

Systeme d'aide à la décision

Introduction aux méthodes multicritères (Les méthodes de sur-classement)

Chargé de module :

Mr. Dr. Mohamed_Amine DAOUD

E-mail: amine_dam@yahoo.fr

2024-2025

La méthode ELECTRE II

La méthode **ELECTRE II** relève de la problématique γ (Classement). Elle vise à munir l'ensemble A des actions potentielles d'une structure de préordre afin de faciliter le choix. En résumé, cette méthode a pour but de classer les actions potentielles, des "meilleures" jusqu'aux « moins bonnes »

La relation de sur-classement

La méthode ELECTRE II utilise, tout comme la méthode ELECTRE I, une relation de sur-classement. Cependant, la distinction est faite entre deux sortes de sur-classement :

- Le sur-classement fort, qui repose sur des bases solides et qui est avancé avec une grande certitude ;
- Le sur-classement faible, qui repose sur des bases moins solides et qui est avancé avec une faible certitude.

Les Méthodes de type ELECTRE:

Méthode de **classement** de variantes fondée sur les mêmes concepts de base que **ELECTRE I**, c'est-à-dire: **CONCORDANCE** & **DISCORDANCE**.

- La notion de concordance dans ELECTRE II est quasi-identique à celle décrite dans le cadre de **ELECTRE I**,

Cette démarche plus fine (nécessitant par contre un certain nombre d'informations complémentaires) conduit à une comparaison de sur-classements de variantes plus riche que dans **ELECTRE I**.

Les Méthodes de type ELECTRE:

Ainsi, les cas suivants de sur-classement de variantes peuvent se présenter:

$i \rightarrow j \Rightarrow$ dominance **Forte** de i sur j

$i \rightarrow j \Rightarrow$ dominance **faible** de i sur j

$I \ ? \ J \Rightarrow$ **incomparabilité** entre i & j

Occasionnellement, selon les seuils choisis par le décideur, des circuits (Forts ou faibles) sont susceptibles d'apparaître sur le graphe de sur-classements.

Principe de la méthode

Comme pour ELECTRE I, la variante i domine la variante j si:

A. la **concordance** est «suffisamment élevée»,

ET

B. la **discordance** «pas trop importante».

L'interprétation de «suffisamment élevée» et de «pas trop importante» conduira à la notion de sur-classements Forts et faibles.

Principe de la méthode

CONCORDANCE

Le calcul des indices de concordance $C(i,j)$ est identique à celui d'ELECTRE I, par contre, il est défini, dans ELECTRE II, trois seuils distincts de concordance: **SC1, SC2 & SC3**, d'exigences décroissantes:

$$1 \geq \text{SC1} \geq \text{SC2} \geq \text{SC3} > 0$$

Une condition supplémentaire vient s'ajouter à ces deux exigences:

$$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$$

Cette condition exprime que le nombre pondéré de critères pour lesquels $i \rightarrow j$ [$P(i,j)+$] doivent être $>$ au nombre pondéré de critères pour lesquels $j \rightarrow i$ [$P(i,j)-$]. (**Distinction des valeurs égalitaires**).

Principe de la méthode

DISCORDANCE

Une des caractéristiques d' **ELECTRE II** par rapport à **ELECTRE I** est d'éviter le **recours aux échelles des critères** pour le calcul de la discordance (ces échelles, associées à chaque critère, utilisées dans le calcul de la valeur normée de l'indice de discordance pouvant induire certains biais logiques).

Deux seuils de discordance, **par critère**, sont ainsi définis dans **ELECTRE II**; soit pour le critère k : $S_{D1}[k]$ & $S_{D2}[k]$, avec comme condition:

$$\text{Echelle max}[k] > S_{D1}[k] > S_{D2}[k] > 0$$

Il s'agit alors de comparer, pour chaque critère discordant (relativement au postulat $i \rightarrow j$), sa discordance absolue par rapport au couple de seuils S_{D1} & S_{D2} de ce critère.

