случайном графе $G_n(\lambda)$ не всегда есть сложные компоненты.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

В заключение приведем без доказательства ряд фактов относительно случайного графа $G_n(\lambda)$.

I. В случайном графе $G_n(\lambda)$ не всегда есть сложные компоненты. Если обозначить через $X(n, \geqslant 1)$ — число сложных компонент в случайном графе $G_n(\lambda)$, то можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}X(n, \geqslant 1) = \int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-F(x)}dx = I(\lambda),$$

где $F(x) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3 + \lambda^3)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l\geqslant 1} \gamma_l x^{\frac{3l}{2}-1}$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

В заключение приведем без доказательства ряд фактов относительно случайного графа $G_n(\lambda)$.

I. В случайном графе $G_n(\lambda)$ не всегда есть сложные компоненты. Если обозначить через $X(n, \geqslant 1)$ — число сложных компонент в случайном графе $G_n(\lambda)$, то можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}X(n, \geqslant 1) = \int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-F(x)}dx = I(\lambda),$$

где $F(x) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3 + \lambda^3)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l\geqslant 1} \gamma_l x^{\frac{3l}{2}-1}$.

При этом, $I(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$ и $I(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to +\infty$, что соответствует случаям $np = c$ для $c < 1$ и $c > 1$, соответственно.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

II. Для вероятности существования сложной компоненты в $G_n(\lambda)$ выполнено следующее асимптотическое представление.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

II. Для вероятности существования сложной компоненты в $G_n(\lambda)$ выполнено следующее асимптотическое представление. Обозначим через $h_n(\lambda)$ вероятность того, что в $G_n(\lambda)$ нет сложных компонент. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\lambda) = h(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^3}{6}} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{\lambda}{2} 3^{2/3}\right)^j \cos\left(\frac{\pi j}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3} j + \frac{1}{2}\right).$$

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

II. Для вероятности существования сложной компоненты в $G_n(\lambda)$ выполнено следующее асимптотическое представление. Обозначим через $h_n(\lambda)$ вероятность того, что в $G_n(\lambda)$ нет сложных компонент. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\lambda) = h(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^3}{6}} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{\lambda}{2} 3^{2/3}\right)^j \cos\left(\frac{\pi j}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}j + \frac{1}{2}\right).$$

В частности, при $\lambda = 0$, т.е. при $p = 1/n$, эта вероятность равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

III. Обозначим через $C(n)$ — общее число циклов в $G_n(\lambda)$, а $U(n)$ — число уницикличеcких компонент.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

III. Обозначим через $C(n)$ — общее число циклов в $G_n(\lambda)$, а $U(n)$ — число унициклических компонент. Тогда в силу теоремы 3.12 и следствия 3.7

$$C(n) - U(n) = O_{\mathsf{P}}(1).$$

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

III. Обозначим через $C(n)$ — общее число циклов в $G_n(\lambda)$, а $U(n)$ — число унициклических компонент. Тогда в силу теоремы 3.12 и следствия 3.7

$$C(n) - U(n) = O_{\mathsf{P}}(1).$$

Вследствие этого, в модели $G_n(\lambda)$ предельное распределение $U(n)$ заметно отличается от случаев $np = c$, $c \neq 1$. А именно, для $C(n)$ (а стало быть, и для $U(n)$) при $\lambda < 0$ выполнена следующая предельная теорема.

Теорема (3.13)

Если $\lambda < 0$ и $C(n)$ — это общее число циклов в $G_n(\lambda)$, то

$$\frac{C(n) - \frac{1}{6}\ln n}{\sqrt{\frac{1}{6}\ln n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } n \to +\infty.$$

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

IV. Отметим, что до сих пор мы не обсудили более точные результаты о размере компонент. Пусть Z_n — максимальный размер компоненты в $G_n(\lambda)$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

IV. Отметим, что до сих пор мы не обсудили более точные результаты о размере компонент. Пусть Z_n — максимальный размер компоненты в $G_n(\lambda)$. Мы знаем, что $Z_n = \Theta_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. Но существует ли предел (по распределению) у выражения

$$n^{-2/3} \cdot Z_n?$$

И какова будет сложность наибольшей компоненты?

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

IV. Отметим, что до сих пор мы не обсудили более точные результаты о размере компонент. Пусть Z_n — максимальный размер компоненты в $G_n(\lambda)$. Мы знаем, что $Z_n = \Theta_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$. Но существует ли предел (по распределению) у выражения

$$n^{-2/3} \cdot Z_n?$$

И какова будет сложность наибольшей компоненты?

Оказывается, ответы на эти вопросы очень нетривиальны. Ситуация настолько хаотическая, что предельные распределения будут выражаться через некоторые функционалы для броуновского движения. Для формулировки точных результатов нам понадобится ввести несколько случайных процессов.

