Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες
2η Ομάδα Ασκήσεων

Νούλας Δημήτριος
1112201800377

11 Μαΐου 2020

1. $i)$ Γνωρίζουμε για τους ισομορφισμούς στην $S-Mod$ ότι είναι ακριβώς οι 1-1 και επί γραμμικές απεικονίσεις, επομένως οι συνιστώσες $\eta_M : FM \to GM$ είναι 1-1 και επί. Έστω $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma$ μια ακριβής ακολουθία R-προτύπων. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_A"'] & FB \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "\eta_B"'] & F\Gamma \arrow[d, "\eta_\Gamma"] \\ GA \arrow[r, "Gf"] & GB \arrow[r, "Gg"] & G\Gamma \end{tikzcd}$$

Αν ο G είναι ακριβής, δηλαδή η κάτω γραμμή είναι ακριβής έχουμε $imGf = kerGg$. Επιπλέον $\eta_\Gamma(Fg)(Ff) = (Gg)(Gf)\eta_A = 0\eta_A = 0 = \eta_\Gamma 0$ και η_Γ 1-1 συνεπώς $(Fg)(Ff) = 0$ δηλαδή $imFf \subseteq kerFg$. Αντίστροφα, αν $b \in kerFg$ τότε $(Gg)\eta_B(b) = \eta_\Gamma(0) = 0 \implies \eta_B(b) \in kerGg = imGf$ συνεπώς υπάρχει $a' \in GA$ τέτοιο ώστε $Gf(a') = \eta_B(b)$. Επειδή η η_A είναι επί υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\eta_A(a) = a'$ και:

$$\eta_B(Ff)(a) = (Gf)\eta_A(a) = (Gf)(a') = \eta_B(b) \implies Ff(a) = b$$

αφού η_B 1-1 και άρα $\in imFf$. Συνεπώς $kerFg \subseteq imFf$.

Αν ο F είναι ακριβής έχουμε $imFf = kerFg$. Επιπλέον $(Gg)(Gf)\eta_A = \eta_\Gamma(Fg)(Ff) = \eta_\Gamma 0 = 0 = 0\eta_A$ και επειδή η_A επί έχουμε $(Gf)(Gf) = 0$ δηλαδή $imGf \subseteq kerGg$. Αντίστροφα, αν $b \in kerGg$ επειδή η η_B είναι επί υπάρχει $b' \in FB$ τέτοιο ώστε $\eta_B(b') = b$.

$$\eta_\Gamma(Fg)(b') = (Gg)\eta_B(b') = 0 \implies b' \in kerFg = imFf$$

αφού η_Γ 1-1. Συνεπώς υπάρχει $a' \in FA$ τέτοιο ώστε $Ff(a') = b'$.

$$(Gf)\eta_A(a') = \eta_B(Ff)(a') = \eta_B(b') = b \implies b \in imGf$$

δηλαδή $kerGg \subseteq imGf$.

$ii)$ Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_A"'] & FB \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "\eta_B"'] & F\Gamma \arrow[d, "\eta_\Gamma"] \\
0 \arrow[r] & GA \arrow[r, "Gf"] & GB \arrow[r, "Gg"] & G\Gamma
\end{tikzcd}$$

Αν ο G είναι αριστερά ακριβής (αντίστοιχα ο F) η ακριβεία στο FB (αντίστοιχα στο GB) δείχνεται όπως προηγουμένως. Έστω G αριστερά ακριβής, για να είναι ο F αριστερά ακριβής αρκεί η Ff να είναι 1-1. Έστω $a \in kerFf$. Τότε $(Gf)\eta_A(a) = \eta_B(Ff)(a) = \eta_B 0$ και επειδή Gf 1-1 έχουμε $\eta_A(a) = 0 \implies a = 0$. Άρα $kerFf = \{0\}$.

Έστω F αριστερά ακριβής, ομοίως αρκεί να δειχτεί ότι η Gf είναι 1-1. Έστω $a \in kerGf$. Τότε αφού η_A επί, υπάρχει $a' \in FA$ τέτοιο ώστε $\eta_A(a') = a$.

$$\eta_B(Ff)(a') = (Gf)\eta_A(a') = 0 \xRightarrow{\eta_B \, 1\text{-}1} Ff(a') = 0 \xRightarrow{Ff \, 1\text{-}1} a' = 0 \implies a = 0$$

δηλαδή $kerGf = \{0\}$.

