Μεταθετική Άλγεβρα
Εργασία 3

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Άσκηση 3.3) Στις ακόλουθες περιπτώσεις εξετάστε αν ο δακτύλιος R είναι της Noether.

(1) $R = S[x, y]/I$, όπου S δακτύλιος της Noether και I ιδεώδες του $S[x, y]$.

(2) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(4)$.

(3) R ο δακτύλιος των απεικονίσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(4) R ο δακτύλιος των απεικονίσεων $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, n > 1$.

(5) $R = \{a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_2x^2 + a_0 | n \geq 0\}$ υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}[x]$.

Απόδειξη.

(1) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα βάσης του Hilbert έχουμε τις συνεπαγωγές

$$S \quad \text{Noetherian} \implies S[x] \quad \text{Noetherian} \implies S[x][y] = S[x, y] \quad \text{Noetherian}$$

και από την θεωρία κάθε πηλίκο δακτυλίου της Noether είναι δακτύλιος της Noether.

(2) Έχουμε ότι ο $\mathbb{Z}[x]$ είναι Noetherian και άρα είναι Noetherian και το πηλίκο

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2+3)} \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$$

όπου ο ισομορφισμός προκύπτει από τον επί ομομορφισμό εκτίμησης $f(x) \mapsto f(\sqrt{-3})$. Αφού ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ είναι της Noether, είναι και το πηλίκο $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(4)$.

Εφόσον τα πηλίκα διατηρούν την ιδιότητα της Noether, χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων, μπορούμε να συμπεράνουμε γενικότερα ότι οι επιμορφισμοί μεταφέρουν την ιδιότητα της Noether μεταξύ των δακτυλίων.

(3) Ο δακτύλιος $R = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ δεν είναι της Noether με τις κατά σημείο πράξεις καθώς αν έχουμε $A \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$\phi(A) = \{f \in R : \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}$$

το οποίο είναι ιδεώδες του R εφόσον:

$$(f-g)(a) = f(a) - g(a) = 0$$

$$(hf)(a) = h(a)f(a) = h(a) \cdot 0 = 0$$

Από τον ορισμό του $\phi(A)$ έχουμε ότι $A \subseteq B \implies \phi(A) \supseteq \phi(B)$. Μπορούμε να διαλέξουμε το A να είναι διάστημα και $x_0 \in A$, τότε έχουμε τον γνήσιο εγκλεισμό

$$\phi(A) \subset \phi(A \setminus \{x_0\})$$

εφόσον μια $f \in R$ που στέλνει τα υπόλοιπα στοιχεία του A στο 0 και το x_0 σε κάποιο μη μηδενικό πραγματικό αριθμό θα ανήκει στο $\phi(A \setminus \{x_0\}) \setminus \phi(A)$. Έτσι έχουμε μια αύξουσα ακολουθία ιδεωδών η οποία δεν είναι τελικά σταθερή:

$$\phi(A) \subset \phi(A \setminus \{x_0\}) \subset \phi(A \setminus \{x_0, x_1\}) \subset \ldots$$

(4) Ο δακτύλιος R των απεικονίσεων $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ είναι της Noether καθώς είναι πεπερασμένος. Πράγματι για μια τέτοια απεικόνιση f έχουμε n επιλογές (με επανάληψη) για να διαλέξουμε σε ποια κλάση του πεδίου τιμών θα απεικονίσουμε τις n κλάσεις του πεδίου ορισμού. Δηλαδή $|R| = n^n$.

(5) Έχουμε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x]$ είναι της Noether και η απεικόνιση:

$$\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow R$$

$$f(x) \longmapsto f(x^2)$$

είναι επιμορφισμός. Πράγματι, αν $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ και $n = \max\{degf(x), degg(x)\}$ τότε:

$$\phi(f(x)+g(x)) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n}(f_i+g_i)x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}(f_i+g_i)x^{2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{degf(x)} f_i x^{2i} + \sum_{i=0}^{degg(x)} g_i x^{2i} = \phi(f(x)) + \phi(g(x))$$

επιπλέον αν $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} f_k g_{i-k}$ το λεγόμενο product rule, τότε

$$\phi(f(x)g(x)) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{2i} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{degf(x)} f_i x^{2i}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{degg(x)} g_i x^{2i}\right) = \phi(f(x))\phi(g(x))$$

και το επί ισχύει εφόσον για κάθε $a_{2n}x^{2n} + \ldots a_2x^2 + a_0 \in R$ έχουμε:

$$a_{2n}x^n + a_{2(n-1)}x^{n-1} + \ldots + a_4x^2 + a_2x + a_0 \longmapsto a_{2n}x^{2n} + \ldots a_2x^2 + a_0$$

Έτσι ο δακτύλιος R είναι της Noether λόγω του παραπάνω επιμορφισμού.

