Université Hassan II Ain Chock
Faculté des Sciences
Casablanca

Module : TOPOLOGIE

Professeur : M.R. HILALI **Semestre : 5**

Filière : SMA **2009-2010**

Topologie

Exercice 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles croissantes de limite infinie. On suppose que
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Soit $E = \{a_n - b_m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$.

a) Prouver que E est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Application : montrer que la suite $(\cos(\ln n))_n$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 2

Soit $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:
$N(x, y) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$
a) Vérifier que N est bien définie.
b) N est-elle une norme ?

Exercice 3

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application de E dans E qui à f associe e^f est continue.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow E$ vérifiant:
$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq M.$
(a) Montrer que, si $M = 0$ et si f est bornée sur un ouvert non vide, alors f est linéaire et continue.
(b) On suppose f continue et E complet. En étudiant la suite $g_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$, montrer que f se décompose de manière
unique en somme d'une fonction linéaire et d'une fonction bornée.

Exercice 5

Soit $E_p = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid Rg(A) \geq p\}$. E_p est-il
(i) ouvert, (ii) fermé, (iii) dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel normé, on note $u(A) = \overline{\overset{0}{A}}$ et $v(A) = \overset{0}{\overline{A}}$.

(a) Montrer que u et v sont des applications de $P(E)$ dans lui même qui respectent l'inclusion.

(b) Montrer aussi que $u^2 = u$ et $v^2 = v$.

(c) En déduire que, à partir d'un ensemble $A \subset E$, en prenant successivement l'adhérence et l'intérieur (ou le contraire), on ne peut avoir au maximum que 7 ensembles distincts.

Exercice 7

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\|_\infty$ et $(q_n)_n$ une énumération des rationnels de $[0,1]$. On pose: $L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n f(q_n)$ pour $f \in E.$

(a) Prouver que L est une forme linéaire continue sur E.

(b) Montrer que $\underset{\|f\| \leq 1}{sup} |L(f)|$ n'est pas atteint.

Exercice 8

Soit $E = 1^\infty$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme infinie $\|(u_n)_n\|_\infty = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$. On note $F = 1^1$ le sous-espace vectoriel de E des suites de suites $(u_n)_n$ vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$ muni de la norme 1 $\|(u_n)_n\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

(a) Si $(u_n)_n \in E$ et $(v_n)_n \in F$, prouver que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

(b) On définit $f_v : (u_n)_n \in E \longmapsto \sum u_n v_n \in \mathbb{R}$(où v désigne la suite $(v_n)_n$ de F). Montrer que f_v appartient au dual fort E' de E (i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur E).

(c) Trouver φ une isométrie bijective de F sur E'

Exercice 9

Soit $E = 1^\infty$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme infinie $\|(u_n)_n\|_\infty = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des fermés ou non:

- $A = \{$ suites croissantes $\}$
- $B = \{$ suites convergeant vers 0 $\}$
- $C = \{$ suites convergentes $\}$
- $D = \{$ suites admettant 0 pour valeur d'adhérence $\}$
- $F = \{$ suites $(u_n)_n$ sommables: $\sum_{n\geq 0} |u_n| < \infty$ $\}$, (indication: considère la suite $(v_{k,n} = \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{k+2}{k+1}}})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2})$

- $G = \{$ suites $(u_n)_n$ périodiques: $\exists p > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n\}$
  (indication: considère la suite $(v_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \left|\sin \frac{2n\pi}{i}\right|)_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}})$

Exercice 10

(a) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire. Démontrer l'égalité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) Soit E un espace vectoriel normé. $\|\|$ vérifie l'inégalité du parallélogramme: $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$. Montrer que $\|\|$ vérifie l'égalité du parallélogramme puis qu'il dérive d'un produit scalaire (Théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan) .

(c) pour tout $(x,y) \in E^2$, $P(t) = \|x+ty\|^2$. Montrer que $P(t)$ est un polynôme en t de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si $\|\|$ dérive d'un produit scalaire.

Exercice 11

1) Montrer qu'une forme linéaire $f \in E' = L(E, \Bbbk)$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur un espace vectoriel normé E est continue si et seulement si $H = \ker f$ est fermé.

2) Soit E l'ensemble des suites complexes qui convergent vers 0 muni de la norme infinie $\|\|_\infty$, Φ la forme linéaire définie sur E par:

$$\Phi((u_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

On pose $H = Ker\Phi$.

(a) Montrer que Φ est continue et calculer sa norme induite.

(b) Existe-t-il $(v_n)_n \in E$ tel que $\|(v_n)_n\|_\infty \leq 1$ et $|\Phi(v_n)_n| = 2$? En déduire que la boule unité $B((0)_n, 1)$ de E n'est pas compacte.

(c) Soit $u = (u_n = \frac{1}{n+1})_n$, calculer $\Phi(u)$. Trouver la distance $d(u,H)$ de u à H.

(d) Construire y dans H tel que $\|u-y\|_\infty \leq d(u,H)$.

3) Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continue si et seulement si l'ensemble $F = \{x \in E\}/ \ \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Exercice 12

(1) On note $E = \mathbb{R}[X]$ et, si $P \in E, \|P\| = \underset{|x|\leq 1}{sup} |P(x)|$

(a) Montrer que $\|\|$ est bien une norme.

(b) Soit $U : P \in E \longmapsto P(2) \in \mathbb{R}$. U est-elle continue ?

(c) Montrer que $H = \{P \in E | U(P) = 0\}$ est dense dans E.

(2) Soit E un e.v.n., $f \in E^*$ non continue. Montrer que $Kerf$ est dense dans E.

(3) Montrer l'équivalence H hyperplan $\iff$ H noyau d'une forme linéaire.

Exercice 13

(1) Montrer que tout fermé F peut être obtenu comme intersection infinie d'ouverts

(2) Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est d'intérieur non vide alors $E = F$

(3) Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace vectoriel normé E est fermé.

(4) Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ d'un sous-espace vectoriel F est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14

(1) Montrer que la fonction N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer et déssiner la boule unité de centre 0.

Exercice 15

Montrer que: $\|x - t\| + \|y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - t\| + \|t - z\| + \|z - x\|$

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note:

$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$

1) Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ est compacte

2) Montrer que si A est compacte et B est fermée alors $A + B$ est fermée

3) Montrer que si A est un ouvert alors $A+B$ est un ouvert(commencer par le cas où B un singleton)

Exercice 17

Soit $(E, \langle\rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{k}$, $a \in E$

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \langle x, a\rangle$ est continue

2) Montrer que l'orthogonal de A, $A^{\perp}$ est fermé.

Exercice 18

Soit $E = M_n(\mathbb{k})$ l'espace vectoriel des matrices carées d'ordre n, muni de l'une des trois normes usuelles, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$\begin{cases} \|A\|_\infty = \sup\{|a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq n\} \\ \\ \|A\|_1 = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \\ \\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2} \end{cases}$$

Calculer pour chacun des trois normes ci-dessus la norme subordonnée de la forme linéaire "Trace"

Exercice 19

Soit f un automorphisme de E. Montrer que : $|||f||| \, \left|\left|\left|f^{-1}\right|\right|\right| \geq 1.$

Exercice 20 (F)

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre $n,$ muni d'une norme quelconque.

1) Montrer que le sous-espace $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de E.

2) Montrer que le sous-espace $O(n)$ des matrices orthogonales est un compact.

Exercice 21

Soit E un espace de Banach (c'est-à-dire un evn complet) muni d'une norme $|| \; ||_E$.

Soit G un sous-espace vectoriel fermé de E. Soit R la relation d'équivalence suivante :

$xRy \iff x - y \in G.$

L'ensemble vectoriel quotient est noté $F = E/G$, et la classe de x est notée $\overline{x}$.

On définit une norme $|| \; ||_F$ sur F de la manière suivante :

$||\overline{x}||_F = \inf\limits_{y \in G} ||x - y||_E.$

1) Vérifier que $|| \quad ||_F$ est bien une norme sur $F.$

2) Montrer que $(F, || \; ||_F)$ est un Banach

Exercice 22

Soient E un espace vectoriel normé, F un fermé de E et $x \in E.$

1) Montrer que la fonction définie sur E par: $x \longmapsto d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||x- y||$ est continue sur E

2) Montrer que: $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||x - y|| = \inf\limits_{y \in F} d(x, y) = 0 \iff x \in F$

3) Montrer que si $x \notin F$ alors ils existent des voisinages ouverts U et V respectivement de x et F tels que: $U \cap V = \emptyset$

4) Montrer que si F et G sont deux fermés disjoints de $E,$ alors il existe deux voisinages ouverts U et V respectivement de F et G tels que: $U \cap V = \emptyset$

Exercice 23

Montrer que l'espace des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 24

Soient E un espace vectoriel normé, F_1, F_2 deux fermés de E tels que $E = F_1 \cup F_2,$ et f une application de E dans un espace vectoriel normé H. Montrer que f est continue sur E si et seulement si les restrictions f_1 et f_2 de f à F_1 et à F_2 sont continues.

Exercice 25

1) Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < x^3 + y^3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

3) Soit $(E, \langle\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, montrer que $O = \{\{e_1, e_2\} \in E^2, \{e_1, e_2\}$ libre$\}$ est un ouvert de E.

Exercice 26

Soient les sous espaces vectoriels de l'espace des suites réelles:
$H_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \ / \ \sum n^2 u_n^2 < \infty\}$
$H_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \ / \ \sum u_n^2 < \infty\}$
$H_{-1} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \ / \ \sum \dfrac{1}{n^2} u_n^2 < \infty\}$

1) Définir des produits scalaires sur les H_i et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.

