Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες
1η Ομάδα Ασκήσεων

1. Να δείξετε ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα μορφισμό f σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$:
(α) ο f είναι ισομορφισμός,
(β) ο f είναι μονομορφισμός και διασπώμενος επιμορφισμός,
(γ) ο f είναι επιμορφισμός και διασπώμενος μονομορφισμός.

2. Έστω M ένα R-πρότυπο και $A, B, C \subseteq M$ τρία υποπρότυπα.
(α) Να δείξετε ότι $A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap (A + C)$.
(β) Να βρείτε ένα παράδειγμα, για το οποίο ο εγκλεισμός του (α) είναι γνήσιος.
(*Υπόδειξη:* Αναζητήστε κατάλληλους διανυσματικούς υποχώρους ενός 2-διάστατου διανυσματικού χώρου.)
(γ) Αν είναι $A \subseteq C$, τότε να δείξετε ότι ο εγκλεισμός του (α) ισχύει ως ισότητα, δηλαδή ότι $A + (B \cap C) = (A + B) \cap C$.[1]

3. Έστω R ένας δακτύλιος και $C = \{c \in R : cr = rc \text{ για κάθε } r \in R\}$ το κέντρο του.
(α) Έστω M, N δύο R-πρότυπα. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ και κάθε στοιχείο $c \in C$, ορίζουμε την απεικόνιση $cf : M \longrightarrow N$ θέτοντας $(cf)(x) = cf(x) \in N$ για κάθε $x \in M$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση cf είναι γραμμική και ότι με τον ορισμό αυτό η αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ εφοδιάζεται με τη δομή ενός C-προτύπου.
(β) Έστω M, N, L τρία R-πρότυπα. Να δείξετε ότι για κάθε $c \in C$ και γραμμικές απεικονίσεις $f : M \longrightarrow N$ και $g : N \longrightarrow L$, είναι $g(cf) = c(gf) = (cg)f : M \longrightarrow L$.[2]

4. Έστω R ένας δακτύλιος, $C = \{c \in R : cr = rc \text{ για κάθε } r \in R\}$ το κέντρο του και $\mathcal{K} = R\text{-Mod}$ η κατηγορία των R-προτύπων
(α) Έστω $c \in C$. Για κάθε R-πρότυπο M θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\eta(c)_M = c1_M : M \longrightarrow M$.[3] Να δείξετε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις $\eta(c)_M$, $M \in ob(\mathcal{K})$, αποτελούν τις συνιστώσες ενός φυσικού μετασχηματισμού $\eta(c) : 1_{\mathcal{K}} \longrightarrow 1_{\mathcal{K}}$ από τον ταυτοτικό συναρτητή $1_{\mathcal{K}}$ της κατηγορίας $\mathcal{K}$ στον εαυτό του.
(β) Έστω $\eta : 1_{\mathcal{K}} \longrightarrow 1_{\mathcal{K}}$ ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον ταυτοτικό συναρτητή $1_{\mathcal{K}}$ της κατηγορίας $\mathcal{K}$ στον εαυτό του. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $c \in C$, έτσι ώστε $\eta = \eta(c)$.[4]
(*Υπόδειξη:* Εξετάστε τη συνιστώσα $\eta_R : R \longrightarrow R$ του φυσικού μετασχηματισμού η.)

5. Έστω $f : M \longrightarrow N$ ένας διασπώμενος επιμορφισμός R-προτύπων και $s : N \longrightarrow M$ μια γραμμική απεικόνιση με $fs = 1_N$. Θεωρούμε επίσης τον πυρήνα $\ker f$ της f και την ενθετική απεικόνιση $\iota : \ker f \hookrightarrow M$.
(α) Έστω $g : N \longrightarrow \ker f$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι η γραμμική

[1] Η ιδιότητα αυτή του διατεταγμένου συνόλου των υποπροτύπων του M είναι γνωστή ως ημι-επιμεριστικότητα (modularity).
[2] Έτσι, η σύνθεση των γραμμικών απεικονίσεων δεν είναι μόνο δι-προσθετική αλλά και C-διγραμμική.
[3] Με βάση τον ορισμό της Άσκησης 3, η απεικόνιση $\eta(c)_M$ είναι η απεικόνιση $x \mapsto cx$, $x \in M$.
[4] Έτσι, η απεικόνιση $c \mapsto \eta(c)$ είναι μια αμφιμονοσημαντη αντιστοιχία μεταξύ του κέντρου του δακτυλίου R και του *συνόλου* των φυσικών μετασχηματισμών από τον ταυτοτικό συναρτητή της κατηγορίας των R-προτύπων στον εαυτό του.

απεικόνιση $s' = s + \iota g : N \longrightarrow M$ ικανοποιεί τη σχέση $fs' = 1_N$.
(β) Έστω $s' : N \longrightarrow M$ μια γραμμική απεικόνιση με $fs' = 1_N$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $g : N \longrightarrow \ker f$, τέτοια ώστε $s' = s + \iota g$.[5]

6. Έστω $f : N \longrightarrow M$ ένας διασπώμενος μονομορφισμός R-προτύπων και $r : M \longrightarrow N$ μια γραμμική απεικόνιση με $rf = 1_N$. Θεωρούμε επίσης τον συν-πυρήνα $\operatorname{coker} f = M/\operatorname{im} f$ της f και την απεικόνιση πηλίκο $\pi : M \longrightarrow \operatorname{coker} f$.
(α) Έστω $g : \operatorname{coker} f \longrightarrow N$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $r' = r + g\pi : M \longrightarrow N$ ικανοποιεί τη σχέση $r'f = 1_N$.
(β) Έστω $r' : M \longrightarrow N$ μια γραμμική απεικόνιση με $r'f = 1_N$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $g : \operatorname{coker} f \longrightarrow N$, τέτοια ώστε $r' = r + g\pi$.[6]

[5] Έτσι, η απεικόνιση $g \mapsto s + \iota g$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\operatorname{Hom}_R(N, \ker f)$ και $\text{r-split}(f) = \{s' \in \operatorname{Hom}_R(N, M) : fs' = 1_N\}$.

[6] Έτσι, η απεικόνιση $g \mapsto r + g\pi$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\operatorname{Hom}_R(\operatorname{coker} f, N)$ και $\text{l-split}(f) = \{r' \in \operatorname{Hom}_R(M, N) : r'f = 1_N\}$.