Optimización Tarea 12

Francisco Javier Peralta Ramírez

20 de mayo de 2018

Resumen

En está tarea se resuelven algunos problemas de optimización con retricciones usando el método de multiplicadores penalización cuadrática y Lagrangiano aumentado. También se progrmó el método de penalización cuadrática y se probó resolviendo un problema con multiples restricciones.

Introducción

El método de penalización cuadrática consiste en genera una nueva función objetivo (q) usando la función objetivo original más un término adicional por cada restricción. Estos terminos ligados a la restricción son positivos cuando se evalúa en un punto que viola la restricción. A estos términos se les conoce como términos de penalización.

La función generada por este método es de la forma

$$q(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{l}[h_i(\boldsymbol{x})^-]^2$$

donde $[v^-] = \max\{v, 0\}$

Para la programación de esté método se creo una función que calcula el gradiente de la función q donde $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \approx \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e_i})-f(\boldsymbol{x})}{h}$ donde $\boldsymbol{e_i}$ es el i-ésimo vector canónico.

El método de Lagrange Aumentado es una combinación del método de lagrange con el método de penalización cuadrática. Se crea una función objetivo de la forma

$$\mathcal{L}_A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mu) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(\boldsymbol{x})$$

Penalización Cuadrática

Resolvemos el problema

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & 1 - x_1 + x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

usando el método de penalización cuadrática calculando el límite de $\mu \to \infty$

$$q(\boldsymbol{x}, \mu) = x_1^2 + 2x_2^2 + \mu[\max\{0, 1 - x_1 + x_2\}]^2$$

Calculamos las derivadas parciales cuando no se cumple la restricción, es decir $1 - x_1 + x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\boldsymbol{x}, \mu)}{\partial x_1} &= 2x_1 - 2\mu(1 - x_1 + x_2) \\ \frac{\partial q(\boldsymbol{x}, \mu)}{\partial x_1} &= 4x_2 - 2\mu(1 - x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Igualando ambas equaciones a 0 obtenemos un sistema de equaciones. Con $\frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_1} + \frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_2}$ obtenemos que $2x_1 + 4x_2 = 0 \to x_1 = -2x_2$. Substituyendo en $\frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_1}$

$$\begin{aligned} 4x_2 - 2\mu(1 - x_1 + x_2) &= 0 \\ 4x_2 - 2\mu(1 + 2x_2 + x_2) &= 0 \\ 4x_2 - 2\mu + 6\mu x_2 &= 0 \\ 2x_2(2 + 3\mu) &= -2\mu \\ x_2 &= -\frac{\mu}{2 + 3\mu} \\ x_1 &= \frac{2\mu}{2 + 3\mu} \end{aligned}$$

Calculamos los límites cuando $\mu \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\mu\to\infty} -\frac{\mu}{2+3\mu} &= -\frac{\infty}{\infty} \\ \text{L'Hopital} \to \lim_{\mu\to\infty} -\frac{1}{3} &= -\frac{1}{3} \\ \lim_{\mu\to\infty} \frac{2\mu}{2+3\mu} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \text{L'Hopital} \to \lim_{\mu\to\infty} \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

podemos caulcular los eigenvalores de la función $f(\boldsymbol{x}) + \mu p(\boldsymbol{x})$ y calcular su límite cuando $\mu \to \infty$. Tomando el caso cuando no se cumple la restricción:

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial^2 x_1} = 2+2\mu$$
$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_1 x_2} = -2\mu$$
$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_1 x_2} = 4+2\mu$$

Recordamos que para encontrar los eigenvalores basta con resolver $\det(\nabla^2 q - \lambda I) = 0$

$$\nabla^2 q - \lambda I = \begin{pmatrix} 2+2\mu-\lambda & -2\mu \\ -2\mu & 4+2\mu-\lambda \end{pmatrix}$$

Tomamos $H = \nabla^2 q - \lambda I$

$$\begin{aligned} \det(H) &= (2+2\mu-\lambda)(4+2\mu-\lambda) - (-2\mu)^2 = 0 \\ &= 8+12\mu-6\lambda-4\mu\lambda+4\mu^2+\lambda^2-4\mu^2 = 0 \\ &= 8+12\mu+\lambda^2-(4\mu+6)\lambda = 0 \end{aligned}$$

Usando la formula general para encontrar λ obtenemos $\lambda = 2\mu+3 \pm [4\mu^2+1]^{1/2}$. Calculamos los limites

$$\lim_{\mu\to\infty} 2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2} = \infty$$
$$\lim_{\mu\to\infty} 2\mu+3-[4\mu^2+1]^{1/2} = \infty-\infty$$

racionalizamos

$$\lim_{\mu\to\infty} 2\mu+3-[4\mu^2+1]^{1/2}\frac{2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2}}{2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2}}$$
$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{(2\mu+3)^2-[4\mu^2+1]}{2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2}}$$
$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{4\mu^2+12\mu+9-4\mu^2-1}{2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2}}$$
$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{12\mu+8}{2\mu+3+[4\mu^2+1]^{1/2}}$$

multiplicamos por $\frac{1/\mu}{1/\mu}$

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{12+8/\mu}{2+3/\mu+[4+1/\mu^2]^{1/2}}$$
$$= \frac{12}{2+\sqrt{4}} = \frac{12}{4} = 3$$

Con esto podemos calcular el condicionamiento del Hessiano $K_2 = \infty/3$ por lo cual podemos concluir que se mal condiciona cuando $\mu \to \infty$

Lagrangiano Aumentado

Tenemos el problema

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & 3x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

La función

$$L_A(\boldsymbol{x},\lambda,\mu) = 3x_1^2+x_2^2-\lambda(x_1+2x_2-1)+\frac{\mu}{2}(x_1+2x_2-1)^2$$

$x_1 = \frac{mu+\lambda}{6+13\mu}$, $x_2 = \frac{6mu+6\lambda}{6+13\mu}$ Cuando μ tiende a infinito $x_1 = \frac{1}{13}$ y $x_2 = \frac{6}{13}$. Y podemos obtener el valor de $\lambda = 6/13$

Penalización Cuadrática Programado

Se programó el método de penalización cuadrática, y se usó el método de máximo descenso con paso backtracking para optimizar la función q ,de esta forma no necesitamos el hessiano y podemos optimizar sólo con nuestra aproximación del gradiente.

Obtenemos el resultado en cuatro iteraciones:

x : (3.04411 4.02629) f:17.5802 h_1 : -11.1849 h_2 : -2.01782 h_3 : 0.0704082 h_4 : -3.33022

Conclución

El método de penalización cuadrática nos permite resolver problemas con restricciones usando una nueva función objetivo, la cual podemos resolver con métodos que ya teníamos. Esto facilita la programación del método y sólo requiere hacer pequeños ajustes para que funcione con nuestro código previo.