2) Pour $b = (b_n) \in H_{-1}$, montrer que la fonction $\varphi : H_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(u_n) = \sum b_n u_n$ est une forme linéaire continue, quelle est sa norme?

3) Montrer que la boule unité fermée de H_1 est une partie compacte de H_0.

Exercice 27

1) Soient (E,d) un espace métrique complet, C un sous-ensemble non vide de E fermé et f une application de C dans C k-contractante c'est à dire:

$$\forall (x,y) \in C^2, d(f(x), f(y) \leq k d(x,y), \text{ avec } 0 \leq k < 1$$

Montrer qu'il existe un unique $a \in C$ tel que $f(a) = a$.

2) On suppose de plus que $(E, \|\|)$ est un espace de Banach et C est convexe et compact, et f vérifiant:

$$\forall (x,y) \in C^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

a) Montrer qu'on peut supposer que $0 \in C$

b) Montrer que pour tout $0 < k < 1$, l'application kf est définie de C dans C et k - contractante, en déduire l'existence d'un unique point $a_k \in C$ tel que $kf(a_k) = a_k$..

c) En considérant la suite $(x_n)_n = (a_{1-\frac{1}{n}})_n$, montrer qu'il existe $a \in C$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 28

Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ / \ (u_n)_n$ bornée$\}$, on note $\|(u_n)_n\|_\infty = \sup\limits_n |u_n|$

a) Montrer que $\|\|_\infty$ est une norme sur E

b) Montrer que $E_c = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ / \ (u_n)_n$ converge$\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E

c) Montrer que $E_0 = \{(u_n)_n \in E_c \ / \ (u_n)_n$ converge vers $0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E

d) Montrer que $(E, \|\|_\infty)$ est complet

e) Etudier la complétude de $(E_c, \|\|_\infty)$ et $(E_0, \|\|_\infty)$

Exercice 29

Soit $E_i = C^i([0,1],\mathbb{R})$ $(i = 0, 1)$, on pose pour $f \in E_1, \|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$
a) Montrer que:$\forall f \in E_1 : \|f\|_\infty \leq \|f\|$
b) Montrer que $\|\|$ est une norme sur E_1.
c) Montrer que $(E_0, \|\|_\infty)$ est complet
d) Montrer que $(E_1, \|\|)$ est complet
e) Montrer que $\|\|_\infty$ et $\|\|$ ne sont pas équivalentes
f) Donner un exemple de suite qui converge dans $(E_1, \|\|_\infty)$ mais ne converge pas dans $(E_1, \|\|)$. (indication: $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{2}x^2}$)

Exercice 30

Soit $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, on pose pour $f \in E$,
$\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $\|f\|_2 = \|f + f'\|_\infty$
a) Montrer que $\|\|_i$ $(i = 0, 1)$, sont des normes sur E
b) Montrer que $(E, \|\|_1)$ est complet
c) Montrer que $\forall f \in E, \forall x \in [0,1] : |(f(x)e^x)'| \leq \|f\|_2 \, e^x$
d) En déduire que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$ et $\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_2$
e) Montrer que $\|\|_1$ et $\|\|_2$ sont équivalentes
f) Montrer que $(E, \|\|_2)$ est complet

Exercice 31

Soit $E = L^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions telles que $\int_0^\infty f^2(t)dt < \infty$. On pose:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty f^2(t)dt}.$$

Soit φ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
a) Montrer que l'application:

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi f \end{array}$$

est bien définie et un endomorphisme continue
b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ on définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction continue f_n sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } |x - x_0| \geq \dfrac{1}{n} \\ \\ 1, \text{ si } x = x_0 \\ \\ \text{affine sur } [x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0] \text{ et } [x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}] \end{cases}$$

- Déterminer l'expression de f_n sur $[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0]$ et $[x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}]$

- Pour une fonction continue g sur $\mathbb{R}^+$, montrer que:
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\int_0^\infty f_n^2(t)g(t)dt}{\int_0^\infty f_n^2(t)dt}=g(x_0)$$
- Calculer la norme subordonnée $|||u|||$ de u.

Exercice 32

Soient E et F des evn et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ continue de norme subordonnée $|||\varphi|||$

a) Montrer que si E est de dimension finie, il existe x_0, tel que $\|x_0\|=1$ et $|||\varphi|||=\|\varphi(x_0)\|$

b) On considère l'evn $E=\{(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}u_n=0\}$ muni de la norme infinie $\|(u_n)_n\|_\infty=\sup|u_n|$

Soit:
$$\begin{array}{cccc}\varphi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (u_n)_n & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{u_n}{2^n}\end{array}$$

- Montrer que φ est bien définie et une forme linéaire continue
- Calculer la norme $|||\varphi|||$
- Montrer que $\forall(u_n)_n\in E$ vérifiant $\|(u_n)_n\|_\infty=1$ on a $|||\varphi|||\neq|\varphi((u_n)_n)|$

Exercice 33

a) Soient E un evn, $u\in\mathcal{L}(E)$ continue et λ une valeur propre complexe de u, montrer que: $|\lambda|\leq|||u|||$

b) On considère l'evn $E=\{(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /(u_n)_n$ bornée$\}$ muni de la norme infinie $\|(u_n)_n\|_\infty=\sup|u_n|$

Soient:
$$\begin{array}{cccc}\varphi: & E & \longrightarrow & E\\ & (u_n)_n & \longmapsto & (v_n=u_{n+1})_n\end{array},\qquad \begin{array}{cccc}\psi: & E & \longrightarrow & E\\ & (u_n)_n & \longmapsto & (w_n=u_{n+1}-u_n)_n\end{array}$$

montrer que φ et ψ sont des endomorphismes continues et déterminer leurs normes subordonnées.

c) On considère les evn $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $F=C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni respectivement des normes:

$\|f\|_E=\|f\|_\infty$ et $\|f\|_F=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ Soit:
$$\begin{array}{cccc}\varphi: & E & \longrightarrow & F\\ & f & \longmapsto & \varphi(f):(x\longmapsto\int_0^x f(t)dt)\end{array}$$
montrer que φ est bien définie et une application linéaire continue, calculer $|||\varphi|||$.

Exercice 34 (Théorème de Heine)

Montrer par l'absurde que toute application continue sur une partie compacte K d'un evn E dans un evn F, est uniformément continue.

Solutions: Topologie

Exercice 1

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in E$ / $|x-u| \leq \varepsilon$

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0,\ a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon$
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_1,\ b_n + x \leq a_{n_0+1}$
- $\exists N \geq n_0 + 1$ / $a_N \leq b_{n_1} + x \leq a_{N+1}$

L'élément de E, $u = a_N - b_{n_1}$ vérifie ce qu'on veut car:
$0 \leq x - (a_N - b_{n_1}) \leq a_{N+1} - a_N \leq \varepsilon$

b) Pour: $a_n = \ln n$, $b_n = 2n\pi$, l'ensemble $E = \{\ln n - 2n\pi, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc par continuité de la fonction cosinus l'ensemble $E' = \{\cos(\ln n - 2n\pi) = \cos(\ln n), (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 2

a) Posons $E = \{\dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}, t \in \mathbb{R}\}$.Considérons la fonction $f(t) = \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$, on a:

$\lim\limits_{t \longrightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, et donc il existe $A > 0$ tel que: $\forall |x| \geq A,\ \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2} \leq 1$. D'autre part puisque f est continue sur le compact $[-A,A]$, alors f est bornée sur $[-A,A]$ et donc E est majoré ce qui prouve que $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ existe, d'où N est bien définie.

b)

- Séparation: $N(x,y) = 0 \Longrightarrow x + ty = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow x = y = 0$
- Homogéinité: $N(\lambda x, \lambda y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|\lambda x + t\lambda y|}{1+t+t^2} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\lambda| \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2} = |\lambda| \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2} = |\lambda|\, N(x,y)$
- Inégaloté triangulaire: $N(x+z, y+u) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+z+ty+tu|}{1+t+t^2} \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} (\dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2} + \dfrac{|z+tu|}{1+t+t^2}) \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2} + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|z+tu|}{1+t+t^2}) = N(x,y) + N(z,u)$

Exercice 3

Soit $(f,g) \in E^2$,$\forall x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{rcl} \left|e^{g(x)} - e^{f(x)}\right| & = & e^{f(x)} \left|e^{g(x)-f(x)} - 1\right| \\ & \leq & e^{\|f\|} \left|e^{g(x)-f(x)} - 1\right| \\ & \leq & e^{\|f\|} \left|e^{\|g-f\|} - 1\right| \end{array}$$

Exercice 4

(a) Si $M = 0$, alors $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall (x,y) \in E^2$, on en déduit:

- $f(0) = 0$, et $f(-x) = -f(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$, puis $f(-nx) = -nf(x)$
- $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ f(\dfrac{p}{q}x) = \dfrac{p}{q} f(x)$, car $pf(x) = f(px) = f(q\dfrac{p}{q}x) = qf(\dfrac{p}{q}x)$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$, car $\alpha = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{p_n}{q_n}$ et $f(\dfrac{p_n}{q_n} x) = \dfrac{p_n}{q_n} f(x)$

Soit U un ouvert sur lequel f est bornée par $m > 0$, il existe $a \in U,\ r > 0$ tel que la boule fermée $B_f(a,r) \subset U$, et comme $\|f((x-a)\| \leq \|f(x)\| + \|f(a)\|$, alors f est bornée sur la boule fermée $B_f(0,r)$ par un réel $m > 0$, d'où : $\forall u \in E - \{a\}$, $\left\| f(r\dfrac{u-a}{\|u-a\|} \right\| \leq m$ et donc $\|f((u-a)\| \leq \dfrac{m}{r} \|u-a\|$ ainsi $\forall x \in E$, $\|f((x)\| \leq \dfrac{m}{r}\|x\|$ ce qui prouve la continuité de f.

