

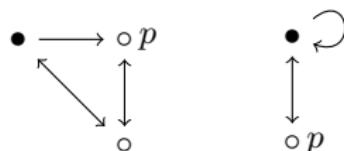
# Основы модальной логики, лекция 4

Кудинов А.В.

6 октября 2025 г.

## Разбор задания на дом

1. Постройте бисимуляцию между следующими моделями так, чтобы черные точки соединялись:



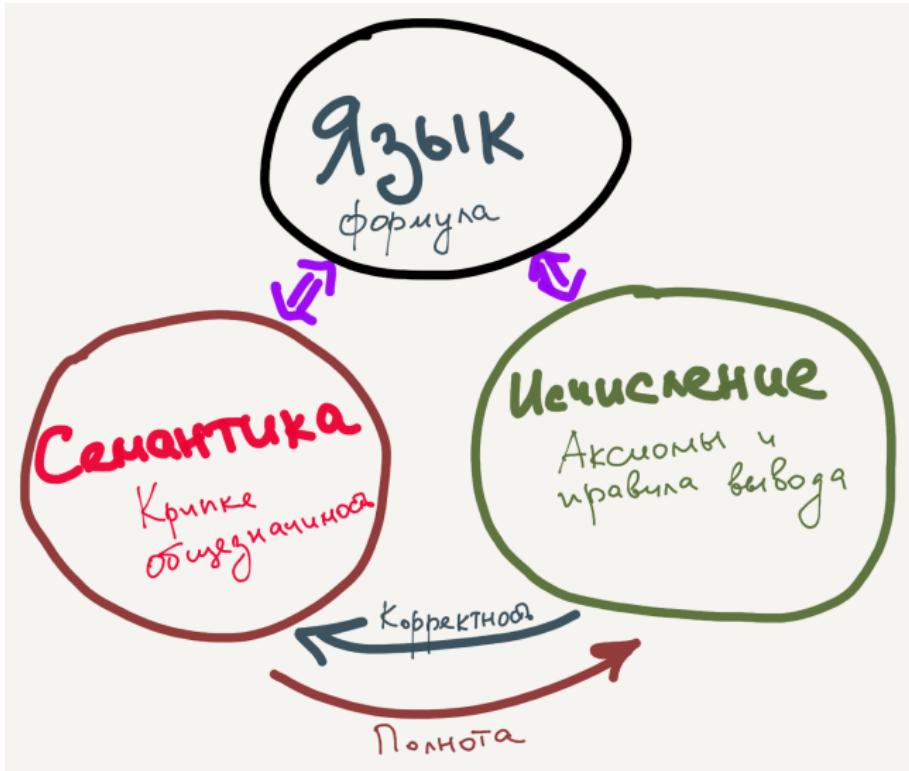
2. Докажите, что не существует бисимуляции, соединяющей черные точки, между следующими моделями



3. Докажите, что свойство «двудольности» (множество  $W$  разбивается на два подмножества таких, что нет стрелок внутри этих подмножеств) модально неопределимо.

## Разбор задания на дом

4. Попробуйте написать формулу, выражающую, что шкала транзитивна и из любой точки видна рефлексивная точка, которая видит только себя.
5. Рассмотрим шкалы  $F = (\mathbb{N}, <)$  и  $G = (W, R)$ , где  $W = \{1, 2\}$  и  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ . Существует ли р-морфизм из  $F$  в  $G$ ?
6. Докажите, что логики шкал  $(\mathbb{N}, <)$  и  $(\mathbb{Z}, <)$  совпадают.
7. Докажите, что шкалы  $(\mathbb{N}, <)$  и  $(\mathbb{R}, <)$  модально различимы (их логики отличаются).



