Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. *Μια κατηγορία είναι μια τριάδα* $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, *όπου*

(1) $\mathcal{C}$ *κλάση από αντικείμενα.*

(2) *Για κάθε* $A, B \in \mathcal{C}$ *υπάρχει μοναδικό σύνολο* $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ *από μορφισμούς από το* A *στο* B *και*
$$\mathcal{M} = \bigcup_{A,B\in\mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(3) *Για κάθε* A, B, C *αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:*
$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$
$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται σύνθεση, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

(1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \varnothing$.

(2) *Για κάθε* $A, B \in \mathcal{C}$ *και* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ *και για κάθε* $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ *και για κάθε* $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ *μπορούμε:*
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

(3) *Για κάθε* $A \in \mathcal{C}$ *υπάρχει* $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:
$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \to A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$
$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \to C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

Παραδείγματα:

(1) $\mathcal{S} =$ κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.

(2) $\mathcal{T} =$ κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).

(3) $\mathcal{G} =$ ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(4) $\mathcal{A}b =$ αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(5) $\mathcal{S}_0 =$ κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:
$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

(6) $\mathcal{T}_0 =$ σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.

(7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}} =$ διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.

(8) $\mathcal{R} =$ δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

(9) $\mathcal{R}_1$ = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.

(10) $\mathcal{M}_R^L$ = αριστερά R-πρότυπα με R-γραμμικές απεικονίσεις.

(11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.

(12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X, R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:
$$(X, R) \longrightarrow (Y, S)$$
είναι απεικόνιση:
$$f : X \to Y$$
με
$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

(13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι $(X, \leq)$ όπου X σύνολο και $\leq$ σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:
$$(X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$$
με απεικόνιση:
$$f : X \to Y$$
όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. *Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή αν $\mathcal{C}$ είναι σύνολο.*

Παραδείγματα:

(14) $(G, *)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G, \circ = *$)

(15) $(X, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο με:
$$\left(\mathcal{C} = X, \quad M = \bigcup_{x,y \in X} Mor(x,y), \quad \circ \right)$$
όπου:
$$Mor(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$
και η σύνθεση του $\{(x,y)\}$ με το $\{(y,z)\}$ δίνει το $\{(x,z)\}$, ενώ η σύνθεση με $\varnothing$ δίνει $\varnothing$.

(16) Ομοίως για (X, R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. *$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_0, *)$ κατηγορίες, θα λέμε $\mathcal{C}_0$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ $\iff$ $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:*
$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A,B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$$
και $*$ είναι ο περιορισμός της $\circ$.

Αν για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

π.χ.

(1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{R}_1$ υποκατηγορία της $\mathcal{R}$, όχι πλήρης.

Ορισμός. *$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) :*

$$F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F_2 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$:*

$$F_2(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$$

(2) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$:*

$$F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$$

(3) *Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{C}$ και $f : A \to B, \quad g : B \to C$ ισχύει ότι:*

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$ με

$$S \longrightarrow \langle S \rangle = \text{ διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f : S \to T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{T}g \to \mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) $\mathcal{C}$ έχει αντικείμενα τα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n \in \mathbb{N}$, σημειωμένα (U, x) με $x \in U$ και μορφισμοί

$$f : (U, x) \to (V, y)$$

διαφορίσιμη με $f(x) = y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U, x) = \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f : (U, x) \longrightarrow (Y, y)$$

$$F_2(f) = Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. *Ένα* <u>*δράγμα*</u> *(πάνω από τον X) είναι μια τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$ όπου $\mathcal{S}, X$ είναι τοπολογικοί χώροι και*

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιμορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως <u>βάση</u>, στο π ως <u>προβολή</u> και στο $\mathcal{S}$ ως <u>ολικό χώρο</u>.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies \pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \to \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X, όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X, άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X. □

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το*

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \to \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

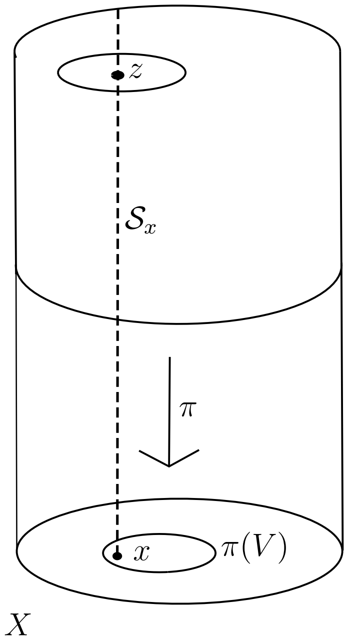
είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο $\mathcal{B}$ αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. □

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x.*

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \varnothing$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα $\mathcal{S}_x$ σαν τοπολογικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ είναι διακριτός.*



Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap \mathcal{S}_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \to \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U, αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. □

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).*

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(\mathcal{S}, \pi, X) \to (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned} \rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\ &\iff f(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δραγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δραγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το $(\mathcal{S}, f, \mathcal{T})$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε $f(z) \in \mathcal{T}$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{N}_z, W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \longrightarrow \rho(W) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V) \subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho \circ f = \pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \supseteq V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi|_V"'] & & f(V) \arrow[dl, "p"'] & & \subseteq W \arrow[dl, "p|_W"] \\
& \pi(V) \arrow[ur, dashed, bend right] & & \subseteq p(W) &
\end{tikzcd}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V = \left(\rho|_{f(V)}\right)^{-1} \circ \pi|_V$, είναι ομοιμορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. $\square$

Θα ορίσουμε την κατηγορία $\mathcal{S}h_X$ των δραγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δραγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. *Η σύνθεση στην $\mathcal{S}h_X$ είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Έχουμε $g \circ f : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = \pi$. Πράγματι $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = (\rho \circ g) \circ f = \rho \circ f = \pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ είναι μορφισμός δραγμάτων και $id_{\mathcal{S}} \circ f = f, g \circ id_{\mathcal{S}} = g$ κλπ.

Ορισμός. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ένας μορφισμός $f : A \to B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g : B \to A$ έτσι ώστε:*

$$f \circ g = 1_B$$

$$g \circ f = 1_A$$

Πρόταση. *Έστω ο μορφισμός στην $\mathcal{S}h_X$:*

$$f : (\mathcal{S}, \pi, X) \longrightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *f ισομορφισμός.*

(2) *f ισομορφισμός στα νήματα.*

(3) *f 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δραγμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) $\implies$ (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. $\square$

Παραδείγματα:

(1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:
$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$
που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με
$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$
ομοιομορφισμό.

(2) Έλικα $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : \quad t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με
$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$
$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

(3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια τομή του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \to \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.*

Ισοδύναμα: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Μάθημα 3 - Τρίτη 01/03/2022.

