Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες
3η Ομάδα Ασκήσεων

Νούλας Δημήτριος
1112201800377

10 Ιουνίου 2020

1. Η ομάδα A είναι διαιρετή και έχει υποομάδα την $kerf$ συνεπώς η ομάδα πηλίκο $A/kerf \cong imf$ είναι διαιρετή. Άρα η ομάδα imf είναι επιπλέον ένα εμφυτευτικό πρότυπο αφού είναι διαιρετή.

   Ισοδύναμα κάθε μονομορφισμός $imf \hookrightarrow M$ διασπάται.

   Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

   $$0 \to imf \overset{i}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{p} cokerf \to 0$$

   Έχουμε ότι ο μονομορφισμός i είναι διασπώμενος $\iff$ η βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη $\iff$ ο επιμορφισμός p είναι διασπώμενος.

2. Αν $Ext^1_R(M,N) = 0$ για κάθε N R-πρότυπο, δηλαδή είναι η τετριμμένη ομάδα, λόγω αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας έχουμε ότι και το $ext(M,N)$ είναι σύνολο με ένα στοιχείο.

   Δηλαδή κάθε επέκταση $0 \to N \to M' \to M \to 0$ είναι ισοδύναμη με την τετριμμένη επέκταση:

   $$0 \to N \to M \oplus N \to M \to 0$$

   Το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι κάθε επιμορφισμός $M' \to M$ διασπάται. Αυτό με την σειρά του είναι ισοδύναμο ότι το M είναι προβολικό.

3. Θα δείξουμε αρχικά ότι $n \cdot \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = (d\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z})$ όπου $d =$μκδ(m,n). Πράγματι, έστω $n[z]_m$. Αν $n = dk$ τότε:

   $$n[z]_m = dk[z]_m = [dkz]_m \in (d\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z})$$

   Αντίστροφα, έστω $[dz]_m \in (d\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z})$. Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $am + bn = d$. Συνεπώς:

   $$[dz]_m = [(am+bn)z]_m = [bnz]_m = n[bz]_m \in n \cdot \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

Επιπλέον, στην θεωρία έχει δειχθεί ότι $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, B) = B/nB$. Άρα:

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m = \frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{n \cdot \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

χρησιμοποιώντας και το 3ο θεώρημα ισομορφισμών. Άρα πράγματι η ομάδα $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ είναι κυκλική τάξης d.

4. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε $K_n = \{a \in A : na = 0\}$. Ισχύει ότι $Hom_{\mathbb{Z}}(K_n, B) = 0$. Πράγματι, αν $f : K_n \to B$ προσθετική τότε:

$$0 = f(nk) = nf(k)$$

Δηλαδή το στοιχείο $f(k) \in B$ έχει πεπερασμένη τάξη n και η ομάδα B είναι ελευθέρας στρέψης, συνεπώς $f(k) = 0$ για κάθε $k \in K_n$.

Έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K_n \overset{i}{\hookrightarrow} A \xrightarrow{\cdot n} A \longrightarrow 0$$

όπου έχουμε τον πολλαπλασιασμό με n. Είναι πράγματι ακριβής σε κάθε θέση αφού:

- $im0 = keri = 0$
- $imi = K_n = kern$
- Εφόσον η A είναι διαιρετή, $imn = A = ker(A \to 0)$

Έχουμε την μακριά ακριβής ακολουθία συνομολογίας:

$$\ldots \longrightarrow Ext^0_{\mathbb{Z}}(K_n, B) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \longrightarrow \ldots$$

δηλαδή παίρνουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \xrightarrow{n} Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$$

Έπεται ότι η δεξιά απεικόνιση είναι 1-1. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε ένα στοιχείο x της ομάδας $Ext^1_Z(A, B)$ με πεπερασμένη τάξη n, δηλαδή $nx = 0$ συνεπάγεται ότι $x = 0$. Αυτό συμβαίνει για το τυχόν $n \in \mathbb{N}$, άρα η ομάδα $Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$ είναι ελεύθερη στρέψεως.

5. a) Θεωρούμε ως προς άτοπο τον ισομορφισμό $f : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}_9 & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\Downarrow & & \Big\downarrow f & & \Big\Downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_3 & \xrightarrow{-i} & \mathbb{Z}_9 & \xrightarrow{p} & Z_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Για να οριστεί πλήρως ο ισομορφισμός f χρειάζεται να απεικονίσουμε έναν γεννήτορα σε έναν γεννήτορα. Έστω $f([1]_9) = [x]_9$ με μκδ$(x, 9) = 1$.

Λόγω της μεταθετικότητας του δεύτερου τετραγώνου έχουμε:

$$(pf)[n]_9 = [n]_3$$

για κάθε $[n]_9 \in Z_9$.