$\square$

Άσκηση 3.4) Έστω k σώμα, n θετικός ακέραιος και $f_1, f_2, \ldots \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Για κάθε ακέραιο $m \geq 2$ θέτουμε $X_m = \{P \in k^n | f_1(P) = \ldots = f_{m-1}(P) = 0$ και $f_m(P) = 1\}$. Δείξτε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε $X_m = \varnothing$ για κάθε $m \geq N$.

Απόδειξη.

Αν δούμε το $f_m - 1$ ως νέο πολυώνυμο τότε το X_m είναι αλγεβρικό σύνολο και ορίζουμε τα ιδεώδη του $k[x_1, \ldots, x_n]$ που αντιστοιχούν στα αλγεβρικά σύνολα:

$$I(X_m) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : \quad f(P) = 0 \quad \forall P \in X_m\}$$

είναι πράγματι ιδεώδες αφού $f(P) - g(P) = 0 - 0 = 0$ και $h(P)f(P) = h(P) \cdot 0 = 0$

Επιπλέον ορίζουμε:

$$Y_m = \{P \in k^n : \quad f_1(P) = f_2(P) = \ldots = f_{m-1}(P) = 0\} \supseteq X_m$$

και για $m_2 > m_1$ οι κοινές ρίζες των πρώτων σε σειρά $m_2 - 1$ πολυωνύμων θα περιέχονται στις κοινές ρίζες των πρώτων $m_1 - 1$ πολυωνύμων. Μαζί με αυτό και με το γεγονός ότι το ιδεώδες του αλγεβρικού συνόλου αντιστρέφει την φορά των υποσυνόλων παίρνουμε:

$$m_2 > m_1 \implies Y_{m_2} \subseteq Y_{m_1} \implies I(Y_{m_2}) \supseteq I(Y_{m_1})$$

Δηλαδή έχουμε μια αύξουσα ακολουθία ιδεωδών $(I(Y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ στον δακτύλιο $k[x_1, \ldots, x_n]$ ο οποίος είναι της Noether από το θεώρημα βάσης του Hilbert. Άρα η ακολουθία είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$I(Y_N) = I(Y_{N+1}) \quad (= I(Y_{N+2}) = \ldots)$$

Θα δείξουμε ότι $X_N = \varnothing$ και με το ίδιο επιχείρημα επαγωγικά θα έχουμε $X_{N+1}, X_{N+2}, \ldots = \varnothing$.

Έστω ότι υπάρχει $Q \in X_N$, τότε $Q \in Y_N$ και $f_N(Q) = 1$. Έχουμε από τους ορισμούς ότι $f_N \in I(Y_{N+1})$ αφού $f_N(P) = 0$ για κάθε $P \in Y_{N+1}$. Άρα $f_N \in I(Y_N)$, δηλαδή $f_N(P) = 0$ για κάθε $P \in Y_N$. Αυτό είναι άτοπο αφού $Q \in Y_N$. □

Άσκηση 3.7) Έστω $\phi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και J ιδεώδες του S. Θυμίζουμε ότι με J^c συμβολίζουμε το ιδεώδες $\phi^{-1}(J)$ του R.

(1) Αν το J είναι p-πρωταρχικό, τότε το J^c είναι p^c-πρωταρχικό ιδεώδες του R.

(2) Αν
$$J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n, \sqrt{Q_i} = p_1 \quad (1)$$
είναι πρωταρχική ανάλυση του J, τότε
$$J^c = Q_1^c \cap \ldots \cap Q_n^c, \sqrt{Q_i^c} = p_i^c \quad (2)$$
είναι πρωταρχική ανάλυση του J^C

(3) Υποθέτουμε ότι ο ϕ είναι επί, Δείξτε ότι αν η (1) είναι ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση, τότε και η (2) είναι ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση.