Παρατήρηση. *Έστω $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και $s : U \to \mathcal{S}$ τυχαία (όχι κατ ανάγκη συνεχής) με $\pi \circ s = id_U$. Έπεται ότι η $s : U \to s(U)$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, υπάρχει $s^{-1} : s(U) \to U$ και από την σχέση $\pi \circ s = id_U$ παίρνουμε $\pi|_{s(U)} = s^{-1}$ από την μοναδικότητα αριστερής και δεξιάς αντίστροφης. Ισοδύναμα $s = \left(\pi|_{s(U)}\right)$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο συνολοθεωρητικά επιχειρήματα και δεν έχουμε απαιτήσει ανοιχτά σύνολα και συνέχεια.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] & \supseteq & s(U) \arrow[d, "\pi|_{s(U)}"'] \\
X & \supseteq & U \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

$$\pi \circ s = id_U \qquad \Longrightarrow \qquad \pi|_{s(U)} \circ s = id_U$$

Παρακάτω θα θεωρούμε (συνεχείς) τομές σε <u>ανοιχτά</u> $U \subseteq X$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ για το σύνολο

$$\{s : U \longrightarrow \mathcal{S} | \quad s \text{ τομή } \}$$

Παρατήρηση. *Έστω $z \in A \subseteq \mathcal{S}$, το A να είναι ανοιχτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό με $V \subseteq A$ (Υπενθύμιση: τα V του ορισμού του δράγματος είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$).*

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ τομή. Τότε $s(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $s : U \to s(U)$ ομοιομορφισμός.*

Ουσιαστικά με αυτό το λήμμα έχουμε ότι οι τομές s είναι τοπικές αντίστροφες της π πάνω στα $s(U)$.

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $s(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$.

Έστω $z = s(x) \in s(U), x \in U$. Υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V$ έτσι ώστε το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η s είναι συνεχής στο x και $V \in \mathcal{N}_{s(x)}$, V ανοιχτό. Λόγω συνέχειας παίρνουμε ότι το A είναι ανοιχτή περιοχή του x με $A \subseteq U$ και $s(A) \subseteq V$. Εφαρμόζοντας την π παίρνουμε:

$$\pi(s(A)) = A \subseteq \pi(V)$$

και $\pi(V)$ ανοιχτό. Άρα $s(A) \subseteq V$, δηλαδή το $s(A)$ είναι ανοιχτό μέσα στο ανοιχτό V και άρα είναι και σε όλο το $\mathcal{S}$.

$s(A) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A \subseteq U \implies z = s(x) \in s(A) \subseteq s(U)$, άρα $s(U)$ ανοιχτό.

(2) $V \supseteq s(A)$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "\pi_V"'] & \supseteq & s(A) \arrow[d, "\pi|_{S(A)}=\text{ομοιομ.}=s^{-1}|_{s(A)}"] \\
\pi(V) & \supseteq & A \subseteq U
\end{tikzcd}$$

και έχουμε s 1-1, επί, συνεχής, και τοπικός ομοιομορφισμός, άρα η s είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, $z \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $z \in s(U)$.*

Απόδειξη. $z \in \mathcal{S} \implies$ υπάρχει $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό, $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει:

$$s := (\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \longrightarrow V$$

συνεχής, με $\pi(V) \subseteq U$ και $\pi \circ s = id_U$. Άρα για $x = \pi(z)$ ισχύει $s(x) = s(\pi(z)) = z$. $\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το σύνολο:*

$$\{s(U) : \quad U \text{ ανοιχτό } \subseteq X, s \in \mathcal{S}(U)\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό:

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, $A, B \subseteq X$ ανοιχτά με $x \in A \cap B \neq \varnothing$ και $s \in \mathcal{S}(A), \sigma \in \mathcal{S}(B)$ με $s(x) = \sigma(x)$. Τότε υπάρχει $U \subseteq A \cap B$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s|_U = \sigma|_U$.*

Αν σκεφτεί κανείς ότι ο Leray που ασχολήθηκε με τα δράγματα με σκοπό την μελέτη διαφορικών εξισώσεων, αυτό το λήμμα είναι η κατάλληλη περίπτωση για αυτό που ήθελε μιας και αν οι αρχικές συνθήκες δύο λύσεων ταυτίζονται τότε ταυτίζονται και ολόκληρες οι λύσεις σε μια ανοιχτή περιοχή.

Απόδειξη. $z = s(x) = \sigma(x) \in \mathcal{S}$. Από ορισμό δράγματος υπάρχει V ανοιχτό $\subseteq X : \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V :\to \pi(V)$ ομοιομορφισμός.

$$s(x) = z \in s(A) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$
$$\sigma(x) = z \in \sigma(B) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

Θεωρούμε στην θέση του V το $V = V \cap \sigma(B) \cap s(A)$, μικραίνουμε το ανοιχτό δηλαδή να είναι μέσα στα άλλα δύο και άρα έχουμε:

$$\pi|_{s(A)} = s^{-1} : s(A) \longrightarrow A$$
$$\pi|_{\sigma(B)} = \sigma^{-1} : \sigma(B) \longrightarrow B$$

$$\pi|_V = s^{-1}|_V = \sigma^{-1}|_V \text{ μαζί με } \sigma|_U = s|_U \implies$$
$$s = \sigma|_{\pi(V)=U}$$

$\square$

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξαντλήσει όσα προκύπτουν με τον ορισμό, έχουμε μόνο τον τοπικό ομοιομορφισμό για να δουλέψουμε, μένει να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι μορφισμοί δραγμάτων στις τομές:

Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *f μορφισμός δραγμάτων.*

(2) *Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, για κάθε $s \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.*

(3) *Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ και τομή $s \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε $z \in s(U)$ και $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, shift right, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\rho"] \\
 & X \arrow[ul, shift right, "s"']
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη.
(1) $\implies$ (2) f συνεχής και f μορφισμός, άρα $\rho \circ f = \pi$. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $s \in \mathcal{S}(U)$. Τότε $f \circ s : U \to \mathcal{T}$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Επιπλέον:

$$\rho \circ (f \circ s) = (\rho \circ f) \circ s = \pi \circ s = id_U$$

άρα $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(2) $\implies$ (3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει U με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z$ και από προηγούμενο λήμμα έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) $\implies$ (1) Θα δείξουμε ότι $\rho \circ f = \pi$. Έστω $z \in \mathcal{S}$. Από (3) έχουμε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z \in s(U)$. Έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U) \implies \rho \circ (f \circ s) = id_U$. Δηλαδή, $\rho \circ f \circ s(x) = \rho \circ f(z)$ αλλά και $\rho \circ f \circ s(x) = id(x) = x = \pi(z)$. Άρα $\rho \circ f = \pi$ αφού το z τυχαίο, δηλαδή πράγματι f μορφισμός δραγμάτων.

□

Άρα σαν μνημονικό κανόνα έχουμε ότι οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Θα δούμε στην συνέχεια την αλγεβρική εικόνα των δραγμάτων, κάτι που αρχικά μοιάζει με τελείως διαφορετικό αντικείμενο.