ωστόσο $(pf)[n]_9 = n(pf)[1]_9 = n \cdot p\,(f[1]_9) = np[x]_9 = [nx]_3$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι:

$$nx = n \quad mod 3$$

και άρα

$$x = 1 \quad mod 3$$

Από την μεταθετικότητα του πρώτου τετραγώνου προκύπτει ότι:

$$f[3n]_9 = [-3n]_9$$

Συνεπώς $[-3]_9 = f[3]_9 = 3f[1]_9 = [3x]_9$. Δηλαδή έχουμε τις συνεπαγωγές:

$$3x = -3 \quad mod 9$$

$$3(x+1) = 0 \quad mod 9$$

$$x + 1 = 0 \quad mod 3$$

$$x = 2 \quad mod 3$$

και άρα καταλήξαμε σε άτοπο.

$b)$ Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Z}_9$ δεν είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, συνεπώς καμία από τις δύο επεκτάσεις δεν είναι ισοδύναμη με την τετριμμένη. Έχουμε δηλαδή ότι το σύνολο $ext(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$ έχει τουλάχιστον 3 κλάσες ισοδυναμίας για στοιχεία. Αρκεί να δείξουμε ότι έχει ακριβώς 3.

Λόγω αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας με την ομάδα $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$, αρκεί να δείξουμε ότι αυτή είναι (κυκλική) τάξης 3. Πράγματι:

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3/3\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3/\{0\} \cong \mathbb{Z}_3$$

6. a) Ορίζουμε την $\widetilde{f} : ext(M,N) \to ext(M',N)$ ως εξής:

$$[e] \mapsto [e']$$

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο της κλάσης.

Αν $[e]=[\varepsilon]$ δηλαδή έχουμε ισομορφισμό $g : L_1 \to L_2$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
e : 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & L_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & 0 \\
\varepsilon : 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & L_2 \arrow[r, "p_2"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Θα πρέπει να έχουμε ισομορφισμό $\widetilde{g} : L_1' \to L_2'$ και μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & L_1' \arrow[r, "p_1'"] \arrow[d, "\widetilde{g}"] & M' \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, no head] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & L_2' \arrow[r, "p_2'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου:

$$L_1' = \{(m',l) \in M' \oplus L_1 : \quad f(m') = p_1(l) \in M'\}$$
$$L_2' = \{(m',l) \in M' \oplus L_2 : \quad f(m') = p_2(l) \in M'\}$$

Ορίζουμε την $\widetilde{g} : L_1' \to L_2'$ ως εξής:

$$(m',l) \longmapsto (m',g(l))$$

Η $\widetilde{g}$ είναι καλά ορισμένη αφού $m' \in M', g(l) \in L_2$ και ισχύει $f(m') = p_1(l) = p_2(g(l))$ από την μεταθετικότητα του πρώτου διαγράμματος. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\widetilde{g}$ είναι ισομορφισμός R-προτύπων και να ελέγξουμε την μεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος.

Δείχνουμε τα εξής:

- R-γραμμικότητα:

$$\widetilde{g}\,(r\,(m',l)) = \widetilde{g}\,(rm',rl) = (rm',g\,(rl)) = r\,(m',g(l)) = r\widetilde{g}\,(m',l)$$

$$\widetilde{g}\,((m_1',l_1)+(m_2',l_2)) = \widetilde{g}\,(m_1'+m_2',l_1+l_2) = (m_1'+m_2',g(l_1+l_2)) =$$
$$(m_1',g(l_1))+(m_2',g(l_2)) = \widetilde{g}\,(m_1',l)+\widetilde{g}\,(m_2',l_2)$$

- 1-1:
  Αν $(m',l) \mapsto (0_{M'}, 0_{L_2}) = (m', g(l)$ τότε $m' = 0$ και $g(l) = 0 \implies l = 0$ αφού g ισομορφισμός.

- Επί:
  Έστω $(m',l) \in L_2$. Αφού g ισομορφισμός, υπάρχει $l' \in L_1$ τέτοιο ώστε $g(l') = l$. Άρα:
  $$\widetilde{g}(m',l') = (m', g(l') = (m',l)$$

Αν $h_1, h_2 : N \to L_1, L_2$ και $h_1' = (0,h_1) : N \to L_1', h_2' = (0,h_2) : N \to L_2'$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "h_1'"] \arrow[d, Rightarrow] & L_1' \arrow[r, "p_1'"] \arrow[d, "\widetilde{g}"] & M' \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "h_2'"] & L_2' \arrow[r, "p_2'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r] \arrow[dd, Rightarrow] & (0, h_1(n)) \arrow[d] \\
 & (0, g(h_1(n)) \arrow[d, Rightarrow] \\
n \arrow[r] & (0, h_2(n))
\end{tikzcd} \qquad gh_1 = h_2$$

$$\begin{tikzcd}
(m',l) \arrow[r] \arrow[d] & m' \arrow[d, Rightarrow] \\
(m', g(l)) \arrow[r] & m'
\end{tikzcd}$$

άρα και τα δύο τετράγωνα είναι μεταθετικά. Συνεπώς $\widetilde{f}$ καλά ορισμένη απεικόνιση.

