

6 Cenni sulla dinamica dei motori in corrente continua

L'insieme di equazioni riportato di seguito, costituisce un modello matematico per il motore in corrente continua (CC) che può essere rappresentato come un sistema dinamico non lineare. Le principali restrizioni di cui bisogna tenere conto per lo sviluppo di questo modello rispetto ad un motore reale sono

1. l'assunzione che il circuito magnetico sia lineare (questa è un'approssimazione poiché le parti di metallo, non perfettamente omogenee, causano dispersione all'interno del motore; inoltre, a causa della saturazione magnetica, la linearità delle proprietà magnetiche si perde per alti valori di corrente i);
2. l'assunzione che l'attrito meccanico sia funzione lineare della velocità del motore; si assume quindi che nel motore sia presente solamente l'attrito viscoso (è tuttavia noto che nei motori sia generalmente presente anche l'attrito statico).

6.1 Le equazioni elettriche

In un motore CC, il flusso magnetico Φ è generato da avvolgimenti collocati sullo statore. Si assumerà che lo statore abbia una sola terminazione polare, caratterizzata da una induttanza L_e associata al relativo avvolgimento e da una resistenza R_e associata alle dispersioni nel conduttore (vedi Figura 19). L'equazione che descrive questo circuito elettrico è data da

$$v_e(t) = L_e \frac{di_e}{dt} + R_e i_e. \quad (32)$$

Poiché la relazione (32) è lineare, trasformando le variabili nel dominio di Laplace, si ottiene

$$\frac{i_e(s)}{v_e(s)} = \frac{K_e}{1 + \tau_e s}, \quad (33)$$

dove $K_e := \frac{1}{R_e}$ è il **guadagno di statore** e $\tau_e := \frac{L_e}{R_e}$ è la **costante di tempo di statore**.

Analogamente, si assume che il rotore abbia una sola terminazione polare caratterizzata da un'induttanza L_a e da una resistenza R_a (si veda Figura 19). Inoltre, va considerato nel modello elettrico del rotore l'effetto della forza contro elettromotrice e , che corrisponde ad una differenza di tensione indotta, proporzionale alla velocità di rotazione. L'equazione associata al relativo circuito elettrico è

$$v_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e. \quad (34)$$

Nuovamente, poiché la relazione (34) è lineare, trasformando nel dominio di Laplace si ottiene:

$$\frac{i_a(s)}{v_a(s) - e(s)} = \frac{K_a}{1 + \tau_a s}, \quad (35)$$

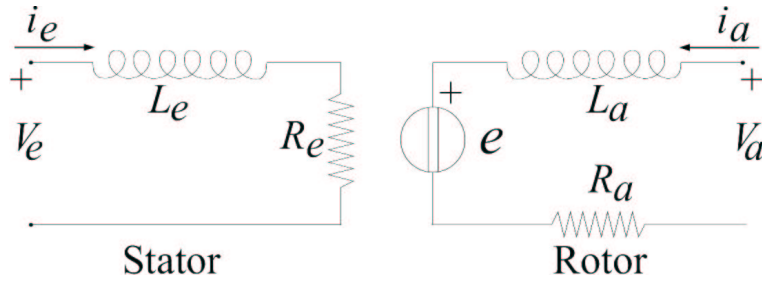


Figure 19: Schema elettrico equivalente di un motore CC.

dove $K_a := \frac{1}{R_a}$ è il **guadagno di rotore** e $\tau_a := \frac{L_a}{R_a}$ è la **costante di tempo di rotore**.

Sulla base delle proprietà fisiche del motore e delle relazioni che caratterizzano l'interazione tra le quantità meccaniche e le quantità elettriche del motore, si può dimostrare che le due seguenti relazioni sussistono. Queste relazioni forniscono un'espressione esplicita della forza controelettromotrice e e della coppia meccanica T_M erogata dal motore:

$$T_M = K i_e i_a, \quad (36)$$

$$e = K i_e \omega, \quad (37)$$

dove K_Φ è una costante che dipende dalla geometria del motore.

6.2 Le equazioni meccaniche

Un motore CC alimentato con tensioni di statore e di rotore esercita una coppia sull'albero del motore. Questa coppia agisce sulla struttura meccanica, caratterizzata dall'inerzia di rotore J e dal coefficiente di attrito viscoso F . Inoltre, per considerare un ambito operativo generico, è opportuno tener conto di una coppia di carico esercitata sull'albero del motore. Se T_L denota tale coppia di carico, allora si ha la seguente equazione del moto:

$$T_M - T_L = J \frac{d\omega}{dt} + F \omega. \quad (38)$$

Analogamente al caso elettrico, anche per le equazioni meccaniche si può associare una funzione di trasferimento lineare alla relazione (38):

$$\frac{\omega(s)}{T_M(s) - T_L(s)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m s}, \quad (39)$$

dove $K_m := \frac{1}{F}$ è il **guadagno meccanico** e $\tau_m := \frac{J}{F}$ è la **costante di tempo meccanica**.