Έστω X τοπολογικός χώρος, τ_X η τοπολογία του X. Ένα προδράγμα συνόλων πάνω από το X είναι ένα ζεύγος:

$$\left(\{P(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U\}_{V \subseteq U \in \tau_X}\right)$$

όπου $\{P(U)\}_{U \in \tau_X}$ οικογένεια συνόλων, με σύνολο δεικτών την τ_X και

$$\rho_V^U : P(U) \longrightarrow P(V)$$

απεικονίσεις: (περιορισμού)

(1) $\rho_U^U = id_{P(U)} : P(U) \to P(U) \quad \forall U \in \tau_X$.

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ στην τ_X, τότε ισχύει:

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$$

ή αλλιώς το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "P_V^U"] \arrow[dr, "P_W^V"'] & P(V) \arrow[d, "P_W^V"] \\
 & P(W)
\end{tikzcd}$$

Παραδείγματα:

(1) (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε U ανοιχτό συμβολίζουμε:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{συνεχής } \}$$

και για κάθε $V \subseteq U$ με $V, U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$\rho^U_V : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$$

$$f \longmapsto f|_V$$

Τότε το ζεύγος των οικογενειών $(\{\mathcal{C}(U)\}, \{\rho^U_V\})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το X (:= το προδράγμα των συνεχών). Αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες:

(1)$\rho^U_U(f) = f|_U = f$ όπου $f : U \to \mathbb{R}$
(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ και $f : U \to \mathbb{R} \implies f|_W = (f|_V)|_W$

(2) $P(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{σταθερές } \}$ (οι συνήθεις περιορισμοί θα εννοούνται σε τέτοια παραδείγματα)

(3) $B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{φραγμένες } \}$

(4) $(M = \text{ πολλαπλότητα}, \tau_M)$ και

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \mathcal{C}^\infty\text{-διαφ}\}$$

(5) $X = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | \quad \text{ολόμορφη } \}$$

(6) $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το ζεύγος:

$$\big(\{\mathcal{S}(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho^U_V = \text{ συνήθεις περιορισμοί } \}_{V \subseteq U \in \tau_X}\big)$$

ονομάζεται το προδράγμα των τομών του δράγματος.

Ορισμός. *(X, τ_X) τοπολογικός χώρος και*

$$S \equiv (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}, \quad T \equiv (T(U), \lambda^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$$

προδράγματα πάνω από το X. Ένας μορφισμός προδραγμάτων $f : S \to T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$f_U : S(U) \longrightarrow T(U), \quad U \in \tau_X$$

έτσι ώστε για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ να είναι μεταθετικό το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ {\scriptstyle \rho^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^U_V} \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε προδράγμα $(P(U), \rho^U_V) \equiv P$ η οικογένεια $1 = \{1_U\} : P \to P$ με

$$1_U = id_U : P(U) \to P(U)$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια σύνθεση μορφισμών προδραγμάτων ώστε να φτιάξουμε μια νέα κατηγορία. Αν $f : S \to T$ και $g : T \to P$ μορφισμοί προδραγμάτων, όπου $f \equiv \{f_U\}_{U \in \tau_X}$ και $g \equiv \{g_U\}_{U \in \tau_X}$ τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$g \circ f \equiv \{(g \circ f) := g_U \circ f_U\}_{U \in \tau_X}$$

και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[rr, bend left, "g_U \circ f_U"] & T(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d, "\lambda_V^U"'] & P(U) \arrow[d, "\mu_V^U"] \\
S(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[rr, bend right, "g_V \circ f_V"'] & T(V) \arrow[r, "g_V"] & P(V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mu_V^U \circ (g_U \circ f_U) &= (g_V \circ f_V) \circ \rho_V^U \\
\mu_V^U \circ (g_V \circ f_V) &= (g_V \circ \lambda_V^U) \circ f_U \\
&= g_V \circ f_V \circ \rho_V^U
\end{aligned}$$

άρα πράγματι $g \circ f$ είναι μορφισμός προδραγμάτων $S \to P$.

Συνεπώς τα προδράγματα και μορφισμοί προδραγμάτων από μόνα τους αποτελούν μια κατηγορία $\mathcal{PS}h_X$.

Μάθημα 4 **- Πέμπτη** 03/03/2022.

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho_V^U"] \arrow[dd, "\rho_W^U"'] & & T(U) \arrow[dr, "\lambda_V^U"] \arrow[dd, "\lambda_W^U"] & \\
& S(V) \arrow[rr] \arrow[dl, "\rho_W^V"] & & T(V) \arrow[dl, "\lambda_W^V"] \\
S(W) \arrow[rr] & & T(W) &
\end{tikzcd}$$

Έστω $(\tau_X, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο με $A \leq B \iff B \subseteq A$. Τότε έχουμε μια κατηγορία με αντικείμενα τα $U \in \tau_X$ και μορφισμούς:

$$Mor(U,V) = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν } U, V \text{ δεν διατάσσονται} \\ \{(U,V)\}, & U \leq V \quad (\text{ δηλ. } V \subseteq U) \end{cases}$$

Αν $U \in \tau_X$, τότε $Mor(U,U) = \{(U,U)\}$.

Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ έχουμε την πράξη:

$$\circ : Mor(U,V) \times Mor(V,W) \longrightarrow Mor(U,W)$$

Έστω F συναρτητής: $(\tau_X, \leq) \to \mathcal{S}et$. Δηλαδή, για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε κάποιο $F(U)$ σύνολο, άρα υπάρχει οικογένεια $(F(U))_{U \in \tau_X}$ με $(U,V) \in Mor(U,V)$ στην $(\tau_X, \leq)$. Συνεπώς, έχουμε

$$F(U,V) : F(U) \to F(V)$$

ώστε:

(1) $(U,U) = 1_U \in Mor(U,U) \implies F(U,U) = F(1_U) = 1_{F(U)} : F(U) \to F(U)$

(2) Αν $W \subseteq V \subseteq U$, τότε $F(U,W) = F((V,W) \circ (U,V)) = F(V,W) \circ F(U,V)$

Συγκρίνοντας τους ορισμούς του προδράγματος και του συναρτητή $(\tau_X, \leq) \to \mathcal{S}et$, παίρνουμε ότι αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες και $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \to G$ είναι μια οικογένεια $\phi \equiv (\phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ όπου*

$$\phi_A : FA \to GA, \quad \forall A \in \mathcal{C}$$

έτσι ώστε για κάθε $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\phi_A"] & FB \arrow[d, "\phi_B"] \\
GA \arrow[r, "Gf"] & GB
\end{tikzcd}$$

Ένας μορφισμός προδραγμάτων $S = (S(U), \rho_V^U), T = (T(U), \lambda_V^U)$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : S \to T$.

