Задачи по курсу случайных графов. Часть 2

1. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать тройку различных чисел (x,y,z), являющихся решением уравнения $x + 2y = z$.

2. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k.

3. Пусть $G(n,n,p)$ — случайный двудольный граф. Пусть X_n — число циклов длины 4 в нем.

   а) Найдите пороговую вероятность наличия C_4 в модели $G(n,n,p)$.

   б) Вычислите предельное распределение X_n при условии, что $p \sim c \cdot \hat{p}$, где $\hat{p}$ — пороговая вероятность из пункта а).

4. Докажите теорему 1 о равномерной интегрируемости.

   Теорема 1. (о равномерной интегрируемости) *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *— неотрицательные случайные величины. Тогда* $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$ *тогда и только тогда, когда* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *равномерно интегрируема.*

5. Пусть $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, $c > 0$ — фиксированная константа, а $T_n(k)$ — это число деревьев фиксированного размера k в $G(n,p)$. Докажите, что $T_n(k) \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

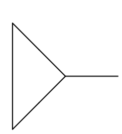
6. а) Пусть $H = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_n(H) \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$ при $n \to \infty$, где $Z \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$.

   б) Пусть $H = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_n(H) \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где Z_1 и Z_2 — независимы, $Z_1 \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$, $Z_2 \sim \mathrm{Pois}(c^4/8)$.

7. Пусть I_n — число изолированных ребер в случайных графе $G(n,p)$. Обозначим $w(n) = 2pn - \ln n - \ln\ln n$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(I_n > 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(n^{-2}) \text{ или } w(n) \to \infty; \\ 1, & \text{если } p = \omega(n^{-2}) \text{ и } w(n) \to -\infty. \end{cases}$$

8. Пусть $H = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной,



Пусть $np \to c > 0$. Докажите, что

$$X_n(H) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{Z} W_i,$$

где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $\mathrm{Pois}(3c)$ случайные величины, а $Z \sim \mathrm{Pois}(c^3/6)$, также независимая с ними случайная величина.

СРОК СДАЧИ вторник, 28 октября, до 12:20.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на shabanov.da@mipt.ru.