Основы модальной логики, лекция 1

Кудинов А.В.

16 сентября 2025 г.

Какие бывают логики?

1. Логика высказываний
2. Логика предикатов
3. Неклассические логики
    - Интуиционистская логика
    - Модальная логика
    - Дискрипционная логика
    - Многозначная
    - Нечеткая
    - Квантовая
    - Вероятностная
    - И т.д. и т.п.

Логика высказываний

Формула пропозициональной модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула.

Множество всех булевых формул обозначается $\mathcal{L}$.

Остальные логические связки мы будем считать сокращениями:

$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B, \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B).$$

Логика высказываний

Формула пропозициональной модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула.

Множество всех булевых формул обозначается $\mathcal{L}$.

Остальные логические связки мы будем считать сокращениями:

$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B, \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B).$$

Алгебраическая семантика на примере булевой алгебры подмножеств $(\mathcal{P}(W), \cap, \cup, -, \varnothing, W)$. Оценка $V : Prop \to \mathcal{P}(W)$ и продолжается на множество $\mathcal{L}$ по индукции:

$$V(\bot) = \varnothing;$$
$$V(A \to B) = (-V(A)) \cup V(B).$$

Язык модальной логики

Формула пропозициональной n-модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула;
4. Если A — формула, то $\Box A$.

Множество всех модальных формул обозначается $\mathcal{ML}$

Символ $\Box$ читается, как «бокс».

Коротко:

$$A ::= p \mid \bot \mid (A \to A) \mid \Box A.$$

Язык

Формула пропозициональной n-модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула;
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула;
4. Если A — формула, то $\Box A$ — формула.

Множество всех модальных формул обозначается $\mathcal{ML}$

Символ $\Box$ читается, как «бокс».

Коротко (в форме Бэкуса-Наура):

$$A ::= p \mid \bot \mid (A \to A) \mid \Box A.$$

$$<\text{формула}> ::= p \mid \bot \mid (<\text{формула}> \to <\text{формула}>) \mid \Box<\text{формула}>.$$

Язык

Остальные связки считаются сокращениями соответствующих формул:

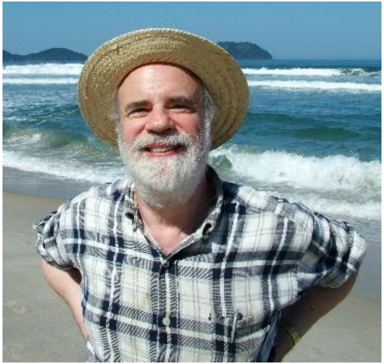
$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot, \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B), \quad \Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A.$$

Семантика

Шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.

Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$.



Сол Крипке

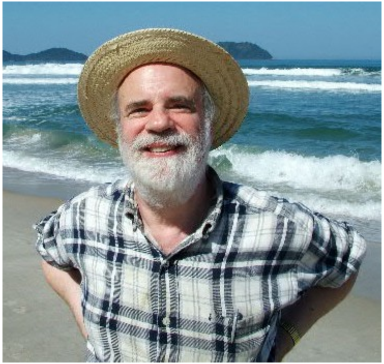
(источник: wikipedia.org)

Семантика

Шкалой Крипке (Kripke frame) называется кортеж $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.

Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$.



Сол Крипке

(источник: wikipedia.org)

Семантика

Через отношение истинности

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Через продолжение оценки

$$
\begin{aligned}
V(\bot) &= \varnothing, \\
V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\
V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}.
\end{aligned}
$$

Предложение

Эти два определения эквивалентны.

Семантика

Через отношение истинности

$$\begin{aligned} M,x \models p &\iff x \in V(p) \\ M,x &\not\models \bot \\ M,x \models A \to B &\iff M,x \not\models A \text{ или } M,x \models B \\ M,x \models \Box A &\iff \forall y(xRy \Rightarrow M,y \models A). \end{aligned}$$

Через продолжение оценки

$$\begin{aligned} V(\bot) &= \varnothing, \\ V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\ V(\Box A) &= \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in V(A))\}. \end{aligned}$$

Предложение

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x(M,x \models A)$.

Семантика

Через отношение истинности

$$\begin{aligned} M,x \models p &\iff x \in V(p) \\ M,x &\not\models \bot \\ M,x \models A \to B &\iff M,x \not\models A \text{ или } M,x \models B \\ M,x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M,y \models A). \end{aligned}$$

Через продолжение оценки

$$\begin{aligned} V(\bot) &= \varnothing, \\ V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\ V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}. \end{aligned}$$

Предложение

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M,x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F,V) \models A$.

Семантика

Через отношение истинности

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Через продолжение оценки

$$
\begin{aligned}
V(\bot) &= \varnothing, \\
V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\
V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}.
\end{aligned}
$$

Предложение

Эти два определения эквивалентны.

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.

Формула A общезначима в классе шкал $\mathcal{C}$ (обозн. $\mathcal{C} \models A$), если $\forall F \in \mathcal{C} (F \models A)$.

Предложение

Формула $\Box p \to p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$, тогда и только тогда, когда $\forall x(xRx)$.

Предложение

Формула $\Box p \to p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$, тогда и только тогда, когда $\forall x (xRx)$.

Таким образом формула $\Box p \to p$ «задает» класс рефлексивных шкал Крипке.

Логики и многообразия

Для класса шкал $\mathcal{C}$ логикой этого класса называется

$$Log(\mathcal{C}) \risingdotseq \{A \,|\, \forall F \in \mathcal{C}\,(F \models A)\}$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$. Многообразием этого множества формул называется класс шкал

$$Var(\Gamma) \risingdotseq \{F \,|\, \forall A \in \Gamma\ (F \models A)\}\,.$$

Класс шкал будем называть (модальным) многообразием, если существует множество модальных формул, многообразием которого является данный класс.

Про классы можно почитать здесь: https://ru.wikipedia.org/wiki/Класс_(математика)