Θεωρία Ομάδων 2

Διδάσκων: Μ. Συκιώτης

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM:
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

1 Ελεύθερες Ομάδες

Θα ορίσουμε τις ελεύθερες ομάδες ξεκινώντας από την καθολική ιδιότητα. Έστω F ομάδα και $X \subseteq F$. Λέμε ότι η F είναι ελεύθερη επί του X αν για κάθε ομάδα G και κάθε απεικόνιση $\phi : X \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\tilde{\phi} : F \to G$ που επεκτείνει την ϕ, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & & F \arrow[dl, "\tilde{\phi}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

;; Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η F είναι ελεύθερη επί του X τότε το X την παράγει. Έχοντας δεδομένη την καθολική ιδιότητα παίρνουμε για $G =< X >$ και $X \hookrightarrow < X > \subseteq F$ την ταυτοτική απεικόνιση, αυτή επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\tilde{i} : F \to < X >$. Από τις ιδιότητες του ομομορφισμού προκύπτει ότι $\tilde{i}|_{<X>} :< X > \to < X >$ είναι η ταυτοτική της ομάδας $< X >$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\tilde{i}$ έχει τετριμμένο πυρήνα για να είναι ισομορφισμός. Πράγματι, αν $\tilde{i}(y) = 1$ τότε κυνηγώντας το 1 στο διάγραμμα παίρνουμε
Θα συμβολίζουμε με $F = F(X)$ την ελεύθερη ομάδα επί του X.

Πρόταση 1. *$F(X_1) \simeq F(X_2) \iff |X_1| = |X_2|$ αν δηλαδή η βάση είναι ισοπληθική. Αυτό θα το ονομάζουμε rank της ομάδας.*

Απόδειξη. ; □

Αν $|X| = n$ τότε $F = F(X) = F_n$ ελεύθερη ομάδα τάξης (ή διάστασης) n.
Ξεκινώντας τον ορισμό μέσω της καθολικής ιδιότητας δεν εξασφαλίζουμε την ύπαρξη τέτοιων ομάδων. Έχουμε ωστόσο ότι $F_1 = \mathbb{Z}$ και ότι αν X είναι ένας χώρος που αποτελείται από ένα μπουκέτο n θηλιών με αρχή το ίδιο σημείο, τότε $\pi_1(X) = F_n$.
Γενικότερα θεωρούμε το X^{-1} ως σύμβολο και το αντιστοιχίζουμε με το X με την προφανή αντιστοίχιση $x \leftrightarrow x^-1$. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα αλφάβητο $X \sqcup X^{-1}$ και W το σύνολο των λέξεων σε αυτό.
Λέμε ότι η λέξη w_1 προκύπτει από την w_2 με στοιχειώδη αναγωγή αν η w_1 προκύπτει από την w_2 αφαιρώντας μια υπολέξη της μορφής xx^{-1} ή $x^{-1}x$. Με την έννοια της στοιχειώδης αναγωγής ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο W ως εξής:

$w \sim v$ αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία λέξεων $w = w_1, w_2, \ldots, w_n = v$ έτσι ώστε για κάθε διαδοχικές λέξεις της ακολουθίας να προκύπτει η μία από την άλλη με στοιχειώδη αναγωγή.

Ορισμός. *Ορίζουμε $F(X) = W/\sim$ με πολλαπλασιασμό:*

$$[w_1] \cdot [w_2] = [w_1 w_2]$$

όπου με $[w]$ συμβολίζουμε την κλάση της w και στο δεξί μέλος έχουμε την κλάση της παράθεσης των λέξεων w_1, w_2.

Θα λέμε μια λέξη ανηγμένη αν δεν επιδέχεται στοιχειώδης αναγωγές. Αποδεικνύεται ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει μοναδική ανηγμένη λέξη. Δηλαδή, κάθε στοιχείο γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως ανηγμένη λέξη στους γεννήτορες και στα αντίστροφά τους.

Πρόταση 2. *Κάθε ομάδα είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης.*

Απόδειξη. ; □

Αν $R \subseteq F(x)$ τότε με $F(X)$ τότε με $< X|R >$ συμβολίζουμε την ομάδα $F(X)/ << R >>$. Όπου $<< R >>$ είναι η κανονική υποομάδα της $F(X)$ που παράγεται από το R. Δηλαδή, η τομή όλων των κανονικών υποομάδων που περιλαμβάνουν το R.

Λέμε ότι $G =< X|R >=$ μια παράσταση της G αν και μόνο αν $G \simeq< X|R >= F(x)/ << R >>$. Αναφερόμαστε στο X ως γεννήτορες και στο R ως σχέσεις. Για αυτό αν το $<< R >>$ είναι τετριμμένο η ομάδα είναι ελεύθερη σχέσεων.
Λέμε την G πεπερασμένα παριστώμενη αν τα X και R είναι πεπερασμένα. Για παράδειγμα η θεμελιώδης ομάδα ενός πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών (cw-complex) είναι πεπερασμένα πα
Αν $R = \varnothing$ τότε $G =< X|\varnothing >=< X >= F(X)$.

$$\mathbb{Z}_n =< a|a^n = 1 >=< a|a^n >, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =< a, b|ab = ba >$$

2 Γραφήματα Cayley

Θα δείξουμε το εξής αποτέλεσμα: Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G μπορεί να αναπαρασταθεί πιστά (μονομορφισμός) ως ομάδα ισομετριών ενός μετρικού χώρου.