Ορισμός (Συναρτητής-Τομή (section functor)).

$$\Gamma : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{PS}h_X$$

$$(\mathcal{S}, \pi, X) \longmapsto \big(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U\big)$$

προδράγμημα συνόλων, με ρ_V^U τους συνήθεις περιορισμούς. Αν $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων πάνω από το X, τότε για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε:

$$\Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{f_U} \Gamma(U, \mathcal{T})$$

$$s \longmapsto f \circ s$$

και η οικογένεια $(f_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{T}))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Πράγματι, εφόσον το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U, \mathcal{S}) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \Gamma(U, \mathcal{T}) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\
\Gamma(V, \mathcal{S}) \arrow[r, "f_V"] & \Gamma(V, \mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

$$\Gamma(g \circ f) = ((g \circ f)_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{T}))$$

$$s \longmapsto g \circ f \circ s$$

Ορισμός (Directed System). *Έστω $(A, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα επαγωγικό σύστημα στην $\mathcal{C}$ (με δείκτες από το A) είναι ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $\mathbb{A} : (A, \leq) \to \mathcal{C}$. Δηλαδή, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μαζί με μια οικογένεια μορφισμών:*

$$\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \to A_{\lambda_2}$$

όπου $A_\lambda = \mathbb{A}(\lambda)$ και $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \mathbb{A}((\lambda_1, \lambda_2))$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$, έτσι ώστε:

(1) $\phi_\lambda^\lambda : A_\lambda \to A_\lambda \equiv id_{A_\lambda}$

(2) $\phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}$, *για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.*

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[r, "\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}"'] & A_{\lambda_2} \arrow[d, "\phi_{\lambda_3}^{\lambda_2}"] \\
& A_{\lambda_3}
\end{tikzcd}$$

Ορισμός (Directed Limit). *Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ επαγωγικό σύστημα στην $\mathcal{C}$, όπου $(\Lambda, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο. Επαγωγικό όριο του συστήματος έιναι ένα ζεύγος $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ όπου A αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $\phi_\lambda : A_\lambda \to A$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έτσι ώστε:*

(1) *Για κάθε* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *να ισχύει* $\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[dr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & & A \\
& A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) *Ισχύει η επόμενη καθολική συνθήκη: Αν* (B, ψ_λ) *με* B *αντικείμενο της* $\mathcal{C}$ *και για κάθε* $\lambda \in \Lambda$ *να έχουμε* $\psi_\lambda : A_\lambda \to B$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *να ισχύει* $\psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}$, *τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός* $h : A \to B$ *με* $\psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda$ *για κάθε* $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h"] & B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός. *Ένας μορφισμός* $f : A \to B$ *στην* $\mathcal{C}$ *λέγεται ισομορφισμός* $\iff$ *υπάρχει μορφισμός* $g : B \to A$ *στην* $\mathcal{C}$ *με* $g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B$.

Πρόταση. *Αν το επαγωγικό σύστημα* $(A_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$ *στην* $\mathcal{C}$ *έχει όριο τότε αυτό είναι (μοναδικό) μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφισμό.*

Απόδειξη. Έστω δύο όρια $(A, \phi_\lambda), (B, \psi_\lambda)$.

$$A \text{ όριο } \implies \exists! h : A \to B, \quad h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$B \text{ όριο } \implies \exists! h' : B \to A, \quad h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, shift left, "h"] & B \arrow[l, dashed, shift left, "h'"] \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε $\phi_\lambda = h' \circ \psi_\lambda \implies h \circ h' \circ \psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$. Υπάρχει ωστόσο μοναδικό $\xi : B \to B$ με $\xi \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Έχουμε ότι αυτό ισχύει για $\xi = 1_B$ αλλά και για $\xi = h \circ h'$. Έπεται ότι $h \circ h' = 1_B$. Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι $h' \circ h = 1_A$, δηλαδή h ισομορφισμός. $\square$

Μάθημα 5 - Τρίτη 08/03/2022.

Θεώρημα. *Στην κατηγορία $\mathcal{S}et$ κάθε επαγωγικό σύστημα με σύνολο δεικτών ένα κατευθυνόμενο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ έχει όριο.*

Απόδειξη.
Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \to A_{\lambda_2})_{\lambda_1 \leq \lambda_2}$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων, με $(\Lambda, \leq)$ να είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

και θεωρούμε την εξής σχέση: Αν $a_1, a_2 \in \sqcup A_\lambda$, τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιοι ώστε $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Ορίζουμε:

$$a_1 \sim a_2 \iff \exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 :$$

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας (προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική).

Για την μεταβατικότητα, αν έχουμε $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}, a_3 \in A_{\lambda_3}$, τότε υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

καθώς και ένα $\mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιο ώστε:

$$\phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3)$$

Στο κατευθυνόμενο Λ υπάρχει $k \geq \lambda, \mu$ με $\lambda_1 \leq \lambda \leq k$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_1 \arrow[dr] & & \\
& \lambda \arrow[dr] & \\
\lambda_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\
& \mu \arrow[ur] & \\
\lambda_3 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\phi_k^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3) = \phi_k^{\lambda_3}(a_3)$$

Θέτουμε $A = \sqcup A_\lambda \big/ \sim$ και θεωρούμε την κανονική προβολή:

$$q : \sqcup A_\lambda \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto q(a) = [a]$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$ ισχύει $A_{\lambda_0} \subseteq \sqcup A_\lambda$ και υπάρχει $\phi_{\lambda_0} := q|_{A_{\lambda_0}}$. Τότε το $(A, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι το όριο του επαγωγικού συστήματος.

Για το (1) έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2$ με μεταθετικό τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[drr, "\phi_{\lambda_1}=q|_{A_{\lambda_1}}"] \arrow[ddr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & & \\
& & A \\
& A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}=q|_{A_{\lambda_2}}"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1}$. Πράγματι αν έχουμε $a \in A_{\lambda_1}$ τότε

$$\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) = \phi_{\lambda_1}(a) \iff$$

$$[\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)] = [a] \iff$$

$$\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) \sim a$$

η οποία είναι προφανής, αφού $\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) = \phi^{\lambda_2}_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)$ και $\lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_2$.

