Θεωρία Ομάδων 2

Λύσεις ασκήσεων από τα φυλλάδια 2 και 3

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM: 1112201800377 (προπτυχιακό)
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

1) Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος (με την έννοια του Rips), $x, y, x_0 \in X$ και $\gamma = [x, y]$ γεωδαισιακή από το x στο y. Τότε $(x, y)_{x_0} \leq d(x_0, \gamma) \leq (x, y)_{x_0} + 2\delta$.

Απόδειξη.

Όπως έχει γίνει στην τάξη, έστω $w \in [x, y] : \quad d(x_0, w) = d(x_0, [x, y])$. Μπορούμε να επιλέξουμε τέτοιο w αφού το σύνολο $[x, y]$ είναι συμπαγές. Έχουμε από τριγωνική ανισότητα:

$$d(x, x_0) \leq d(x, w) + d(x_0, w)$$
$$d(y, x_0) \leq d(y, w) + d(x_0, w)$$

Και αφού X γεωδαισιακός παίρνουμε ότι $d(x, y) = d(x, w) + d(w, y)$. Άρα:

$$d(x, x_0) + d(y, x_0) \leq \underbrace{d(x, w) + d(y, w)}_{=d(x,y)} + 2d(w, x_0)$$

$$(x, y)_{x_0} \leq d(w, x_0) = d(x_0, [x, y])$$

Για την άλλη ανισότητα, θέτουμε

$$A = \{z \in \gamma : \quad (x, x_0)_z \leq \delta\}$$

και

$$B = \{z \in \gamma : \quad (y, x_0)_z \leq \delta\}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $A \cup B = \gamma = [x, y]$. Η σχέση $\subseteq$ είναι προφανής από τον ορισμό των A, B.

Έστω $z \in \gamma$ με $(x, x_0)_z > \delta$. Θα δείξουμε ότι $(y, x_0)_z \leq \delta$. Από την δ-υπερβολικότητα, θα υπάρχει $w \in [x, x_0] \cup [y, x_0]$ με $d(z, w) \leq \delta$. Αν $w \in [x, x_0]$ και εφαρμόσουμε δύο φορές τριγωνική ανισότητα, τότε:

$$d(z, w) \geq d(z, x_0) - d(w, x_0)$$
$$d(z, w) \geq d(z, x) - d(w, x)$$

και προσθέτοντας:

$$2d(z, w) \geq d(z, x_0) + d(z, x) - (d(w, x_0) + d(w, x)) = d(z, x_0) + d(z, x) - d(x, x_0)$$

αφού ο χώρος είναι γεωδαισιακός. Άρα $d(z, w) > \delta$ το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $w \in [y, x_0]$. Ωστόσο, τώρα που ισχύει το $w \in [y, x_0]$ η σχέση $(y, x_0)_z > \delta$ θα μας έδινε άτοπο με το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω. Άρα $(y, x_0)_z \leq \delta$.

Δείξαμε ότι $A \cup B = \gamma$ το οποίο είναι συνεκτικό και τα A, B μη κενά και κλειστά. Άρα αναγκαστικά τα A, B τέμνονται, δηλαδή υπάρχει $z \in \gamma$ με

$$(x, x_0)_z \leq \delta$$

$$(y, x_0)_z \leq \delta$$

Επιπλέον, αν κάνουμε τις απλοποιήσεις έχουμε την σχέση

$$d(x_0, z) = (x, y)_{x_0} + (x, x_0)_z + (y, x_0)_z$$

Άρα

$$d(x_0, \gamma) \leq d(x_0, z) = (x, y)_{x_0} + (x, x_0)_z + (y, x_0)_z \leq (x, y)_{x_0} + 2\delta$$