Нормальной модальной логикой называется подмножество формул  $L \subseteq \mathcal{ML}$ , если

- ❶  $L$  содержит все классические тавтологии;
- ❷  $L$  замкнуто относительно правил

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B} \quad (MP) \quad \text{Modus Ponens};$$

$$\frac{A}{\Box A} \quad (\rightarrow \Box) \quad \text{правило обобщения};$$

$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub) \quad \text{правило подстановки};$$

- ❸  $L$  содержит модальные аксиомы нормальности:

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \quad (AK)$$

# Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

# Исчисление

**Исчисление** — набор правил и аксиом (формул).

**Вывод** — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком  $\vdash$ .

# Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком  $\vdash$ .

$p \rightarrow (p \vee q)$	тавтология
$\square(p \rightarrow (p \vee q))$	$(\rightarrow \square)$
$\square(p \rightarrow q) \rightarrow (\square p \rightarrow \square q)$	$(AK)$
$\square(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\square p \rightarrow \square(p \vee q))$	$(Sub)$
$\square p \rightarrow \square(p \vee q)$	$(MP)$

# Исчисление

Исчисление — набор правил и аксиом (формул).

Вывод — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Выводимость обозначается знаком  $\vdash$ .

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow (p \vee q) & \text{тавтология} \\ \square(p \rightarrow (p \vee q)) & (\rightarrow \square) \\ \square(p \rightarrow q) \rightarrow (\square p \rightarrow \square q) & (AK) \\ \square(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\square p \rightarrow \square(p \vee q)) & (Sub) \\ \square p \rightarrow \square(p \vee q) & (MP) \\ \\ \vdash \square p \rightarrow \square(p \vee q) & \end{array}$$

## Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез)  $\Gamma$  — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит  $\Gamma$ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение:  $\Gamma \vdash A$ .

## Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез)  $\Gamma$  — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит  $\Gamma$ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение:  $\Gamma \vdash A$ .

Пример.

Возьмем  $\Gamma = \{\Box \perp\}$

$\perp \rightarrow p$	тавтология
$\Box(\perp \rightarrow p)$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	$(AK)$
$\Box(\perp \rightarrow p) \rightarrow (\Box \perp \rightarrow \Box p)$	$(Sub)$
$\Box \perp \rightarrow \Box p$	$(MP)$
$\Box \perp$	$\in \Gamma$
$\Box p$	$(MP)$

## Вывод из множества формул

Вывод из множества формул (гипотез)  $\Gamma$  — последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо принадлежит  $\Gamma$ , либо получена из предыдущих с помощью правила вывода. Обозначение:  $\Gamma \vdash A$ .

Пример.

Возьмем  $\Gamma = \{\Box \perp\}$

$\perp \rightarrow p$	тавтология
$\Box(\perp \rightarrow p)$	$(\rightarrow \Box)$
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	$(AK)$
$\Box(\perp \rightarrow p) \rightarrow (\Box \perp \rightarrow \Box p)$	$(Sub)$
$\Box \perp \rightarrow \Box p$	$(MP)$
$\Box \perp$	$\in \Gamma$
$\Box p$	$(MP)$

$\Gamma \vdash \Box p$  или  $\Box \perp \vdash \Box p$   
(фигурные скобки обычно опускаются)

Модальная логика — тоже множество формул.  
Можно писать

$$\mathbb{L} \vdash A$$

Модальная логика — тоже множество формул.

Можно писать

$$\mathcal{L} \vdash A$$

Но, т.к. модальная логика замкнута относительно правил вывода и содержит необходимые аксиомы, то

$$\mathcal{L} \vdash A \iff A \in \mathcal{L}$$

# Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

# Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается  $K$ .

Для множества формул  $\Gamma$  и модальной логики  $L$  минимальную модальную логику содержащую множество формул  $L \cup \Gamma$  обозначают  $L + \Gamma$ .

# Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается  $K$ .

Для множества формул  $\Gamma$  и модальной логики  $L$  минимальную модальную логику содержащую множество формул  $L \cup \Gamma$  обозначают  $L + \Gamma$ .

Заметим, что

$$L + \Gamma = \{A \mid L \cup \Gamma \vdash A\}$$

# Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается  $\mathbf{K}$ .