Για το (2) Έστω $(B, \psi_\lambda : A_\lambda \to B)$ με $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και μεταθετικό τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dr, "\psi_{\lambda_1}"] \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & \\
& B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\psi_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

τότε μαζί με αυτό το τρίγωνο υπάρχει και το προηγούμενο που κατασκευάσαμε βασιζόμενοι στην κανονική προβολή q. Βάζουμε τα τρίγωνα μαζί και ψάχνουμε μια h:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h?"] & B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Κάθε $[a] \in A$ προέρχεται από κάποιο $a \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Θέλουμε η h που θα βρούμε να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
a \in A_\lambda \arrow[dr, "q=\phi_\lambda"'] \arrow[drr, bend left, "\psi_\lambda"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

θέτουμε $h([a]) = \psi_\lambda(a)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου a της κλάσης $[a]$. Έστω $[a_1] = [a_2]$ και $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$ και εφόσον το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \in A_{\lambda_1} \arrow[dr, "\phi_\lambda^{\lambda_1}"'] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A_\lambda \arrow[r, "\psi_\lambda"'] & B
\end{tikzcd}$$

παίρνουμε ότι $h([a_1]) = \psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \psi_{\lambda_2}(a_2) = h([a_2])$. Ορίσαμε την h έτσι ώστε να έχουμε μεταθετικότητα των τριγώνων, δηλαδή $h \circ q = \psi_\lambda$ και έχουμε την μοναδικότητα από το μονοσήμαντο αυτού του ορισμού. $\square$

Παρατήρηση. *Η παραπάνω απόδειξη αποτελεί και μεθοδολογία για το πώς βρίσκουμε το όριο.*

Εφαρμογή 1: Έστω $(\Lambda, \leq) \equiv (\mathbb{N}, \leq)$ με την συνήθη διάταξη και $A_n = \mathbb{R}^n$. Αν $m \leq n$ τότε ορίζουμε

$$\phi_n^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto (x, 0, 0, \ldots, 0)$$

με $(n-m)$-πλήθος μηδενικά. Το παραπάνω είναι ένα επαγωγικό σύστημα και από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου.

Άσκηση: Υπολογίστε το όριο (A, ϕ_n) και εξετάστε αν το A έχει δομή διανυσματικού χώρου έτσι ώστε οι ϕ_n να είναι γραμμικές. (Δηλαδή διατηρεί το όριο την δομή της κατηγορίας; αν θεωρήσουμε ότι ξεκινήσαμε από διανυσματικούς χώρους και όχι από σύνολα.)

Εφαρμογή 2: Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με περιορισμούς απεικονίσεις. Είναι ένα προδράγμμα συνόλων. Έστω $x \in X$ και $\mathcal{N}_x^0 = \mathcal{N}_x \cap \tau_X$, δηλαδή οι ανοιχτές περιοχές του x. Τότε το $(\mathcal{N}_x^0, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο με $U \leq V \iff V \subseteq U$ που δεν περιέχει κενά σύνολα αφού το καθένα θα περιέχει το x.

Αν περιοριστούμε στο $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$, τότε από το θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο.

Άσκηση: Να υπολογιστεί.

Έστω δύο επαγωγικά συστήματα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}), (B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και

$$f \equiv (f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)$$

ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, δηλαδή για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[r, "f_{\lambda_1}"] \arrow[d, "\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"'] & B_{\lambda_1} \arrow[d, "\psi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"] \\
A_{\lambda_2} \arrow[r, "f_{\lambda_2}"] & B_{\lambda_2}
\end{tikzcd}$$

Πρόταση. *Αν το $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ έχει όριο (A, ϕ_λ) και όμοια το $(B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ να έχει όριο (B, ψ_λ) και $(f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)$ να είναι μορφισμός επαγωγικού συστήματος, τότε υπάρχει μοναδική $\overline{f} : A \to B$ που κάνει μεταθετικά όλα τα παρακάτω διαγράμματα:*

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, "h_\lambda"] \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & B_\lambda \arrow[d, "\psi_\lambda"] \\ A \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_{\lambda_1} \arrow[dr, bend left, "\psi_{\lambda_1}\circ f_{\lambda_1}=x_{\lambda_1}"] \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & \\ & B \\ A_{\lambda_2} \arrow[ur, bend right, "\psi_{\lambda_2}\circ f_{\lambda_2}=x_{\lambda_2}"'] & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Το $(B, x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda)$ ικανοποιεί το (1) του ορισμού του επαγωγικού ορίου. Επειδή το όριο του $(A_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$ είναι το (A, ϕ_λ) υπάρχει μοναδική $h : A \to B$ με

$$x_\lambda = h \circ \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda = h \circ \phi_\lambda$$

και θέτουμε $\overline{f} = h$.

□

Δραγματοποίηση προδράγματος

Έστω $(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από τοπολογικό χώρο (X, τ_X). Έστω ένα σημείο $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{N}^0_x$ των ανοιχτών περιοχών του x και έτσι το κατευθυνόμενο σύνολο $(\mathcal{N}^0_x, \leq)$.

Άρα το $(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}^0_x}$ είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών $(\mathcal{N}^0_x, \leq)$. Από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου:

$$(\mathcal{S}_x, \rho^U_x : S(U) \to \mathcal{S}_x)_{U \in \mathcal{N}^0_x}$$

(θα δικαιολογηθεί στην συνέχεια που συμπίπτει ο συμβολισμός με τα νήματα.)

Παρατηρούμε ότι $U \in \tau_X \implies U \in \mathcal{N}^0_x, \quad \forall x \in U$. Άρα το $S(U)$ είναι σύνολο πολλών επαγωγικών συστημάτων. Για κάθε $x \in U$, το $S(U)$ συμμετέχει στο αντίστοιχο επαγωγικό σύστημα με δείκτες το $\mathcal{N}^0_x$.

Για κάθε $s \in S(U)$ και για $x \neq y \in U$ υπάρχει $[s]_x$ στο όριο $\mathcal{S}_x$ του $(S(W), \rho^V_W)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}^0_x}$. Όμοια, υπάρχει $[s]_y$ στο όριο $\mathcal{S}_y$ του $(S(W), \rho^V_W)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}^0_y}$.

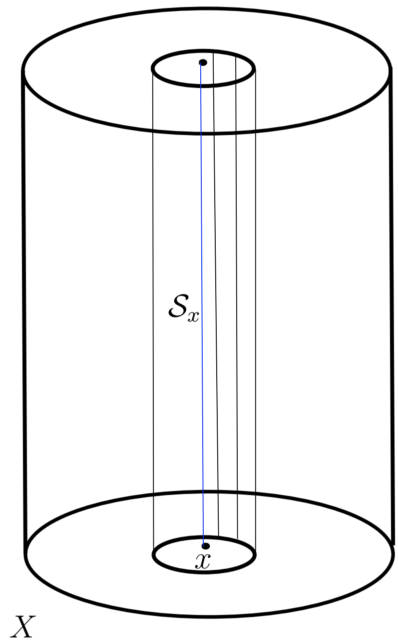
Θέτουμε

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και τότε για κάθε $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$ θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho^U_x(s) \in \mathcal{S}_x$$



Θέτουμε επιπλέον:

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$u \longmapsto \pi(u) = x$$

οταν $u \in \mathcal{S}_x$. Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Μάθημα 6 - Τρίτη 15/03/2022.