6.3 Motoriduttori e motori a presa diretta

Spesso (ad esempio in applicazioni di robotica), la velocità richiesta dalla particolare applicazione è troppo bassa se confrontata con la velocità nominale di un motore.¹¹ In

¹¹La velocità nominale di un motore corrisponde al picco di massima efficienza del motore stesso.

questo caso, vengono tipicamente inseriti degli ingranaggi, detti riduttori, tra il motore e il carico con lo scopo di ridurre la velocità angolare di un fattore n tra l'albero del motore e l'asse del carico. L'insieme di motore + riduttore viene così denominato motoriduttore.

Oltre all'incremento di attrito viscoso ed inerzia associati alla presenza delle ruote dentate rotanti interne al riduttore, l'accoppiamento meccanico tra il carico e il motore è sensibilmente alterato dalla presenza del riduttore. Per descrivere correttamente gli effetti del riduttore, il primo aspetto da chiarire è legato al fatto che l'attrito e l'inerzia non sono gli stessi se vengono misurati all'ingresso o all'uscita del riduttore (cioè sull'albero del motore o sull'asse del carico, rispettivamente). Poiché siamo interessati ad una caratterizzazione "esterna" dell'intero blocco motoriduttore, si farà riferimento alle quantità in uscita dal riduttore (ovvero, quelle riferite all'asse del carico).

Sia dunque F_G il coefficiente di attrito viscoso e J_G l'inerzia interni al riduttore. Allora, poiché la potenza erogata dal motore è la stessa sia all'ingresso che all'uscita del riduttore, denominando T'_M e ω' la coppia e la velocità all'uscita del riduttore, rispettivamente, si ha

$$T_M \omega = T'_M \omega',$$

e poiché $\omega' = \omega/n$, allora $T'_M = n T_M$. In sintesi, mentre la velocità in uscita del motoriduttore è n volte minore della velocità dell'albero del motore, la coppia in uscita è invece n volte superiore a quella erogata dal solo blocco motore.

Sostituendo le precedenti espressioni nell'equazione (38) e considerando gli incrementi di attrito ed inerzia dovuti alle ruote interne al riduttore, si ottiene ¹²

$$T'_M - T_L = (J_G + n^2 J) \frac{d\omega'}{dt} + (F_G + n^2 F) \omega'. \quad (40)$$

Confrontando le equazioni (38) e (40) si osserva che la presenza del riduttore aumenta significativamente l'inerzia e l'attrito del motore dal punto di vista del carico.

Un effetto importante qui non modellato ma spesso associato alle applicazioni con motoriduttori è il *gioco meccanico*, causato dagli accoppiamenti tra gli ingranaggi interni del riduttore. Il gioco meccanico impone sul motoriduttore una nonlinearietà indesiderata che può a volte portare a fenomeni di instabilità. Per questa ragione, specialmente in sistemi di alta precisione, i motori a presa diretta sono preferibili. Questi motori sono costruiti in maniera da essere in grado di esercitare coppie sufficientemente alte a bassi regimi di velocità, così da non richiedere riduttore per poter agire sul carico. Tuttavia i motori CC a presa diretta sono comunque associati a coppie limitate e non possono essere adoperati per applicazioni di alta potenza, in cui le coppie necessarie sarebbero troppo alte.

6.4 Diagramma a blocchi del motore CC

Inserendo le equazioni (32), (34), (36), (37) e (38) in un diagramma a blocchi nonlineare, si ottiene lo schema rappresentato in Figura 20. Nel diagramma, la variabile θ rappresenta la posizione angolare del rotore (cosicché $\omega = \dot{\theta}$).

Il modello nonlineare corrisponde ad un sistema con due ingressi ed una uscita, avente un ingresso di disturbo corrispondente alla coppia di carico T_L e quattro variabili di stato corrispondenti a

¹²Si osservi che T_L è esercitata dal carico, dunque non deve essere riscalata.

