Специальные разделы высшей математики

До марта изучаем линейные пространства и дифференциальные уравнения

Лекция 02. 10-02-2026. 2-й семестр

Ортогональные системы векторов. Матрица Грама

Определение:
$a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ называется ортогональной, если $(a_i, a_j) = 0, \quad \forall i \neq j$

Определение:
$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называется ортонормированной, если $||a_j|| = 1$ и $(a_i, a_j) = 0, \quad \forall i \neq j$

Теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов:
Любая ортогональная система, не содержащая нулевой вектор, линейно независима
Доказательство:

$a_1, a_2, ..., a_k$ - ортогональная система
$y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k = 0$
Найдем $(y, a_i) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k, a_i) = \lambda_1 (a_1, a_i) + \lambda_2 (a_2, a_i) + ... + \lambda_i (a_i, a_j) + ... + \lambda_k (a_k, a_i) =$

$$= \left| \begin{matrix} (a_i, a_j) = 0 \\ i \neq j \end{matrix} \right| = \lambda_i (a_i, a_i)$$

$(y, a_i) = (\overline{0}, a_i) = 0$
$\lambda_i (a_i, a_i) = 0$, так как $(a_i, a_i) \neq$, то $\lambda_i = 0$
Аналогично можно проверить все $a_j, j = \overline{1, \text{k}}$ и показать, что $\forall \lambda_i = 0, i = \overline{1, \text{k}}$, то есть $(a_1, a_2, ..., a_k)$ - линейно независима, чтд

Теорема Пифагора (обобщенная)

Для любой ортогональной системы $a_1, a_2, ..., a_k \quad \left|\left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} ||a_i||^2$

Доказательство:
Пусть $a_1 a_2, ..., a_k$ - ортогональная система векторов, $a_i \neq 0$

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right|\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \right) = (a_1, +a_2 + ... + a_k, a_1 + a_2 + ... + a_k) =$$

$$(a_1, a_1) + (a_1, a_2) + ... + (a_1, a_k) + (a_2, a_1) + (a_2, a_2) + ... + (a_k, a_k) = \left| \begin{matrix} (a_i, a_j) = 0 \\ i \neq j \\ \text{при i = j} \\ (a_i, a_i) = ||a_i||^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= ||a_1||^2 + ||a_2||^2 + ... + ||a_k||^2 = \sum_{i=1}^{k} ||a_i||^2$$

чтд

Рассмотрим $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$ векторов $\mathcal{E}^n$, линейно независимую и произвольную

$x = x_1e_2, x_2e_2...x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n = \sum_{j=1}^{n} y_je_j \qquad y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = (x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y_1y_1 + ... + y_ne_n) = x_1y_1(e_1, e_1) + x_1y_2(e_1, e_2) + ... +$
$x_1y_n(e_1, e_n) + x_2y_1(e_2, e_1) + x_2y_2(e_2, e_2) + ... + x_2y_n(e_2, e_n) + x_ny_1(e_n, e_1) + x_ny_2(e_n, e_2) + ... + x_ny_n(e_n, e_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(e_i, e_j) = |(e_i, e_j) = g_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jg_{ij}$

Матрица Грама

$$G_S = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & ... & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & ... & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & ... & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Теорема

Пусть $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$ - базис евклидова пространства $\mathcal{E}^n$ и $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$

x_i - координаты x в S, $\quad y_i$ - координаты y в S

Разположение векторов x и y по базису, $(e_1, e_2, ..., e_n)$

G_S - матрица Грама системы S, тогда $(x, y) = X^TG_SY$, где

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \qquad Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ - координатные столбцы векторов

$(x, y) = (x_1, x_2, ..., x_n)G_S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Доказательство:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jg_{ij} = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Доказать самостоятельно (свое доказательство закину позже)

Определение:

Матрицей Грама системы векторов $S = (e_1, ..., e_k)$ назвается квадратная матрица G_S размера $k \times k$, элементы которой являются скалярными произведениями векторов системы

Свойства матрицы Грама

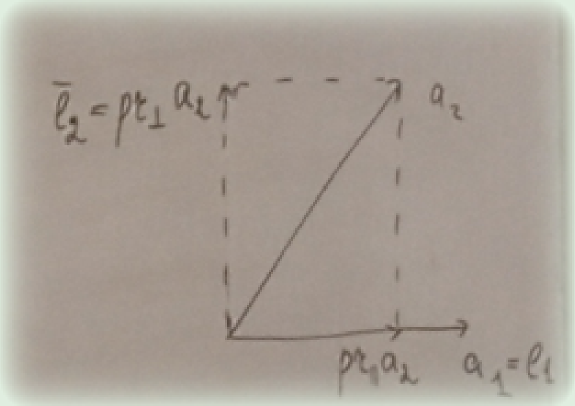
1. Симметрична, $G = G^T$
2. Положительная определенность всех главных угловых миноров

$|(e_1, e_1)| \geq 0, \quad \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{vmatrix} \geq 0$

