Математический анализ

Изучаем интегралы

Лекция 01. 10-02-2026. 2-й семестр

Первообразная. Неопределенный интегралы

Определение
Пусть на (a, b) определена и непрерывна функция $f(x)$. Функция $F(x)$б дифференцируемая на (a, b), называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$

Теорема
Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на (a, b), то они отличаются на постоянную величину.

Доказательство:
Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные $f(x)$
$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$
$\varphi'(x) = F_1{}'(x) - F_2{}'(x) = f(x) - f(x) = 0$, то есть $\varphi'(x) = 0$ на (a, b)
Значит $\varphi(x) = C, \qquad F_1(x) - F_2(x) = C, \quad F_1(x) = F_2(x) + C$
По теореме Лагранжа: $[x_0, x]$, x_0 - фиксированная, x - произвольная, $[x_0, x] \subset (a, b)$
Для $\varphi(x): \qquad \xi \in [x_0, x]$
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \varphi(\xi) = 0$
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0, \varphi(x) = \varphi(x_0), \qquad$ чтд

График первообразной называется **интегральной кривой**. Совокупность (множество) всех первообразных $f(a)$ на (a, b) называется неопределенным интегралом

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}x - x$ - переменная (выражение) интегрирования
$f(x)$ - подынтегральная функция
$f(x)\,\mathrm{d}x$ - подынтегральное выражение

Процесс нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием (правильность проверяется дифференцированием)

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \qquad \left(\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)\right)$
2. $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(F(x) + C) = \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x\right)$
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C \qquad$ (по определению)
4. $\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
6. Инвариантность формул интегрирования

$$\varphi'(x) = \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x)$$

Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C, \qquad$ где $\varphi(x)$ - произвольная дифференцируемая функция

Дополнительные свойства и доказательства

4-5. Линейность определенного интеграла

$$\int\left(a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\ldots+a_n f_{n(x)}\right)\mathrm{d}x=a_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+a_n\int f_{n(x)}\,\mathrm{d}x,\qquad a_i\neq 0, a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,\text{ n}}$$

Док-во:

Пусть $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n(x)}$ первообразная для $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n(x)}$ соответственно

Тогда $\Phi(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+\ldots+a_nF_{n(x)}$

$$\int\left(a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\ldots+a_n f_{n(x)}\right)\mathrm{d}x=a_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+a_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+a_n\int f_{n(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\Phi(x)+C \qquad = a_1(F_1(x)+C_1)+\ldots+a_n\left(F_{n(x)}+C_n\right)$$

Отсюда $\quad C=a_1C_1+a_2C_2+\ldots+a_nC_n$, то есть по C можем вырадать $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ и наоборот, чтд

Доказательство свойства №6

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\begin{vmatrix}u=\varphi(x)\\ \mathrm{d}u=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\end{vmatrix}=\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$$

$\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x=\int e^{\sin x}d\sin x=e^{\sin x}+C)$

Доп-свойства из №6

6.1 $\int f(x+b)\,\mathrm{d}x=F(x+b)+C \qquad (\int f(x+b)\,\mathrm{d}(x+b)=F(x+b)+C)$

6.2 $\int f(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax)+C \qquad \left(\int f(ax)\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax)=\frac{1}{a}F(ax)+C\right)$

6.3 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование преобразование подынтегральной функции (выражения) для сведения интеграла с использованием свойств 1-6 к одному из нескольких таких интегралов:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x^4}=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$$

2. Замена переменной или подстановка

   2.1 Подстановка $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left|x=\varphi(t),\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\Phi(t)+C=F(x)+C$

   2.2 Замена переменной (подстановка подбирается)

   $\varphi(x)=t$

   $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Интегрирование по частям

Теорема

Пусть $u(x)$ и $\delta(x)$ определены и на (a,b) и функции $u'(x)\cdot\delta(x)$ и $u(x)\cdot\delta'(x)$ имеюют первообразные. Тогда

$\int u\,\mathrm{d}\delta=u\cdot\delta-\int\delta\,\mathrm{d}u \qquad$ (форма интегрирования по частям)

Доказательство:

$\mathrm{d}(u\cdot\delta)=\delta\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}\delta$

$\int\mathrm{d}(u\cdot\delta)=\int\delta\,\mathrm{d}u+\int u\,\mathrm{d}\delta$

$u\cdot\delta=\int\delta\cdot\mathrm{d}u+\int u\,\mathrm{d}\delta$

$\int u\,\mathrm{d}\delta=u\cdot\delta-\int\delta\,\mathrm{d}u$

чтд

$\int P_{n(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

$P_{n(x)}$ — многочлен n-ой степени

I тип		II тип	
e^x	$u=P_{n(x)}$	$\ln x$	$u=f(x)$
a^x	$\mathrm{d}\delta=$	$\log_a x$	$\mathrm{d}\delta=$
$\tan x$	$f(x)\,\mathrm{d}x$	$\arctan x$	$P_{n(x)}\,\mathrm{d}x$
$\vdots$		$\vdots$	

III тип: возвратные интегралы

Это тип неопределенных интегралов, которые после применения метода интегрирования по частям возвращаются к своему первоначальному виду, образуя уравнение. Они решаются путем переноса интеграла в левую часть и деления на коэффициент.

Часто применяется для функций вида:

$\int e^{kx} \sin(mx) \, \mathrm{d}x$

Чуть позже распишу пример, пока я сам не совсем понял

Скоро здесь появится табличка интегралов с лекции