(b) On a $\left\|f(2^{n-1}+2^{n-1}) - f(2^{n-1}) - f(2^{n-1})\right\| = \left\|f(2^n) - 2f(2^{n-1})\right\| \leq M$, donc $\|g_n(x) - g_{n-1}(x)\| \leq \dfrac{M}{2^n}$, d'où: $\|g_{n+p}(x) - g_n(x)\| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{M}{2^{n+k}} \leq \dfrac{1}{2^n}$, ceci prouve que la suite (g_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme donc converge (E complet)vers une fonction g. D'autre part on a: $\|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \leq M$, donc $\|g_n(x+y) - g_n(x) - g_n(y)\| \leq \dfrac{M}{2^n}$ d'où:$\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leq 0$ et d'après (a) g est linéaire et continue. On a aussi $f = g + (f-g)$, de $\|g_{n+p}(x) - g_n(x)\| \leq \dfrac{1}{2^n}$ on trouve $\|g(x) - g_0(x)\| \leq 1$, comme $g_0 = f$ alors $f-g$ est bornée.

Exercice 5

- E_p est un ouvert car la fonction f définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par: $f(A) = \sum(\text{mineur de } A \text{ d'ordre} \geq p)^2$ est continue et $E_p = f^{-1}(]0,+\infty[)$
- E_p n'est pas fermé car la suite dans E_p (A_k), donnée par $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_p la matrice identité d'ordre p, converge vers la matrice nulle qui n'appartient pas à E_p.
- E_p est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ car il contient l'espace des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R})$

Exercice 6

(a) Il est évident que: $u(A) = \overline{\overset{0}{A}} \subset P(E)$ et $v(A) = \overset{\overline{0}}{A} \subset P(E)$. D'autre part si $A \subset B \Longrightarrow u(A) = \overline{\overset{0}{A}} \subset \overline{\overset{0}{B}} = u(B)$ et $v(A) = \overset{\overline{0}}{A} \subset \overset{\overline{0}}{B} = v(B)$

(b) $\overset{0}{\overline{A}} \subset \overline{A} \Longrightarrow u^2(A) = u(\overline{A}) \subset u(\overline{A}) = \overline{\overline{\overset{0}{A}}} = \overline{\overset{0}{A}} = u(A)$, $\overset{0}{\overline{A}} \subset \overset{\overline{0}}{A} \Longrightarrow u(A) = \overset{0}{\overline{A}} \subset \overset{\overline{\overline{0}}}{A} = u^2(A)$

$\overset{0}{A} \subset \overset{\overline{0}}{A} \Longrightarrow v(\overset{0}{A}) = \overset{\overline{\overline{0}}}{A} = \overset{\overline{0}}{A} \subset v(\overset{\overline{0}}{A}) = v^2(A)$, $v(A) = \overset{\overline{0}}{A} \subset \overset{\overline{0}}{\overset{0}{A}} \subset \overset{\overline{0}}{\overset{\overline{0}}{A}} = v^2(A)$

(c) A partir de A on obtient la suite: $A, \overline{A}, \overset{0}{A}, u(A), v(A), \overline{u(A)}, \overset{0}{\widehat{v(A)}}$

Exercice 7

(a) Il est clair que L est lineaie de plus on a: $|L(f)| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2\|f\|_\infty$, donc L est continue

(b) On a $\|L\| = 2$, car soit la suite de fonction $(f_n)_n$ affine par morceaux définie par:

$$f_n(q_k) = \begin{cases} (-1)^k, 0 \leq k \leq n \\ \\ 0, k \geq n+1 \end{cases}$$

$$|L(f_n)| = \sum_{K=0}^{n}(\frac{1}{2})^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \text{ et } \|f_n\|_\infty = 1$$

On a : $\lim_{n\longrightarrow\infty} |L(f_n)| = 2$. Suppposons par l'absurde qu'il existe f $(\|f\|_\infty \leq 1)$ telle que $L(f) = 2$, ceci exige que $f(q_n) = (-1)^n$. Posons $F_1 = \overline{\{q_{2n}\}}$ et $F_2 = \overline{\{q_{2n+1}\}}$, on a :

$$\begin{cases} F_1 \text{ et } F_2 \text{ des fermés non vides} \\ \\ [0,1] = F_1 \cup F_2 \end{cases}$$

Comme $[0,1]$ est connexe, alors il existe $x \in F_1 \cap F_2$, or
$x \in F_1 \Longrightarrow f(x) = 1$ et $x \in F_2 \Longrightarrow f(x) = -1$, ce qui est impossible.

Exercice 8

(a) On a: $\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \|(u_n)_n\|_\infty \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leq \|(u_n)_n\|_\infty \|(v_n)_n\|_1$, ce qui prouve l'absolue convergence de la série $\sum u_n v_n$

(b) f_v est évidemment linéaire d'une part, d'autre part on a:

$$\begin{aligned} |f_v(u_n)_n| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \\ &\leq \|(u_n)_n\|_\infty \|(v_n)_n\|_1 \end{aligned}$$

ceci prouve que f_v est continue et $|||f_v||| \leq \|(v_n)_n\|_1$. Montrons que $|||f_v||| = \|(v_n)_n\|_1$. Pour ceci, considérons la suite $(u_n)_n \in E$ donnée par

$$u_n = \begin{cases} \frac{v_n}{|v_n|}, & \text{si } v_n \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$$

On a : $f_v(u_n)_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |v_n| = \|(v_n)_n\|_1$.

(c) L'homomorphisme φ de F dans E' défini par $\varphi(v) = f_v$ est une isométrie car $|||\varphi(v)||| = |||f_v||| = \|v\|_1$

Exercice 9

On note X l'une des espaces de l'exercice, et soit $(v_k)_k = (v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite dans X convergente vers $u = (u_n)_n$. On a: $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \|v_k - u\|_\infty = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} (\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |v_{k,n} - u_n|) = 0$, et donc: $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} |v_{k,n} - u_n| = 0$

(a) $X = A$

La suite $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est croissante pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $v_{k,n+1} - v_{k,n} \geq 0$, par passage à la limite $k \longrightarrow \infty$, on aura $u_{n+1} - u_n \geq 0$, par conséquent $(u_n)_n \in A$, ce qui prouve que A est fermé.

(b) $X = B$

La suite $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ converge vers 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a: $|u_n| \leq |u_n - v_{k,n}| + |v_{k,n}| \leq \|v_k - u\|_\infty + |v_{k,n}|$, par conséquent $(u_n)_n \in B$, ce qui prouve que B est fermé.

(c) $X = C$

La suite $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ converge vers l_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}, \forall p \geq K, \forall q \geq K, \forall n \in \mathbb{N}, |v_{p,n} - u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2},\ |v_{q,n} - u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où: $|v_{p,n} - v_{q,n}| \leq \varepsilon$, on en déduit quand n tend vers $\infty : \forall p \geq K, \forall q \geq K, |l_p - l_q| \leq \varepsilon$, par conséquent la suite $(l_n)_n$ converge vers l, de plus $|u_n - l| \leq |u_n - v_{K,n}| + |v_{K,n} - l_K| + |l_K - l|$, ce qui prouve que C est fermé.

(d) $X = D$

La suite $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ admet la valeur adhérente 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est à dire pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite strictement croissante $(p_n^k)_n$ d'entiers telle que: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_{k,p_n^k} = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'il existe $p_n \geq n$ tel que $|u_{p_n}| \leq \varepsilon$, en effet on sait que $|u_m| \leq |v_{k,m} - u_m| + |v_{k,m}|$, or on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall m \in \mathbb{N},\ |v_{k,m} - u_m| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, comme $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} v_{k,p_m^k} = 0$, il existe $p_n = p_m^k \geq n$ tel que $|v_{k,p_n}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ce qui prouve que D est fermé.

(e) $X = F$

La suite $(v_{k,n} = \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{k+2}{k+1}}})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$, car $\alpha = \dfrac{k+2}{k+1} > 1$. Posons: $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{k+2}{k+1}}}$, f admet un maximum en $x_k = (1+\dfrac{1}{k+1})^{k+1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc: $\quad f(n) \leq f(x_k) = \dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{k+1})^{k+1}} - \dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{k+1})^{k+2}} = \dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{k+1})^{k+1}}(1 - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{k+1}}) = (\dfrac{1}{k+2})e^{-(k+1)\ln(1+\frac{1}{k+1})}$, donc $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(x_k) = 0$, ce qui prouve que la suite $(v_k)_k$ converge dans E vers la suite $u = (\dfrac{1}{n+1})$ qui n'est pas sommable, d'où F non fermé.

(f) $X = G$

La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (v_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i^2}\left|\sin\dfrac{2n\pi}{i}\right|)_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}})$ est périodique de période $k!$ qui converge dans E vers $u = (u_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}\left|\sin\dfrac{2n\pi}{i}\right|)_n$ car $|v_{k,n} - u_n| = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}\left|\sin\dfrac{2n\pi}{i}\right| \leq \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$ (reste de la série de Riemenn convergente $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$).
De plus u n'est pas périodique car $u_0 = 0$ et $\forall n > 0, u_n > 0$ car $\sin\dfrac{2n\pi}{i} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Ainsi G n'est pas fermé.

Exercice 10

(a) Notons par $\langle\rangle$ le produit scalaire sur E on a:
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$, donc $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) On pose $a = x+y, b = x-y$, alors: $\quad \|a\|^2 + \|b\|^2 \leq 2\left\|\dfrac{a+b}{2}\right\|^2 + 2\left\|\dfrac{a-b}{2}\right\|^2 \leq \dfrac{1}{2}\|a+b\|^2 + \dfrac{1}{2}\|a-b\|^2$, ce qui montre l'égalité du parallélogramme.