2. Έστω M, N δύο R-πρότυπα και $f : M \to N$ R-γραμμική. Αρκεί να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(X,M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f_*"'] & U(M) = M \arrow[d, "Uf=f"] \\
Hom_R(X,N) \arrow[r, "\eta_N"] & U(N) = N
\end{tikzcd}$$

Έστω $g \in Hom_R(X, M)$. Ακολουθώντας το διάγραμμα δεξιά παίρνουμε $g(x_0) \in M$ και στην συνέχεια κάτω παίρνουμε $f(g(x_0)) \in N$. Αντίστοιχα, ακολουθώντας το διάγραμμα κάτω παίρνουμε $f_*(g) = fg \in Hom_R(X, N)$ και στην συνέχεια δεξιά παίρνουμε $(fg)(x_0) = f(g(x_0)) \in N$.

3. $i)$ Έχουμε $A \subseteq M, B \subseteq M$ συνεπώς $A + B \subseteq M$. Αντίστροφα, εφόσον μκδ$(2^n, 3^n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $a = a(n), b = b(n) \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $a2^n + b3^n = 1$. Συνεπώς, αν $(x_n)_n \in M$ τότε $x_n = a2^n x_n + b3^n x_n$. Δηλαδή $(x_n)_n = (a(n)2^n x_n)_n + (b(n)3^n x_n)_n \in A + B$.

   $ii)$ Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $(a_n)_n \in A$. Για τα $k \leq n$, εφόσον $2^n \mid a_n$ γράφουμε τους όρους της $(a_n)_n$ ως:

$$a_n = 0 + 2^k 2^{n-k} b_n$$

Για τα $k > n$ (ισχύει για πεπερασμένους όρους της ακολουθίας) έχουμε την αναπαράσταση $a_n = a_n + 0$. Δηλαδή $(a_n)_n = (x_n)_n + (y_n)_n \in M_0 + 2^k M$ τέτοιες ώστε:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \leq n \\ a_n, & \text{αν } k > n \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 2^k 2^{n-k} b_n, & \text{αν } k \leq n \\ 0, & \text{αν } k > n \end{cases}$$

Επομένως $A \subseteq M_0 + 2^k M$ για το τυχόν $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως το $B \subseteq M_0 + 2^n M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$iii)$ Έστω $(x_n)_n \in M$. Τότε για κάθε n υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $x_n = a x_n 2^n + b x_n 3^n \implies (x_n)_n = (a(n) x_n 2^n)_n + (b(n) x_n 3^n)_n = (2^n a_n)_n + (3^n b_n)_n \in A + B$.

Συνεπώς $f((x_n)_n) = f((2^n a_n)_n) + f((3^n b_n)_n)$ από προσθετικότητα. Ωστόσο:

$$\begin{aligned} f((2^n a_n)_n) &= f(a_0, 2a_1, 2^2 a_2, \ldots 2^{k-1} a_{k-1}, 0, 0 \ldots) \\ &+ f(0, \ldots, 0, 2^k a_k, 2^{k+1} a_{k+1}, \ldots) \end{aligned}$$

Επειδή $f|_{M_0} = 0$ ο πρώτος όρος είναι 0, άρα:

$$\begin{aligned} f((2^n a_n)_n) &= f(0, \ldots, 0, 2^k a_k, 2^{k+1} a_{k+1}, \ldots) \\ &= 2^k f(0, \ldots, 0, a_k, 2a_{k+1}, \ldots) = 2^k x \end{aligned}$$

δηλαδή $2^k \mid f((2^n a_n)_n)$ για κάθε $k \geq 0$. Άρα $f((2^n a_n)_n) = 0$ και ομοίως $f((3^n b_n)_n) = 0$. Συνεπώς $f = 0$.