Для множества формул  $\Gamma$  и модальной логики  $L$  минимальную модальную логику содержащую множество формул  $L \cup \Gamma$  обозначают  $L + \Gamma$ .

Заметим, что

$$L + \Gamma = \{A \mid L \cup \Gamma \vdash A\}$$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

## Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $\text{Log}(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

## Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $\text{Log}(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

1) Докажем, что  $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

## Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $\text{Log}(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

1) Докажем, что  $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что  $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

## Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $\text{Log}(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

1) Докажем, что  $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что  $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

3) Пусть  $V$  — оценка, определим  $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$  тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

## Теорема (Теорема корректности)

Пусть  $F$  — шкала Кripке, тогда  $\text{Log}(F) = \{A \mid F \models A\}$  является модальной логикой.

1) Докажем, что  $\forall V \forall x$

$$(F, V, x \models A \rightarrow B \text{ и } F, V, x \models A) \Rightarrow F, V, x \models B.$$

2) Докажем, что  $\forall V$

$$\forall x (F, V, x \models A) \Rightarrow \forall x (F, V, x \models \Box A)$$

3) Пусть  $V$  — оценка, определим  $V'(q) = \begin{cases} V(B), & \text{если } q = p, \\ V(q), & \text{если } q \neq p, \end{cases}$  тогда

$$F, V, x \models [B/p]A \iff F, V', x \models A.$$

Из этого следует, что если  $F \not\models A$ , то  $F \not\models [B/p]A$ .

□

## Следствие

Пусть  $\mathcal{C}$  – класс шкал Кripке, тогда  $\text{Log}(\mathcal{C})$  является модальной логикой.

## Следствие

Пусть  $\mathcal{C}$  — класс шкал Кripке, тогда  $\text{Log}(\mathcal{C})$  является модальной логикой.

Логика  $\mathsf{L}$  называется **полной** (по Кripке), если существует класс шкал  $\mathcal{C}$ , т.ч.  $\mathsf{L} = \text{Log}(\mathcal{C})$ .

# Примеры логик

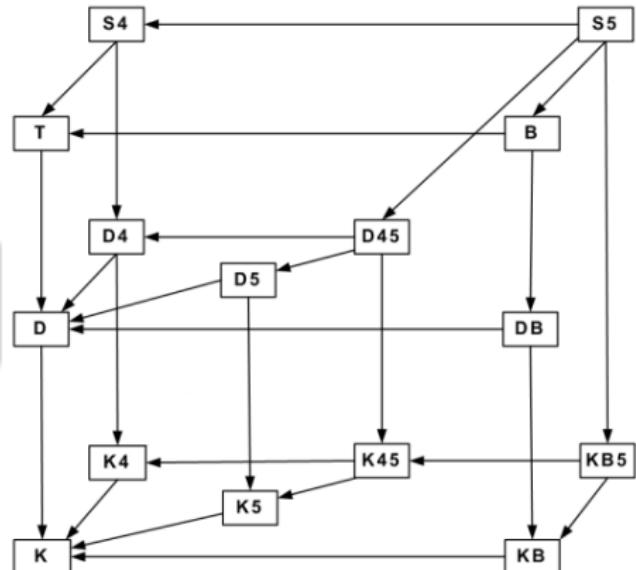
Определим несколько логик:

$$\begin{aligned} T &\equiv K + AT \\ D &\equiv K + \Diamond T \\ KB &\equiv K + AB \\ S5 &\equiv S4 + AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K4 &\equiv K + A4 \\ D4 &\equiv D + A4 \\ S4 &\equiv K4 + AT \\ L5 &\equiv L + A5 \end{aligned}$$

Предложение

Все включения на следующем рисунке верны и строги



Наша дальнейшая цель доказать теорему о канонической модели, из которой будет следовать полнота.

# Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику  $L$ .

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул  $S$  (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы  $A$ :

$S \triangleright_L A \iff$  существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики  $L$ , либо принадлежит  $S$ , либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.