Surclassements

Sur la base des indices normés de concordance et de la discordance absolue (critères discordants), et de leurs seuils associés, il est défini que:

A. i surclasse Fortement j ($i \rightarrow j$), si:

$$\begin{array}{l} \frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1 \\ \textbf{et} \\ C(i,j) \geq S_{C1} \\ \textbf{et} \\ D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k] \end{array}$$

$\Leftarrow \textbf{OU} \Rightarrow$
pour tous critères $[k]$
discordants

$$\begin{array}{l} \frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1 \\ \textbf{et} \\ C(i,j) \geq S_{C2} \\ \textbf{et} \\ D(i,j)[k] \leq S_{D1}[k] \end{array}$$

B. i surclasse faiblement j ($i \rightarrow j$), si:

$$\begin{array}{l} \frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1 \\ \textbf{et} \\ C(i,j) \geq S_{C3} \\ \textbf{et} \\ D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k] \end{array}$$

pour tous critères
 $[k]$ discordants

Surclassements

Effectué pour tous couples de variantes (i,j) prises deux à deux, la démarche exposée ci-dessus permet de construire le graphe (partiel) de sur-classements:

- Sur-classements Forts: —————
- Sur-classements faibles: — — — — —

Exploitation des relations de sur-classements

- La proposition d'un classement final se base en grande partie sur le **graphe** de sur-classement fort **GF**.
- Comme pour la méthode **ELECTRE I**, les circuits sont tout d'abord supprimés en créant des actions virtuelles résumant l'ensemble des actions du circuit en un seul nœud.
- A chaque **nouvelle étape** dans la construction de ce classement, les actions déjà classées sont enlevées progressivement de GF. Soient
 - – D l'ensemble des actions non surclassées dans GF
 - – U le sous-ensemble de D des actions reliées entre elle dans le graphe de sur-classement faible Gf
 - – B les actions de U qui ne sont pas surclassées dans U.

Exploitation des relations de surclassements

- Les meilleures actions à ce moment là sont alors celles de $D \setminus U$ (meilleurs au sens du surclassement fort, et pas concernées par des relations de sur-classement faible) et B (celles "en tête" au sens du sur-classement faible si un départage est nécessaire).
- Le classement se poursuit alors en enlevant des actions de $D \setminus U$ et B de GF est en continuant tant qu'il reste des actions à classer.

Exemple illustratif

- L'exemple traite du choix d'un projet, parmi **6 projets concurrents** pour la réalisation d'une raffinerie. Chaque projet est évalué sur la base de 5 critères environnementaux
 - **Cr1 : Nuisance sonore**
 - Cr2 : Séparation du territoire**
 - Cr3 : Pollution de l'air**
 - Cr4 : Impact sur l'aménagement du territoire**
 - Cr5 : Impact sur les activités récréatives**

L'importance de chaque critère dans la prise de décision est traduite par un poids k_j tel que

Critères	Cr1	Cr2	Cr3	Cr4	Cr5
Poids (K_j)	3	2	3	1	1

Exemple illustratif

- Chaque projet est évalué en fonction des critères retenus à l'aide d'une échelle qualitative et des scores. Plus le score est élevé, plus les impacts du projet sur l'environnement sont moindres.
- Le tableau de performance est donné dans le tableau suivant :

Critères	Cr1	Cr2	Cr3	Cr4	Cr5
P1	10	20	5	10	16
P2	0	5	5	16	10
P3	0	10	0	16	7
P4	20	5	10	10	13
P5	20	10	15	10	13
P6	20	10	20	13	13

Exemple illustratif

La problématique à résoudre est de choisir le sous-ensemble de projets avec le moins d'impacts sur l'environnement. :

La matrice des indices C+ et C=:

C+

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0,6	0.9	0.3	0.3	0.3
P2	0.1	-	0.4	0.1	0.1	0.1
P3	0.1	0.2	-	0.3	0.1	0.1
P4	0.6	0.7	0.7	-	0.0	0.0
P5	0.6	0.9	0.7	0.5	-	0.0
P6	0.7	0.9	0.7	0.6	0.4	-

$$C^+(P_1, P_2) = \frac{3+2+0+0+1}{10} = 0.6$$

$$C^+(P_2, P_1) = \frac{0+0+0+1+0}{10} = 0.1$$

C=

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.3	0.0	0.1	0.1	0.0
P2	0.3	-	0.4	0.2	0.0	0.0
P3	0.0	0.4	-	0.0	0.2	0.2
P4	0.1	0.2	0.0	-	0.5	0.4
P5	0.1	0.0	0.2	0.5	-	0.6
P6	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	-

