Специальные разделы высшей математики

До марта изучаем линейные пространства и дифференциальные уравнения

Лекция 01. 04-02-2026. 2-й семестр

Евклидовы пространства. Метрические пространства

Метрические пр-ва - это множество M, на котором задана функция - **метрика** - $\rho : M \times M \to R$ (расстояние), удовлетворяющая свойствам: $\forall x, y, z \in M$

1). $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (неотрицательность положительная окружность)

2). $\rho(x, y) = \rho(x, y)$ (симметричность)

3). $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (нер-во треугольника)

Примеры:

1) $x \in R$, $\rho(x, y) = |x - y|$

2) $x, y \in R^n$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3, ...y_n)^T$

3). $C_{[a,b]}$ - множество определенных и непрерывных на $[a, b]$ функций, $f(t), g(t) \in C_{[a,b]}, t \in [a, b]$
$\rho(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

Нормированное пространство - это линейное пр-во V, в котором задано отображение - **норма** - $||x|| : V \to \mathbb{R}$
1). $\forall x \in V, ||x|| = 0, x = 0$ (положительная окружность)
2). $\forall x \in V, \forall x \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ (линейность)
3). $\forall x, y \in V, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника)

Примеры:

1). $||x||_P = \sqrt[P]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^P}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

2). $||x||_{\max} = \max\limits_{i=\overline{1,\, n}} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Евклидова пространства. Скалярное произведение

Скалярное произведение - функция, определенная на вещественном линейно пространстве V, которая $x, y \in V$, $(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяет свойствам:

1). $(x, y) = (y, x)$ (симметричность)
2). $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ - линейность относительно первого множителя
$(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ - линейность относительно второго множителя $\Rightarrow$ билинейность

3). $(x, y) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная окружность)

Линейное пространство V, на котором определено скалярное произведение, называется евклидовым пространством и обозначается $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} = \dim V$

Пример:
1). V - линейное пространство геометрических векторов: $(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x,\hat{}\, y)$;

$$
\begin{aligned}
&R^3 : \{i, j, k\},\\
&x = x_1 i + x_2 j + x_3 k,\\
&y = y_1 i + y_2 j + y_3 k\\
&(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3
\end{aligned}
$$

2). V - линейное пространство R^n, $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$
$(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

3). $C_{[a,b]} : f(t), g(t) \in C_{[a,b]} : (f, g) = \int_a^e f(t) \cdot g(t) dt$

Теорема (Неравенство Коши-Буняковский)

Для $\forall x, y \in \mathcal{E}$ выполняется неравенство:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Причем, равенство достигается, тогда и только тогда, когда векторы x и y линейного пространства

Доказательство:

1). $y = 0, \left(x, \overline{0}\right) = \left(x, 0 \cdot \overline{0}\right) = 0 \cdot \left(x, \overline{0}\right) = 0$;

2). $y = 0, f(t) = (x + ty, x + ty), \qquad t \in \mathbb{R}$,

$f(t) = (x, x) + t(x, y) + t(y, x) + (y, y)t^2, \qquad t(t) \geq 0$ (по определению)

$f(t) = t^2(y, y) + 2t(x, y) + (x, x) \qquad \frac{\mathcal{D}}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \Rightarrow |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} \qquad \frac{\mathcal{D}}{4}, \quad t_0$ - единственный

$f(t) = 0, \quad (x + t_0 y, x + t_0 y) = 0 \quad x + t_0 y = 0 \qquad x = t_0 y$, то есть x, y в линейном пространстве, чтд

Евклидово нормированное пространство

Определение:

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пространство, нормой (длиной) вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число $||x|| = \sqrt{(x, x)}$

$$||x|| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Норма обладает следующими свойствами:

1). $||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0$, тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2). $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,

3). $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in \mathcal{E}$

Доказательство:
1). по определению

2). $x, \lambda x, \qquad (\lambda x, \lambda x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$||\lambda x|| = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda|\sqrt{\sum x_i^2} = \lambda||x||$

3). $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \quad \to \quad (||x+y||)^2 \leq (||x|| + ||y||)^2 \quad \to \quad ||x+y||)^2 = (x+y; x+y) =$
$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = ||x||^2 + 2(x,y) + ||y||^2$

По неравенству К-Б:

$(x,y) \leq |(x,y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \leqslant ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = ||x||$

Евклидовы пространства

1). $||x||_{\mathcal{E}}, \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ — стандартная/евклидова/шаровая/сферическая норма

2). $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ — октаэдрическая/манхэтанская/норма - сумма

$||x||_1 \leqslant 1 \quad \leftarrow$ множество точек $\mathbb{R}^3$

3). $||x||_\infty = \max_{i=\overline{1,4}}(|x_i|)$ — кубическая/чебышевская/ норма - бесконечность

$||x||_\infty \leq r, \quad r = 1$

4). $C_{[a,b]} \qquad ||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$

5). Норма матриц: A - матрица: неотрицательное число, характирезующее “размер” или “величину” матрицы, норма матрицы удовлетворяет всем свойствам нормы

Операторные нормы:

- столбцовая норма $\quad ||A||_1 = \max_{i=1,\mathrm{n}} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$
- строчная норма $\quad ||A||_\infty = \max_{j=1,\mathrm{m}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- спектральная норма $\quad ||A||_2$, квадратная матрица

$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$, где $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы $(A^T \cdot A)$

Неоператорные нормы:

- норма Фробениуса

$||A||_F = \sqrt{\sum_{\mathrm{i,\ j\ =1}}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^T \cdot A)}$, A - кв. матрица

Угол между векторами. Ортогональность.

Неравенство К-Б: $|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||, \quad x, y \in \mathcal{E} \qquad \frac{|(x,y)|}{||x|| \cdot ||y||} \leq 1 \qquad |\cos(\varphi)| \leq 1, \quad 0 \leq \cos(\varphi) \leq 1, \varphi \in [0;, \pi]$

Вектор x, y - ортогональны, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если $(x,y) = 0$

Ортогональные системы векторов:
$(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathcal{E}$ называется ортогональной, если все векторы попарно ортогональны, т.е. $(a_i, a_j) = 0$, при $i \neq j$

Система векторов $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathcal{E}$ называется ортонормированной, если все векторы попарно ортогональны: $a||a_i|| = 1, \forall i = \overline{1,\ \mathrm{k}}$