Απόδειξη.

(1) Θα δείξουμε αρχικά ότι το J^C είναι πρωταρχικό. Αν $ab \in J^c$ με $a \notin J^c$ τότε:
$$\phi(ab) \in J$$
και $\phi(a) \notin J$. Δηλαδή
$$\phi(a)\phi(b) \in J \quad \text{και } \phi(a) \notin J, \quad J \text{ πρωταρχικό} \implies \phi(b)^n \in J$$
και άρα $\phi(b^n) \in J$, δηλαδή $b^n \in J^c$. Για να δείξουμε ότι είναι p^c-πρωταρχικό αρκεί να δείξουμε την σχέση:
$$\sqrt{J^c} = (\sqrt{J})^c$$
Πράγματι
$$\begin{aligned} x \in (\sqrt{J})^c &\iff \phi(x) \in \sqrt{J} \\ &\iff \phi(x)^n \in J \\ &\iff \phi(x^n) \in J \\ &\iff x^n \in J^c \\ &\iff x \in \sqrt{J^c} \end{aligned}$$

(2) Οι σχέσεις $\sqrt{Q_i^c} = p_i^c$ ισχύουν λόγω του πρώτου ερωτήματος και εφόσον το Q_i είναι p_i-πρωταρχικό, έχουμε ότι το Q_i^c είναι p_i^c-πρωταρχικό. Επιπλέον
$$J^c = \phi^{-1}(J) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \phi^{-1}(Q_i) = \bigcap_{i=1}^n Q_i^c$$
από την ιδιότητα της αντίστροφης εικόνας.

(3) Εφόσον $p_i \neq p_j$ έχουμε ότι $\phi^{-1}(p_i) \neq \phi^{-1}(p_j)$, δηλαδή $p_i^c \neq p_j^c$ για $i \neq j$. Έστω $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και προς άτοπο ότι ισχύει:
$$\bigcap_{j \neq i} Q_j^c = J^c$$
$$\phi^{-1}\left(\bigcap_{j \neq i} Q_j\right) = \bigcap_{j \neq i} \phi^{-1}(Q_j) = \phi^{-1}(J)$$

τότε καθώς η ϕ είναι επί έχουμε

$$\bigcap_{j\neq i} Q_j = \phi\left(\phi^{-1}\left(\bigcap_{j\neq i} Q_j\right)\right) = \phi\left(\phi^{-1}(J)\right) = J$$

το οποίο είναι άτοπο εφόσον η πρωταρχική ανάλυση του J είναι ελάχιστη.

$\square$

Άσκηση 3.10) Έστω R δακτύλιος της Noether και I, J, Q ιδεώδη του R με Q πρωταρχικό και $IJ \subseteq Q$. Δείξτε ότι $I \subseteq Q$ ή υπάρχει ακέραιος n με $J^n \subseteq Q$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $I \nsubseteq Q$, δηλαδή υπάρχει $x \in I$ και $x \notin Q$. Καθώς ο δακτύλιος R είναι της Noether έχουμε ότι το J είναι πεπερασμένα παραγόμενο, δηλαδή υπάρχουν $y_i, i = 1, \ldots, s$ στοιχεία του R τέτοια ώστε:

$$J = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

τώρα για κάθε i έχουμε ότι

$$xy_i \in IJ = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k | \quad a_k \in I, b_k \in J, n \in \mathbb{N} \Big\} \subseteq Q$$

δηλαδή $xy_i \in Q, x \notin Q$ και Q πρωταρχικό. Έπεται ότι υπάρχει n_i τέτοιο ώστε $y_i^{n_i} \in Q$.

Θέτουμε $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$. Τότε το J^N παράγεται ως εξής:

$$J^N = \big(\{ y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_s^{m_s} | \quad m_i \geq 0, m_1 + m_2 + \ldots + m_s = N \} \big)$$

δηλαδή από όλα τα μονώνυμα βαθμού N που προκύπτουν από τα $y_1, y_2, \ldots, y_s$.