On pose $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$. Vérifions que $\langle\rangle$ est un produit scalaire sur E:

- $$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) \\ &= \langle y,x\rangle \end{aligned}$$
- $\langle x+y,z\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$
  $\|x+y+z+z\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x+y+z\|^2 + \|z\|^2)$

$$\begin{array}{l} \|x+y-z-z\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x+y-z\|^2+\|z\|^2), \text{ d'où} \\ \langle x+y,z\rangle=\frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2-\|x+y-2z\|^2) \\ \|x+y+z+z\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2) \\ \|x+y-z-z\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2), \text{ d'où} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \langle x+y,z\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2) \\ &= \langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle \end{aligned}$$

- D'après ci-dessus on a: $\forall n\in\mathbb{N},\ \langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle$ et $\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle$, d'où

  $\langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle,\forall n\in\mathbb{Z},$ par conséquent:$\forall p\in\mathbb{Z},\forall q\in\mathbb{N}^*,\ \left\langle q\frac{p}{q}x,y\right\rangle=p\langle x,y\rangle=q\left\langle \frac{p}{q}x,y\right\rangle$, donc: $\langle rx,y\rangle=r\langle x,y\rangle,\forall r\in\mathbb{Q}$. D'après la continuité de la norme et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on montre que $\langle \alpha x,y\rangle=r\langle x,y\rangle,\forall\alpha\in\mathbb{R}.$

(c) Il est évident que si $\|\|$ dérive d'un produit scalaire alors $P(t)$ est un polynôme en t de degré inférieur ou égal à $2.$ Réciproquement on suppose que $P(t)=at^2+bt+c$. On a alors:

$$\begin{cases} P(0)=c=\|x\|^2 \\ \\ P(1)=a+b+c=\|x+y\|^2 \\ \\ P(-1)=a-b+c=\|x-y\|^2 \\ \\ \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\frac{P(t)}{t^2}=a=\|y\|^2 \end{cases}$$

D'après ces égalités on aura: $P(1)+P(-1)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(a+c)=2()\|x\|^2+\|y\|^2)$. On conclut le résultat d'après **(a)**.

Exercice 11

1) Si f est continue il est évident que $\ker f$ est fermé. Réciproquement on suppose que f est non identiquement nulle,soit $a\in E$ tel que $f(a)=1$, posons $F=\Bbbk a$, il est clair que F est un supplémentaire de $H=\ker f$ car:

- $F\cap H=\{0\}$
- $\forall x\in E, x=(x-f(x)a)+f(x)a,\ x-f(x)a\in H,\ f(x)a\in F$

L'ensemble $a+H$ est fermé et ne contient pas 0, donc il existe $r>0$ tel que $B_f(0,r)\cap(a+H)=\emptyset$ (C_{a+H} est ouvert), montrons que $\forall x\in B_f(0,r), |f(x)|\le 1$, supposons par l'absurde qu'il existe $b\in B_f(0,r)$ tel que $|f(b)|>1$, alors $f(\frac{b}{f(b)})=1$ et donc $\frac{b}{f(b)}\in B_f(0,r)\cap(a+H)$ ce qui est absurde. Ainsi $\forall x\in E-\{0\}, \left|f(\frac{rx}{\|x\|})\right|\le 1\Longrightarrow\forall x\in E, |f(x)|\le\frac{1}{r}\|x\|,$ ce qui prouve la continuité de f.

2) (a) On a: $|\Phi((u_n)_n)| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \|(u_n)_n\|_\infty \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|(u_n)_n\|_\infty$, donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leq 2$.Définissons pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{k,n})_n$ par:

$$u_{k,n} = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq k \\ \\ 0, n \geq k+1 \end{cases}$$

$|\Phi((u_{k,n})_n)| = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^k}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, |||\Phi||| \geq 2 - \frac{1}{2^k} \Longrightarrow |||\Phi||| \geq 2$. Ainsi $|||\Phi||| = 2$.

(b) Supposons qu'il existe $(v_n)_n \in E$ tel que $\|(v_n)_n\|_\infty \leq 1$ et $|\Phi(v_n)_n| = 2$ puisque $(v_n)_n$ tend vers 0, alors $\exists N \in \mathbb{N}, |v_n| \leq \frac{1}{2}$, donc:$|\Phi(v_n)_n| < \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, absurde. Supposons que $B_f((0)_n, 1)$ est compacte donc $\Phi(B_f((0)_n, 1))$ est aussi compact comme image d'un compact par une application comtinue, or $2 \in \overline{\Phi(B_f((0)_n, 1))} - \Phi(B_f((0)_n, 1))$, ce qui contredit la compacité de $\Phi(B_f((0)_n, 1))$.

(c) On sait que : $\forall |x| < 1, \ln \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, on trouve: $\Phi(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} (\frac{1}{2})^n = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} (\frac{1}{2})^{n+1} = 2 \ln 2$

$d(u, H) = \inf\limits_{h \in H} \|u - h\| = \frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||}$, en effet supposons que $u \notin H$ donc $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{k}, \exists h \in H : x = \lambda u - \lambda h$, d'où: $\left|\Phi(\frac{x}{\|x\|})\right| = \frac{|\Phi(u-h)|}{\|u-h\|} = \frac{|\Phi(u)|}{\|u-h\|}$,
On sait que:

$|||\Phi||| = \sup\limits_{x \neq 0} \left|\Phi(\frac{x}{\|x\|})\right| = \sup\limits_{h \in H} \frac{|\Phi(u-h)|}{\|u-h\|}$, ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists h_\varepsilon \in H : |||\Phi||| - \varepsilon |||\Phi||| < \frac{|\Phi(u)|}{\|u - h_\varepsilon\|} \leq |||\Phi|||$, d'où: $\frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||} \leq \|u - h_\varepsilon\| < \frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||(1-\varepsilon)} \leq \frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||} + \frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||}\varepsilon$, ceci prouve que $d(u, H) = \frac{|\Phi(u)|}{|||\Phi|||}$.

(d) on prend $y_0 = 0, y_1 = a, y_2 = -2a$, $y_n = 0 \ \forall n \geq 3$, $\|u - y\|_\infty = \max\{1, \left|\frac{1}{2} - a\right|, \left|\frac{1}{3} + 2a\right|\} \leq \ln 2$, on prend $a = \frac{1}{6}$

3) $(\Longrightarrow)$ $\varphi : x \longmapsto \|u(x)\|$ est continue sur E, $\{1\}$ est un fermé de E et $F = \varphi^{-1}\{1\}$, donc F est un fermé de E.

$(\Longleftarrow)$ $0 \in C_F$ qui est ouvert donc $\exists r > 0, B(0, r) \subset C_F$, ainsi $\forall x \in B(0, r), \|u(x)\| < 1$, d'où $\forall x \in E - \{0\}, \left\|u(\frac{rx}{2\|x\|})\right\| < 1$, par conséquent: $\|u(x)\| < \frac{2}{r}\|x\|$, d'où la continuité de u.

Autre méthode: par l'absurde on suppose que u n'est pas continue donc elle n'est pas bornée sur la sphère unité $S = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$

, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in S$ telle que $\|u(x_n)\| \geq n$. Posons $y_n = \dfrac{1}{\|u(x_n)\|} x_n \in F$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0 \notin F$, donc F n'est pas fermé.

Exercice 12

(a)

- $\|P\| = 0 \Longrightarrow \forall\, |x| \leq 1, P(x) = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0 \Longrightarrow P = 0$
- $\|\lambda P\| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |\lambda P(x)| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |\lambda|\, |P(x)| = |\lambda| \sup\limits_{|x|\leq 1} |P(x)| = |\lambda|\, \|P\|$
- $\|P + Q\| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |P(x) + Q(x)| \leq \sup\limits_{|x|\leq 1} (|P(x)| + |Q(x)|) \leq \|P\| + \|Q\|$

(b) Non U n'est pas continue car la suite $(P_n(x) = (\dfrac{x}{2})^n$ tend vers $0,$ car $\|P_n\| = (\dfrac{1}{2})^n$, mais $U(P_n) = 1$ ne tend pas vers $U(0) = 0$

(c) Soit P un élément quelconque de E, la suite (Q_n) définie dans $H = \ker U$ par: $Q_n(x) = P(x) - P(2)(\dfrac{x}{2})^n$ tend vers P.

(2) $f \in E^*$ est non continue et donc n'est pas continue en 0, d'où: $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, \, |x_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n)| \geq \varepsilon$

Pour tout $x \in E$, la suite $(y_n)_n$ donnée par $y_n = x - \dfrac{f(x)}{f(x_n)} x_n$ vérifie:

- $\forall n \in \;\; f(y_n) = 0$
- $\|y_n - x\| = \left| \dfrac{f(x)}{f(x_n)} x_n \right| \leq \varepsilon \, |f(x) x_n| \leq \dfrac{\varepsilon\, |f(x)|}{n+1}$

(3) Soit H un hyperplan et $F = \mathbb{k}a$ un supplémentaire de H dans E, considérons la forme linéaire sur $E : \varphi(a) = 1$ et $\varphi(x) = 0, \forall x \in H$. On a évidemment $Kerf = H$. Réciproquement soit $e \in E$ tel que $f(e) = 1$, on pose $F = \mathbb{k}e$ on a: $\forall x \in E : x = (x - f(x)e) + f(x)e \in H + F$, il est clair que $H \cap F = \{0\}$, donc H est un hyperplan.

