Αλγεβρική Συνδυαστική

Εργασία 5

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

Με συνεργασία με τον φοιτητή Άλκη Ιωαννίδη

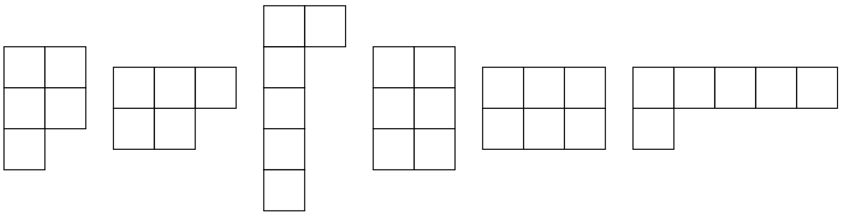
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

1. Βρείτε (με απόδειξη) όλες τις διαμερίσεις λ για τις οποίες $f^\lambda = 5$.

Απόδειξη.

Έχουμε $f^\lambda = 5$ και από διαιρετότητα στον τύπο hook length formula έχουμε αναγκαστικά $n \geq 5$. Για $n = 5$, οι διαμερίσεις που θέλουμε είναι οι $(2, 2, 1)$ και $(3, 2)$. Για $n = 6$, αντίστοιχα είναι οι $(2, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3)$ και $(5, 1)$. Αυτά τα βρίσκουμε σχετικά γρήγορα με βάση το hook length formula καθώς π.χ. αν ένα ταμπλώ έχει τετράγωνο με γάντζο 5 το απορρίπτουμε, εφόσον το 5 για να ξαναβρεθεί στον αριθμητή θα θέλουμε τουλάχιστον $n = 2 \cdot 5$.

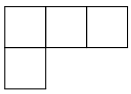
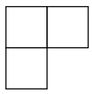
Δηλαδή, έχουμε τα σχήματα τα οποία θα αποκαλούμε αρχικά:

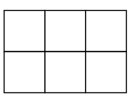
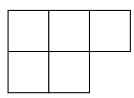


Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες διαμερίσεις $\lambda \vdash n$ με $f^\lambda = 5$ για $n > 6$. Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια διαμέριση. Εφόσον το n είναι μεγαλύτερο του 6, τότε το $n!$ θα διαιρείται από τον πρώτο αριθμό 7. Συνεπώς, από hook length formula θα υπάρχει τετράγωνο του οποίου ο γάντζος είναι 7 αφού δεν μπορούμε να το παράξουμε διαφορετικά στον παρονομαστή ως γινόμενο. Αν ένας γάντζος ενός τετραγώνου x έχει i τετράγωνα οριζόντια (μετρώντας και το x) και j κάθετα (χωρίς το x) θα το γράφουμε με $[i, j]$. Δηλαδή για τους γάντζους με 7 τετράγωνα, έχουμε τις περιπτώσεις:

$$[7, 0], \quad [1, 6], \quad [6, 1], \quad [5, 2], \quad [2, 5], \quad [4, 3], \quad [3, 4]$$

Θα λέμε και ότι ένα σχήμα A περιέχει γνήσια ένα σχήμα B όταν το A είναι το B με κάποια έξτρα τετράγωνα και ταυτόχρονα ο αριθμός των Young ταμπλώ που αντιστοιχούν στο A είναι μεγαλύτερος από του B. Για παράδειγμα:

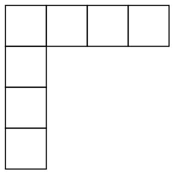
 περιέχει γνήσια το 

 δεν περιέχει γνήσια το 

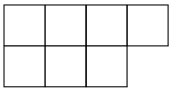
Για τον γάντζο $[3, 4]$ αν ξεχάσουμε τα τετράγωνα που μπορεί να βρίσκονται βόρεια ή νοτιοανατολικά από τα 7 τετράγωνα που μετράμε και τον θεωρήσουμε ως σχήμα ταμπλώ της διαμέρισης $(3, 1, 1, 1, 1) \vdash 7$ τότε αυτό το σχήμα θα περιέχει γνήσια το τρίτο αρχικό σχήμα, δηλαδή αυτό της διαμέρισης $(2, 1, 1, 1, 1) \vdash 6$. Άρα μια ζητούμενη διαμέριση δεν μπορεί να έχει γάντζο $[3, 4]$.

Όμοια, το σχήμα του γάντζου $[2, 5]$ θα περιέχει γνήσια το τρίτο αρχικό σχήμα καθώς και τα σχήματα των γάντζων $[5, 2], [6, 1]$ θα περιέχουν γνήσια το έκτο αρχικό σχήμα.