Т. е. правила  $(\rightarrow \square)$  и  $(Sub)$  исключаются.

# Теория и слабая L-выводимость

Фиксируем модальную логику  $L$ .

Определим новое понятие выводимости. Для множества формул  $S$  (мы будем часто называть это **теорией**) и формулы  $A$ :

$S \triangleright_L A \iff$  существует последовательность формул, каждая из которых либо теорема логики  $L$ , либо принадлежит  $S$ , либо получена из предыдущих с помощью Modus Ponens.

Т. е. правила  $(\rightarrow \square)$  и  $(Sub)$  исключаются.

Т.к. мы ограничили себя только правилом MP, то можно доказать:

## Лемма (о дедукции)

$$S \cup \{A\} \triangleright_L B \iff S \triangleright_L A \rightarrow B.$$

Заметим, что для модального  $\vdash$  лемма о дедукции не верна.

## Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ①  $S \triangleright_L A$ ;
- ② существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $S_0 \triangleright_L A$ ;
- ③ существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$ .

# Вспомогательные утверждения

## Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ①  $S \triangleright_L A$ ;
- ② существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $S_0 \triangleright_L A$ ;
- ③ существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$ .

Доказательство.

1.  $\Leftrightarrow$  2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

# Вспомогательные утверждения

## Лемма

Следующие три утверждения эквивалентны:

- ①  $S \triangleright_L A$ ;
- ② существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $S_0 \triangleright_L A$ ;
- ③ существует конечное подмножество  $S_0 \subseteq S$ , т.ч.  $L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A$ .

Доказательство.

1.  $\Leftrightarrow$  2. В одну сторону — очевидно, а другую — следует из компактности, которая следует из конечности вывода.

2.  $\Leftrightarrow$  3.

$$S_0 \triangleright_L A \Leftrightarrow \triangleright_L \bigwedge S_0 \rightarrow A \Leftrightarrow L \vdash \bigwedge S_0 \rightarrow A.$$



# *L*-полнная теория

## Опр

Теорией мы будем называть множество формул. Теория  $S$  называется ***L*-противоречивой**, если  $S \triangleright_L \perp$ . Или, эквивалентно, если существует конечное подмножество формул  $S_0 \subseteq S$   $L \vdash \neg \bigwedge S_0$ .

Соответственно, теория  $S$  называется ***L*-непротиворечивой**, если  $S \not\triangleright_L \perp$ . И, эквивалентно, если для любого конечного подмножества формул  $S_0 \subseteq S$   $L \not\vdash \neg \bigwedge S_0$ .

$S$  — ***L*-полная теория**, если  $S$  — максимальная непротиворечивая теория.

## Лемма

Пусть  $S$  — *L*-полнная теория, тогда

- ①  $\perp \notin S$ .
- ②  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ③  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ④  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .
- ⑤  $(A \vee B) \in S \Leftrightarrow (A \in S \text{ или } B \in S)$ .
- ⑥  $(A \wedge B) \in S \Leftrightarrow (A \in S \text{ и } B \in S)$ .

## Лемма

Пусть  $S - L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ①  $\perp \notin S$ .
- ②  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ③  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ④  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

Доказательство.

Пункт 1 ...

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

## Лемма

Пусть  $S - L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3.  $\neg A = A \rightarrow \perp$ .  $A$  и  $\neg A$  не могут одновременно лежать в  $S$ .

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3.  $\neg A = A \rightarrow \perp$ .  $A$  и  $\neg A$  не могут одновременно лежать в  $S$ .

Если  $A \notin S$ , то  $S \cup \{\neg A\}$  непротиворечиво.

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3.  $\neg A = A \rightarrow \perp$ .  $A$  и  $\neg A$  не могут одновременно лежать в  $S$ .

Если  $A \notin S$ , то  $S \cup \{\neg A\}$  непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть  $(A \rightarrow B) \in S$  и  $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens  $S \triangleright_L B$  и по пункту 2  $B \in S$ .