$iv)$ Έστω $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M/M_0, \mathbb{Z})$. Έχουμε:

$$M \xrightarrow{p} M/M_0 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

και άρα για την $fp : M \to \mathbb{Z}$ ισχύει $fp(M_0) = \{0\}$ συνεπώς $fp = 0$ και επειδή η προβολή p είναι επιμορφισμός, παίρνουμε $f = 0$. Άρα:

$$Hom_{\mathbb{Z}}(M/M_0, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

4. $i)$ Εφόσον η M_0 είναι υποομάδα της M υπάρχει σύνολο $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε $M_0 = \mathbb{Z}^{(J)}$. Επιπλέον, επειδή η M_0 είναι αριθμήσιμη όπως και η $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Έχουμε ότι το J είναι αριθμήσιμο. Άρα $I \setminus J \neq \varnothing$. Θεωρούμε την ομάδα πηλίκο M/M_0. Αν $(a_i)_i + M_0 \in M/M_0$ τότε για κάθε $i \in J$ ισχύει $a_i = 0$. Συνεπώς:

$$M/M_0 = \mathbb{Z}^{(I)}/\mathbb{Z}^{(J)} = \{(a_i)_i + M_0 : a_i \neq 0 \quad \text{για πεπερασμένα } i \in I\} \cong \mathbb{Z}^{(I \setminus J)}$$

Ο ισομορφισμός προκύπτει από την $\mathbb{Z}$-γραμμική απεικόνιση:

$$\phi : \mathbb{Z}^{(I)} \to \mathbb{Z}^{(I \setminus J)}$$

$$(a_i)_i \mapsto (a_i)_i \quad \forall i \in I \setminus J$$

και το 1ο θεώρημα ισομορφισμών προτύπων.

Έστω $i_0 \in I \setminus J$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $f : \mathbb{Z}^{(I \setminus J)} \to \mathbb{Z}$: $(a_i)_i \mapsto a_{i_0} \in \mathbb{Z}$. Τότε αν p η προβολή του M στο M/M_0 έχουμε:

$$M \xrightarrow{p} M/M_0 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^{(I \setminus J)} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

και εφόσον p, f επιμορφισμοί καθώς και ϕ ισομορφισμός η $f\phi p : M \to \mathbb{Z}$ είναι μη τετριμμένη ενώ $f\phi p(M_0) = f\phi(\{0\}) = \{0\}$.

$ii)$ Αν το $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ είναι προβολικό τότε υπάρχει πρότυπο Q και σύνολο I τέτοια ώστε: $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus Q \cong \mathbb{Z}^{(I)}$. Επειδή το αριστερό μέλος είναι υπεραριθμήσιμο έχουμε ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο. Επιπλέον καθώς $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι:

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \oplus Q \cong M_0 \leq \mathbb{Z}^{(I)}$$

όπου M_0 υποομάδα της $\mathbb{Z}^{(I)}$. Συνεπώς υπάρχει από το $i)$ μη τετριμμένη $\mathbb{Z}$-γραμμική $f : \mathbb{Z}^{(I)} \to \mathbb{Z}$ που να μηδενίζεται στον περιορισμό στο M_0. Λόγω του ισομορφισμού, υπάρχει μη τετριμμένη γραμμική $\phi : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus Q \to \mathbb{Z}$ όπου μηδενίζεται στον περιορισμό $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \oplus Q$ και συνεπώς, από την προηγούμενη άσκηση, μηδενίζεται παντού στο $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus Q$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι προβολικό.

5. $i)$ Θεωρούμε την $\mathbb{Z}$-γραμμική απεικόνιση:

$$f : M \to N$$

$$(x_n)_n \mapsto (2^n x_n)_n \in N$$

Έστω $(x_n)_n \in kerf$. Τότε $(2^n x_n)_n = 0_N = 0_M = (0)_n$ δηλαδή $x_n = 0$ για κάθε n. Συνεπώς $kerf = \{0\}$.

$ii)$ Έχουμε ότι οι ακολουθίες στο M_0 είναι τελικά μηδενικές συνεπώς $M_0 \subseteq N$ και $2N \subseteq N \implies M_0 + 2N \subseteq N$. Αντίστροφα, έστω $(a_n)_n \in N$. Ορίζουμε τις ακολουθίες $(x_n)_n \in M_0, (y_n)_n \in 2N$ ως εξής:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } 2 \mid a_n \\ a_n, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 2\frac{a_n}{2}, & \text{αν } 2 \mid a_n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πράγματι $(x_n) \in M_0$ εφόσον το 2 δεν θα διαιρεί το a_n για πεπερασμένα το πλήθος n καθώς $v(a_n) \to \infty$. Δηλαδή:

$$(a_n)_n = (x_n)_n + (y_n)_n \in M_0 + 2N$$

$iii)$ Από δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών προτύπων έχουμε:

$$N/2N = (M_0 + 2N)/2N \cong M_0/(M_0 \cap 2N) = M_0/2M_0$$

εφόσον $2M_0 \subseteq 2N, M_0 \implies 2M_0 \subseteq M_0 \cap 2N$ και αν $(a_n)_n \in M_0 \cap 2N$ τότε $a_n \neq 0$ για πεπερασμένα το πλήθος n και $a_n = 2x_n$ όπου $(x_n)_n \in N$. Δηλαδή το a_n όπου δεν είναι 0 είναι πολλαπλάσιο του 2 $\implies (a_n)_n \in 2M_0$.

Έχουμε ότι $M_0/2M_0 = \{(x_n \mod 2)_n : (x_n)_n \in M_0\}$, δηλαδή ακολουθίες με στοιχεία 0 ή 1 και πεπερασμένο το πλήθος 1. Αν $(a_n)_n \in M_0/2M_0$ με $a_n = 0, 1$ και m η θέση στην οποία εμφανίζεται το 1 για τελευταία φορά τότε η $(a_n)_n$ αντιστοιχίζεται κατά μοναδικό τρόπο στον φυσικό αριθμό $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0$ με δυαδική αναπαράσταση. Δηλαδή υπάρχει 1-1 απεικόνιση από το $M_0/2M_0$ στο $\mathbb{N}$.

6. $i)$ Θεωρούμε την $\mathbb{Z}$-γραμμική απεικόνιση:

$$\phi : N \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I)}$$

$$(a_i)_i \mapsto (a_i \mod 2)_i$$

Αν $\phi((a_i)_i) = (0)_i \implies a_i = 0 \mod 2$ για κάθε $i \in I$ δηλαδή $(a_i)_i \in 2N$, συνεπώς $ker\phi = 2N$. Από πρώτο θεώρημα ισομορφισμών προτύπων έχουμε ότι:

$$N/2N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I)}$$

Επιπλέον το $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}$ είναι αριθμήσιμο με την αντιστοίχιση στην δυαδική αναπαράσταση των φυσικών. Συνεπώς $|I| = |\mathbb{N}|$. Επιπλέον το $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ είναι αριθμήσιμο καθώς είναι αριθμήσιμη ένωση των αριθμήσιμων $F_k = \{(a_n)_n : a_n = 0, n > k\}$. Άρα η ομάδα $N = \mathbb{Z}^{(I)}$ είναι αριθμήσιμη.

$ii)$ Αν το $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ είναι προβολικό ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο τότε υπάρχει $\mathbb{Z}$-πρότυπο Q και I σύνολο τέτοιο ώστε: $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus Q \cong \mathbb{Z}^{(I)}$. Συνεπώς αν $N = \{(a_n)_n : limv(a_n) = \infty\}$ τότε $N \oplus Q \cong H \leq \mathbb{Z}^{(I)}$ όπου H υποομάδα του $\mathbb{Z}^{(I)}$. Τότε $N \cong H_0 \leq H$ και από πρόταση υπάρχει σύνολο J τέτοιο ώστε $H_0 \cong \mathbb{Z}^{(J)}$. Δηλαδή $N \cong \mathbb{Z}^{(J)}$. Επειδή από την προηγούμενη άσκηση ισχύει ότι η $N/2N$ αριθμήσιμη έπεται ότι και η $\mathbb{Z}^{(J)}/2\mathbb{Z}^{(J)}$ είναι αριθμήσιμη. Από το $i)$ έχουμε ότι η $\mathbb{Z}^{(J)}$ είναι αριθμήσιμη και άρα το ίδιο ισχύει για την N. Αυτό είναι άτοπο αφού έχει δειχτεί στην προηγούμενη άσκηση ότι η N είναι υπεραριθμήσιμη. Άρα το $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι προβολικό ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

7. $i)$ Η ταυτοτική απεικόνιση του 0 ως R-προτύπου είναι η μηδενική απεικόνιση. Επειδή ισχύει $F1_A = 1_{FA}$ καθώς ο F είναι συναρτητής, έχουμε ότι η $F0 \to F0$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $F0$ S-προτύπου. Αρκεί να

δείξουμε ότι $F(0 : A \to B) = 0 : FA \to FB$. Λόγω προσθετικότητας ι-σχύει: $F0 = F(0+0) = F0 + F0$ και λόγω της δομής της αβελιανής ομάδας $Hom_S(FA, FB)$ ισχύει $F0 = 0_{Hom_S(FA,FB)} = 0 : FA \to FB$.