Exercice 13

(1) Soit F un fermé, alors C_F est un ouvert, donc $\forall x \in C_F, \exists r_x > 0$ / $B(x, r_x) \subset C_F$, d'où $C_F = \bigcup\limits_{x \in C_F} B(x, r_x)$, par conséquent: $F = \bigcap\limits_{x \in C_F} C_{B(x, r_x)}$, il est évident que $C_{B(x,r_x)}$ est fermé.

(2) $\overset{0}{F}$ étant non vide alors il existe $a \in F$, $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset F$. On remarque que: $\forall x \in E - 0, a + \dfrac{r}{2\,\|x\|} x \in B(a, r)$, donc $x = \dfrac{2\,\|x\|}{r} \dfrac{r}{2\,\|x\|} x \in F$, ce qui montre que $E \subset F$, d'où $E = F$.

(3) Soit $(x_n)_n$ une suite dans F qui converge vers x, donc la suite est bornée dans E, donc dans F, puisque F est de dimension finie, on peut extraire une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui converge dans F, d'où $x \in F$, ce qui montre que mF est fermé.

(4) Il est clair que $\overline{F} \neq \emptyset$. Soient $(\alpha, \beta) \in \Bbbk^2$, $(x, y) \in \overline{F}^2, \exists (x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}, \exists (y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = y$, donc $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$, ce qui montre que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel

Exercice 14

(1) Montrons les 3 axiomes d'une norme:

- $N(x, y) = 0 \Longrightarrow \forall t \in [0, 1], |x + ty| = 0 \Longrightarrow x = y = 0$
- $N(\lambda x, \lambda y) = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |\lambda x + t\lambda y| = |\lambda| \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |x + ty| = |\lambda| \, N(x, y)$
- $N(x + z, y + u) = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} x + z + ty + tu \leq \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |x + ty| + \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |z + tu| \leq N(x, y) + N(z, u)$

(2) $B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in [0, 1], |x + ty| \leq 1\}$

Posons pour x et y fixés $\varphi(t) = x + ty$, $\varphi'(t) = y$, donc φ est monotone ce qui prouve que $|\varphi|$ atteint son maximum en 0 ou 1, d'où $N(x, y) = \max\{|x|, |x + y|\}$, ainsi $B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leq 1, |x + y| \leq 1\}$

Exercice 15

On a:

$$\begin{cases} \|x - t\| \leq \|x - y\| + \|y - t\| \\ \|x - t\| \leq \|x - z\| + \|z - t\| \\ \|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| \\ \|y - z\| \leq \|y - t\| + \|t - z\| \end{cases}$$

En sommant on aura: $2(\|x - t\| + \|y - z\|) \leq 2(\|x - y\| + \|y - t\| + \|x - z\| + \|z - t\|)$

Exercice 16

1) soit $(x_n)_n$ une suite dans $A + B$, $x_n = a_n + b_n$, où $a_n \in A, b_n \in B$. Comme A est compacte il existe une sous-suite $(a_{p_n})_n$ de $(a_n)_n$ qui converge vers $a \in A$, B étant compacte on peut extraire une sous-suite $(b_{q_n})_n$ de $(b_{p_n})_n$ qui converge vers $b \in B$, il est évident que $(a_{q_n})_n$ est une sous-suite de $(a_{p_n})_n$, ainsi la sous-suite $(x_{q_n})_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers $a + b \in A + B$, ce qui montre la compacité de $A + B$.

2) Soit $(x_n)_n$ une suite dans $A+B$ qui converge vers x, on pose $x_n = a_n + b_n$, où $a_n \in A, b_n \in B$. Comme A est compacte il existe une sous-suite $(a_{p_n})_n$ de $(a_n)_n$ qui converge vers $a \in A$, donc la sous suite $(b_{p_n})_n = (x_{p_n} - a_{p_n})_n$ converge vers $x - a$, puisque B est fermé $x - a = b \in B$, d'où $x \in A + B$, ce qui prouve la fermeture de $A + B$.

2) On a $A+B=\underset{b\in B}{\cup}A+\{b\}$. Montrons que $A+\{b\}$ est ouvert, en effet soit $x\in A+\{b\}$, posons $a=x-b\in A$, donc $\exists r>0$ tel que $B(a,r)\subset A$, d'où $B(x,r)\subset A+\{b\}$. Ce qui prouve que $A+B$ est ouvert.

Exercice 17

1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz: $|\langle x,a\rangle|\leq\|a\|\,\|x\|$, ce qui prouve la continuité de la forme linéaire $x\longmapsto\langle x,a\rangle$ est continue.

2) Soit $(x_n)_n$ une suite dans $A^{\perp}$ qui converge vers x, on a: $\forall a\in A,\langle x_n,a\rangle=0$, donc $\langle x,a\rangle=0$ par la continuité de $y\longmapsto\langle y,a\rangle$, ce qui montre la fermeture de $A^{\perp}$.

Exercice 18

Notons Tr la fonction "Trace" on a:

$$\begin{array}{rcl} tr(A) & = & \sum\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ii}| \\ & \leq & \|A\|_1 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} tr(A) & = & \sum\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ii}| \\ & \leq & \sqrt{n}\,\|A\|_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} tr(A) & = & \sum\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ii}| \\ & \leq & n\,\|A\|_\infty \end{array}$$

donc: $|||tr|||_1\leq 1$, $|||tr|||_2\leq 1$, et $|||tr|||_\infty\leq n$.

Posons $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, a_{11}=1, a_{ij}=0((i,j)\neq(1,1)); B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, b_{ii}=\dfrac{\sqrt{n}}{n}.bij=0(i\neq j)$, $C=I_n$ (matrice identité d'ordre n)

$\|A\|_1=\|B\|_2=\|C\|_\infty=1$, et $|tr(A)|=1,|tr(B)|=\sqrt{n},|tr(C)|=n$, ceci montre que $|||tr|||_1=|||tr|||_2=1$ et $|||tr|||_\infty=n$.

Exercice 19

On a:

$$\begin{array}{rcl} \left\|f(f^{-1}(x)\right\| & = & \|x\| \\ & \leq & |||f|||\left\|f^{-1}(x)\right\| \\ & \leq & |||f|||\left|\left|\left|f^{-1}\right|\right|\right|\|x\| \end{array}$$

d'où $|||f|||\left|\left|\left|f^{-1}\right|\right|\right|\geq 1$

Exercice 20

1) On sait que $GL_n(\mathbb{R})=Det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ d'une part, d'autre part la fonction déterminant est continue et $\mathbb{R}^*$ est ouvert, donc est ouvert.

2) $M\longmapsto {}^tMM$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue, comme $O(n)=\{M\in E\,/\,{}^tMM=I_n\}$, alors $O(n)$ est fermé. Si on prend la norme infinie $\|(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\|_\infty=\sup\{|a_{ij}|\,,1\leq i,j\leq n\}$, alors $\forall M\in O(n)$ on a $\|M\|_\infty\leq 1$, ce qui montre que $O(n)$ est borné, d'où la compacité de $O(n)$.

Exercice 21

1) On a: $|d(x_1,F)-d(y,F)|$

2) $||\ \ ||_F$ est une norme car::

- $||\overline{x}||_F = \inf\limits_{y\in G}||x-y||_E = 0$, donc il existe une suite $(y_n)_n$ dans G telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}||x-y_n||_E = 0$, comme G est fermé alors $x\in G$, donc $\overline{x}=0$.
- $||\alpha\overline{x}||_F = \inf\limits_{y\in G}||\alpha x-y||_E = \inf\limits_{y\in G}||\alpha x-\alpha y||_E = \inf\limits_{y\in G}|\alpha|\,||x-y||_E = |\alpha|\,||\overline{x}||_F$
- $$\begin{aligned} ||\overline{x_1}+\overline{x_2}||_F &= \inf_{y\in G}||x_1+x_2-y||_E \\ &= \inf_{y\in G}||x_1+x_2-y||_E \\ &= \inf_{y\in G}||(x_1-\frac{y}{2})+(x_2-\frac{y}{2})||_E \\ &\le \inf_{y\in G}||x_1-\frac{y}{2}||_E + \inf_{y\in G}||x_2-\frac{y}{2}||_E \\ &\le ||\overline{x_1}||_F + ||\overline{x_2}||_F \end{aligned}$$

3) Soit $(\overline{x_n})_n$ une suite de Cauchy dans F, montrons qu'elle converge dans F. On a:

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\ge N, \forall m\ge N : ||\overline{x_m}-\overline{x_n}||_F \le \varepsilon$

Donc on peut trouver une sous suite $(\overline{x_{p_n}})_n$ vérifiant: $||\overline{x_{p_{n+1}}}-\overline{x_{p_n}}||_F \le \frac{1}{2^{n+1}}$

$\forall\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}, \exists y\in G : ||x_{p_{n+1}}-x_{p_n}-y||_E \le \varepsilon$

Ainsi: $\forall n\in\mathbb{N}, \exists z_n\in G : ||x_{p_{n+1}}-x_{p_n}-z_{n+1}||_E \le \frac{1}{2^n}$

En posant $y_0=0, y_n = z_1+...+z_n$, on aura:

$||(x_{p_{n+1}}-y_{n+1})-(x_{p_n}-y_n)||_E \le \frac{1}{2^n}$

D'où:

$$\begin{aligned} ||(x_{p_{n+k}}-y_{n+k})-(x_{p_n}-y_n)||_E &\le \sum_{i=1}^{k}||(x_{p_{n+i}}-y_{n+i})-(x_{p_{n+i-1}}-y_{n+i-1})||_E \\ &\le \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n+i-1}} \\ &\le \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(x_{p_n}-y_n)_n$ est de Cauchy dans E donc elle converge vers $x\in E$, or

$||\overline{x_{p_n}}-\overline{a}||_F = ||\overline{x_{p_n}-y_n}-\overline{a}||_F \le ||x_{p_n}-y_n-a||_F$

Ce qui prouve que la sous-suite $(\overline{x_{p_n}})_n$ converge, donc $(\overline{x_n})_n$ converge car c'est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente.