Функционалы от броуновского движения

Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс (процесс броуновского движения). Тогда положим

$$W_t^\lambda = W_t + t \cdot \lambda - \frac{t^2}{2}, \ t \geqslant 0.$$

Функционалы от броуновского движения

Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс (процесс броуновского движения). Тогда положим

$$W_t^\lambda = W_t + t \cdot \lambda - \frac{t^2}{2},\ t \geqslant 0.$$

Далее, обозначим

$$B_t^\lambda = W_t^\lambda - \min_{s \leqslant t} W_s^\lambda,\ t \geqslant 0.$$

В силу построения процесс B_t^λ будет неотрицательным, но нулевым, если в момент времени t его значение совпадает с текущим минимумом. Это бывает очень часто, но иногда происходят "выбросы" и процесс становится положительным на небольшом интервале I.

Функционалы от броуновского движения

Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс (процесс броуновского движения). Тогда положим

$$W_t^\lambda = W_t + t \cdot \lambda - \frac{t^2}{2},\ t \geqslant 0.$$

Далее, обозначим

$$B_t^\lambda = W_t^\lambda - \min_{s \leqslant t} W_s^\lambda,\ t \geqslant 0.$$

В силу построения процесс B_t^λ будет неотрицательным, но нулевым, если в момент времени t его значение совпадает с текущим минимумом. Это бывает очень часто, но иногда происходят "выбросы" и процесс становится положительным на небольшом интервале I. Пусть $\Gamma = \{\gamma_j, j \in \mathbb{N}\}$ — это набор интервалов (упорядоченных по убыванию длин), на которых B_t^λ положителен.

Функционалы от броуновского движения

Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс (процесс броуновского движения). Тогда положим

$$W_t^\lambda = W_t + t \cdot \lambda - \frac{t^2}{2}, \ t \geqslant 0.$$

Далее, обозначим

$$B_t^\lambda = W_t^\lambda - \min_{s \leqslant t} W_s^\lambda, \ t \geqslant 0.$$

В силу построения процесс B_t^λ будет неотрицательным, но нулевым, если в момент времени t его значение совпадает с текущим минимумом. Это бывает очень часто, но иногда происходят "выбросы" и процесс становится положительным на небольшом интервале I. Пусть $\Gamma = \{\gamma_j, j \in \mathbb{N}\}$ — это набор интервалов (упорядоченных по убыванию длин), на которых B_t^λ положителен.

Далее, введем точечный процесс $(N_t, t \geqslant 0)$, который удовлетворяет уравнению

$$\mathsf{P}\left(N_t \text{ имеет точку на } [t, t+dt] | B_u^\lambda, u \leq t\right) = B_t^\lambda \cdot dt.$$

Пусть μ_j — это число точек N_t внутри интервала γ_j, $j \in \mathbb{N}$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

Вернемся к случайному графу $G_n(\lambda)$. Пусть $C_1(n), C_2(n), \ldots$ — размеры компонент $G_n(\lambda)$, упорядоченные по убыванию. Пусть $\sigma_j(n)$ — это сложность j-й по размеру компоненты $+1$.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

Вернемся к случайному графу $G_n(\lambda)$. Пусть $C_1(n), C_2(n), \ldots$ — размеры компонент $G_n(\lambda)$, упорядоченные по убыванию. Пусть $\sigma_j(n)$ — это сложность j-й по размеру компоненты $+1$.

Как было доказано Олдосом в 1997 году, последовательность $((C_j(n), \sigma_j(n)), j \in \mathbb{N})$ сходится по распределению к перечисленным выше функционалам от винеровского процесса.

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

Вернемся к случайному графу $G_n(\lambda)$. Пусть $C_1(n), C_2(n), \ldots$ — размеры компонент $G_n(\lambda)$, упорядоченные по убыванию. Пусть $\sigma_j(n)$ — это сложность j-й по размеру компоненты $+1$.

Как было доказано Олдосом в 1997 году, последовательность $((C_j(n), \sigma_j(n)), j \in \mathbb{N})$ сходится по распределению к перечисленным выше функционалам от винеровского процесса.

Теорема (3.14, Олдос)

Для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнена сходимость

$$\left\{(n^{-2/3} \cdot C_j(n), \sigma_j(n)), j \leqslant m\right\} \xrightarrow{d} \{(|\gamma_j|, \mu_j), j \leqslant m\} \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Продвинутые факты о $G_n(\lambda)$

Вторая теорема говорит о сходимости всей последовательности $(C_j(n), j \in \mathbb{N})$.

Теорема (3.15, Олдос)

Выполнена сходимость

$$\left(n^{-2/3} \cdot C_j(n), j \in \mathbb{N}\right) \xrightarrow{d} (|\gamma_j|, j \in \mathbb{N}) \quad \textit{при } n \to +\infty,$$

где сходимость по распределению понимается, как слабая сходимость в метрическом пространстве

$$\ell_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 < +\infty\right\}.$$