Το σχήμα του γάντζου $[4,3]$, δηλαδή το



έχει περισσότερα Young ταμπλώ από το σχήμα

 που περιέχει γνήσια το 

δηλαδή το πέμπτο αρχικό σχήμα.

Για τους γάντζους $[7,0]$ και $[1,6]$ αρκεί να θεωρήσουμε τα τετράγωνα που θα υπάρχουν από πάνω τους σε ένα πιθανό σχήμα που περιέχει τον καθένα. Αν δεν υπάρχει τετράγωνο από πάνω τους δηλαδή $n = 7$ απορρίπτονται και οι δύο αφού θα ισχύει $f^\lambda = 1$. Για τον γάντζο $[7,0]$, η από πάνω γραμμή τετραγώνων του γάντζου θα έχει και αυτή τουλάχιστον 7 τετράγωνα. Όλο αυτό σαν σχήμα, ο γάντζος μαζί με την από πάνω γραμμή, θα περιέχει γνήσια το πέμπτο αρχικό σχήμα. Για τον γάντζο $[1,6]$, τα τετράγωνα από πάνω του μαζί με τον ίδιο είτε θα αντιστοιχούν σε κάποια διαμέριση $\lambda = (1,1,\ldots,1)$ του n, δηλαδή η κάθε γραμμή θα έχει μόνο ένα τετράγωνο και έτσι $f^\lambda = 1$ ή θα υπάρχει γραμμή πάνω από τον γάντζο με τουλάχιστον 2 τετράγωνα. Το σχήμα αυτής της γραμμής των τουλάχιστον 2 τετραγώνων μαζί με όλο το νοτιότερο τμήμα και τον γάντζο φυσικά θα περιέχει γνήσια το τρίτο αρχικό σχήμα.

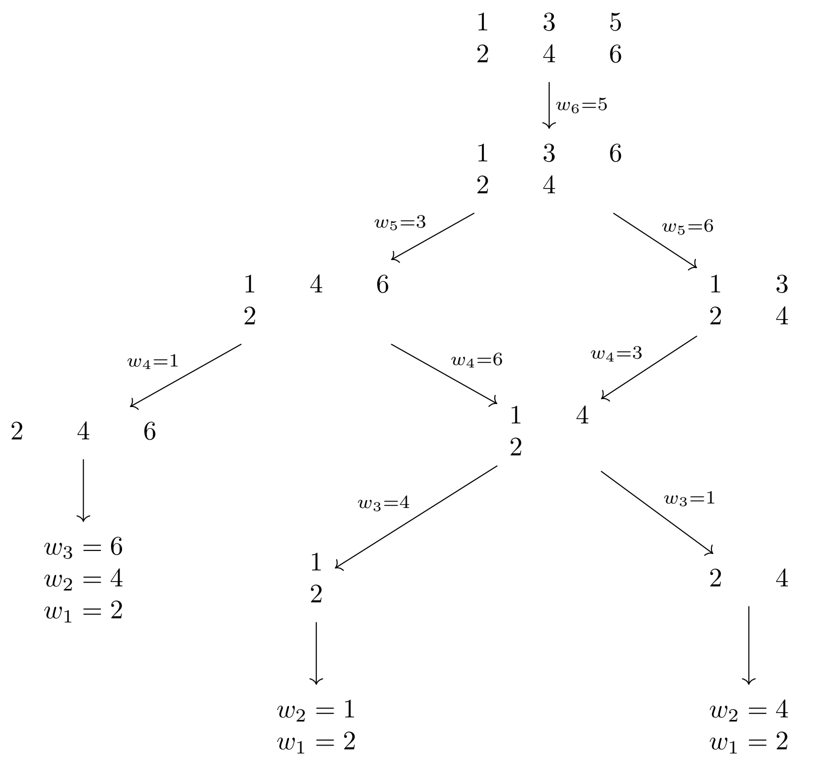
Άρα σε κάθε περίπτωση δεν μπορεί να υπάρχει διαμέριση λ με τετράγωνο x με $h(x) = 7$ και $f^\lambda = 5$. $\square$

2. Βρείτε (με απόδειξη) όλες τις μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_6$ για τις οποίες $P(w) = \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{matrix}$.

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη απεικόνιση της RS_6 όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 10.6 των σημειώσεων. Καθώς ζητάμε όλες τις μεταθέσεις με το συγκεκριμένο P-ταμπλώ θα διακλαδώνουμε για το κάθε πιθανό Q-ταμπλώ, δηλαδή για τα στοιχεία που είναι υποψήφια να εισήχθησαν τελευταία στο εκάστοτε σχήμα. Αυτά είναι τα στοιχεία που είναι τα τελευταία σε κάθε γραμμή και ταυτόχρονα η από κάτω γραμμή έχει μικρότερο μήκος.