Γνωρίζουμε για έναν προσθετικό συναρτητή ότι τα $FM \oplus FN, F(M \oplus N)$ είναι ισομορφικά μέσω της $a : FM \oplus FN \to F(M \oplus N)$ όπου $a(x, y) = (Fi_M)(x) + (Fi_N)(y) \in F(M \oplus N)$ για κάθε $(x, y) \in FM \oplus FN$.

Άρα αν $FM, FN = 0$ (ως S-πρότυπα) ισχύει $FM \oplus FN = 0 \implies F(M \oplus N) = 0$. Αντίστροφα αν $F(M \oplus N) = 0 \implies FM \oplus FN = 0$. Έστω $x \in FM$ τότε $(x, 0) \in FM \oplus FN = 0 \implies x = 0$. Συνεπώς $FM = 0$ και ομοίως $FN = 0$.

$ii)$ Έστωσαν $M, N \in k_F$ και $f : M \to N$ R-γραμμική. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to kerf \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} imf \to 0$$

και επειδή ο F είναι αριστερά ακριβής η παρακάτω ακολουθία S-προτύπων είναι ακριβής:

$$0 \to Fkerf \xrightarrow{Fi} FM = 0 \xrightarrow{Ff} Fimf$$

δηλαδή η $Fi : Fkerf \to \{0\}$ είναι 1-1 και άρα το $Fkerf$ έχει 1 στοιχείο, συνεπώς είναι το μηδενικό S-πρότυπο.

$iii)$ Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to imf \xrightarrow{j} N \xrightarrow{p} cokerf \to 0$$

καθώς ο F είναι ακριβής η παρακάτω ακολουθία S-προτύπων είναι και αυτή μια βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to Fimf \xrightarrow{Fj} FN = 0 \xrightarrow{Fp} Fcokerf \to 0$$

δηλαδή η $Fp : \{0\} \to Fcokerf$ είναι επί, άρα το $Fcokerf$ έχει 1 στοιχείο, συνεπώς είναι το μηδενικό S-πρότυπο.

Έστωσαν $A, C \in k_F$ και $f : A \to B, g : B \to C$ R-γραμμικές τέτοιες ώστε να έχουμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

Καθώς ο F είναι ακριβής έχουμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to FA = 0 \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC = 0 \to 0$$

δηλαδή έχουμε Fg επί και $kerFg = imFf = 0$ άρα Fg ισομορφισμός S-προτύπων, συνεπώς $FB = 0$.

8. Έστω A, B αβελιανές ομάδες και $f : A \to B$ ομομορφισμός ομάδων. Έχουμε τους συναλλοίωτους συναρτητές $F = Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, \_)) : Ab \to Ab$ και $G = Hom_{\mathbb{Z}}(UM, \_) : Ab \to Ab$. Ο πρώτος μάλιστα είναι σύνθεση των δύο συναλλοίωτων συναρτητών:

$$Hom_{\mathbb{Z}}(R, \_) : \mathbb{Z}\text{-}Mod = Ab \to Ab$$

όπου εδώ ως R θεωρούμε την προσθετική ομάδα $(R, +)$ και

$$Hom_R(M, \_) : R\text{-}Mod \to Ab$$

όπου λόγω της εκφώνησης έχουμε $Hom_{\mathbb{Z}}(R, A), Hom_{\mathbb{Z}}(R, B) \in ob(R\text{-}Mod)$. Επιπλέον, η δράση του F σε μια απεικόνιση g είναι απλά η g_* (σύνθεση από αριστερά) εφόσον αυτό προκύπτει από τις διαδοχικές δράσεις των παραπάνω συναρτητών. Φυσικά έχουμε και ότι $Gg = g_*$. Αρκει επομένως να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc}
Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, A)) & \xrightarrow{\quad \zeta_A \quad} & Hom_{\mathbb{Z}}(UM, A) \\
{\scriptstyle f_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\
Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)) & \xrightarrow{\quad \zeta_B \quad} & Hom_{\mathbb{Z}}(UM, B)
\end{array}$$