□

2) Αποδείξτε ότι η $H_1(\delta)$-υπερβολικότητα ενός χώρου X είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη συνθήκη των 4-σημείων: $d(x,y)+d(z,x_0) \leq \max\{d(x,z)+d(y,x_0), d(x,x_0)+d(y,z)\}+2\delta$ για κάθε $x,y,z,x_0 \in X$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $(y,z)_x \geq \min\{(x_0,y)_x,(z,x_0)_x\}-\delta$. Υποθέτουμε ότι το ελάχιστο των δύο το συναντάμε στο $(x_0,y)_x$ και ισοδύναμα έχουμε υποθέσει:

$$d(y,x)+d(z,x_0) \leq d(z,x)+d(x_0,y)$$

Ανοίγουμε την πρώτη σχέση με τα γινόμενα του Gromov και με βάση την υπόθεσή μας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d(y,x)+d(z,x)-d(y,z)+2\delta &\geq d(y,x)+d(x_0,x)-d(x_0,y) \\ \iff d(z,x)+d(x_0,y)+2\delta &\geq d(x_0,x)+d(y,z) \end{aligned}$$

και το πρώτο μέλος ισούται με το $\max + 2\delta$, δηλαδή:

$$\max\{d(z,x)+d(x_0,y), d(y,x)+d(z,x_0)\}+2\delta \geq d(x_0,x)+d(y,z)$$

Αντίστροφα, δίχως βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $d(x,z)+d(y,x_0) \leq d(x,x_0)+d(y,z)$ (το οποίο είναι ισοδύναμο με $(y,x_0)_x \geq (y,z)_x$). Άρα από συνθήκη 4-σημείων έχουμε ότι:

$$d(x,x_0)+d(y,z)+2\delta \geq d(x,y)+d(z,x_0)$$

και αλλάζουμε μέλος αυτά που περιέχουν το z καθώς και προσθέτουμε το $d(x,z)$ στα 2 μέλη. Έτσι:

$$\begin{aligned} d(x,x_0)+d(x,z)-d(z,x_0)+2\delta &\geq d(x,y)+d(x,z)-d(y,z) \\ \iff (x_0,z)_x+\delta &\geq (y,z)_x = \min\{(y,z)_x,(y,x_0)x\} \end{aligned}$$

$\square$

3) Έστω X ενας δ-υπερβολικός χώρος (με την έννοια του Rips). Αποδείξτε (χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα συνεκτικότητας) ότι για κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο T με πλευρές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $d(x, \gamma_i) \leq \delta$ για κάθε i.

Απόδειξη.

Θέτουμε

$$A = \{w \in \gamma_1 : \quad d(w, \gamma_2) \leq \delta\}$$
$$B = \{w \in \gamma_1 : \quad d(w, \gamma_3) \leq \delta\}$$

Από την δ-υπερβολικότητα έχουμε ότι $A \cup B = \gamma_1$, τα οποία A, B είναι κλειστά (αφού έχουμε $\leq$ και η συνάρτηση απόστασης είναι συνεχής). Το γ_1 είναι συνεκτικό και γράφεται ως ένωση δύο κλειστών, συνεπώς αυτά τα δύο κλειστά τέμνονται, δηλαδή υπάρχει $w \in A \cap B \subseteq \gamma_1$ με:

$$d(w, \gamma_1) = 0 \leq \delta$$

$$d(w, \gamma_2) \leq \delta$$
$$d(w, \gamma_3) \leq \delta$$

□

4) Έστω $F(S)$ η ελεύθερη ομάδα με βάση το S και $\Gamma = \Gamma(F(S), S)$ το αντίστοιχο γράφημα Cayley. Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \neq g \in F(S)$ υπάρχει γεωδαισιακή γραμμή $\gamma : (-\infty, \infty) \to \Gamma$ (ονομάζεται άξονας του g και συμβολίζεται με A_g) επί της οποίας το g δρα με μεταφορές μήκους $\tau_g > 0$, δηλαδή για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g \cdot \gamma(t) = \gamma(t + \tau_g)$.

Απόδειξη.

Έστω $g \in F(S)$ με $1 \neq g$. Τότε το g θα έχει κάποιο μήκος $||g||_S = ||s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}||_S = n$ αν δούμε την παράσταση αυτή του g σαν ανηγμένη λέξη στους γεννήτορες. Θεωρούμε τις γεωδαισιακές $\gamma_k : [0, n] \to \Gamma$ που συνδέουν τα g^k και g^{k+1} μέσω της διαδρομής $w = s^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Ορίζουμε μια γεωδαισιακή που ενώνει όλες τις δυνάμεις g^k διασχίζοντας κάθε φορά την ετικέτα w ως εξής:

$$\gamma : (-\infty, \infty) \longrightarrow \Gamma$$

$$[kn, (k+1)n] \ni \quad t \longmapsto \gamma_k(t - kn)$$

είναι πράγματι γεωδαισιακή, εφόσον οι αποστάσεις μεταξύ τυχαίων δυνάμεων g^k, g^ℓ είναι ελάχιστες, αφού η ετικέτα w είναι η συντομότερη διαδρομή για να πολλαπλασιάσουμε με g. Αν τώρα θεωρήσουμε τυχαία $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ και υποθέσουμε ότι έχουν ελάχιστη απόσταση με ετικέτα v έξω από την γ, δηλαδή $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$ να είναι μικρότερο του μήκους $[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$ πάνω στην γ, τότε για $t \leq t_1$ θα συναντήσουμε μια κορυφή g^{k_1} και για $t \geq t_2$ θα συναντήσουμε μια κορυφή g^{k_2}. Έτσι θα έχουμε (σε μήκη):

$$[g^{k_1}, \gamma(t_1)] \cdot v \cdot [\gamma(t_2), g^{k_2}] < [g^{k_1}, \gamma(t_1)] \cdot [\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \cdot [\gamma(t_2), g^{k_2}] = [g^{k_1}, g^{k_2}] \subseteq \gamma$$

δηλαδή πετύχαμε μικρότερη απόσταση των g^{k_1}, g^{k_2} έξω από την γεωδαισιακή τους, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα θα έχουμε για κάθε $t \in (-\infty, \infty) \implies t \in [kn, (k+1)]$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$ (δεν έχουμε πρόβλημα στα άκρα) και άρα:

$$g \cdot \gamma(t) = g \cdot \gamma_k(t - kn) = \gamma_{k+1}(t - (k+1)n) = \gamma(t + n)$$

$\square$

5) Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος (με την έννοια του Rips), $x \in X$ και $\gamma : (-\infty, \infty) \to X$ μια γεωδαισιακή γραμμή. Αν y και y' είναι σημεία της γεωδαισιακής γ τα οποία επιτυγχάνουν την ελάχιστη απόσταση του x από την γ (γιατί υπάρχουν τέτοια σημεία;), δηλαδή $d(x, y) = d(x, y') = d(x, \gamma)$, τότε $d(y, y') \leq 4\delta$.

Απόδειξη.

Τέτοια σημεία y, y' υπάρχουν γιατί το $Im\gamma$ είναι κλειστό αφού η γ είναι ισομετρία ως γεωδαισιακή. Αν το $y = y'$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Αν $y \neq y'$ και $d(y, y') > 4\delta$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $w \in [y, y'] \subseteq Im\gamma$ με $d(w, y), d(w, y') > 2\delta$.

Από την υπερβολικότητα του χώρου, στο γεωδαισιακό τρίγωνο που ορίζουν οι x, y, y' υπάρχει σημείο $z \in [x, y] \cup [x, y']$ με $d(z, w) \leq \delta$. Υποθέτουμε ότι βρίσκεται πάνω στην $[x, y]$.

Από την τριγωνική $d(w, y) \leq d(w, z) + d(y, z)$ έχουμε

$$d(y, z) \geq d(w, y) - d(w, z) \geq d(w, y) - \delta > 2\delta - \delta = \delta$$

δηλαδή

$$\delta < d(y, z)$$

Έχουμε ότι

$$d(x, w) \leq d(z, x) + d(z, w) \leq d(z, x) + \delta < d(z, x) + d(y, z) = d(x, y)$$

Αφού το z ανήκει στην γεωδαισιακή $[x, y]$. Άρα το w που είναι πάνω στην γεωδαισιακή γ πετυχαίνει απόσταση μικρότερη από την ελάχιστη, το οποίο είναι άτοπο.

$\square$

6) Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος και g μια ισομετρία του X. Αν $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to X$ είναι γεωδαισιακές γραμμές οι οποίες διατηρούνται από την δράση της g και επιπλέον η g δρα σε κάθε μια από αυτές ως μεταφορά θετικού μήκους τ_1 και τ_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ έτσι ώστε $\gamma_1 \subseteq N_\varepsilon(\gamma_2)$ και $\gamma_2 \subseteq N_\varepsilon(\gamma_1)$.

Απόδειξη.