Έστω ένα τέτοιο μονώνυμο $y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_s^{m_s}$. Δεν μπορεί για όλα τα i να ισχύει $m_i < n_i$, καθώς αν τα αθροίσουμε θα πάρουμε $N < N$. Συνεπώς υπάρχει κάποιο $m_i \geq n_i$ και άρα $y_i^{m_i} \in Q$. Συπεπώς, αφού το Q είναι ιδεώδες θα ανήκει ολόκληρο το μονώνυμο στο Q και επειδή ήταν τυχόν παίρνουμε $J^N \subseteq Q$.

Αντίστροφα, αν δεν υπάρχει n τέτοιο ώστε $J^n \subseteq Q$ τότε με τον παραπάνω συλλογισμό δεν μπορεί να υπάρχει $x \in I$ που δεν ανήκει στο Q. Άρα αν το I είναι μη κενό και $x \in I \implies x \in Q$. Διαφορετικά, αν $I = (0) \subseteq Q$. □

Άσκηση 3.13) Για k σώμα και $R = k[x, y, z]$ θεωρούμε τα ιδεώδη $p_1 = (x, y)$, $p_2 = (x, z)$, $m = (x, y, z)$ και $I = p_1 p_2$. Δείξτε ότι τα p_1, p_2 είναι πρώτα και το m μέγιστο. Στη συνέχεια δείξτε ότι μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του I είναι $I = p_1 \cap p_2 \cap m^2$. Ποιες συνιστώσες είναι μεμονωμένες και ποιες εμφυτευμένες·

Απόδειξη.

Έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$k[x, y, z]/(x, y) \simeq k[z], \quad k[x, y, z]/(x, z) \simeq k[y], \quad k[x, y, z]/(x, y, z) \simeq k$$

και τα πρώτα δύο είναι περιοχές, δηλαδή p_1, p_2 πρώτα και το τρίτο είναι σώμα, δηλαδή m μέγιστο.

$$I = p_1 p_2 = (x, y) \cdot (x, z) = (x^2, xy, xz, yz)$$

Καθένα από τα παραπάνω στοιχεία που παράγουν το I ανήκουν στα $(x, y), (x, z)$ και $m^2 = (x, y, z)^2 = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$. Άρα έχουμε την μια σχέση $I \subseteq p_1 \cap p_2 \cap m^2$.

Έστω $u \in p_1 \cap p_2 \cap m^2$. Αφού $u \in m^2$ το γράφουμε ως:

$$u = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz$$

$$u = a + a_2 y^2 + a_3 z^2$$

εφόσον ήδη ισχύει ότι $a = a_1 x^2 + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz \in I$. Τώρα καθώς $u \in p_1$ και $a_2 y^2 \in p_1$ έχουμε ότι η διαφορά τους που είναι $a_3 z^2$ θα ανήκει στο p_1. Ωστόσο $z^2 \notin p_1$, συνεπώς $a_3 \in p_1$ αφού είναι πρώτο ιδεώδες. Με όμοιο συλλογισμό δείχνουμε ότι $a_2 \in p_2$.

Άρα έχουμε

$$a_2 y^2 = y(y a_2) \in p_1 p_2 = I$$

$$a_3 z^2 = z(a_3 z) \in p_1 p_2$$

συνεπώς $u = a + a_2 y^2 + a_3 z^2 \in I$. Άρα $I = p_1 \cap p_2 \cap m^2$.

Το ότι είναι πρωταρχική ανάλυση έπεται από το γεγονός ότι τα p_1, p_2 είναι πρώτα και άρα πρωταρχικά και επειδή το ριζικό του m^2 είναι μέγιστο τότε το m^2 είναι πρωταρχικό (θα αποδειχθεί). Δηλαδή καθένα από τα p_1, p_2, m^2 είναι πρωταρχικό και τα ριζικά τους $(x, y), (x, z), (x, y, z)$ είναι διακεκριμένα.

Για να δείξουμε ότι είναι ελάχιστη αυτή η ανάλυση παρατηρούμε ότι τα x, y^2, z^2 δεν ανήκουν στο $I = (x^2, xy, xz, yz)$ ενώ έχουμε:

$$x \in (p_1 \cap p_2) \setminus m^2$$

$$y^2 \in (p_1 \cap m^2) \setminus p_2$$

$$z^2 \in (p_2 \cap m^2) \setminus p_1$$

και άρα δεν μπορούμε να παραλείψουμε κάποια από τις συνιστώσες. Έχουμε

$$Ass I = \{(x, y), (x, z), (x, y, z)\}$$

δηλαδή οι συνιστώσες $(x, y), (x, z)$ είναι μεμονωμένες και η εμφυτευμένη σε αυτές είναι η (x, y, z).

