Основы модальной логики, лекция 3

Кудинов А.В.

30 сентября 2025 г.

Некоторые определимые свойства

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x (xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond \top \iff \forall x \exists y (xRy) \iff \forall x (R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box \bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z (xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z (xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x (|R(x)| \leq n)$;
8. $F \models A2 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \iff \forall x \forall y \forall z \exists t (xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRt \;\&\; zRt)$ (свойство Черча-Россера).

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — бисимуляция, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1)$.

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — **бисимуляция**, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \ \&\ w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\ (v_1 E v_2 \ \&\ w_1 R_1 v_1)$.

Лемма (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — бисимуляция, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1)$.

Лемма (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Бисимуляция

Свойство шкалы Крипке называется модально определимым, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

Предложение

Следующие свойства модально неопределимы.

1. иррефлексивность,
2. антисимметричность,
3. связность.

Преобразования, сохраняющие истинность:p-морфизм

Функция $f : W_1 \to W_2$ — p-морфизмом из шкалы $F_1 = (W_1, R_1)$ в $F_2 = (W_2, R_2)$ (Обозначение: $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$), если

1. f является сюръекцией.
2. $xR_1y \Rightarrow f(x)R_2f(y)$ (монотонность).
3. $f(x)R_2u \Rightarrow \exists y(f(y) = u \mathbin{\&} xR_1y)$ (поднятие).

Преобразования, сохраняющие истинность:p-морфизм

Функция $f : W_1 \to W_2$ — p-морфизмом из шкалы $F_1 = (W_1, R_1)$ в $F_2 = (W_2, R_2)$ (Обозначение: $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$), если

1. f является сюръекцией.
2. $xR_1y \Rightarrow f(x)R_2f(y)$ (монотонность).
3. $f(x)R_2u \Rightarrow \exists y(f(y) = u \;\&\; xR_1y)$ (поднятие).

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$, V — оценка на F_2, тогда для любой формулы A

$$F_1, V', x \models A \Leftrightarrow F_2, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$, V — оценка на G, тогда для любой формулы A

$$F_1, V', x \models A \Leftrightarrow F_2, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

Для доказательства достаточно доказать, что f, как отношение, является бисимуляцией.

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F_1 \twoheadrightarrow F_2$, V — оценка на G, тогда для любой формулы A

$$F_1, V', x \models A \Leftrightarrow F_2, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

Для доказательства достаточно доказать, что f, как отношение, является бисимуляцией.

Теорема

Пусть $F_1 \twoheadrightarrow F_2$, тогда $Log(F_1) \subseteq Log(F_2)$.

Преобразования, сохраняющие истинность: дизъюнктная сумма

Пусть $\{F_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство шкал Крипке, т.ч. $F_i = (W_i, R_i)$.
Определим дизъюнктную сумму шкал Крипке:

$$\bigsqcup_{i\in I} F_i \rightleftharpoons (W, R), \text{ т.ч. } W = \bigsqcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I} W_i \times \{i\};$$

$$(x, i)R(y, j) \Leftrightarrow i = j \;\&\; xR_iy.$$

Аналогично можно определить дизъюнктную сумму семейства моделей:

$$\bigsqcup_{i\in I} M_i \rightleftharpoons (\bigsqcup_{i\in I} F_i, \bigsqcup_{i\in I} V_i),$$

$$(x, i) \in \left[\bigsqcup_{i\in I} V_i\right](p) \Leftrightarrow x \in V_i(p).$$

Преобразования, сохраняющие истинность: дизъюнктная сумма

Лемма

Для любой формулы A, индекса i и точки $w_i \in W_i$ верно, что

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i, (w_i, i) \models A \iff M_i, w_i \models A.$$

Предложение

$$Log(\bigsqcup_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} Log(F_i) = Log(\{F_i \mid i \in I\}).$$

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u \, (w \in W' \;\&\; wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap (W' \times W')$.

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u\, (w \in W' \ \&\ wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap (W' \times W')$.

Порожденной подмоделью модели $M = (F, V)$ называется модель $M' = (F', V')$, такая что $F' = (W', R')$ — порожденная подшкала, и $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u\, (w \in W' \ \&\ wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap (W' \times W')$.

Порожденной подмоделью модели $M = (F, V)$ называется модель $M' = (F', V')$, такая что $F' = (W', R')$ — порожденная подшкала, и $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Лемма

Пусть M' — порожденная подмодель модели M. Тогда для любой точки w из M' и любой формулы A верно

$$M', w \models A \iff M, w \models A.$$

Лемма

Пусть M' — порожденная подмодель модели M. Тогда для любой точки w из M' и любой формулы A верно

$$M', w \models A \iff M, w \models A.$$

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $M = (F, V)$ — модель. Определим

$$
\begin{aligned}
xR^0y &\iff x = y, \\
xR^1y &\iff xRy, \\
xR^{n+1}y &\iff \exists z(xR^n zRy), && \text{т.е. } R^{n+1} = R^n \circ R, \\
xR^*y &\iff \exists n(xR^n y), && \text{т.е. } R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n.
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что R^* является транзитивным замыканием R.
Для $x \in W$ определим $W^x = R^*(x)$, $R^x = R|_{W^x} = R \cap W^x \times W^x$,
$V^x(p) = V(p) \cap W^x$ для всех переменных p.

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Шкала $F^x = (W^x, R^x)$ называется конусом, модель $M^x = (F^x, V^x)$ называется моделью порожденной одной точкой.

Лемма

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $M = (F, V)$ — модель, $x \in W$, A — произвольная формула, тогда

- $M, x \models A \iff M^x, x \models A$;
- для любого $y \in W^x$ $M, y \models A \iff M^x, y \models A$;
- $F \models A \Rightarrow F^x \models A$.

Преобразования, сохраняющие истинность

Теорема

Любое многообразие данного множества формул $Var(\Gamma)$ замкнуто относительно

- p-морфизмов,
- дизьюнктных сумм,
- порожденных подшкал.

Преобразования, сохраняющие истинность

Теорема

Любое многообразие данного множества формул $Var(\Gamma)$ замкнуто относительно

- p-морфизмов,
- дизъюнктных сумм,
- порожденных подшкал.

Естественный вопрос: Верно ли обратное?
Т.е. если многообразие замкнуто относительно этих операций, будет ли оно задаваться некоторым множеством формул?

Задания на дом

1. Постройте бисимуляцию между следующими моделями так, чтобы черные точки соединялись:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & \circ\, p \arrow[d, leftrightarrow] \\
& \circ
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop right] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\circ\, p
\end{tikzcd}
$$

2. Докажите, что не существует бисимуляции, соединяющей черные точки, между следующими моделями

$$
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, leftrightarrow] & \bullet \arrow[r] & \circ\, p
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
p\, \circ & \bullet \arrow[l] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

3. Докажите, что свойство «двудольности» (множество W разбивается на два подмножества таких, что нет стрелок внутри этих подмножеств) модально неопределимо.

Упражнения на дом

4. Попробуйте написать формулу, выражающую, что шкала транзитивна и из любой точки видна рефлексивная точка, которая видит только себя.

5. Рассмотрим шкалы $F = (\mathbb{N}, <)$ и $G = (W, R)$, где $W = \{1, 2\}$ и $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Существует ли p-морфизм из F в G?

6. Докажите, что логики шкал $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$ совпадают.

7. Докажите, что шкалы $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$ модально различимы (их логики отличаются).