$b)$ Αν έχουμε I εμφυτευτικό και την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to N \xrightarrow{i} I \xrightarrow{p} Q \to 0$$

Τότε:
$$Ext^1_R(M,N) \cong coker[Hom_R(M,I) \xrightarrow{p_*} Hom_R M, Q]$$

Συνεπώς αν $g \in Hom_R(M,Q)$ συμβολίζουμε με $[g]$ την κλάση $g + imp_*$. Θεωρούμε αυτά τα $[g]$ ως στοιχεία του $Ext_R(M,N)$ (μέσω ισομορφισμού).

Πηγαίνοντας το $[g]$ δεξιά και κάτω στο διάγραμμα παίρνουμε:

$$[g] \to \lambda_{M,N}[g] = [0 \to N \xrightarrow{i_1'} X_1 \xrightarrow{p_1'} M \to 0] \to \widetilde{f}(\lambda_{M,N}[g]) =$$

$$[0 \to N \xrightarrow{i_1''} X_1' \xrightarrow{p_1''} M' \to 0]$$

Ομοίως πηγαίνοντάς το κάτω και δεξιά έχουμε:

$$[g] \to f^*([g]) = [gf] \to \lambda_{M',N}[gf] =$$

$$[0 \to N \xrightarrow{i_2'} X_2 \xrightarrow{p_2'} M' \to 0]$$

όπου:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x,y) \in M \oplus I : \quad g(x) = p(y)\} \\ X_2 &= \{(x,y) \in M' \oplus I : \quad (gf)(x) = p(y)\} \\ X_1' &= \{(m', x_1) \in M' \oplus X_1 : \quad f(m') = p_1'(x_1) \in M\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1'(n) &= (0,n) \in X_1 \\ i_1''(n) &= (0, i_1'(n)) \in X_1' \\ i_2'(n) &= (0,n) \in X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1'(x,y) &= x \in M \\ p_1''(m', x_1) &= m' \in M' \\ p_2'(m', y) &= m' \in M' \end{aligned}$$

Για να είναι το διάγραμμα μεταθετικό, δηλαδή να συμπίπτουν οι δύο κλάσεις πρέπει να υπάρχει ισομορφισμός $h : X_1' \to X_2$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1''"] \arrow[d, Rightarrow] & X_1' \arrow[r, "p_1''"] \arrow[d, "h"] & M' \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1'"] & X_2 \arrow[r, "p_2'"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $h : X_1' \to X_2$ ως εξής:

$$(m', x_1) \longmapsto (m', y)$$

όπου $x_1 = (x,y) \in M \oplus I$. Ο h είναι καλά ορισμένος εφόσον έχουμε:

$$(m', x_1) \in X_1' \implies f(m') = p_1'(x_1) = x \in M$$

$$x_1 = (x,y) \in X_1 \implies g(x) = p(y)$$

και άρα $(gf)(m') = g[f(m')] = g(x) = p(y)$ δηλαδή ισχύει ότι $(m', y) \in X_2$. Στην συνέχεια δείχνουμε ότι είναι ισομορφισμός R-προτύπων

- R-γραμμικότητα:

$$r(m', x_1) = (rm', rx_1) \mapsto (rm', ry) = r(m', y) \quad \text{αφού } rx_1 = (rx, ry)$$

$$(m'_1, x_1^1)+(m'_2, x_1^2) = (m'_1+m'_2, x_1^1+x_1^2) \mapsto (m'_1+m'_2, y^1+y^2) = (m'_1, y^1)+(m'_2, y^2)$$

εφόσον $x_1^1 = (x^1, y^1)$ και $x_1^2 = (x^2, y^2)$.

- 1-1:
Αν $q_1 = (q, y)$ και $(m', x_1) \mapsto (0_{M'}, 0_I) = (m', y)$ τότε $m' = 0, y = 0$ και μένει να δειχτεί ότι $x = 0$. Πράγματι, από την προσθετικότητα της f:

$$0 = f(0) = f(m') = p'_1(x_1) = x$$

- Επί:
Έστω $(m', y) \in X_2$. Έχουμε ότι $g(f(m')) = p(y)$. Από αυτό συνεπάγεται ότι το στοιχείο $(f(m'), y)$ ανήκει στο X_1. Έτσι έχουμε ότι το στοιχείο (m', x_1) ανήκει στο X'_1 αφού:

$$p'_1(x_1) = p'_1(f(m'), y) = f(m')$$

Επιπλέον έχουμε ότι $h(m', x_1) = (m', y)$.

Μένει να επαληθευτεί η μεταθετικότητα των δύο τετραγώνων. Πράγματι:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "i''_1"] \arrow[d, Rightarrow] & (0, i'_1(n)) \arrow[r, "h"] & h(0, i'_1(n)) \\
n \arrow[r, "i'_2"] & (0, n) &
\end{tikzcd}$$

$$i'_1(n) = (0, n) \qquad h(0, i'_1(n)) = (0, n)$$

$$\begin{tikzcd}
(m', x_1) \arrow[r, "p''_1"] \arrow[d, "h"'] & m' \arrow[d, Rightarrow] \\
(m', y) \arrow[r, "p'_2"] & m'
\end{tikzcd}$$

$$x_1 = (x, y)$$