Ξεκινάμε με ένα $(S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X και σταθεροποιούμε ένα $x \in X$ και αντί να παίρνουμε όλα τα ανοιχτά, κρατάμε τις ανοιχτές περιοχές του x περιορίζοντας έτσι το σύνολο δεικτών στο $\mathcal{N}^0_x$. Έτσι περνάμε σε ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων:

$$(S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\mathcal{N}^0_x}$$

με σύνολο δεικτών να είναι το κατευθυνόμενο $(\mathcal{N}^0_x, \leq\equiv\supseteq)$. Άρα από το γενικό θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το επαγωγικό όριο. Το κατασκευάζουμε παίρνοντας την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{U\in\mathcal{N}^0_x} S(U)$$

και ορίζοντας την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας. Έστω $s \in S(U), \sigma \in S(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}^0_x$. Ορίζουμε:

$$s \sim_x \sigma \iff \exists W \in \mathcal{N}^0_x, \quad W \subseteq U \cap V$$

τέτοιο ώστε:

$$\rho^U_W(s) = \rho^V_W(\sigma)$$

μάλιστα, είναι σχέση ισοδυναμίας που εξαρτάται από το $x \in X$ που έχουμε σταθεροποιήσει. Τις κλάσεις ισοδυναμίας τις συμβολίζουμε ως

$$\mathcal{S}_x = \left(\bigsqcup_{U\in\mathcal{N}^0_x} S(U)\right)\Big/\sim_x$$

Επιπλέον, έχουμε την κανονική απεικόνιση για να πηγαίνουμε στις κλάσεις:

$$\rho_x : \bigsqcup_{U\in\mathcal{N}^0_x} S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto \rho_x(s) = [s]_x$$

όπου γράφουμε και το x στην κλαση του s για να ξέρουμε σε ποια σχέση ισοδυναμίας αναφερόμαστε. Καθώς το πεδίο ορισμού της ρ_x ειναι μια διακεκριμένη ένωση, μπορούμε να πάρουμε περιορισμούς στα μικρά σύνολα:

$$\rho^U_x = \rho_x|_{S(U)} : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto [s]_x$$

Θέτουμε

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x\in X} \mathcal{S}_x$$

και έστω $z \in \mathcal{S}$, αφού το $\mathcal{S}$ είναι διακεκριμένη ένωση, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με $z \in \mathcal{S}_x$

Θέτουμε για αυτόν τον δείκτη $\pi(z) = x$ και έτσι έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση $\pi : \mathcal{S} \to X$.

Ισχυρισμός: Το $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα. Θέλουμε δηλαδή το $\mathcal{S}$ να επιδέχεται μια τοπολογία που κάνει την π τοπικό ομοιομορφισμό. Θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Έστω $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$, πριν αποδείξουμε ότι είναι δράγμα κατασκευάζουμε τις συνεχείς τομές του δράγματος. Θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{s}(x) = [s]_x$$

και ιδιαιτέρως $[s]_x \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$.

Επιπλέον, την κλάση $[s]_x$ την βλέπουμε σαν την εικόνα της κανονικής απεικόνισης που μας πάει στο επαγωγικό όριο εφαρμοσμένη στο s, δηλαδή $[s]_x = \rho_x^U(s)$. Άρα κρατάμε την σχέση:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s)$$

και οι $\tilde{s}$ που ορίσαμε είναι είναι 1-1, αφού δύο διαφορετικές εικόνες θα πέσουν σε διαφορετικά νήματα. Έτσι, αν θεωρήσουμε την $\tilde{s}$ στην εικόνα της:

$$\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

αυτή είναι 1-1, επί και ισχύει τετριμμένα ότι:

$$\pi \circ \tilde{s} = id_U$$

αφού $\tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$ και προβάλλοντας παίρνουμε το x.

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα δράγμα υπάρχει μια βάση της τοπολογίας που αποτελείται από τις εικόνες των τομών, η οποία συμπίπτει με την βάση της τοπολογίας που αποτελούν τα V στα οποία η προβολή είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Με αυτό σαν σκέψη θέτουμε:

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) | \quad U \in \tau_x, s \in S(U)\}$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτή η οικογένεια είναι βάση τοπολογίας.

Λήμμα (1). *Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει $U \in \tau_x$ και υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοια ώστε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$.*

Απόδειξη. Έστω

$$z \in \mathcal{S} = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \mathcal{S}_x \implies$$
$$\exists! x \in X : \quad z \in \mathcal{S}_x \implies$$
$$z = [s]_x$$

με $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in S(U)$. Ωστόσο, από τα προηγούμενα έχουμε $[s]_x = \tilde{s}(x)$. □

Λήμμα (2). *Έστω $s \in S(U), \sigma \in S(V)$ με $U, V \in \tau_X$ και υπάρχει $z \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοιχτό $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:*

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{\sigma} : V \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\text{Υπάρχει } x \in U : \quad z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$$
$$\text{Υπάρχει } y \in V : \quad z = \tilde{\sigma}(y) \in \mathcal{S}_y$$

και αφού το $\mathcal{S}$ είναι διακεκριμένη ένωση έχουμε $x = y$. Άρα $U, V \in \mathcal{N}_x^0$ και

$$\tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(x) \implies$$

$$[s]_x = [\sigma]_x \implies$$

$$s \sim_x \sigma \implies$$

Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$$

Θέλουμε να δείξουμε τη ισότητα των $\tilde{s}, \tilde{\sigma}$ στο W, άρα θεωρούμε $y \in W$ και έχουμε τα μεταθετικά τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd}
s \in S(U) \arrow[dr, "\rho_W^U"'] \arrow[drr, bend left, "\rho_y^U"] & & \\
& S(W) \arrow[r, "\rho_y^W"] & \mathcal{S}_y \\
\sigma \in S(V) \arrow[ur, "\rho_W^V"] \arrow[urr, bend right, "\rho_y^V"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{s}(y) = [s]_y = \rho_y^U(s) = \rho_y^W \circ \rho_W^U(s) =$$
$$\rho_y^W \circ \rho_W^V(\sigma) = \rho_y^V(\sigma) = [\sigma]_y = \tilde{\sigma}(y)$$

□

Ουσιαστικά, στην προηγούμενη απόδειξη κρύβεται η εξής παρατήρηση που θα χρησιμοποιούμε συχνά:

Παρατήρηση. *Έστω $s \in S(U)$ με $V \subseteq U$ τότε:*

$$\tilde{s}|_V = \widetilde{\rho_V^U(s)}$$

Τώρα βασιζόμενοι στα δύο λήμματα έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση.

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) : \quad s \in S(U), \quad U \in \tau_X\}$$

είναι βάση μιας τοπολογίας.

Απόδειξη. Η μία συνθήκη της βάσης είναι το λήμμα (1) και η δεύτερη το λήμμα (2). □

Πρόταση. *Το $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε:

$$\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

είναι αντιστρέψιμη με

$$\tilde{s}^{-1} = \pi|_B : B \longrightarrow \pi(B) = U$$

όπου

$$\mathcal{B} \ni B = \tilde{s}(U)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) = B$ είναι ομοιομορφισμοί. Δεδομένου το ότι είναι 1-1 και επί, έχουμε να δείξουμε ότι είναι συνεχείς και ανοιχτές.