Η διαδικασία συνοψίζεται στο παρακάτω διάγραμμα ροής:



Έτσι, παίρνουμε τις 5 μεταθέσεις $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$:

$$\begin{gathered} (2,4,6,1,3,5) \\ (2,1,4,6,3,5) \\ (2,1,4,3,6,5) \\ (2,4,1,6,3,5) \\ (2,4,1,3,6,5) \end{gathered}$$

$\square$

3. Για $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, συμβολίζουμε με $a(n,k)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ για τις οποίες τα $1, 2, \dots, k$ βρίσκονται στην πρώτη γραμμή του $P(w)$ και με $b(n,k)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{G}_n$ για τις οποίες τα $1, 2, \dots, k$ βρίσκονται στην πρώτη γραμμή του $Q(w)$.

(α) Δείξτε ότι $a(n,k) = b(n,k)$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το $a(n,k)$.

(γ) Έστω $f(w)$ ο μεγαλύτερος ακέραιος k για τον οποίο τα $1, 2, \dots, k$ βρίσκονται στην πρώτη γραμμή του $P(w)$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)$$

Απόδειξη.

(α) Συμβολίζουμε με $A(n,k), B(n,k)$ τα αντίστοιχα σύνολα των μεταθέσεων με $|A(n,k)| = a(n,k)$ και $|B(n,k)| = b(n,k)$. Έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\phi : A(n,k) \longrightarrow B(n,k)$$

$$w \longmapsto w^{-1}$$

Είναι καλά ορισμένη εφόσον το $P(w)$ έχει τα $1, 2, \dots, k$ στην πρώτη γραμμή και $P(w) = Q(w^{-1})$. Επιπλέον, είναι προφανώς 1-1 και είναι και επί εφόσον για $\sigma \in B(n,k)$ το σ^{-1} ανήκει στο $A(n,k)$ αφού $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ και $\phi(\sigma^{-1}) = \left(\sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma$. Έπεται ότι $a(n,k) = b(n,k)$.

(β) Θα μετρήσουμε τα στοιχεία του $B(n,k)$. Από την αντιστοιχία Robinson-Schensted κάθε μετάθεση που δεν έχει κάθοδο στις πρώτες k θέσεις θα αντιστοιχεί σε μια δυάδα (P,Q) και το Q-ταμπλώ θα περιέχει τα $1, 2, \dots, k$ στην πρώτη γραμμή. Αντίστροφα, μια δυάδα (P,Q) όπου το Q περιέχει τα $1, 2, \dots, k$ στην πρώτη γραμμή θα αντιστοιχεί σε μια τέτοια μετάθεση. Πράγματι, μετά από $n-k$ βήματα θα έχουμε τα $w_{n-k+1}, \dots, w_n$ στοιχεία της μετάθεσης και θα έχουν μείνει τα ταμπλώ:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_k, & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$$

και από τον τρόπο που συνεχίζεται η διαγραφή παίρνουμε $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, τα πρώτα k στοιχεία της μετάθεσης.

Για τις μεταθέσεις χωρίς κάθοδο στις πρώτες k θέσεις έχουμε να διαλέξουμε k στοιχεία από το $[n]$ και να τα βάλουμε σε αύξουσα σειρά. Στην συνέχεια μεταθέτουμε τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία χωρίς περιορισμό. Άρα έχουμε:

$$a(n,k) = b(n,k) = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ f(w)=k}} k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \quad f(w) = k\}$$

εφόσον στο δεύτερο άθροισμα αθροίζουμε το k για όλες τις μεταθέσεις με $f(w) = k$ και το k παίρνει τις τιμές $1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον, για $k = 1, \ldots, n-1$ έχουμε ότι

$$A(n,k) \setminus A(n,k+1) =$$
$$= \{w \in \mathfrak{G}_n : \quad 1, 2, \ldots, k \text{ είναι στην πρώτη γραμμή του } P(w) \text{ και το } k+1 \text{ όχι } \} =$$
$$= \{w \in \mathfrak{G}_n : \quad f(w) = k\}$$

και άρα

$$\#\{w \in \mathfrak{G}_n : \quad f(w) = k\} = \frac{n!}{k!} - \frac{n!}{(k+1)!}$$