Ορισμός. *Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S. Το γράφημα Cayley $\Gamma(G, S)$ της G ως προς το S ορίζεται ως εξής:*

- Έχει κορυφές τα στοιχεία της G.
- Για κάθε κορυφή g και γεννήτορα $s \in S$ υπάρχει μια ακμή (γεμωετρική) που ενώνει τις κορυφές g και gs.

$$g \xrightarrow{s} gs$$

Παρατηρούμε ότι δύο κορυφές g και h συνδέονται με μια ακμή αν και μόνο αν $g^{-1}h \in S^{\pm 1}$.

$$\begin{tikzcd} & gs \\ g \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s^{-1}"] & \\ & gs^{-1} \end{tikzcd}$$

Αν $g^{-1}h = s \in S \iff h = gs$.
Αν $g^{-1}h = s^{-1} \in S^{-1}$ τότε $h^{-1}g = s \iff g = hs$.
Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $\Gamma(G, S)$ συνεκτικό.

(2) Το $\Gamma(G, S)$ περιέχει θηλιά αν και μόνο αν $1 \in S$.

(3) $\Gamma(G, S)$ περιέχει θηλιά ή κύκλο μήκους 2 αν και μόνο αν $S \cap S^{-1} \neq \varnothing$.

(4) Κάθε κορυφή του $\Gamma(G, S)$ αποτελεί άκρο $2n$ το πλήθος ακμών με $n = |S|$.

(5) Το $\Gamma(G, S)$ είναι δέντρο (συνεκτικό, χωρίς κύκλους) αν και μόνο αν η G είναι ελεύθερη με βάση το S.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, dash, "s_{i2}^{\varepsilon_2}"] & & & \\ g \arrow[ur, dash, "s_{i1}^{\varepsilon_1}"] & & \cdot \arrow[r, dash] & \dots \arrow[r, dash, "s_{ik}^{\varepsilon_k}"] & h \end{tikzcd}$$

$< X|R >$ οι σχέσεις κρύβονται στους κύκλους του γραφήματος, δηλαδή εκεί που θα έχουμε $s_{i1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{ik}^{\varepsilon_k} = 1$.
Το γράφημα $\Gamma(G,S)$ αποκτά δομή μετρικού χώρου ως εξής:

- Κάθε ακμή έχει μήκος 1.
- Η απόσταση δύο κορυφών είναι το ελάχιστο των μηκών των μονοπατιών που τις ενώνουν.

Τα μονοπάτια που επιτυγχάνουν την απόσταση των άκρων τους θα λέγονται γεωδαισιακά.
Η G γίνεται μετρικός χώρος με την μετρική της $\Gamma(G,S)$. Η επαγόμενη μετρική στο G θα λέγεται μετρική της λέξης:

$$d_S(g,h) = \min\{k \in \mathbb{N}, g^{-1}h = s_{i1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{ik}^{\varepsilon_k}, s_{ij} \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$$

Πρόκειται για το ελάχιστο των μηκών των λέξεων στο αλφάβητο $S^{\pm 1}$ που αναπαριστούν το $g^{-1}h$. Φυσικά $||1|| = 0$, όπου η νόρμα είναι η νόρμα της λέξης $||g||_S = d_S(1,g)$ και ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $||g||_S \geq 0$.
- $||gh||_S \leq ||g||_S + ||h||_S$.
- $||g^{-1}||_S = ||g||_S$.
- $||g^{-1}h||_S = d_S(g,h)$.

Παρατηρήσεις:

(1) Η μετρική της λέξης εξαρτάται από το σύνολο γεννητόρων S.