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3.  $\neg A = A \rightarrow \perp$ .  $A$  и  $\neg A$  не могут одновременно лежать в  $S$ .

Если  $A \notin S$ , то  $S \cup \{\neg A\}$  непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть  $(A \rightarrow B) \in S$  и  $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens  $S \triangleright_L B$  и по пункту 2  $B \in S$ .

(ii) Пусть  $A \notin S$ , тогда  $\neg A \in S$ .

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  — тавтология, по (MP) получаем  $(A \rightarrow B) \in S$ .

## Лемма

Пусть  $S$  —  $L$ -полная теория, тогда

- ❶  $\perp \notin S$ .
- ❷  $S \triangleright_L A \Rightarrow A \in S$ . В частности  $L \subseteq S$ .
- ❸  $A \notin S \Leftrightarrow \neg A \in S$ .
- ❹  $(A \rightarrow B) \in S \Leftrightarrow (A \notin S \text{ или } B \in S)$ .

...

## Доказательство.

Пункт 1 ...

Пункт 2 ...

Пункт 3.  $\neg A = A \rightarrow \perp$ .  $A$  и  $\neg A$  не могут одновременно лежать в  $S$ .

Если  $A \notin S$ , то  $S \cup \{\neg A\}$  непротиворечиво.

Пункт 4.

(i) Пусть  $(A \rightarrow B) \in S$  и  $A \in S \Rightarrow$

Modus Ponens  $S \triangleright_L B$  и по пункту 2  $B \in S$ .

(ii) Пусть  $A \notin S$ , тогда  $\neg A \in S$ .

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  — тавтология, по (MP) получаем  $(A \rightarrow B) \in S$ .

(iii) Пусть  $B \in S$ ,  $B \rightarrow (A \rightarrow B)$  — тавтология, по (MP) получаем

$(A \rightarrow B) \in S$ .



# Пополнение теории

## Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

## Пополнение теории

### Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

## Пополнение теории

### Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

## Пополнение теории

### Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если  $S'$  — противоречива, то противоречива  $S_n$  для некоторого  $n$ . Это противоречит построению  $S_n$ .

## Пополнение теории

### Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если  $S'$  — противоречива, то противоречива  $S_n$  для некоторого  $n$ . Это противоречит построению  $S_n$ .

$S'$  — максимально,

## Пополнение теории

### Лемма (Линденбаум)

Пусть  $S$  —  $L$ -непротиворечива, тогда существует  $L$ -полное расширение этой теории  $S'$ .

$\mathcal{ML}$  счетно. Пусть это весь список формул:

$$A_1, A_2, \dots$$

Определим по индукции:

$$S_0 = S; \quad S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{A_n\}, & \text{если } S_n \cup \{A_n\} \text{ } L\text{-непротиворечива.} \\ S_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Если  $S'$  — противоречива, то противоречива  $S_n$  для некоторого  $n$ . Это противоречит построению  $S_n$ .

$S'$  — максимально, а значит полно.



## Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики  $L$  называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{ множество всех полных теорий}, \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

## Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики  $L$  называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{ множество всех полных теорий}, \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

Шкала  $F_L = (W_L, R_L)$  называется канонической шкалой логики  $L$ .

# Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики  $L$  называется

$$\begin{aligned} M_L &= (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\ W_L &- \text{ множество всех полных теорий}, \\ xR_L y &\Leftrightarrow \forall A(\square A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) &\Leftrightarrow \{x \mid p_i \in x\}. \end{aligned}$$

Шкала  $F_L = (W_L, R_L)$  называется канонической шкалой логики  $L$ .