Αν θεωρήσουμε δύο κορυφές πάνω σε κάθε γεωδαισιακή και πάρουμε το γεωδαισιακό τετράπλευρο που ορίζουν, τότε από την δ-υπερβολικότητα του χώρου θα υπάρχουν σημεία πάνω στις πλευρές των γεωδαισιακών γ_1, γ_2 που έχουν απόσταση μικρότερη ίση του 2δ. Άρα με κατάλληλη μεταφορά των γ_1, γ_2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in G$ και

$$k := d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq 2\delta$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ τώρα έχουμε ότι:

$$d(\gamma_1(m\tau_1), \gamma_2(m\tau_2)) = k$$

Εφόσον:

$$k = d(g^m\gamma_1(0), g^m\gamma_2(0)) = d(\gamma_1(m\tau_1), \gamma_2(m\tau_2))$$

Έστω ένα $t \in \mathbb{R}$. Το t θα βρίσκεται σε μοναδικό διάστημα της μορφής $[(m-1)\tau_1, m\tau_1]$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$.

Άρα για το τυχόν σημείο $\gamma_1(t)$ έχουμε $d(\gamma_1(t), \gamma(m\tau_1)) \leq \tau_1$. Συνεπώς:

$$d(\gamma_1(t), Im\gamma_2) \leq d(\gamma_1(t), \gamma_2(m\tau_2)) \leq$$
$$\leq d(\gamma_1(t), \gamma_1(m\tau_1)) + d(\gamma_1(m\tau_1), \gamma_2(m\tau_2)) \leq \tau_1 + k \leq \tau_1 + 2\delta$$

Όμοια δείχνουμε ότι ένα τυχαίο $\gamma_2(t)$ ανήκει στην $2\delta + \tau_2$ περιοχή της γ_1. Άρα η μία γεωδαισιακή περιέχεται στην $\max\{\tau_1, \tau_2\} + 2\delta$ περιοχή της άλλης.

□

7) Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος και $\gamma_1, \gamma_2 : [0, +\infty) \to X$ δύο γεωδαισιακές ακτίνες με κοινή αρχή x_0. Αν $\lim_{n\to\infty}(\gamma_1(n), \gamma_2(n))_{x_0} = +\infty$, τότε υπάρχει $M = M(\delta)$ έτσι ώστε $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq M$, για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Απόδειξη.

Έστω $t \in [0, \infty)$. Εφόσον το γινόμενο Gromov απειρίζεται υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$t \leq (\gamma_1(n), \gamma_2(n))_{x_0}$$

Θεωρούμε το γεωδαισιακό τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία $x_0, \gamma_1(n), \gamma_2(n)$. Αν το απεικονίσουμε μέσω της ϕ σε τρίποδο θα έχουμε

$$\phi(\gamma_1(t)) = \phi(\gamma_2(t)) = t$$

αφού $d(x_0, \gamma_1(t)) = d(x_0, \gamma_2(t)) = t$ και τα $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ απεικονίζονται στο ίδιο σημείο στο τρίποδο αφού $t \leq (\gamma_1(n), \gamma_2(n))_{x_0}$, καθώς και το γινόμενο Gromov είναι το μήκος στο οποίο γίνεται η διακλάδωση στο τρίποδο. Συνεπώς από τον δεύτερο ορισμό υπερβολικότητας έχουμε

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq \delta$$

Ουσιαστικά εδώ το γινόμενο Gromov μας λέει για πόσο χρόνο μένουν κοντά οι γεωδαισιακές (με κοινή αρχή). $\square$

1) Έστω $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια απεικόνιση με την ιδιότητα $\phi(m+n) \leq \phi(m) + \phi(n)$ για κάθε ζεύγος $m, n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n}$.

Απόδειξη.