Exercice 22

1) La fonction est continue car: $|d(x_1,F)-d(x_2,F)| \le \|x_1-x_2\|$, en effet

$\forall y\in F$, $d(x_1,F)\le\|x_1-y\|\le\|x_1-x_2\|+\|x_2-y\|$, d'où

$\forall y\in F, \|x_2-y\|\ge d(x_1,F)-\|x_1-x_2\| \Longrightarrow d(x_2,F)\ge d(x_1,F)-\|x_1-x_2\|$ $\Longrightarrow d(x_1,F)-d(x_2,F)\le\|x_1-x_2\|$

de même on a: $d(x_2,F)-d(x_1,F)\le\|x_1-x_2\|$

2)

- $(\Longrightarrow)$ $d(x,F)=0 \Longrightarrow \exists(y_n)_n\in F^{\mathbb{N}}$ telle que: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(x,y_n)=0$, d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = x$, donc $x\in F$ car est F fermé

- $(\Longleftarrow)$ $x \in F \Longrightarrow d(x,F) = d(x,x) = 0$

3) On pose $d(x,F) = \alpha$ d'après **1)** $\alpha > 0$. Soient les voisinages ouverts $U = B(x, \dfrac{\alpha}{3})$ et $V = \underset{y\in F}{\cup} B(y, \dfrac{\alpha}{3})$ respectivement de x et F. On a $U \cap V = \emptyset$ car sinons soit $a \in U \cap V$, alors: $d(a,x) < \dfrac{\alpha}{3}, \exists y \in F,\ d(a,y) < \dfrac{\alpha}{3}$, d'où $d(x,y) \leq d(a,x) + d(a,y) < \dfrac{2\alpha}{3} < \alpha$, ceci contredit le fait que $\alpha = d(x,F) = \inf\limits_{z\in F} d(x,z) \leq d(x,y)$

4) On pose $U = \{x \in E \ / \ \ d(x,F) < d(x,G)\}$, U est ouvert car: $U = \varphi^{-1}]{-\infty}, 0[$ où φ est la fonction continue définie sur E par $\varphi(x) = d(x,F) - d(x,G)$. De même $V = \{x \in E \ / \ \ d(x,G) < d(x,F)\}$ est ouvert, on a évidemment:
$$\begin{cases} F \subset U \\ G \subset V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Exercice 23

Notons E l'espace des polynômes réels de degré n scindés à racines simple. Soit $P \in E$, notons $x_1 < ... < x_n$ les n racines de P. Considérons les n+1 réels $y_0 = x_1 - 1, y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(1 \leq i \leq n-1), y_n = x_n + 1$. Définissons l'application φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par: $\varphi(Q) = (Q(y_0), ..., Q(y_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Puisque $P(X) = (X - x_1)...(X - x_n)$ alors: $P(y_0) \in (-1)^n \mathbb{R}^{+*}$, $P(y_1) \in (-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+*}, ..., P(y_{n-1}) \in (-1)\mathbb{R}^{+*}, P(y_n) \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $\varphi^{-1}((-1)^n \mathbb{R}^{+*} \times (-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+*} \times ... \times (-1)\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*})$ est un voisinage ouvert de P dont les éléments changent de signes sur chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n-1)$, ce qui prouve qu'ils admettent au moins n racines distincts, et donc ils sont scindée et ont exactement n racines distincts car leur degré est $\leq$ à n. Ainsi E est ouvert.

Exercice 24

$(\Longrightarrow)$ évident car $\|f_i(x)\| = \|f(x)\| \leq M\|x\|$ $(i = 1,2)$

$(\Longleftarrow)$ f_1 et f_2 sont continues donc $\exists M_i > 0$ $(i = 1,2)$ telles que: $\|f_i(x)\| \leq M_i \|x\|, \forall x \in F_i$. Posons $M = \max\{M_1, M_2\}$, alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.

Exercice 25

1) $U = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ est ouvert car f est la fonction polynômiale continue définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3 - y^3$

2) $GL_n(\mathbb{R}) = Det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert car la fonction Det déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

3) On sait que $\langle u,v\rangle < \|u\|\|v\|, \forall\{u,v\}$ libre, donc $O = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ est un ouvert car φ est la fonction continue définie sur E^2 par $\varphi(u,v) = \langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|$

Exercice 26

1) Les produits scalaires et la complétude:

- $\langle (u_n),(v_n)\rangle_1 = \sum\limits_{n\geq 1} n^2 u_n v_n$, ce produit est bien défini car:

  $$\left|\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|u_k v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2 v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 v_k^2}$$

  Il est facile de vérifier que $\langle\rangle_1$ défini un produit scalaire

  Soit $(u_k = (u_{k,n})_n)_k$ une suite de Cauchy dans H_1, donc:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \ / \ \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (u_{k+p,n} - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon \quad (*)$$

  ceci entraîne qua $\forall n \geq 1$, la suite numérique $(u_{k,n})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge vers u_n. En tendant dans $(*)$ p vers ∞ on obtient:

  $$\forall n \geq N, \ \|(u_{k,n})_n - (u_n)_n\|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (u_n - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon$$

  ce qui montre la complétude de H_1.
- $\langle (u_n),(v_n)\rangle_0 = \sum\limits_{n\geq 1} u_n v_n$, ce produit est bien défini car:

  $$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|u_k v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2}$$

  Il est facile de vérifier que $\langle\rangle_0$ défini un produit scalaire
  Soit $(u_k = (u_{k,n})_n)_k$ une suite de Cauchy dans H_0, donc:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \ / \ \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} (u_{k+p,n} - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon \quad (*)$$

  ceci entraîne qua $\forall n \geq 1$, la suite numérique $(u_{k,n})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge vers u_n. En tendant dans $(*)$ p vers ∞ on obtient:

  $$\forall n \geq N, \qquad \|(u_{k,n})_n - (u_n)_n\|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon$$

  ce qui montre la complétude de H_0.
- $\langle (u_n),(v_n)\rangle_{-1} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} u_n v_n$, ce produit est bien défini car:

  $$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left|u_k v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} v_k^2}$$

  Il est facile de vérifier que $\langle\rangle_{-1}$ défini un produit scalaire
  Soit $(u_k = (u_{k,n})_n)_k$ une suite de Cauchy dans H_{-1}, donc:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \ / \ \forall n \geq N, \forall p \geq 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (u_{k+p,n} - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon \quad (*)$$

  ceci entraîne qua $\forall n \geq 1$, la suite numérique $(u_{k,n})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge vers u_n. En tendant dans $(*)$ p vers ∞ on obtient:

  $$\forall n \geq N, \qquad \|(u_{k,n})_n - (u_n)_n\|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (u_n - u_{k,n})^2 \leq \varepsilon$$

  ce qui montre la complétude de H_{-1}.

2) On a:

$$\begin{array}{rcl}
|\varphi((u_n)_n)| & = & \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n u_n\right| \\
 & = & \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} b_n)(n u_n)\right| \\
 & \leq & \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} b_n^2} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} n^2 u_n^2} \\
 & \leq & \|(b_n)_n\|_{-1} \|(u_n)_n\|_1
\end{array}$$

ceci prouve la continuité de la forme linéaire φ et $|||\varphi||| \leq \|(b_n)_n\|_{-1}$

Définissons la suite numérique $(u_{k,n})_k$ par

$$u_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} b_n, n \leq k \\ \\ 0, n \geq k+1 \end{cases}$$

$|\varphi(u_{k,n})| = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} b_n^2$ et $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} |\varphi((u_{k,n})_n)| = \|(b_n)_n\|_{-1}$, d'où $|||\varphi||| = \|(b_n)_n\|_{-1}$

3) Soit $(u_k = (u_{k,n})_n)_k$ une suite dans la boule unité $B_1((0),1)$ dans H_1, donc:

$\forall k \geq 1, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 u_{k,n}^2 \leq 1$ ceci entraîne que:

$\forall k \geq 1, \forall n \geq 1, u_{k,n}^2 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui implique la bornetude de la suite $(u_{k,n})_k$ pour tout $n \geq 1$, ainsi:

pour $n = 1$, il existe une sous-suite $(u_{\varphi_1(k),1})_k$ de la suite $(u_{k,1})_k$ qui converge vers a_1

pour $n = 2$, il existe une sous-suite $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(k),2})_k$ de la suite $(u_{\varphi_1(k),2})_k$ qui converge vers a_2

et ainsi de suite par récurrence on construit une sous-suite $(u_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(k),n})_k$ de la suite $(u_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_{n-1}(k),n})_k$ qui converge vers a_n.

Posons $\varphi(k) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)$, il est clair que pour tout $n \geq 1$ la suite $(u_{\varphi(k),n})_{k \geq n}$ est une sous-suite de la suite $(u_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(k),n})_k$, donc converge vers a_n.