$\tilde{s}$ ανοιχτή: Έστω $V \subseteq U$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $\tilde{s}(V)$ είναι ανοιχτό. Ειδικότερα, είναι βασικό. Υπάρχει $t = \rho_V^U(s)$, αφού είχαμε ξεκινήσει με ένα $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε

$$\rho_V^U : S(U) \longrightarrow S(V) \ni t = \rho_V^U(s)$$

άρα, από την παρατήρηση:

$$\tilde{s}(V) = \tilde{s}|_V(V) = \widetilde{\rho_V^U(s)}(V) = \tilde{t}(V) \in \mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$$

με $\tau \in S(V)$.

$\tilde{s}$ συνεχής: Έστω $x \in U$, θα δείξουμε ότι η $\tilde{s}$ είναι συνεχής στο x. Εστω ανοιχτό $A \subseteq \tilde{s}(U)$ με $\tilde{s}(x) \in A$. Αφού A ανοιχτό, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$:

$$\tilde{s}(x) \in B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(U)$$

και αφού το B είναι βασικό, γράφεται ως $B = \tilde{\sigma}(V)$ με $V \in \tau_X$ και $\sigma \in S(V)$.

Επίσης $\tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$. Δηλαδή, από το λήμμα (2) υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ κα $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Θέτουμε $t := \rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$ και έτσι:

$$\tilde{s}(W) = \widetilde{\rho_W^U(s)}(W) = \tilde{t}(W) \in \mathcal{B}$$

αλλά και

$$\tilde{t}(W) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(V)$$

Δηλαδή, το $\tilde{s}(W) \subseteq A$ πέφτει μέσα στο ανοιχτό. □

Συμπέρασμα: κάθε προδράγμα συνόλων μας δίνει ένα δράγμα. Χρειαζόμαστε κάτι ακόμα για να είμαστε σωστοί.

Έστω $(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$ μορφισμός προδραγμάτων μεταξύ των $(S(U), \rho_V^U), (T(U), \lambda_V^U)$. Δηλαδή, έχουμε μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_V^U} \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε $x \in X$:

$$(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \mathcal{N}_x^0}$$

είναι ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, τα οποία έχουν όρια $\mathcal{S}_x, \mathcal{T}_x$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός μορφισμός μεταξύ των ορίων

$$f_x : \mathcal{S}_x \to \mathcal{T}_x$$

που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_x^U"] \\ \mathcal{S}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{T}_x \end{tikzcd}$$

Θέτουμε:

$$\tilde{f} = \bigcup_{x \in X} f_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$$

Πρόταση. *Η $\tilde{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ είναι μορφισμός δραγμάτων.*

Λήμμα. *Για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $s \in S(U)$, αν θεωρήσουμε $t = f_U(s)$ ισχύει ότι:*

$$\tilde{t} = \tilde{f} \circ \tilde{s}$$

Απόδειξη. (του λήμματος.)

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{t} : U \longrightarrow \mathcal{T}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & \mathcal{T} \\ & U \subseteq X \arrow[ul, "\tilde{s}"] \arrow[ur, "\tilde{t}"'] & \end{tikzcd}$$

Για κάθε $x \in U$, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\tilde{f} \circ \tilde{s}(x)$. Από την μεταθετικότητα στα προηγούμενα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(x) = [t]_x = \lambda_x^U(t) = \lambda_x^U \circ f_U(s) = f_x \circ \rho_x^U(s) = \\ = \tilde{f}\left([s]_x\right) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \end{aligned}$$

□

Ουσιαστικά, εδώ φαίνεται ότι οι $\tilde{s}, \tilde{\sigma}$ είναι (συνεχείς) τομές των δραγμάτων που κατασκευάσαμε. Το λήμμα μας προδίδει ότι $\tilde{f}$ είναι μορφισμός, αφού μεταφέρει τις τομές σε τομές. Υπάρχει ωστόσο το λεπτό σημείο, ότι δεν ξέρουμε αν εξαντλούμε όλες τις τομές έτσι ώστε να επικαλεστούμε τον πρόταση/χαρακτηρισμό των μορφισμών (μάθημα 3).

Απόδειξη. (της πρότασης.)

(1) Κάνει μεταθετικό το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

εφόσον, αν $z \in \mathcal{S}$ τότε από το πρώτο λήμμα γράφουμε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$ με $U \in \tau_x$ και $s \in S(U)$. Τότε:

$$\mathfrak{p} \circ \tilde{f}(z) = \mathfrak{p} \circ \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) = \mathfrak{p} \circ \tilde{t}(x)$$

όπου $t = f_U(s) = x = \pi(z)$ και $\tilde{t}(x) \in \mathcal{T}_x$. Ισοδύναμα, η $\tilde{f}$ διατηρεί τα νήματα εφόσον είναι η διακεκριμένη ένωση των f_x.

(2) Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής: Έστω $z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}$ (από το λήμμα (1)). Έστω B βασική περιοχή του $\tilde{f}(z)$. Το B γράφεται ως:

$$B = \tilde{\sigma}(V), \quad V \in \mathcal{N}_x^0, \quad \sigma \in T(V)$$

Θέτουμε $t = f_U(s) \in T(U)$.

Άρα $\tilde{f}(z) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \in \tilde{\sigma}(V)$ και ταυτόχρονα $\tilde{f}(z) = \tilde{t}(x) \in \tilde{t}(V)$. Άρα από το δεύτερο λήμμα, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{t}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

όμως από ορισμό $\tilde{t}$ έχουμε:

$$\tilde{f} \circ \tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W \implies$$

$$\tilde{f} \circ \widetilde{\rho_W^U(s)}|_W = \tilde{\sigma}|_W \implies$$

$$\tilde{f}\left(\widetilde{\rho_W^U(s)}(W)\right) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B$$

με $\widetilde{\rho_W^U(s)}(W)$ ένα βασικό σύνολο της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{S}}$, άρα και ανοιχτό και μέσα από την f πέφτει μέσα στην εικόνα που θέλουμε. $\square$

Θεώρημα. *Το ζεύγος* $(F_1, F_2) : \mathcal{PS}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_X$:

$$F_1\big((S(U), \rho_V^U)\big) = \mathcal{S}$$

$$F_2\big((f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}\big) = \tilde{f}$$

είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

Απόδειξη. Είναι προφανές, αρκεί να δείξουμε ότι μεταφέρει την ταυτοτική στην ταυτοτική και την σύνθεση στην σύνθεση. $\square$

Μάθημα 7 - Πέμπτη 17/03/2022.