Θέτουμε $A = \liminf_n \frac{\phi(n)}{n}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $d \in \mathbb{N}$ με

$$\frac{\phi(d)}{d} < A + \varepsilon$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε Ευκλείδεια διαίρεση $n = q_n d + r_n, 0 \leq r_n < d$. Τότε:

$$\frac{\phi(n)}{n} \leq \frac{\phi(q_n d)}{n} + \frac{\phi(r)}{n}$$

και γράφοντας το $q_n d = d + d + \ldots + d$ έχουμε:

$$\frac{\phi(n)}{n} \leq q_n \cdot \frac{\phi(d)}{n} + \frac{\phi(r)}{n} = \frac{q_n d}{n} \cdot \frac{\phi(d)}{d} + \frac{\phi(r)}{n}$$

Άρα

$$\limsup_n \frac{\phi(n)}{n} \leq 1 \cdot \frac{\phi(d)}{d} + 0 < A + \varepsilon$$

για το τυχόν $\varepsilon > 0$. Άρα το ανώτερο όριο στέκεται κάτω από το κατώτερο όριο και άρα ταυτίζονται. Επιπλέον η ακολουθία $\frac{\phi(n)}{n}$ είναι φραγμένη αφού:

$$\frac{\phi(n)}{n} = \frac{\phi(1+1+\ldots+1)}{n} \leq \frac{n\phi(1)}{n} = \phi(1) \in \mathbb{N}$$

$\square$

2) Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και S πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G. Για κάθε $g \in G$, ορίζουμε $||g|| = ||g||_S = d_S(1, g)$ να είναι η απόσταση του στοιχείου g από το 1 στο γράφημα Cayley $\Gamma(G, S)$ της G ως προς το S. Τότε $||gh|| \leq ||g|| + ||h||$ για κάθε $g, h \in G$.

(1) Να δειχθεί ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{||g^n||}{n}$, το οποίο συμβολίζεται με $\tau_{G,S}(g) = \tau(g)$ και ονομάζεται μήκος μετατόπισης του g.

(2) Αν g πεπερασμένης τάξης, τότε $\tau(g) = 0$.

(3) $\tau(g) = \tau(xgx^{-1})$, για κάθε $g, x \in G$ και $\tau(g^m) = |m|\tau(g)$.

(4) $\tau(g) \leq \inf\{d_S(gv, v) | \quad v \text{ κορυφή του } \Gamma(G, S)\}$.

(5) Αν $G = F$ ελεύθερη και S βάση της F, να υπολογιστεί το $\tau(g)$.

(6) Ομοίως, αν $G = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ και $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, όπου s_i γεννήτορας του i παράγοντα.

Απόδειξη. (1) Ορίζουμε $\phi_g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για κάθε $g \in G$ με $\phi_g(n) = ||g^n||$. Τότε

$$\phi_g(n+m) = ||g^{n+m}|| \leq ||g^n|| + ||g^m|| = \phi_g(n) + \phi_g(m)$$

Άρα το $\tau(g)$ υπάρχει εφόσον η ϕ_g ικανοποιεί την προηγούμενη άσκηση.

(2) Αν $o(g) = m < \infty$ τότε θέτουμε $M = \max\{||g||, ||g^2||, \ldots, ||g^{m-1}||\}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$||g^n|| \leq M$$

και άρα

$$\tau(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{||g^n||}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0$$

(3) Έχουμε:

$$\frac{||(xgx^{-1})^n||}{n} = \frac{||xg^nx^{-1}||}{n} \leq \frac{||x|| + ||x^{-1}||}{n} + \frac{||g^n||}{n} \to \tau(g)$$

Άρα $\tau(xgx^{-1}) \leq \tau(g)$. Παίρνουμε το αντίστροφο με τον ίδιο τρόπο στα στοιχεία $h, x^{-1}hx$ όπου $h = xgx^{-1}$.

Με μια αλλαγή μεταβλητής έχουμε ότι:

$$\frac{||g^{nm}||}{n|m|} \longrightarrow \tau(g)$$

Επιπλέον

$$\frac{||g^{nm}||}{n|m|} = \frac{1}{|m|} \cdot \frac{||\,(g^m)^n\,||}{n} \longrightarrow \frac{1}{|m|} \cdot \tau(g^m)$$

Άρα από μοναδικότητα ορίου

$$\frac{1}{|m|} \cdot \tau(g^m) = \tau(g)$$

(αν $m = 0$ σαφώς ισχύει το ζητούμενο.)

