Программа курса
«Случайные графы I»

лектор — профессор Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики ФПМИ МФТИ,
магистратура 1 семестр

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Другие модели случайных графов: случайные регулярные графы, случайные подграфы неполных графов. Графовые случайные процессы.

2. Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели. Монотонные свойства конечных подмножеств. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества.

3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных подмножеств в этих моделях.

4. Пороговые вероятности обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.

5. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G. Методы первого и второго моментов. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу G.

6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова (б/д). Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Доказательство метода моментов. Многомерный метод моментов (б/д).

7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to c > 0$. Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.

8. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to +\infty$.

9. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \to 0$: максимальный размер и структура компонент связности.

10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: максимальный размер компонент связности и отсутствие сложных компонент. Оценка вероятности большого уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения (неравенство Чернова).

11. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д).

12. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).

13. Числа $C(k, k+l)$. Лемма о количестве лесов с k компонентами на множестве из n вершин с помеченными корнями деревьев. Нахождение точного значения $C(n, n)$. Теоремы Райта и Боллобаша об оценках величины $C(k, k+l)$ (б/д).

14. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \to c \neq 1$. Теорема о среднем значении и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах.

15. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа l-компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.

16. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность (по вероятности) максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.

17. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n,p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k. Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n,p)$.

18. Связность случайного графа $G(n,p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n,p)$ при условии $p = (\ln + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n,p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n,m)$.

19. Графовый случайный процесс $(\tilde{G}(m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2})$, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k-связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n,p)$. Теорема об одновременном наступлении k-связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе $\tilde{G}$.

20. Квазислучайные графы. Матрица смежности графа, ее спектр для регулярного графа. Понятие (n,d,λ)-графа. Теорема Чанг–Грэма–Уилсона. Оценки числа ребер между подмножествами вершин в (n,d,λ)-графе. Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе (n,d,λ)-графа.

Список литературы

[1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] A. Frieze, M. Karonski, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[4] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

[5] T. Łuczak, B. Pittel, J. Wierman, "The structure of a random graph at the point of phase transition", *Transactions of the American Mathematical Society*, **341**:2 (1994), 721–748.

[6] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.