Soit $\varepsilon > 0$, nous avons:

- $\forall k \geq 1$:
$$\sum_{n=m}^{\infty} (u_{k,n} - a_n)^2 \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} (u_{k,n}^2 + a_n^2) \leq 4 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$ donc puisque la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge:

$\exists N \geq 1 \ / \ \forall k \geq 1: \ \sum\limits_{n \geq N+1} (u_{k,n} - a_n)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$

- $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} u_{\varphi(k),n} = a_n$, alors: $\forall n \geq 1, \exists K_n \geq 1 \ / \ \forall k \geq K_n : (u_{\varphi(k),n} - a_n)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2N}$

Prenons $K = \max\{K_n, 1 \leq n \leq N\}$, alors:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(u_{\varphi(K),n}-a_n)^2 &= \sum_{n=1}^{N}(u_{\varphi(K),n}-a_n)^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}(u_{\varphi(K),n}-a_n)^2\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Exercice 27

1)

- **unicité**

  on suppose qu'il existe a et b vérifiant: $f(a)=a, f(b)=b$

  or $d(a,b)=d(f(a),f(b))\leq kd(a,b)$ $(1-k)d(a,b)\leq 0,$ d'où $d(a,b)=0\Longrightarrow a=b$

- **existence**

Considérons la suite récurrente:

$$\begin{cases} u_0\in C\\ \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned} d(u_{n+1},u_n) &= d(f(u_n),f(u_{n-1}))\\ &\leq kd(u_n,u_{n-1})\\ &\leq k^2d(u_{n-1},u_{n-2})\\ &\leq k^nd(u_1,u_0)\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} d(u_{n+p},u_n) &\leq \sum_{k=1}^{p}d(u_{n+k},u_{n+k-1})\\ &\leq \sum_{k=1}^{p}k^{n+k-1}d(u_1,u_0)\\ &\leq \frac{k^n}{1-k}d(u_1,u_0)\end{aligned}$$

ceci prouve que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans E donc converge vers $a\in C$ car C est fermé. Comme $u_{n+1}=f(u_n)$ et f continue alors $f(a)=a$

2) a) posons $C'=C-c$ avec $c\in C,$ il est évident que $0\in C'$, C' est convexe et compact, de plus l'application g de C' dans C' définie par: $g(x)=f(x+c)-c$, vérifie:

$$\forall (x,y)\in C'^2, \|f_1(x)-f_1(y)\|=\|f(x+c)-f(y+c)\|=\|x-y\|$$

b) On a: $\|kf(x)-kf(y)\| = k\|x-y\|$, donc kf est k - contractante, et d'après 1) admet un unique point fixe noté $a_k\in C$

c) Puisque C est compact on peut extraire une suite $(x_{p_n})_n$ convergente vers $a\in C$, de la suite $(x_n)_n$, donc:

$$a=\lim_{n\longrightarrow\infty}x_{p_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-\frac{1}{p_n})f(x_{p_n})=f(a).$$

Exercice 28

a) Classique

b) E_c est un sous-espace vectoriel de E car:

- $(u_n = 0) \in E_c$, car $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}, ((u_n)_n, (v_n)_n) \in E_c^2$, $\alpha(u_n)_n + (v_n)_n \in E_c$ car: $\lim_{n\longrightarrow\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n + \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n$
- E_c est fermé, en effet considérons une suite $(U_k = (u_{k,n})_n)_k$ dans E_c qui converge vers $U = (u_n)_n$. Montrons que $(u_n)_n$ converge.

  Notons l_k la limite de la suite $(u_{k,n})_n$ on a:
  $|u_{k+p,n} - u_{k,n}| \leq \|U_{k+p} - U_k\|_\infty$, en tendant n vers ∞ on obtient $|l_{k+p} - l_k| \leq \|U_{k+p} - U_k\|_\infty$ et donc la suite réelle $(l_k)_k$ est de Cauchy, soit l la limite de $(l_k)_k$ on a:

  $$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq |u_n - u_{k,n}| + |u_{k,n} - l_k| + |l_k - l| \\ &\leq \|U_k - U\|_\infty + |u_{k,n} - l_k| + |l_k - l| \end{aligned}$$

  Soit $\varepsilon > 0$, alors
  - ∘: $\exists K_1 \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \geq K_1$, $\|U_k - U\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$
  - ∘: $\exists K_2 \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \geq K_2$, $|l_k - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$
  - ∘: Soit $K = \max(K_1, K_2), \exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, |u_{K,n} - l_K| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

  Ainsi $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq \|U_K - U\|_\infty + |u_{K,n} - l_K| + |l_K - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

c) E_0 est un sous-espace vectoriel de E_c car:

- $(u_n = 0) \in E_0$, car $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}, ((u_n)_n, (v_n)_n) \in E_0^2$, $\alpha(u_n)_n + (v_n)_n \in E_0$ car: $\lim_{n\longrightarrow\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n + \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = 0$
- E_0 est fermé, en effet considérons une suite $(U_k = (u_{k,n})_n)_k$ dans E_0 qui converge vers $U = (u_n)_n$. Montrons que $(u_n)_n$ converge vers

  0. on a:

  $$\begin{aligned} |u_n| &\leq |u_n - u_{k,n}| + |u_{k,n}| \\ &\leq \|U_k - U\|_\infty + |u_{k,n}| \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$, alors
  - ∘: $\exists K \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \geq K$, $\|U_k - U\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$
  - ∘: $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N$, $|u_{K,n}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

  Ainsi $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq \|U_K - U\|_\infty + |u_{K,n}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d) E est un espace vectoriel complet car, considérons une suite de Cauchy $(U_k = (u_{k,n})_n)_k$ dans E, montrons qu'elle converge. Pour tout $(n,k,p) \in \mathbb{N}^3$, on a: $|u_{k+p,n} - u_{k,n}| \leq \|U_{k+p} - U_k\|_\infty$, ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite numérique $(u_{k,n})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers un réel noté u_n. Puisque $(U_k = (u_{k,n})_n)_k$ est de Cauchy dans E, alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \geq K, \forall p \in \mathbb{N},\ \|U_{k+p} - U_k\|_\infty \leq \varepsilon$, d'où:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq K, \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{k+p,n} - u_{k,n}| \leq \|U_{k+p} - U_k\|_\infty \leq \varepsilon$

En tendant n vers ∞ on aura:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq K,\ |u_n - u_{k,n}| \leq \varepsilon$, d'où:

$\forall k \geq K,\ \|U_k - U\|_\infty \leq \varepsilon \quad (U = (u_n)_n)$

Ainsi la suite $(U_k)_k$ converge vers U dans E.

e) E_c et E_0 sont complets car ils sont fermés.

Exercice 29

a) On a: $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$, d'où

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \leq & |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \\ & \leq & |f(0)| + x\,\|f'\|_\infty \\ & \leq & \|f\| \end{array}$$

b) $\|\|$ est une norme: évident

c) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E_0, donc:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N},\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon, \forall x \in [0,1]$

Ainsi pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique de Cauchy $(f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un point noté $f(x)$. Montrons que $(f_n)_n$ converge vers f dans E_0.

- Soit $\varepsilon > 0$, tendons dans l'expression ci-dessus p vers ∞ :

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [0,1]$ d'où:

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

- Montrons que f est continue en tout point $x_0 \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que:

  $\|f_N - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

  $\exists \alpha > 0$ tel que: $\forall x \in [0,1], \quad |x - x_0| \leq \alpha,\ |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$,

  d'où:

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(x_0)| & \leq & |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ & \leq & 2\,\|f_N - f\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ & \leq & \varepsilon \end{array}$$

d) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E_1, donc:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N},\ \|f_{n+p} - f_n\| \leq \varepsilon$

Ainsi pour tout $x \in [0,1]$, les suite numériques de Cauchy $(f_n(x))_n$ ($\|f\|_\infty \leq \|f\|$) et $(f_n'(x))_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$, . Montrons que $(f_n)_n$ converge vers f dans E_1. D'abord montrons que $f' = g$. En effet posons:

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}, t \in [0,1]-\{x\} \\ \\ f_n'(x), \qquad t = x \end{cases} \quad \text{et } u(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}, t \in [0,1]-\{x\} \\ \\ g(x), \qquad t = x \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = u(t)$.

Il suffit de montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans E_0, car u sera continue en x et donc:

$\lim\limits_{t\longrightarrow x} u(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow x} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) = u(x) = g(x).$

On a d'après le théorème des accroissements finis appliqué à $f_{n+p}-f_n$ $(n \geq N)$ sur l'intervalle fermé d'extrémités x et $t \neq x$:

$$\begin{aligned} |u_{n+p}(t) - u_n(t)| &= \left| \frac{[f_{n+p}(t) - f_n(t)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{t-x} \right| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| &= \left| f_{n+p}'(x) - f_n'(x) \right| \\ &\leq \left\| f_{n+p}' - f_n' \right\|_\infty \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'où: $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leq \varepsilon.$

e) Prenons la suite dans E_1, de terme général $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$, mais $\|f_n\| = n$, et donc $\|\|_\infty$ et $\|\|$ ne peuvent pas être équivalentes.

f) Prenons la suite dans E_1, de terme général $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{2}x^2}$. On vérifie facilement que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = 0$, et $f_n'(x) = (1-nx^2)e^{-\frac{n}{2}x^2}$ donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{e}$, ce qui montre que (f_n) converge dans $(E_1, \|\|_\infty)$. Or si (f_n) converge dans $(E_1, \|\|)$, alors (f_n') converge dans $(E_0, \|\|_\infty)$ et donc $g = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n'$ sera continue, mais ce n'est pas le cas.

