

Специальные разделы высшей математики

До марта изучаем линейные пространства и дифференциальные уравнения

Лекция 01. 04-02-2026. 2-й семестр

Евклидовы пространства. Метрические пространства

Метрические пр-ва - это множество M , на котором задана функция - метрика - $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (расстояние), удовлетворяющая свойствам: $\forall x, y, z \in M$

- | | |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1). $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ | (неотрицательность положительная окружность) |
| 2). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ | (симметричность) |
| 3). $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ | (нер-во треугольника) |

Примеры:

- 1) $x \in \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$
- 2) $x, y \in \mathbb{R}^n, \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$

- 3). $C_{[a,b]}$ - множество определенных и непрерывных на $[a, b]$ функций, $f(t), g(t) \in C_{[a,b]}, t \in [a, b]$
 $\rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$

Нормированное пространство - это линейное пр-во V , в котором задано отображение - норма - $\|x\| : V \rightarrow \mathbb{R}$

- 1). $\forall x \in V, \|x\| = 0, x = 0$ (положительная окружность)
- 2). $\forall x \in V, \forall x \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (линейность)
- 3). $\forall x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Примеры:

- 1). $\|x\|_P = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- 2). $\|x\|_{\max} = \max_{i=1, n} |x_i|, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Евклидова пространства. Скалярное произведение

Скалярное произведение - функция, определенная на вещественном линейно пространстве V , которая $x, y \in V, (x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяет свойствам:

- 1). $(x, y) = (y, x)$ (симметричность)
- 2). $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ - линейность относительно первого множителя
 $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ - линейность относительно второго множителя \Rightarrow билинейность
- 3). $(x, y) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная окружность)

Линейное пространство V , на котором определено скалярное произведение, называется евклидовым пространством и обозначается \mathcal{E} , $\dim \mathcal{E} = \dim V$

Пример:

1). V - линейное пространство геометрических векторов: $(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y)$;

$$\begin{aligned} R^3 &: \{i, j, k\}, \\ x &= x_1 i + x_2 j + x_3 k, \\ y &= y_1 i + y_2 j + y_3 k \\ (x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

2). V - линейное пространство R^n , $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

3). $C_{[a,b]} : f(t), g(t) \in C_{[a,b]} : (f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$

Теорема (Неравенство Коши-Буняковский)

Для $\forall x, y \in \mathcal{E}$ выполняется неравенство:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Причем, равенство достигается, тогда и только тогда, когда векторы x и y линейного пространства

Доказательство:

1). $y = 0$, $(x, \bar{0}) = (x, 0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot (x, \bar{0}) = 0$;

2). $y = 0$, $f(t) = (x + ty, x + ty)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = (x, x) + t(x, y) + t(y, x) + (y, y)t^2, \quad t(t) \geq 0 \text{ (по определению)}$$

$$f(t) = t^2(y, y) + 2t(x, y) + (x, x) - \frac{\partial}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \Rightarrow |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} - \frac{\partial}{4}, \quad t_0 - \text{единственный}$$

$f(t) = 0$, $(x + t_0 y, x + t_0 y) = 0$ $x + t_0 y = 0$ $x = t_0 y$, то есть x, y в линейном пространстве, чтд

Евклидово нормированное пространство

Определение:

Пусть \mathcal{E} - евклидово пространство, нормой (длиной) вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Норма обладает следующими свойствами:

- 1). $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2). $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- 3). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{E}$

Доказательство:

1). по определению

$$2). x, \lambda x, (\lambda x, \lambda x) = \sum_{i=1}^n \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum x_i^2} = \lambda \|x\|$$

$$3). \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \rightarrow (\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \rightarrow \|x + y\|^2 = (x + y; x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2$$

По неравенству К-Б:

$$(x, y) \leq |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Евклидовы пространства

$$1). \|x\|_{\mathcal{E}}, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{— стандартная/евклидова/шаровая/сферическая норма}$$

$$2). \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{— октаэдрическая/манхэтанская/норма - сумма}$$

$$\|x\|_1 \leq 1 \leftarrow \text{множество точек } \mathbb{R}^3$$

$$3). \|x\|_{\infty} = \max_{i=1,4} (|x_i|) \quad \text{— кубическая/чебышевская/ норма - бесконечность}$$

$$\|x\|_{\infty} \leq r, \quad r = 1$$

$$4). C_{[a,b]} \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

5). Норма матриц: A - матрица: неотрицательное число, характеризующее “размер” или “величину” матрицы, норма матрицы удовлетворяет всем свойствам нормы

Операторные нормы:

$$\bullet \text{ столбцовая норма } \|A\|_1 = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

$$\bullet \text{ строчная норма } \|A\|_{\infty} = \max_{j=1,m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\bullet \text{ спектральная норма } \|A\|_2, \text{ квадратная матрица}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}, \text{ где } \lambda_{\max} \text{ - максимальное собственное значение матрицы } (A^T \cdot A)$$

Неоператорные нормы:

• норма Фробениуса

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T \cdot A)}, A \text{ - кв. матрица}$$

Угол между векторами. Ортогональность.

$$\text{Неравенство К-Б: } |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in \mathcal{E} \quad \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad |\cos(\varphi)| \leq 1, \quad 0 \leq \cos(\varphi) \leq 1, \varphi \in [0; \pi]$$

Вектор x, y - ортогональны, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если $(x, y) = 0$

Ортогональные системы векторов:

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathcal{E}$ называется ортогональной, если все векторы попарно ортогональны, т.е. $(a_i, a_j) = 0$, при $i \neq j$

Система векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathcal{E}$ называется ортонормированной, если все векторы попарно ортогональны: $a_i \|a_i\| = 1, \forall i = 1, k$