Αποδεικνύουμε και ότι για τυχαίο ιδεώδες I με $\sqrt{I}$ μέγιστο, έχουμε ότι I πρωταρχικό. Έστω $ab \in I$ με $a \notin I$. Αν δεν υπάρχει n τέτοιο ώστε $b^n \in I$, δηλαδή $b \notin \sqrt{I}$ τότε:

$$\sqrt{I} + (b) \supset \sqrt{I} \implies \sqrt{I} + (b) = R$$

δηλαδή υπάρχει $x \in \sqrt{I}$ και $r \in R$ με $x + rb = 1$. Έχουμε ότι υπάρχει m τέτοιο ώστε $x^m \in I$ και άρα:

$$1 = 1^m = (x + rb)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i}(rb)^i = x^m + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^i (rb)^{m-i} = x^m + r'b$$

$$1 = x^m + r'b$$

$$a = ax^m + r'(ab) \in I$$

αφού $ab, x^m \in I$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Άσκηση 3.17) Έστω R δακτύλιος και I γνήσιο ιδεώδες του R.

(1) Δείξτε ότι το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του R που περιέχουν το I έχει ελάχιστο στοιχείο. Κάθε τέτοιο ιδεώδες λέγεται ελάχιστο πρώτο ιδεώδες του I.

(2) Στο $\mathbb{Z}$ ποια είναι τα ελάχιστα πρώτα ιδεώδη του (24).

(3) Δείξτε ότι αν ο R είναι της Noether, τότε το πλήθος των ελαχίστων πρώτων ιδεωδών του I είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη.

(1) Θεωρούμε το σύνολο:

$$P = \{ \text{ πρώτα ιδεώδη που περιέχουν το } I\}$$

και έχουμε ότι $P \neq \varnothing$ καθώς για κάθε ιδεώδες υπάρχει μέγιστο που το περιέχει. Ορίζουμε μερική διάταξη στο P ως εξής:

$$p, q \in P \implies p \geq q \iff p \subseteq q$$

Θεωρούμε $X = \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ μια μη κενή αλυσίδα του P. Τότε ορίζουμε

$$\overline{x} = \bigcap_{p \in X} p$$

το οποίο είναι ιδεώδες ως τομή ιδεωδών και ισχύει $\overline{x} \geq p$ για κάθε $p \in X$. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι και πρώτο.

Έστω $ab \in \overline{x}$. Αν κανένα από τα a, b δεν ανήκει στο $\overline{x}$ τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ έτσι ώστε $a \notin p_{\lambda_1}$ και $b \notin p_{\lambda_2}$. Λόγω της ολικής διάταξης στο X μπορούμε δίχως βλάβη γενικότητας να υποθέσουμε ότι $p_{\lambda_1} \geq p_{\lambda_2}$ και άρα $a, b \notin p_{\lambda_1}$. Αυτό είναι άτοπο εφόσον:

$$ab \in \overline{x} \implies ab \in p_{\lambda_1} \implies a \in p_{\lambda_1} \quad \text{ή} \quad b \in p_{\lambda_1}$$

αφού το p_{λ_1} είναι πρώτο. Άρα το $\overline{x}$ είναι πρώτο. Συνεπώς κάθε αλυσίδα του P έχει μέγιστο στοιχείο ως προς την μερική διάταξη $\geq$ και άρα υπάρχει ελάχιστο πρώτο ιδεώδες που περιέχει το τυχόν ιδεώδες I.

(2) Έχουμε $24 = 3 \cdot 2^3$ και άρα τα πρώτα ιδεώδη που περιέχουν το (24) είναι τα $(2), (3)$ και είναι και τα δύο ελάχιστα αφού το ένα δεν περιέχει το άλλο.