(4) $d_S(gv, v) = d_S(v, gv) = ||v^{-1}gv||$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\tau(g)$ στέκεται κάτω από κάθε $||v^{-1}gv||$. Δείξαμε στην άσκηση 1) ότι το όριο στέκεται κάτω από το $\phi(1)$, $||g||$ στην άσκηση που βρισκόμαστε για το $\tau(g)$. Δηλαδή

$$\tau(g) \leq ||g|| \quad \text{ για κάθε } g \in G$$

$$\iff \tau(v^{-1}gv) \leq ||v^{-1}gv|| \quad \text{ για κάθε } v, g \in G$$

Ωστόσο, έχουμε δείξει ότι $\tau(g) = \tau(v^{-1}gv)$. Άρα το $\tau(g)$ στέκεται κάτω από το infimum του συνόλου.

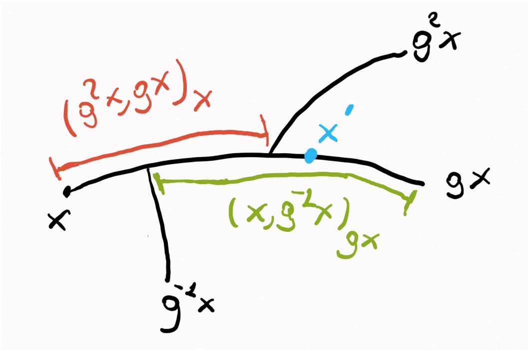
(5) Γράφουμε την g σαν ανηγμένη λέξη μήκος n στους γεννήτορες και αν στο γινόμενο g^2 γίνονται k διαγραφές σημαίνει ότι η g έχει μορφή $vg'v^{-1}$ με το μήκος του v να είναι k. Συνεπώς $\tau(g) = \tau(vg'v^{-1}) = \tau(g' = n - 2k$.

(6) Θα χρησιμοποιήσουμε προσθετικό συμβολισμό, αν το g είναι $g = (m_1 s_1, m_2 s_2, \ldots, m_k s_k)$ τότε $||g|| = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ και $||ng|| = nm_1 + nm_2 + \ldots nm_k = n\,(m_1 + \ldots m_k) = n||g||$ και άρα $\tau(g) = ||g||$.

$\square$

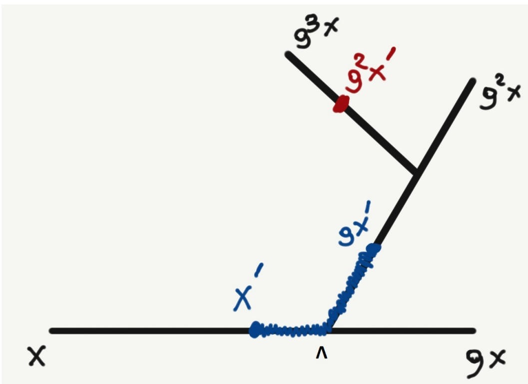
3) Έστω X ένα $\mathbb{R}$-δέντρο, g μια ισομετρία του X και $\tau_g := \inf\{d(gx, x) | x \in X\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ έτσι ώστε $d(gx_0, x_0) = \tau_g$.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε ένα τρίποδο x, gx, g^2x τότε το μέσο x' της $[x, gx]$ θα πρέπει να βρίσκεται πριν την διακλάδωση, δηλαδή να είναι μικρότερο του γινόμενου Gromov των gx, g^2 πάνω στο x. Διαφορετικά αν είναι μεγαλύτερο έχουμε το εξής άτοπο με βάση το σχήμα:



Όπου τα δύο γινόμενα Gromov είναι ίσα. (Το σχήμα δεν έχει πρόβλημα, αν ο κλάδος του g^-1x ήταν πολύ πιο δεξιά του κλάδου g^2x θα παίρναμε τα γινόμενα $(gx, g^{-1}x)_x, (x, g^2x)_{gx}$ και θα είχαμε ίδια περίπτωση.) Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει καθώς $d(x, x') = d(gx, x')$.