Έστω $h \in Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, A))$. Έχουμε:

$$\begin{gathered}
h : M \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, A) \\
x \mapsto g_x : (R, +) \longrightarrow A \\
h(x)(r) = g_x(r) \in A \quad \forall r \in R
\end{gathered}$$

Ακολουθώντας το διάγραμμα κάτω και δεξιά παίρνουμε το στοιχείο $\zeta_B(fh)$ όπου για $x \in UM = M$ ισχύει:

$$\zeta_B(fh)(x) = [(fh)(x)](r_0) = [f(h(x))](r_0) = (fg_x)(r_0) = f[g_x(r_0)] \in B$$

Ακολουθώντας το διάγραμμα δεξιά και κάτω παίρνουμε το στοιχείο $f[\zeta_A(h)]$ όπου για $x \in UM = M$ ισχύει:

$$f[\zeta_A(h)](x) = f[\zeta_A(h)(x)] = f[h(x)(r_0)] = f[g_x(r_0)] \in B$$

άρα το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

9. $i)$ Ο συναρτητής U είναι ακριβής καθώς αν θεωρήσουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία R-προτύπων:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

με f, g R-γραμμικές, η ίδια ακολουθία που προκύπτει με την δράση του U θα παραμείνει βραχεία και ακριβής. Αυτό ισχύει διότι οι F-διανυσματικοί χώροι είναι επιπλέον F-πρότυπα και έτσι το μέρος της δομής που ¨ξεχνάει' ο συναρτητής U είναι ότι δρουν ¨λιγότερα' στοιχεία με πολλαπλασιαμό από αριστερά στις αβελιανές ομάδες, τα στοιχεία του υποδακτυλίου F και όχι όλου του δακτυλίου R. Δηλαδή οι αβελιανές ομάδες $(M, +)$ που έχουν δομή R-προτύπου με τον ομομορφισμό $L : R \to End(M, +, \cdot)$ παραμένουν ίδιες και με δομή F-προτύπου με τον περιορισμό $L|_F$. Έτσι έχουμε τις F-γραμμικές f, g με f 1-1, g επί και $imf = kerg$ (ως F-πρότυπα), δηλαδή η παρακάτω ακολουθία F-προτύπων είναι βραχεία και ακριβής:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

$ii)$ Έστω V F-διανυσματικός χώρος και $f : M \to N$ μονομορφισμός R-προτύπων. Επειδή ο συναρτητής U είναι ακριβής, έχουμε $f : UM = M \to UN = N$ μονομορφισμός F-προτύπων. Επίσης, εφόσον το F είναι σώμα, από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το V είναι εμφυτευτικό ως F-πρότυπο. Επομένως έχουμε ότι η επαγόμενη απεικόνιση:

$$f^* : Hom_F(UN, V) \to Hom_F(UM, V)$$

είναι επί. Αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$f^* : Hom_R(N, Hom_F(R, V)) \to Hom_R(M, Hom_F(R, V))$$

είναι και αυτή επί.

Έστω $g \in Hom_R(M, Hom_F(R, V))$.

$$\begin{gathered} g : M \to Hom_F(R, V) \\ m \mapsto g_m = g(m) : R \to V \\ g(m)(r) = g_m(r) \in V \quad \forall r \in R \end{gathered}$$

Έστω $r_0 \in R$, τότε $g(m)(r_0) \in V$ για κάθε $m \in M$ δηλαδή $g(r_0) \in Hom_F(UM, V)$. Άρα υπάρχει $g'_{r_0} : UN \to V$ τέτοια ώστε $f^*(g'_{r_0}) = g'_{r_0} f = g(r_0)$.

Για κάθε $r \in R$ έχουμε $g'_r(n) \in V$ για κάθε $n \in UN = N$. Δηλαδή, για την επαγόμενη απεικόνιση:

$$\begin{gathered} g' : N \to Hom_F(R, V) \\ n \mapsto g'(n) = g'_n : R \to V \\ g'(n)(r) \in V \quad \forall r \in R \end{gathered}$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{gathered} [f^*(g')](m)(r) = (g'f)(m)(r) = [g'f(m)](r) = g'(n)(r) = g'_r(n) = \\ g'_r[f(m)] = [g'_r f](m) = g_r(m) = g(m)(r) \end{gathered}$$

και άρα η f^* είναι επί.