Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательно учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
ИТМО"

Факультет: Программная инженерия и компьютерные технологии

Отчёт
по лабораторной работе №6

Студент:
Бабушкин Александр Михайлович,
группа P3121
Проверила:
Болдырева Елена Александровна

г. Санкт-Петербург
2022 год

уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого яявляются суммы $\epsilon_1 + \epsilon_4$ и $\epsilon_2 + \epsilon_3$ симметричных (см. рис. 6!) корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3). Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти "хорошие"группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

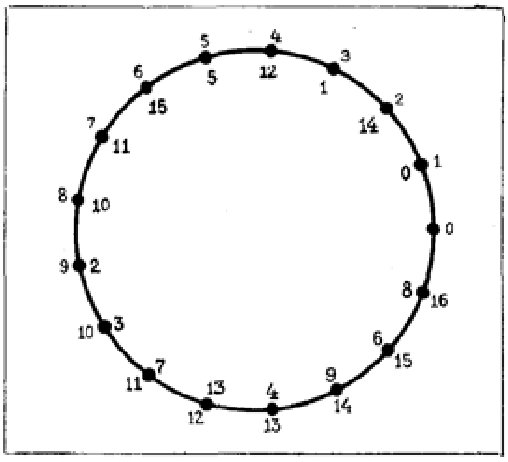

Рис. 7: Старые номера корней даны черным цветом, новые - красным.

Построение правильного 17-угольника

30 марта 1796 наступает для Гаусса день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории "первообразных"корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решения посвятить себя не филологии, и исключительно математике.
(*Ф.Клейн*)

Чтобы выявить найденные Гауссом скрытые "симметрии"в множестве корней 17-й степени из единицы и разбить корни на нужные группы, введем новую нумерацию корней. Будем возводить 3 в последовательной степени 0, 1, 2,... и каждый раз брать остаток от деления полученного числа на 17. Избавимся от проведения этих выкладок и в таблице приведем окончательные результаты. В первой строке стоят показатели k, а под ними остатки от деления 3^k на 17.

Обратите внимание, что в нижней строке содержатся все числа от 1 до 16; затем 3^{16} дает остаток 1 и далее остатки периодически повторяются (докажите!).

Закономерность, подмеченная Гауссом, является частным случаем следующе теоремы: **для всякого простого p существует такое число l, называемое первообразным корнем, что среди остатков от деления l^k на p встречаются все числа 1, 2, ..., p - 1**. Этот факт впервые отметил Эйлер (1707-1783), но смог доказать лишь Лежандр (1752-1833); другое доказательство получил Гаусс, но, вероятно, в 1796 году он еще не обладал общей теоремой, а обнаружил приведенный факт эмпирически, проводя вычисления для конкретных чисел. Это очень важное обстоятельство, не учитывая которого, трудно правильно понять природу ранних работ Гаусса. Присвоем корну ϵ_k, $k = 3^l$, но-

Таблица

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

вый номер, а именно l, который мы

Правильные n-угольники и корни из единицы

Преобразуем уравнение $z^n - 1$:

$$z^n - 1 = (z-1)\times(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1) = 0.$$

Получим два уравнения: $z = 1$ и $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$. (2)

Уравнение (2) имеет своими корнями ϵ_k при $1 \leq k \leq n-1$. В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением (2).

При $n = 3$ получаем уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Его корни: $\epsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\epsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис.5.)

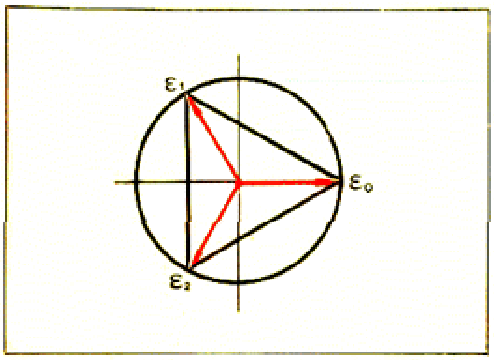

Рис. 5