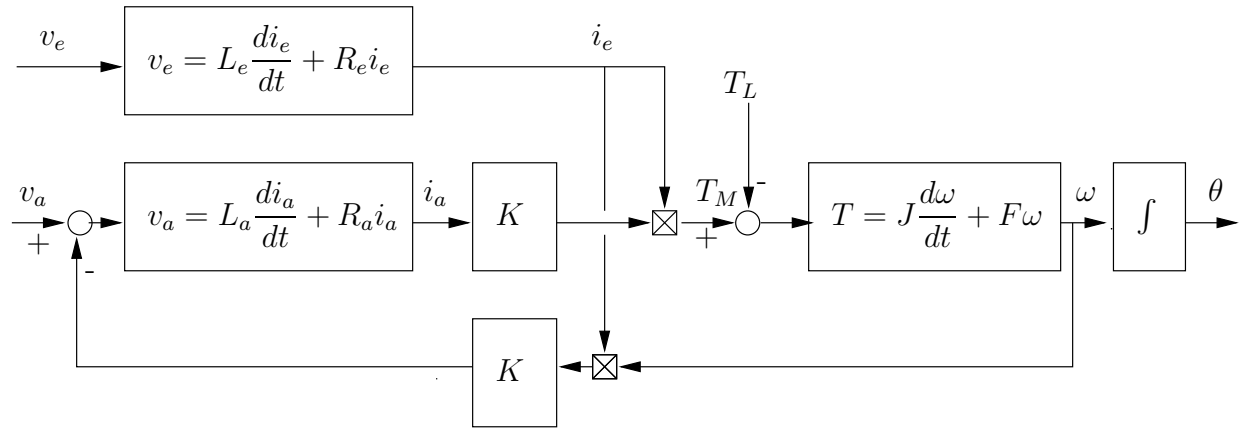


Figure 20: Diagramma a blocchi nonlineare di un motore CC.

- l'energia immagazzinata nell'induttanza L_e ;
- l'energia immagazzinata nell'induttanza L_a ;
- l'energia cinetica del rotore (associata a J);
- la posizione θ del rotore.

Osservazione 6.1 Si osservi che il modello nonlineare del motore è effettivamente costituito da tre relazioni lineari tra grandezze fisiche. Tali relazioni corrispondono alle funzioni di trasferimento (33), (35) e (39) e sono interconnesse a mezzo di due moltiplicatori, che rappresentano le nonlinearità del sistema. Numerose tecniche di controllo adottabili sul motore sono progettate con lo scopo di linearizzare il diagramma a blocchi, attraverso scelte opportune dei due ingressi v_a e v_e . \circ

Osservazione 6.2 Se lo schema in Figura 20 viene usato per rappresentare un motoriduttore, è necessario inserire un guadagno costante pari ad $1/n$ prima dell'integratore di ω (cosicché l'integrale sia effettuato su ω'), ed inserire un blocco pari a $1/n$ in cascata all'ingresso di disturbo T_L . Si osservi che il ramo di retroazione è riferito alla velocità ω dell'albero del motore e non alla velocità ω' del carico perché il riduttore non cambia le proprietà elettriche del motore. \circ

A titolo di esempio, in Figura 21 è riportato il disegno di un semplice motore a magneti permanenti. Nei motori a magneti permanenti, un magnete va a sostituire gli avvolgimenti statorici, così che un flusso magnetico costante sia automaticamente generato all'interno del motore in una soluzione economica. L'energia necessaria per la generazione della coppia viene dunque fornita al motore attraverso gli avvolgimenti rotorici.

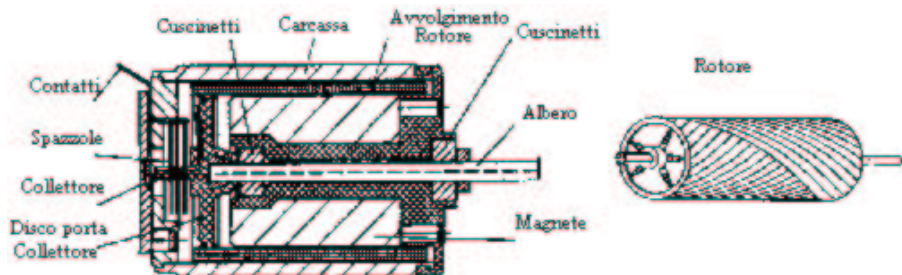


Figure 21: Struttura di un motore a magneti permanenti.

7 Funzionamento degli encoder incrementali

Gli encoder incrementali si basano su un principio di funzionamento geometrico. All'albero del motore, solidale con il rotore, viene collegato un disco opaco con dei fori disposti in posizione radiale, tanto più numerosi quanto maggiore è la risoluzione dell'encoder.