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики  $L$  и ее канонической модели  $M_L = (W_L, R_L, V_L)$  верно:

- ①  $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x;$
- ②  $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть  $A = \square B$ , тогда

$$M_L, x \not\models \square B \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y)$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть  $A = \square B$ , тогда

$$M_L, x \not\models \square B \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y)$$

По определению,  $\forall y(xR_{LY} \& \square B \in x \Rightarrow B \in y)$  или

$$\exists y(xR_{LY} \& B \notin y) \Rightarrow \square B \notin x.$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть  $A = \square B$ , тогда

$$M_L, x \not\models \square B \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y)$$

По определению,  $\forall y(xR_{LY} \& \square B \in x \Rightarrow B \in y)$  или

$$\exists y(xR_{LY} \& B \notin y) \Rightarrow \square B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\square B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y).$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть  $A = \square B$ , тогда

$$M_L, x \not\models \square B \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y)$$

По определению,  $\forall y(xR_{LY} \& \square B \in x \Rightarrow B \in y)$  или

$$\exists y(xR_{LY} \& B \notin y) \Rightarrow \square B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\square B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y).$$

Будем строить  $y$  пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \square C \in x\}.$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Докажем пункт 1. Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для логических связок очевиден.

Пусть  $A = \square B$ , тогда

$$M_L, x \not\models \square B \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y)$$

По определению,  $\forall y(xR_{LY} \& \square B \in x \Rightarrow B \in y)$  или

$$\exists y(xR_{LY} \& B \notin y) \Rightarrow \square B \notin x.$$

Осталось доказать, что

$$\square B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_{LY} \& B \notin y).$$

Будем строить  $y$  пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \square C \in x\}.$$

Пусть  $\Gamma$  противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество  $\Gamma$ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\square B \notin x \Rightarrow \exists y(x R_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить  $y$  пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \square C \in x\}.$$

Пусть  $\Gamma$  противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество  $\Gamma$ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

$$\triangleright_L C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow (\neg B \rightarrow \perp) \dots) \Leftrightarrow$$

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots)).$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(x R_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить  $y$  пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть  $\Gamma$  противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество  $\Gamma$ :

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \triangleright_L \perp \Leftrightarrow$$

$$\triangleright_L C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow (\neg B \rightarrow \perp) \dots) \Leftrightarrow$$

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots)).$$

## Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в  $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$ , то по (MP)  $\Box B \in x$  — противоречие.

Значит,  $\Gamma$  — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует  $L$ -полное множество  $y$  содержащее  $\Gamma$ . По определению

$$x R_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ( $\Rightarrow$ ) следует из пункта 2 леммы 0.8.

## Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в  $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$ , то по (MP)  $\Box B \in x$  — противоречие.

Значит,  $\Gamma$  — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует  $L$ -полное множество  $y$  содержащее  $\Gamma$ . По определению

$$x R_L y \& B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ( $\Rightarrow$ ) следует из пункта 2 леммы 0.8.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $A \notin L$ , тогда  $\{\neg A\} \cup L$  непротиворечиво и существует  $L$ -полное множество  $x$  содержащее  $\neg A$ , тогда  $x$  является точкой в  $M_L$  и по первому пункту  $M_L, x \not\models A$ .

## Доказательство теоремы о канонической модели

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \rightarrow (\dots (C_n \rightarrow B) \dots).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и МР получаем

$$L \vdash \Box C_1 \rightarrow (\dots (\Box C_n \rightarrow \Box B) \dots).$$

Т.к. в  $L \subset x \forall i \Box C_i \in x$ , то по (MP)  $\Box B \in x$  — противоречие.

Значит,  $\Gamma$  — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует  $L$ -полное множество  $y$  содержащее  $\Gamma$ . По определению

$$x R_L y \& B \notin y.$$

Докажем второй пункт. ( $\Rightarrow$ ) следует из пункта 2 леммы 0.8.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $A \notin L$ , тогда  $\{\neg A\} \cup L$  непротиворечиво и существует  $L$ -полное множество  $x$  содержащее  $\neg A$ , тогда  $x$  является точкой в  $M_L$  и по первому пункту  $M_L, x \not\models A$ .

Что и требовалось доказать. :-)