$$C^=(P_1, P_4) = \frac{0+0+0+1+0}{10} = 0.1$$

$$C^=(P_3, P_1) = \frac{0+0+0+0+0}{10} = 0.0$$

Exemple illustratif

La matrice des indices de concordance est donnée par :

$$\text{Concordance} = C^+ + C^=$$

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
P2	0.4	-	0.8	0.3	0.1	0.1
P3	0.1	0.6	-	0.3	0.3	0.3
P4	0.7	0.9	0.7	-	0.5	0.4
P5	0.7	0.9	0.9	1.0	-	0.6
P6	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	-

Exemple illustratif

La matrice de discordance est obtenue comme suit :

Critères	Cr1	Cr2	Cr3	Cr4	Cr5	
P1	-	0.3	0.3	0.5	0.5	0.75
P2	0.75	-	0.25	1.0	1.0	1.0
P3	0.5	0.25	-	1.0	1.0	1.0
P4	0.75	0.3	0.3	-	0.25	0.5
P5	0.5	0.3	0.3	0.0	-	0.25
P6	0.5	0.15	0.15	0.0	0.0	-

On commence par déterminer les coefficients **C+/C-**

C+

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0,6	0.9	0.3	0.3	0.3
P2	0.1	-	0.4	0.1	0.1	0.1
P3	0.1	0.2	-	0.3	0.1	0.1
P4	0.6	0.7	0.7	-	0.0	0.0
P5	0.6	0.9	0.7	0.5	-	0.0
P6	0.7	0.9	0.7	0.6	0.4	-

C-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.1	0.1	0.6	0.6	0.7
P2	0.6	-	0.2	0.7	0.9	0.9
P3	0.9	0.4	-	0.7	0.7	0.7
P4	0.3	0.1	0.3	-	0.5	0.6
P5	0.3	0.1	0.1	0.0	-	0.4
P6	0.3	0.1	0.1	0.0	0.0	-

C+/C-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	1	1	0	0	0
P2	1	-	1	0	0	0
P3	0	0	-	0	0	0
P4	1	1	1	-	0	0
P5	1	1	1	1	-	0
P6	1	1	1	+inf	+inf	-

Relation de sur-classement

Nous avons maintenant toutes les informations nécessaires pour réaliser le test de concordance et le test de non discordance.

On fixe le seuil de concordance $c=0.75$. Ce test est satisfait si $C_{ik} = 0,75$.

On fixe le seuil de non discordance $d=0.25$. Ce test est satisfait si $D_{ik} = 0,25$.

On calcule la matrice des relations de sur-classement, en utilisant les seuils suivants :

$$c+ = 0,7; \quad c= = 0,5; \quad c- = 0,3; \\ d1 = 0,5 \quad d2 = 0,3.$$

Le symbole \mathbf{S}^F désigne la relation de sur-classement fort, le symbole \mathbf{S}^f désigne la relation de sur-classement faible et \times désigne l'absence de relation de sur-classement entre les deux actions.

C+/C-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	1	1	0	0	0
P2	1	-	1	0	0	0
P3	0	0	-	0	0	0
P4	1	1	1	-	0	0
P5	1	1	1	1	-	0
P6	1	1	1	+inf	+inf	-

Fort

$$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$$

et

$$C(i,j) \geq S_{c1}$$

et

$$D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k]$$

$$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$$

et

$$C(i,j) \geq S_{c2}$$

et

$$D(i,j)[k] \leq S_{D1}[k]$$

$$C_{ik} = 0,75$$

$$c+ = 0,7;$$

$$c= = 0,5;$$

$$c- = 0,3;$$

$$D_{ik} = 0,25$$

$$D1 = 0,6$$

$$D2 = 0,5$$

Concordance

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
P2	0.4	-	0.8	0.3	0.1	0.1
P3	0.1	0.6	-	0.3	0.3	0.3
P4	0.7	0.9	0.7	-	0.5	0.4
P5	0.7	0.9	0.9	1.0	-	0.6
P6	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	/	F	F	x	x	x
P2	x	/	F	x	x	x
P3	x	x	/	x	x	x
P4	F	F	F	/	x	x
P5	F	F	F	F	/	x
P6	F	F	F	F	F	/