Είμαστε λοιπόν σε μια περίπτωση όπου:



Αφού $(x, x') = (x', gx)$ και $(x, x') = (gx, gx')$, το gx' δεν είναι ανάμεσα στα Λ, gx, και επιπλέον αφού η γεωδαισιακή $[x, x']$ είναι μέσα στην $[x, gx]$ τότε η $g[x, x']$ θα είναι μέσα στην $[gx, g^2x]$, δηλαδή το gx' πηγαίνει στον πάνω κλάδο. Όμοια κάθε φορά που δράμε το g στο $g^k[x', gx']$ έχουμε ότι το πέρας πριν την δράση είναι η αρχή μετά την δράση. Συνεπώς αν τα κολλήσουμε με

$$A = \bigcup_n g^n[x', gx']$$

έχουμε μια γεωδαισιακή που είναι g-αναλλοίωτη. Τελικά, για ένα τυχαίο $y \in X$ έχουμε ότι:

$$d(y, gy) = 2d(y, A) + d(x', gx')$$

Εφόσον υποθέσουμε ότι $d(y, A) = d(y, x_1)$ τότε $d(gy, A) = d(gy, gx_1)$ λόγω του g-αναλλοίωτου και η απόσταση του x_1 από το gx_1 είναι ακριβώς $d(x', gx')$ αφού το x_1 είναι πάνω στην A. Άρα από την διαδρομή y, x_1, gx_1, gy στο $\mathbb{R}$-δέντρο έχουμε την παραπάνω ισότητα. Δηλαδή $d(x', gx) < d(y, gy)$ για τυχαίο y και άρα πετυχαίνουμε το infimum.

Οι ιδέες σε αυτήν την άσκηση ήταν με συνομιλία με τον συνάδελφο Κωνσταντίνο Γκόλφη σχετικά με την (πιο ισχυρή) πρόταση 1.3 του παρακάτω paper:

Marc Culler and John W. Morgan. Group actions on $\mathbb{R}$-trees. Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987), no. 3, 571–604.

$\square$

4) Υποθέτουμε ότι η G είναι μια ομάδα η οποία δρα με ισομετρίες επί ενός $\mathbb{R}$-δέντρου X. Τότε για κάθε $y \in X$ υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d(y,g^n y)}{n}$ και ισούται με τ_g, όπου $\tau_g = \inf\{d(gx,x)|x \in X\}$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο όριο υπάρχει λόγω της άσκησης 1) καθώς η $\phi_y(n) = d(y, g^n)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$d(y, g^{n+m}y) \leq d(y, g^n y) + d(g^n y, g^{n+m}y) = d(y, g^n y) + d(y, g^m y)$$

Επιπλέον, βασιζόμενοι στην γεωδαισιακή A που ορίσαμε σαν ένωση στην προηγούμενη άσκηση, αν $d(y, A) = d(y, x_1)$ τότε:

$$d(y, g^n) = d(y, x_1) + d(x_1, g^n x_1) + d(g^n x_1, g^n y) = 2d(y, A) + d(x_1, g^n x_1) =$$

$$= 2d(y, A) + n \cdot d(x', gx')$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(y, g^n y)}{n} = d(x', gx') = \tau_g$$

□

Απόδειξη. Αν έχουμε ορίσει τις μετρικές d_H, d_G με κάποια επιλογή μετρικής λέξεις πάνω σε κάποια σύνολα γεννητόρων, εφόσον η ένθεση είναι ισομετρική εμφύτευση υποθέτουμε ότι υπάρχουν λ, ε που εξαρτώνται από την επιλογή των μετρικών με:

$$\frac{1}{\lambda} d_H(h_1, h_2) - \varepsilon \leq d_G(h_1, h_2) \leq \lambda d_H(h_1, h_2) + \varepsilon$$

Βασιζόμαστε στην προηγούμενη άσκηση και σταθεροποιούμε $h \in H$. Εδώ που έχουμε ομάδες, οι έννοιες των μηκών μετατόπισης των προηγούμενων ασκήσεων ταυτίζονται. Συνεπώς αν το h έχει πεπερασμένη τάξη τότε $\tau_G(h) = \tau_H(h) = 0$ δηλαδή το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε ότι $o(h) = \infty$. Τότε για κάθε $x \in H$:

$$\tau_G(h) = \lim_{n \to \infty} \frac{d_G(x, h^n x)}{n}$$

$$\tau_H(h) = \lim_{n \to \infty} \frac{d_H(x, h^n x)}{n}$$

και άρα

$$\frac{1}{\lambda} \tau_H(h) \leq \tau_G(h) \leq \lambda \tau_H(h)$$

□