3. Если S линейно независима, то $\det G_S \neq 0$
4. Если S ортогональная, то G_S - диагональная
5. Если S ортогонормированная система, то $G_S = E$

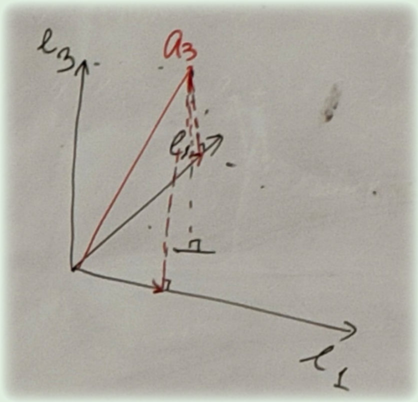
   5.1 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i), ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1} x_i^2}$

Теорема:
Любую линейно независимую систему векторов или пространств, можно ортонормализировать
Доказательство
Пусть $S = (a_1, a_2, ..., a_k)$ - линейно независимая система векторов евклидового пространства $\mathcal{E}^n$



Построим систему ортогональных векторов к системе S
$S_1 = (e_1, e_2, ..., e_k)$
1. $e_1 = a_1$
2. $e_2 = a_2 - \alpha_2 e + 1, \quad (e_1, e_2) = 0$
$(a_2 + \alpha_{21} e_1, e_1) = 0,$
$(a_2, e_1) + \alpha_{21}(e_1, e_1) = 0,$
$\alpha_{21} = -\dfrac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\dfrac{(a_2, e_1)}{||e_1||^2}$

$e_3 = a_3 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{31} e_1$
$(e_3, e_1) = 0, \quad (e_3, e_2) = 0$

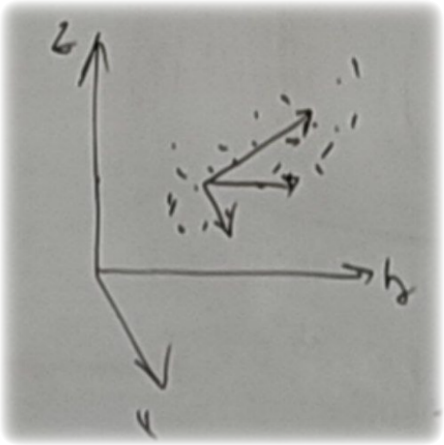


$(e_3, e_1) = (a_3 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{31} e_1, e_1) = (a_3, e_1) + \alpha_{32}(e_2, e_1) + \alpha_{31}(e_1, e_1) = (a_3, e_1) + \alpha_{31}(e_1, e_1) = 0$
$\alpha_{31} = -\dfrac{(a_3, e_1)}{||e_1||^2} \qquad \alpha_{32} = -\dfrac{(a_3, e_2)}{||e_2||^2}$
$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k, e_i)}{||e_i||^2} e_i,$ то есть $S_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ - ортогональная система векторов $(a_1, a_2, ..., a_k) = S$
Для получения ортонормированной системы векторов необходимо каждый вектор пронормировать
Покажем, что $||e_k|| \leq ||a_k||, \forall k = \overline{1, \text{k}}$
$||e_k||^2 = (e_k, e_k) = \left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k, e_i)}{||e_i||^2} e_i, e_k\right) = (a_k, e_k) \leq ||a_i|| \cdot ||e_k|| \quad ||e_k|| \leq ||a_n||$, чтд

QR - разложение A_n

1. Считая каждый столбец A_n вектором $a_i, \quad i = 1, n$, необходимо ортогонормировать систему векторов с последующим нормированием, получить матрицу $Q_n \begin{pmatrix} a_i \to e_i \to q_i \\ \text{i=1,n} \end{pmatrix}$
2. $A = QR, R$ - матрица проекций, получавшихся в процессе ортогонализации (верхнетреугольная)

$R = Q^{-1} A, \quad Q^T = Q^{-1} \quad R = Q^T A$



Ортогональное дополнение

$x, (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathcal{E}^n$, такие что

$x \perp (a_1, a_2, ..., a_k)$, т.о. $x \perp \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$

$x \perp$ подпространству $\mathcal{E}^n$

Проверим: $\left(x, \sum\limits_{k=1}^{k} \lambda_i a_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i (x_1, a_i) = \begin{vmatrix} x \perp a_i & i = \overline{1, \text{k}} \\ (x, a_i) = 0 & \end{vmatrix} = 0,$ чтд

Определение:
Множество векторов $L^{\perp} = \{x \in \mathcal{E}^k \mid (x, a) = 0, \forall a \in L\}$ называется ортогональным дополнением к подпространству L

Теорема (свойства ортогонального дополнения)

1. $L^{\perp}$ является подпространство $\mathcal{E}^n$
2. $\mathcal{E} = L \oplus L^{\perp}$ (прямая сумма)
3. $\dim \mathcal{E} = \dim L + \dim L^{\perp}$

Док-во свойства №2 на следующей лекции