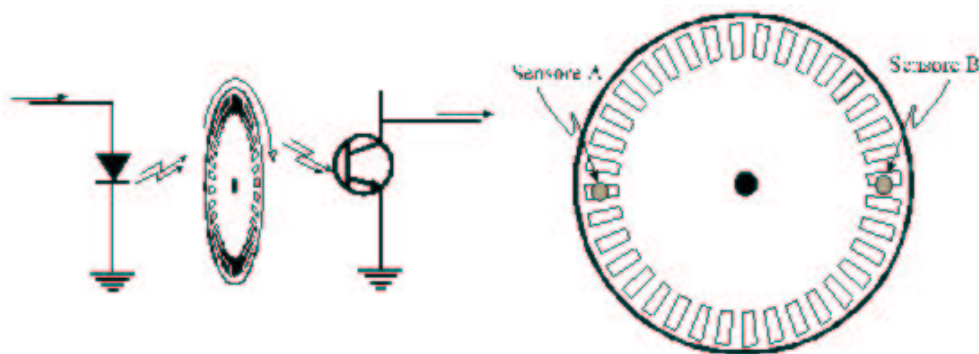


Figure 22: Struttura di un encoder incrementale.

Da un lato e dall'altro del disco sono inoltre disposte due coppie di sensori, ognuna costituita da un trasmettente e un ricevente, che sono in grado di individuare il passaggio dei fori applicati sul disco. In generale, il trasmettente è costituito da un LED (Light Emitting Diode) e il ricevente è un fototransistore, entrambi operanti nella banda ottica. Il funzionamento è indicato in Figura 22.

Generalmente la geometria del disco è del tipo riportato in Figura 22, in modo che le zone opache e le zone trasparenti abbiano la stessa larghezza. Questo accorgimento fa sì che, posizionando le due coppie di sensori opportunamente, le forme d'onda in uscita dai sensori siano del tipo indicato in Figura 23. Nella parte destra della Figura 22 è indicata un posizionamento dei due sensori che restituisce in uscita le forme d'onda di Figura 23.

Si può osservare dalla Figura 23 che a seconda del verso di rotazione del motore, lo stato logico dei due segnali provenienti dai sensori è diverso: in corrispondenza del fronte di salita del segnale A infatti, in un caso il segnale B è alto, nell'altro caso è basso. Questa proprietà permette di decodificare con successo non solo la rotazione ma anche il verso di rotazione, in base alle letture fatte dal sensore. Tale decodifica è in generale effettuata tramite un

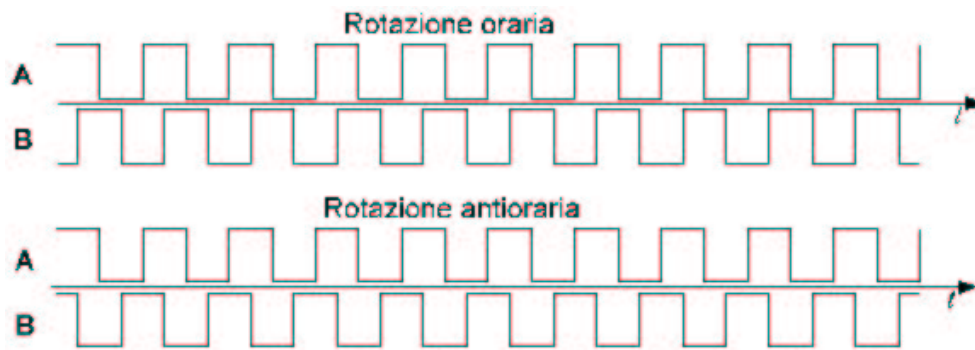


Figure 23: Segnali dell'encoder incrementale corrispondenti a rotazioni orarie e anti-orarie.

semplice contatore UP/DOWN che misura gli spostamenti incrementali del motore (da cui il nome “incrementale” dato a questo tipo di encoders).

A causa dell'arbitrarietà della posizione iniziale dell'encoder e dello stato iniziale del contatore di decodifica, tutti i dispositivi dotati di encoder incrementali prevedono la generazione di un segnale, detto di “home” (ovvero, “casa”) che notifica che il dispositivo su cui è montato l'encoder si trova in una posizione di riferimento nota e univoca. In presenza del segnale di home, il contatore di decodifica può essere inizializzato a zero per trasformare il sensore incrementale in un sensore assoluto.

La risoluzione di un encoder corrisponde al numero di zone opache presenti nel disco, il che corrisponde da un punto di vista elettrico al numero di impulsi generati in uscita da ogni canale per angolo giro. Tuttavia, nel caso (molto frequente, peraltro) in cui l'encoder è montato sull'albero posteriore di un motore con riduttore, la risoluzione viene moltiplicata per il fattore di riduzione N , consentendo di avere misure ad alta precisione con dispositivi di costo relativamente basso.

In numerose applicazioni, la lettura incrementale del movimento dell'encoder viene fatta tramite un circuito logico più complesso di un semplice contatore, che è in grado di rilevare tutti i fronti (sia di salita che di discesa) delle forme d'onda in Figura 23. Conseguentemente, la risoluzione dell'encoder viene quadruplicata, con evidenti vantaggi commerciali e implementativi.