Discordance

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.3	0.3	0.5	0.5	0.75
P2	0.75	-	0.25	1.0	1.0	1.0
P3	0.5	0.25	-	1.0	1.0	1.0
P4	0.75	0.3	0.3	-	0.25	0.5
P5	0.5	0.3	0.3	0.0	-	0.25
P6	0.5	0.15	0.15	0.0	0.0	-

Faible

$$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$$

et

$$C(i,j) \geq S_{c3}$$

et

$$D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k]$$

C+/C-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	1	1	0	0	0
P2	1	-	1	0	0	0
P3	0	0	-	0	0	0
P4	1	1	1	-	0	0
P5	1	1	1	1	-	0
P6	1	1	1	+inf	+inf	-

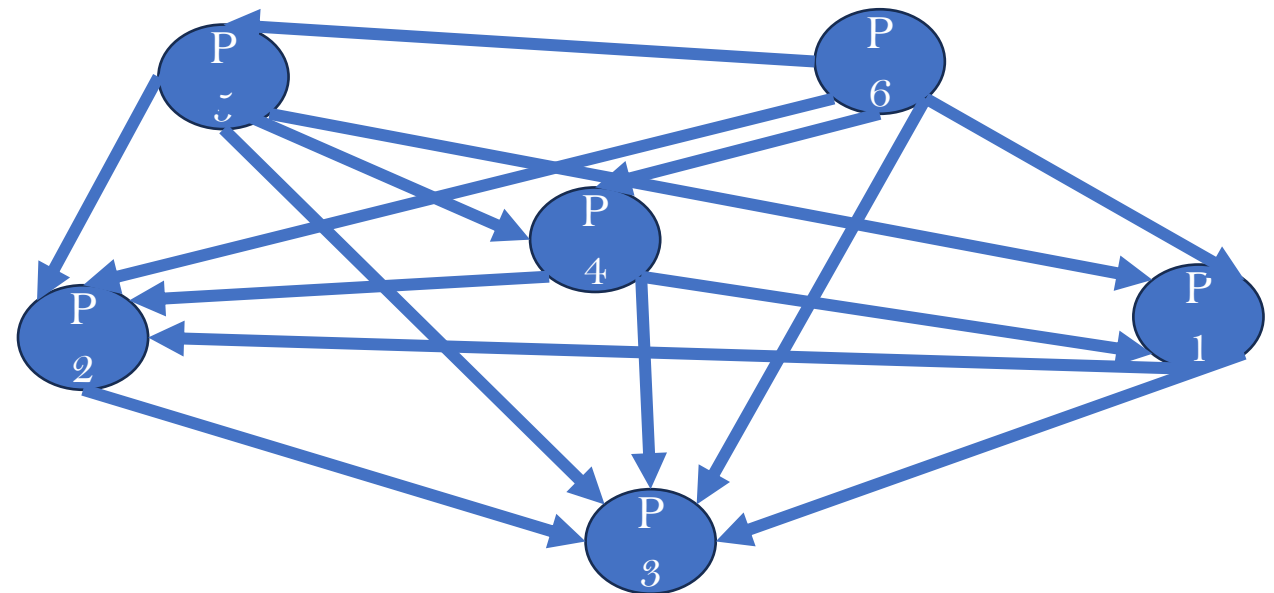
Concordance

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
P2	0.4	-	0.8	0.3	0.1	0.1
P3	0.1	0.6	-	0.3	0.3	0.3
P4	0.7	0.9	0.7	-	0.5	0.4
P5	0.7	0.9	0.9	1.0	-	0.6
P6	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	-

Discordance

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.3	0.3	0.5	0.5	0.75
P2	0.75	-	0.25	1.0	1.0	1.0
P3	0.5	0.25	-	1.0	1.0	1.0
P4	0.75	0.3	0.3	-	0.25	0.5
P5	0.5	0.3	0.3	0.0	-	0.25
P6	0.5	0.15	0.15	0.0	0.0	-

Critères	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	/	F	F	x	x	x
P2	x	/	F	x	x	x
P3	x	x	/	x	x	x
P4	F	F	F	/	x	x
P5	F	F	F	F	/	x
P6	F	F	F	F	F	/



Merci pour votre écoute

N'hésitez pas à creuser !