Математический анализ

Изучаем интегралы

Лекция 01. 10-02-2026. 2-й семестр

Первообразная. Неопределенный интегралы

Определение
Пусть на (a, b) определена и непрерывна функция $f(x)$. Функция $F(x)$б дифференцируемая на (a, b), называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$

Теорема
Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на (a, b), то они отличаются на постоянную величину.

Доказательство:
Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные $f(x)$
$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$
$\varphi'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$, то есть $\varphi'(x) = 0$ на (a, b)
Значит $\varphi(x) = C, \qquad F_1(x) - F_2(x) = C, \quad F_1(x) = F_2(x) + C$
По теореме Лагранжа: $[x_0, x]$, x_0 - фиксированная, x - произвольная, $[x_0, x] \subset (a, b)$
Для $\varphi(x): \qquad \xi \in [x_0, x]$
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \varphi(\xi) = 0$
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0, \varphi(x) = \varphi(x_0), \qquad$ чтд

График первообразной называется **интегральной кривой**. Совокупность (множество) всех первообразных $f(a)$ на (a, b) называется неопределенным интегралом

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}x - x$ - переменная (выражение) интегрирования
$f(x)$ - подынтегральная функция
$f(x)\,\mathrm{d}x$ - подынтегральное выражение

Процесс нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием (правильность проверяется дифференцированием)

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \qquad \left(\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)\right)$
2. $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(F(x) + C) = \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x)$
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C \qquad$ (по определению)
4. $\int a f(x)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
6. Инвариантность формул интегрирования

$$\varphi'(x) = \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x)$$

Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C, \qquad$ где $\varphi(x)$ - произвольная дифференцируемая функция

Дополнительные свойства и доказательства

4-5. Линейность определенного интеграла

$$\int \left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_{n(x)}\right) \mathrm{d}x = a_1 \int f_1(x) \,\mathrm{d}x + ... + a_n \int f_{n(x)} \,\mathrm{d}x, \qquad a_i \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,\text{ n}}$$

Док-во:

Пусть $F_1(x), F_2(x), ..., F_{n(x)}$ первообразная для $f_1(x), f_2(x), ..., f_{n(x)}$ соответственно

Тогда $\Phi(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + ... + a_n F_{n(x)}$

$$\int \left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_{n(x)}\right) \mathrm{d}x = a_1 \int f_1(x) \,\mathrm{d}x + a_2 \int f_2(x) \,\mathrm{d}x + ... + a_n \int f_{n(x)} \,\mathrm{d}x$$

$$\Phi(x) + C \qquad = a_1(F_1(x) + C_1) + ... + a_n\left(F_{n(x)} + C_n\right)$$

Отсюда $\qquad C = a_1 C_1 + a_2 C_2 + ... + a_n C_n$, то есть по C можем вырадать $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ и наоборот, чтд

Доказательство свойства №6

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x) \\ \mathrm{d}u = \varphi'(x) \,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int f(u) \,\mathrm{d}u = F(u) + C$$

$$\int e^{\sin x} \cos x \,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} + C)$$

Доп-свойства из №6

6.1 $\int f(x+b) \,\mathrm{d}x = F(x+b) + C \qquad \left(\int f(x+b) \,\mathrm{d}(x+b) = F(x+b) + C\right)$

6.2 $\int f(ax) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax) + C \qquad \left(\int f(ax) \cdot \frac{1}{a} \,\mathrm{d}(ax) = \frac{1}{a} F(ax) + C\right)$

6.3 $\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование преобразование подынтегральной функции (выражения) для сведения интеграла с использованием свойств 1-6 к одному из нескольких таких интегралов:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x^4} = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$$

2. Замена переменной или подстановка

   2.1 Подстановка $\int f(x) \,\mathrm{d}x = \left| x = \varphi(t), \mathrm{d}x = \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \Phi(t) + C = F(x) + C$

   2.2 Замена переменной (подстановка подбирается)

   $\varphi(x) = t$

   $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t$$

3. Интегрирование по частям

Теорема

Пусть $u(x)$ и $\delta(x)$ определены и на (a, b) и функции $u'(x) \cdot \delta(x)$ и $u(x) \cdot \delta'(x)$ имеюют первообразные. Тогда

$\int u \,\mathrm{d}\delta = u \cdot \delta - \int \delta \,\mathrm{d}u \qquad$ (форма интегрирования по частям)

Доказательство:

$\mathrm{d}(u \cdot \delta) = \delta \,\mathrm{d}u + u \,\mathrm{d}\delta$

$\int \mathrm{d}(u \cdot \delta) = \int \delta \,\mathrm{d}u + \int u \,\mathrm{d}\delta$

$u \cdot \delta = \int \delta \cdot \mathrm{d}u + \int u \,\mathrm{d}\delta$

$\int u \,\mathrm{d}\delta = u \cdot \delta - \int \delta \,\mathrm{d}u$

чтд

$\int P_{n(x)} \cdot f(x) \,\mathrm{d}x$

$P_{n(x)}$ — многочлен n-ой степени

I тип		II тип	
e^x	$u = P_{n(x)}$	$\ln x$	$u = f(x)$
a^x	$\mathrm{d}\delta =$	$\log_a x$	$\mathrm{d}\delta =$
$\tan x$	$f(x) \,\mathrm{d}x$	$\arctan x$	$P_{n(x)} \,\mathrm{d}x$
$\vdots$		$\vdots$	

III тип: возвратные интегралы
Это интегралы, которые после применения метода интегрирования по частям (включая несколько применений) приводят интеграл в изначальный вид.

Решается как ращ приведением к изначальному интегралу, переброске его (с каким то коэффициэнтом) в левую часть, что дает нам значение искомого интеграла с коэффициэнтом (его просто перебрасываем в правую часть).

Часто применяется для функций вида:
$\int e^{kx}\sin(mx)\,\mathrm{d}x$

Пример:

$$\int e^{2x}\cdot\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}u = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin(3x)\,\mathrm{d}x \\ v = -\frac{\cos(3x)}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) - \int -\frac{\cos(3x)}{3}\cdot 2e^{2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}u = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos(3x)\,\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{3}\sin(3x) \end{bmatrix} = \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) - \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{13}{9}\int e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{39}e^{2x}\cos(3x) + \frac{18}{13\cdot 9}e^{2}\sin(3x) + C$$

Мы избавились от интеграла, то есть нашли значение исходного интеграла

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
3. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
4. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$
11. $\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\coth x + C$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
15. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
16. $\int \operatorname{ctg}\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
17. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{3}\ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C$
18. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

“высокий” логарифм

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$