Exercice 30

a) $\|\|_1$ et $\|\|_2$ sont bien des normes: évident

b) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\|_1)$, alors $(f_n)_n$ et $(f_n')_n$ sont des suites de Cauchy dans $(E, \|\|_\infty)$, donc d'après l'exercice $(f_n)_n$ converge vers une fonction $f \in E$ et $(f_n')_n$ converge vers f'. On conclut que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(E, \|\|_1)$, car: $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty$

c) Soit $f \in E$ on a: $|(f(x)e^x)'|$

$$\begin{aligned} |(f(x)e^x)'| &= |(f'(x) + f(x))e^x)| \\ &\leq \|f + f'\|_\infty e^x \\ &\leq \|f\|_2 e^x \end{aligned}$$

d) On a:

$$\begin{array}{rcl} |f(x)e^x| & = & \left|\int_0^x (f(t)e^t)' dt\right| \\ & \leq & \int_0^x |(f(t)e^t)'|\, dt \\ & \leq & \|f\|_2 \int_0^x e^t dt \\ & \leq & (e^x - 1)\, \|f\|_2 \\ & \leq & \|f\|_2\, e^x \end{array}$$

d'où $|f(x)| \leq \|f\|_2$ et donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$. On a:

$$\begin{array}{rcl} \|f'\|_\infty & \leq & \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty \\ & \leq & 2\, \|f\|_2 \end{array}$$

e) D'après ci-dessus: $\frac{1}{3}\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_1$

f) $(E, \|f\|_2)$ est complet car $(E, \|f\|_1)$ est complet et $\|\|_1$ et $\|\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 31

a) On a:

- u est bien définie car: $\varphi^2 f^2 \leq \|\varphi\|_\infty^2\ f^2$, ce qui implique que $\varphi f \in E$
- u est un endomorphisme car:

$$\begin{array}{rcl} u(\alpha f + g) & = & \varphi(\alpha f + g) \\ & = & \alpha\varphi f + \varphi g \\ & = & \alpha u(f) + u(g) \end{array}$$

- u est continue car:

$$\begin{array}{rcl} \|u(f)\|_2 & = & \sqrt{\int_0^\infty \varphi^2 f^2(t)dt} \\ & \leq & \|\varphi\|_\infty \sqrt{\int_0^\infty f^2(t)dt} \\ & \leq & \|\varphi\|_\infty\, \|f\|_2 \end{array}$$

b) Calcul de la norme subordonnée de u :

- Expression de f_n sur $[x_0 - \frac{1}{n}, x_0]$ et $[x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$

  D'une manière générale, l'équation cartésienne du segment $[AB]$ avec $A(a_0, b_0)$ et $B(a_1, b_1)$ est:

  $\frac{y - b_0}{x - a_0} = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}$, $a_0 \leq x \leq a_1$ d'où:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq x_0 - \frac{1}{n} \\ nx - nx_0 + 1, x_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 \\ -nx + nx_0 + 1, x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n} \\ 0, x \geq x_0 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

- On a:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty f_n^2(t)g(t)dt - g(x_0)\int_0^\infty f_n^2(t)dt\right| &= \left|\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n^2(t)[g(t)dt - g(x_0)]dt\right| \\
&\leq \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n^2(t)\left|g(t)dt - g(x_0)\right| dt
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$,

- ○: Par continuité de g en x_0, $\exists\alpha > 0$ tel que: $|x - x_0| \leq \alpha \implies |g(x)dt - g(x_0)| \leq \varepsilon$
- ○: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n} = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que: $\forall n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \alpha$
- ○: Ainsi $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty f_n^2(t)g(t)dt - g(x_0)\int_0^\infty f_n^2(t)dt\right| &= \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n^2(t)\left|g(t)dt - g(x_0)\right| dt \\
&\leq \varepsilon\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n^2(t)dt \\
&\leq \varepsilon\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f_n(t)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

c) on a d'après **a)** $|||u||| \leq \|\varphi\|_\infty$, montrons que $|||u||| = \|\varphi\|_\infty$

Soit $\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que: $\|\varphi\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} < |\varphi(x_\varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty$

D'après **b)** pour $x_0 = x_\varepsilon$ et $g = \varphi^2$ on aura:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\|u(f_n)\|_2^2}{\int_0^\infty f_n^2(t)dt} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\int_0^\infty f_n^2(t)\varphi^2(t)dt}{\int_0^\infty f_n^2(t)dt} = \varphi^2(x_\varepsilon)$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\|u(f_n)\|_2}{\sqrt{\int_0^\infty f_n^2(t)dt}} = |\varphi(x_\varepsilon)|$$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que: $\forall n \geq N, |\varphi(x_\varepsilon)| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\|u(f_n)\|_2}{\sqrt{\int_0^\infty f_n^2(t)dt}} = \frac{\|u(f_n)\|_2}{\|f_n\|_2} \leq |||u|||$

D'où: $\|\varphi\|_\infty - \varepsilon \leq |\varphi(x_\varepsilon)| - \frac{\varepsilon}{2} \leq |||u|||$

Exercice 32

a) $|||\varphi||| = \sup\{\|\varphi(x)\|, \|x\| = 1\}$, comme les sphères dans E (de dimension finie) sont compactes, et $u : x \longmapsto \|\varphi(x)\|$ est continue, alors u atteint ses bornes, en particulier il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $|||\varphi||| = \sup\{u(x), \|x\| = 1\} = u(x_0) = \|\varphi(x_0)\|$

b)

- φ est bien définie car: on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^k}$

$$\begin{array}{rcl} |S_{n+p} - S_n| & = & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k}{2^k} \right| \\ & \leq & \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|u_k|}{2^k} \\ & \leq & \frac{\|(u_m)_m\|_\infty}{2^n} \end{array}$$

Donc la suite $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $(E, \| \|_\infty)$, donc converge

- φ est évidemment une forme linéaire

- $$\begin{array}{rcl} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} \right| & \leq & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_k|}{2^k} \\ & \leq & 2 \|(u_n)_n\|_\infty \end{array}$$

D'où φ est continue et $|||\varphi||| \leq 2$

c) Considérons la suite $(U_k = (x_{k,n})_n)_k$ dans E définie par:

$$x_{k,n} = \begin{cases} 1, n \leq k \\ \\ 0, n \geq k+1 \end{cases}$$

On a:

$$\|U_k\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \varphi(U_k) & = & \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \\ & = & 2 - \frac{1}{2^k} \end{array}$$

$\forall k \in \mathbb{N}, |\varphi(U_k)| = 2 - \frac{1}{2^k} \leq |||\varphi|||$, d'où $2 \leq |||\varphi|||$, ainsi $|||\varphi||| = 2$

d) Soit $(u_n)_n \in E$ avec $\|(u_n)_n\|_\infty = 1$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$: $|u_n| \leq \frac{1}{2}$, d'où:

$$\begin{array}{rcl} |\varphi((u_n)_n)| & = & \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} \right| \\ & \leq & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_k|}{2^k} \\ & < & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ & < & 2 \end{array}$$

donc $|\varphi((u_n)_n)| \neq |||\varphi|||$

Exercice 33

a) Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors:

$$\begin{aligned}\|u(v)\| &= \|\lambda v\| \\ &= |\lambda| \, \|v\| \\ &\leq |||u||| \, \|v\|\end{aligned}$$

donc $|\lambda| \leq |||u|||$ car $v \neq 0$

b) Il est clair que φ et ψ sont des endomorphismes et:

$$\begin{aligned}\|\varphi((u_n)_n)\|_\infty &= \|(u_{n+1})_n\|_\infty \\ &\leq \|(u_n)_n\|_\infty\end{aligned},\quad \begin{aligned}\|\psi((u_n)_n)\|_\infty &= \|(u_{n+1} - u_n)_n\|_\infty \\ &\leq 2\,\|(u_n)_n\|_\infty\end{aligned}$$

donc $|||\varphi||| \leq 1$ et $|||\psi||| \leq 2$

Prenons les suites $(u_n = 1)_n$ et $(v_n = (-1)^n)_n$ de normes 1 dans E on a:

$\|\varphi((u_n)_n)\|_\infty = 1 \leq |||\varphi|||$ et $\|\psi((v_n)_n)\|_\infty = 2 \leq |||\psi|||$, d'où: $|||\varphi||| = 1$ et $|||\psi||| = 2$

b) Il est clair que pour tout f de classe $C^0, \varphi(f)$ est de classe C^1, et linéaire. D'autre part on a:

$$\begin{aligned}\|\varphi(f)\|_F &= \|\varphi(f)\|_\infty + \|\varphi(f)'\|_\infty \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \left(\left|\int_0^x f(t)dt\right|\right) + \|f\|_\infty \\ &\leq 2\,\|f\|_\infty\end{aligned}$$

ce qui implique que φ est continue et $|||\varphi||| \leq 2$

Considérons la fonction constante $f = 1,$ on a: $\|f\|_E = 1$ et $\varphi(f)(x) = x,$ d'où: $\|\varphi(f)\|_F = 2 \leq |||\varphi|||$, ainsi $|||\varphi||| = 2.$

Exercice 34

Supposons que f n'est pas uniformément continue donc:

$\exists\varepsilon > 0$ tel que: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists(x_n, y_n) \in K^2$ vérifiant $\|x_n - y_n\| \leq \dfrac{1}{n}$, $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon.$ D'après la compacité de K on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers $x \in K,$ de même on peut extraire une sous-suite $(y_{\psi(\varphi(n))})_n$ de $(y_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $x \in K,$ donc $\left\|f(x_{\psi(\varphi(n))}) - f(y_{\psi(\varphi(n))})\right\| \leq \varepsilon$ pour un certain n ce qui est impossible.

Montrons que la suite $(x_n)_n$ converge vers a, en effet soit $\varepsilon > 0$ et notons $\mathbb{N}_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \|x_n - a\| \geq \varepsilon\}$, si $\mathbb{N}_\varepsilon$ est infini alors on peut construire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_\varepsilon}$ qui converge vers $b \in K$, donc elle vérifie $\left\|x_{\varphi(n)} - a\right\| \geq \varepsilon,$ d'où $\|b - a\| \geq \varepsilon$ ce qui contredit le fait que $(x_n)_n$ a une seule valeur d'adhérence.