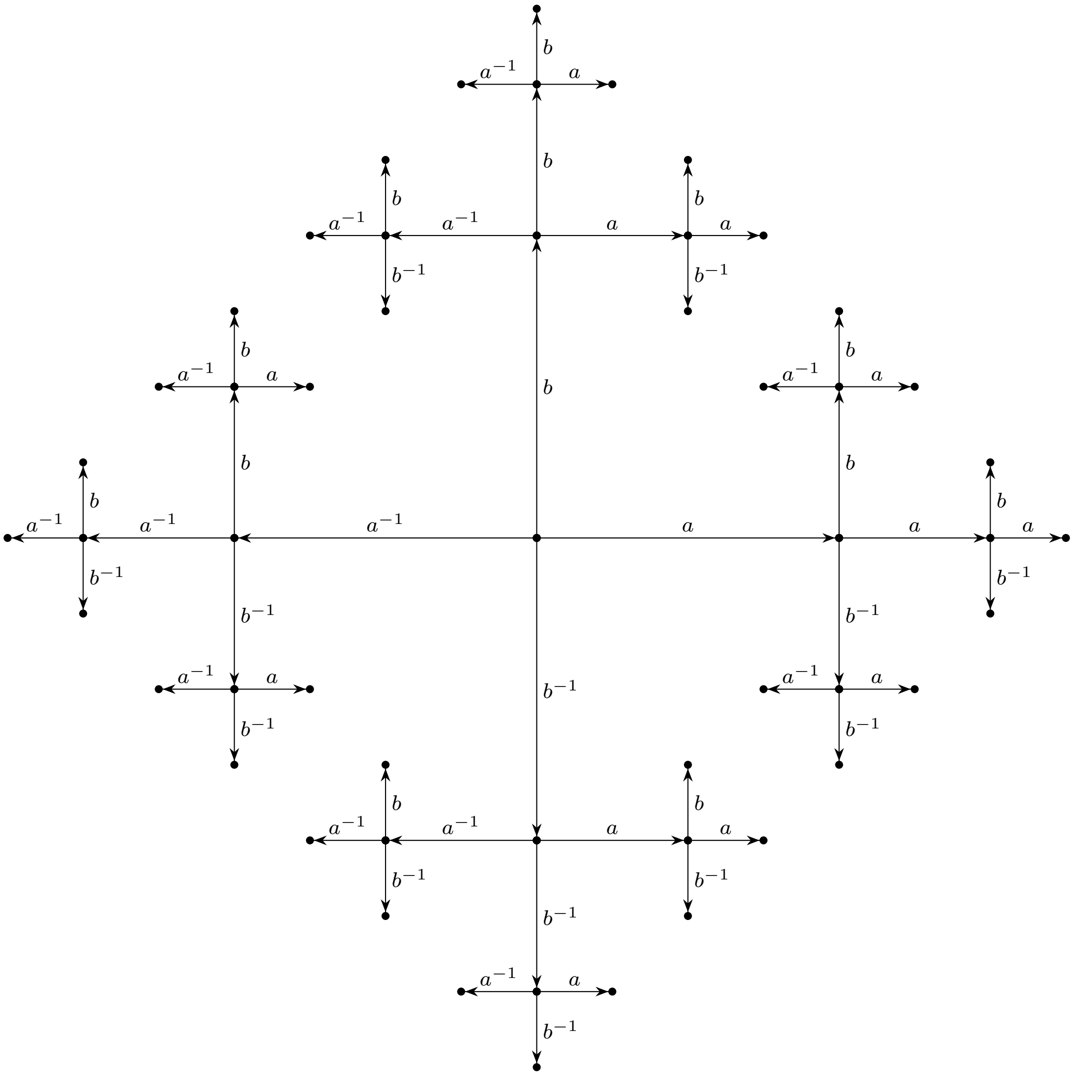
(2) Η G δρα στο $\Gamma(G,S)$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά:

$$L_g : x \mapsto gx \qquad\qquad L_g : x \xrightarrow{\quad s \quad} xs \mapsto gx \xrightarrow{\quad s \quad} gxs$$

$$(x, xs) \mapsto (gx, gxs)$$

Δρα σαν ισομετρία. Η L_g ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε το εσωτερικό της ακμής να είναι ισομετρία. Έτσι κάθε L_g είναι ισομετρία του $\Gamma(G,S)$ και η G δρα στο $\Gamma(G,S)$ με ισομετρίες.
Η δράση $G \to \Gamma(G,S)$ είναι ελεύθερη μεταβατική στις κορυφές και το γράφημα πηλίκο (δηλαδή ο χώρος τροχιών) αποτελείται από μια κορυφή και $2n$ το πλήθος ακμές. Δηλαδή $\Gamma(G,S)/G$ είναι το μπουκέτο $2n$ θηλιών από το ίδιο σημείο.

Παράδειγμα γραφήματος Cayley για την ελεύθερη τάξης 2 $G = F_2 = F(a, b)$:



3 Σχεδόν Ισομετρίες

Ορισμός. *Έστω* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *δύο μετρικοί χώροι. Μια όχι απαραίτητα συνεχή, ούτε* $1-1$*)* $\phi : X \to Y$ *λέγεται* (λ, ε)*-σχεδόν ισομετρική εμφύτευση αν υπάρχουν* $\lambda > 0$ *και* $\varepsilon \geq 0$ *έτσι ώστε:*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Αν επιπροσθέτως, υπάρχει $k \geq 0$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του Y να βρίσκεται στην k-περιοχή της εικόνας $\phi(X)$, δηλαδή $Y \subseteq N_k(\phi(X))$, τότε λέμε ότι η ϕ είναι (λ, ε)-σχεδόν ισομετρία. Έχουμε δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση το σχεδόν επί. Σαφώς όπου δεν χρειάζεται διευκρίνηση λέμε απλά σχεδόν ισομετρία.

$$N_k(A) = \{y \in Y : \quad d_Y(y, a) \leq k, \quad \text{για κάποιο } a \in A\}, \quad A \subseteq Y.$$

Δύο μετρικοί χώροι λέγονται σχεδόν ισομετρικοί αν υπάρχει μια σχεδόν ισομετρία $\phi : X \to Y$ και συμβολίζουμε $X \underset{qi}{\sim} Y$. Η έννοια της σχεδόν ισομετρίας επάγει σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των μετρικών χώρων.