(3) Έστω q ελάχιστο πρώτο ιδεώδες που περιέχει το I. Θεωρούμε μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ εφόσον είμαστε σε δακτύλιο της Noether. Έχουμε:

$$q \supseteq I \implies \sqrt{q} = q \supseteq \sqrt{I} = p_1 \cap p_2 \cap \ldots \cap p_n$$

όπου τα p_i είναι τα στοιχεία του $AssI$ και από το λήμμα prime avoidance παίρνουμε ότι $p_i \subseteq q$ για κάποιο $i = 1, \ldots, n$. Λόγω της τομής έχουμε ότι $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq p_i$. Δηλαδή το p_i είναι πρώτο ιδεώδες που περιέχει το I και περιέχεται στο ελάχιστο q. Συνεπώς $q = p_i \in AssI$ και άρα τα ελάχιστα πρώτα ιδεώδη του I είναι πεπερασμένα.

□

Άσκηση 3.22) Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν.

(1) Κάθε δακτύλιος της Noether που είναι και περιοχή, είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

(2) Κάθε υποδακτύλιος σώματος είναι δακτύλιος της Noether.

(3) Αν R, S δακτύλιοι της Noether, τότε και ο $R \times S$ είναι δακτύλιος της Noether.

Απόδειξη.

(1) Δείξαμε στην προηγούμενη εργασία ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ δεν είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης, ενώ δείξαμε και στην άσκηση 3.3) ότι είναι δακτύλιος της Noether. Φυσικά είναι περιοχή ως υποσύνολο του σώματος των μιγαδικών αριθμών.

(2) Κάθε ακέραια περιοχή εμφυτεύεται (με μονομορφισμό δακτυλίων) στο σώμα πηλίκων της όπως για παράδειγμα $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ και αυτό είναι το ελάχιστο σώμα που την περιέχει. Εφόσον γνωρίζουμε ότι η περιοχή $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ δεν είναι δακτύλιος της Noether τότε δεν ισχύει η πρόταση για το σώμα πηλίκων της $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots)$.

(3) Η πρόταση αυτή είναι αληθής, καθώς τα ιδεώδη του $R \times S$ είναι της μορφής $I \times J$ με I ιδεώδες του R και J ιδεώδες του S. Συνεπώς για κάθε άπειρη ακολουθία ιδεωδών:

$$I_1 \times J_1 \subseteq I_2 \times J_2 \subseteq I_3 \times J_3 \subseteq \ldots$$

θα έχουμε τις τελικά σταθερές ακολουθίες:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \ldots$$

και άρα η αρχική ακολουθία θα είναι τελικά σταθερή.

□

Άσκηση 3.23) (Τοπολογία Zariski στο k^n) Θεωρούμε αλγεβρικά κλειστό σώμα k και την τοπολογία Zariski στο k^n.

(1) Ποια είναι τα κλειστά σύνολα του k;

(2) Δείξτε ότι κάθε δύο μη κενά ανοιχτά σύνολα του k^n έχουν μη κενή τομή. Αληθεύει ότι η τοπολογία Zariski είναι Hausdorff;

(3) Αληθεύει ότι η τοπολογία Zariski του k^2 είναι το γινόμενο των τοπολογιών Zariski του k;

(4) Κάθε πολυώνυμο $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ορίζει την αντίστοιχη πολυωνυμική συνάρτηση $k^n \to k, P \mapsto f(P)$ που συμβολίζουμε πάλι με f. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Απόδειξη.

(1) Τα κλειστά σύνολα του k^n είναι τα $V(J) = \{P \in k^n : \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in J\}$ όπου J ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Για $n = 1$ τα ιδεώδη J του $k[x]$ είναι κύρια, δηλαδή $J = (g(x))$ και επειδή το k είναι αλγεβρικά κλειστό περιέχει όλες τις ρίζες του $g(x)$. Έχουμε:

$$V(J) = V(g(x)) = \{ \text{ οι } deg(g(x)) \text{ ρίζες του } g(x)\}$$

και επειδή τα κλειστά σύνολα είναι πεπερασμένα, δηλαδή τα συμπληρώματα των ανοικτών, έχουμε την συμπεπερασμένη τοπολογία στην περίπτωση του $n = 1$.