για τα $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Επιπλέον για $k = n$ έχουμε

$$\#\{w \in \mathfrak{G}_n : \quad f(w) = n\} = a(n,n) = 1$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{G}_n} f(w) = \frac{1}{n!} \left(+na(n,n) + \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{n!}{k!} - \frac{n!}{(k+1)!} \right) \right) =$$
$$= \frac{n}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k!} - \frac{k}{(k+1)!} \right) =$$
$$= \frac{n}{n!} + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{2}{2!} - \frac{2}{3!} \right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{3}{4!} \right) + \ldots + \left(\frac{n-1}{(n-1)!} - \frac{n-1}{n!} \right) =$$
$$= \frac{n}{n!} + \frac{1}{1!} + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{2}{2!} \right) + \left(-\frac{2}{3!} + \frac{3}{3!} \right) + \ldots + \left(-\frac{n-2}{(n-1)!} + \frac{n-1}{(n-1)!} \right) - \frac{n-1}{n!} =$$
$$= \frac{n}{n!} - \frac{n-1}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Συνεπώς

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{G}_n} f(w) = e - 1$$

$\square$

4. Για τους ενδομορφισμούς $U, D : \mathbb{C}\Lambda \to \mathbb{C}\Lambda$ της παραγράφου 12 και για $m, n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

(α) $D^n U^{m+n} = U^m (UD + (m+1)I)(UD + (m+2)I) \cdots (UD + (m+n)I)$,

(β) $U^n D^n = (UD - (n-1)I)(UD - (n-2)I) \cdots (UD - I)UD$ για $n \geq 1$,

όπου $I : \mathbb{C}\Lambda \to \mathbb{C}\Lambda$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη.

(α) Αν το ζητούμενο είναι η πρόταση $P(n, m)$ τότε θα αποδείξουμε ότι ισχύει η $P(0, 0)$ καθώς και αν ισχύει η $P(n, m)$ θα ισχύουν οι $P(n+1, m), P(n, m+1)$ και έτσι θα ισχύει η πρόταση $P(n, m)$ επαγωγικά για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ έχουμε $U^m = U^m$ και άρα ισχύει και για $m = 0$, δηλαδή ισχύει η $P(0, 0)$.

Έστω ότι ισχύει η $P(n, m)$. Τότε έχουμε:

$$(i) \quad D^n U^{m+1+n} = D^n U^{m+n} \cdot U = U^m (UD + (m+1)I) \cdots (UD + (m+n)I) \cdot U =$$

$$U^{m+1}(DU + (m+1)I) \cdots (DU + (m+n)I) = U^{m+1}(UD + (m+2)I) \cdots (UD + (m+n+1)I)$$

Δηλαδή ισχύει η $P(n, m+1)$. Χρησιμοποιήσαμε στην δεύερη ισότητα την επαγωγική υπόθεση και πολλές φορές διαδοχικά την πράξη $(UD + xI)U = (UDU + xU) = U(DU + xI)$ καθώς και την σχέση $DU - UD = I$.

$$(ii) \quad D^{n+1} U^{m+n+1} = D^{n+1} U^{n+1} \cdot U^m = (UD + I) \cdots (UD + (n+1)I) \cdot U^m$$

και σε αυτό το σημείο στέλνουμε διαδοχικά ένα ένα τα U από δεξιά στα αριστερά με την πράξη που αναφέραμε εφόσον ενδιάμεσα αλλάξουμε τα DU σε UD προσθέτοντας ένα I κάθε φορά σε κάθε όρο του γινομένου m φορές. Δηλαδή:

$$(UD + I) \cdots (UD + (n+1)I) \cdot U^m = U(DU + I) \cdots (DU + (n+1)I)U^{m-1} =$$

$$= U(UD + 2I) \cdots (UD + (n+2)I)U^{m-1} = U^2(DU + 2I) \cdots (DU + (n+2)I)U^{m-2} =$$

$$= U^2(UD + 3I) \cdots (UD + (n+3)I)U^{m-2} = \ldots = U^m(UD + (m+1)I) \cdots (UD + (m+n+1)I)$$

Όπου αρχικά χρησιμοποιήσαμε το λήμμα 12.5 των σημειώσεων για το $D^{n+1}U^{n+1}$. Δηλαδή, ισχύει και η $P(n+1, k)$.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n και τις ίδιες πράξεις με παραπάνω. Για $n = 1$ είναι $UD = UD$. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, τότε

$$U^{k+1}D^{k+1} = U \cdot U^k D^k \cdot D = U(UD - (k-1)I) \cdots (UD - I)UD \cdot D$$

$$= U(DU - kI) \cdots (DU - 2I)(DU - I) \cdot D =$$

και εδώ στέλνουμε το U από αριστερά στα δεξιά αμέσως πριν το μονό D, δηλαδή

$$U(DU - kI) \cdots (DU - 2I)(DU - I) \cdot D = (UD - kI) \cdots (UD - 2I)(UD - I) \cdot U \cdot D$$

και άρα ισχύει η σχέση για $n = k + 1$. □