(2) Έστω δύο γνήσια κλειστά και μη κενά $V(I), V(J) \subset k^n$ με $V(I)^c \cap V(J)^c = \varnothing$. Τότε

$$V(I) \cup V(J) = k^n \implies V(IJ) = k^n$$

Τα I, J δεν είναι τετριμμένα εφόσον τα $V(I), V(J)$ είναι γνήσια. Επίσης, τα I, J είναι ιδεώδη του $k[x_1, \ldots, x_n]$ ο οποίος έιναι δακτύλιος της Noether από το θεώρημα βάσης του Hilbert. Άρα τα I, J είναι πεπερασμένα παραγόμενα

$$I = (f_1, \ldots, f_m), \quad J = (g_1, \ldots, g_s)$$
$$\implies IJ = (f_1g_1, f_1g_2, \ldots, f_mg_s) \neq (0)$$

εφόσον ο δακτύλιος είναι περιοχή.

Επειδή $V(IJ) = k^n$ έχουμε ότι για κάθε f_ig_j πολυώνυμο από αυτά που παράγουν το IJ ισχύει ότι $f_ig_j(P) = 0$ για κάθε $P \in k^n$. Συνεπώς αυτά τα πολυώνυμα f_ig_j δεν μπορούν να είναι σταθερά και $\neq 0$. Κάποιο από αυτά τα f_ig_j, το οποίο ονομάζουμε h, δηλαδή περιέχει μια μεταβλητή x_λ σε δύναμη ≥ 1 και με μη μηδενικό συντελεστή. Δίχως βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$ και έτσι:

$$h(P) = 0 \quad \forall P \in k^n \implies h(x_1, 0, 0, \ldots, 0) \in k[x_1] \text{ έχει ρίζα του κάθε στοιχείο του } k$$

Το $h(x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ περιέχει όσες ρίζες είναι ο βαθμός του στο αλγεβρικά κλειστό σώμα k. Επιπλέον, το k ως αλγεβρικά κλειστό σώμα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο. Σε ένα πεπερασμένο σώμα με στοιχεία $a_1, \ldots, a_m$ το πολυώνυμο $f(x) = 1 + (x - a_1) \cdots (x - a_m)$ δεν έχει ρίζα και άρα το πεπερασμένο σώμα δεν μπορεί να είναι αλγεβρικά κλειστό. Άρα φτάσαμε σε άτοπο εφόσον έχουμε μη μηδενικό πολυώνυμο του $k[x_1]$ με άπειρες ρίζες.

Κάθε δύο ανοιχτά $V(I)^c, V(J)^c$ τέμνονται δηλαδή και έτσι ο χώρος δεν μπορεί να είναι Hausdorff εφόσον για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία οι ανοιχτές περιοχές του ενός θα τέμνονται με όλες τις ανοιχτές περιοχές του άλλου.

(3) Έχουμε το αποτέλεσμα ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff αν και μόνο αν η διαγώνιος $\Delta = \{(x,x) : \quad x \in X\}$ είναι κλειστό σύνολο του χώρου $X \times X$ με την τοπολογία γινόμενο.

Εφόσον ο k δεν είναι Hausdorff η διαγώνιος δεν είναι κλειστό σύνολο της τοπολογίας γινόμενο του $k \times k$. Ωστόσο στην τοπολογία Zariski του k^2 η διαγώνιος είναι ακριβώς το σύνολο:

$$V(x-y) = \{P = (x,y) \in k^2 : \quad f(P) = 0 \quad \forall f(x,y) \in (x-y)\} =$$
$$= \{P = (x,y) \in k^2 : \quad x - y = 0\} = \Delta$$

το οποίο είναι κλειστό από τον τρόπο που ορίζεται η τοπολογία Zariski. Άρα αυτές οι δύο τοπολογίες δεν ταυτίζονται.

(4) Θα δείξουμε ότι η f αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά το οποίο είναι ισοδύναμος χαρακτηρισμός με την συνέχεια. Έστω $V(g(x))$ κλειστό υποσύνολο του k, δηλαδή το πεπερασμένο σύνολο των ριζών $a_1, \ldots, a_m$ του $g(x) \in k[x]$.

Θέτουμε $h_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - a_i$. Τότε:

$$f^{-1}(V(g(x))) = \{P \in k^n : \quad f(P) = a_i \quad \text{για οποιαδήποτε ρίζα } a_i \text{ του } g(x)\} =$$
$$= \{P \in k^n : \quad h_i(P) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m\} =$$
$$= V(h_1, h_2, \ldots, h_m)$$

το οποίο είναι κλειστό από τον ορισμό της τοπολογίας Zariski.

□