Έχουμε βρει τρόπο από τα προδράγματα να φτιάχνουμε δράγματα μέσω του επαγωγικού ορίου, καθώς και αντίστροφα από τα δράγματα να φτιάχνουμε προδράγματα κάνοντας τα προδράγματα τομών. Αν κάνουμε διαδοχικά αυτές τις διαδικασίες φτάνουμε πάλι στο αρχικό αντικείμενο; Για να απαντήσουμε χρειαζόμαστε κάποιες βοηθητικές έννοιες.

Ορισμός. *Ένα προδράγμα συνόλων $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ λέγεται πλήρες, αν για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U ισχύουν οι συνθήκες:*

(1) *Αν $s, t \in S(U)$ έτσι ώστε:*

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t) \quad \forall a \in A \implies s = t$$

(2) *Για τα $s_a \in S(U_a)$ για κάθε $a \in A$ ισχύει:*

$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \quad \forall a, b \in A : \quad U_a \cap U_b \neq \varnothing \implies$$

$$\text{Υπάρχει } s \in S(U) : \quad \rho_{U_a}^U(s) = s_a$$

Πολύ συχνά ισχύει μόνο το (1) και τότε το προδράγμα λέγεται μονοπροδράγμα.

Παράδειγμα.

(1) Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $\big(\mathcal{C}(U), \rho_V^U\big)$ το προδράγμα των συνεχών συναρτήσεων με τους συνήθεις περιορισμούς. Είναι προφανές ότι είναι πλήρες.

(2) Τα προδράγματα των διαφορίσιμων, ολόμορφων, αναλυτικών;

(3) Το προδράγμα $(B(U), r_V^U))$ με συνήθεις περιορισμούς, όπου

$$B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \quad f \text{ φραγμένη}\}$$

είναι προδράγμα αλλά όχι πλήρες. Αν ενώσουμε φραγμένες συναρτήσεις δεν παίρνουμε φραγμένη απαραίτητα. Είναι όμως μονοπροδράγμα.

(4) Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το:

$$\big(\mathcal{S}(U), r_V^U\big)$$

όπου r_V^U είναι οι συνήθεις περιορισμοί και $\mathcal{S}(U)$ είναι οι τομές πάνω από το $U \in \tau_X$, είναι πλήρες προδράγμα (ως συναρτησιακό).

Έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ ένα προδράγμα και μέσω του συναρτητή δραγματοποίησης $\mathbb{S}$ παίρνουμε ένα $(\mathcal{S}, \pi, X)$, στο οποίο εφαρμόζουμε τον συναρτητή τομής Γ και φτάνουμε σε ένα $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$. Θα είναι το αρχικό προδράγμα S ισόμορφο με το τελικό $\Gamma\mathbb{S}(S)$;

Λήμμα. *Υπάρχει (φυσικός) μορφισμός προδραγμάτων:*

$$\rho : S \longrightarrow \Gamma\mathbb{S}(S)$$

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{\rho_U} & \mathcal{S}(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} \\ S(V) & \xrightarrow[\rho_V]{} & \mathcal{S}(V) \end{array}$$

Τον οποίο έχουμε ήδη κατασκευάσει προηγουμένως. Για κάθε $U \in \tau_X$:

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$

$$\rho_U(s) = \tilde{s}$$

Το διάγραμμα είναι μεταθετικό, εφόσον για κάθε $s \in S(U)$:

$$\rho_V \circ \rho_V^U(s) = \widetilde{\rho_V^U(s)} = \tilde{s}|_V = r_V^U(\tilde{s}) = r_V^U \circ \rho_U(s)$$

Παρατήρηση. *Τα $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ και $(\mathcal{S}(U), \rho_V^U)$ είναι ισόμορφα $\Longleftarrow$ Για κάθε $U \in \tau_X$ η ρ_U είναι 1-1 και επί. (Ισχύει και το ευθύ αλλά δεν είναι άμεσο.)*

Ένας μορφισμός προδραγμάτων λέγεται 1-1 (αντ. επί), αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 (αντ. επί) και ισομορφισμός αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 και επί. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι απεικονίσεις γυρίζουν προς τα πίσω ενώ διατηρούν την μεταθετικότητα των τετραγώνων.

Θεώρημα. *Ο μορφισμός προδραγμάτων*

$$(\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U), \quad \rho_U(s) = \tilde{s})_{U \in \tau_X}$$

είναι ισομορφισμός $\iff$ κάθε ρ_U είναι 1-1 και επί $\iff$ το αρχικό προδράγμα $(S(U), \rho_V^U)$ είναι πλήρες.

Απόδειξη. Η πρώτη ισοδυναμία είναι ορισμός. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Το πρώτο είναι ότι το 1-1 $\implies$ μονοπροδράγμα.

(1) Δείχνουμε ότι ρ_U 1-1 για κάθε $U \in \tau_X \iff (S(U), \rho_V^U)$ μονοπροδράγμα.

($\implies$) Έστω ότι όλα τα ρ_U είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι το S είναι μονοπροδράγμα. Παίρνουμε ένα τυχαίο $U \in \tau_X$ και $(U_a)_{a \in A}$ ανοιχτό κάλυμμα του U. Έστω $s, t \in S(U)$ με

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t)$$

για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και $x \in U_a$ έχουμε:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(t) = \rho_t^U = [t]_x = \tilde{t}(x)$$

αφού $\tilde{s}, \tilde{t}$ είναι τομές που ορίζονται στο $U \to \mathcal{S}$, καθώς και το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[dd, "\rho^U_{U_a}"'] \arrow[dr, "\rho^U_x"] & \\
& \mathcal{S} \\
S(U_a) \arrow[ur, "\rho^{U_a}_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει:

$$\tilde{s}|_{U_a} = \tilde{t}|_{U_a} \quad \forall a \in A$$

δηλαδή, ικανοποιείται η υπόθεση της (1) για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ και την κάλυψη (U_a) του U. Επειδή $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$ είναι πλήρες, έπεται ότι $\tilde{s} = \tilde{t}$. Δηλαδή, $\rho_U(s) = \rho_U(t)$ και ρ_U 1-1, συνεπώς $s = t$.

($\Longleftarrow$) Αν S μονοπροδράγμα, τότε κάθε ρ_U 1-1. Πράγματι, έστω $U \in \tau_X$ και $s, t \in S(U)$ με

$$\rho_U(s) = \rho_U(t) \implies$$
$$\tilde{s} = \tilde{t} \in \mathcal{S}(U) \implies$$
$$\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x) \quad \forall x \in U \implies$$
$$[s]_x = [t]_x$$

δηλαδή υπάρχει $U_x \in \mathcal{N}_x^0$:

$$\rho_{U_x}^U(s) = \rho_{U_x}^U(t)$$

και με τα U_x έχουμε μια ανοιχτή κάλυψη του U καθώς και ισχύει η υπόθεση του μονοπροδράγματος, άρα παίρνουμε $s = t$ και άρα η ρ_U είναι 1-1.

(2)

Θα περίμενε κανείς ότι εφόσον το 1-1 είναι ισοδύναμο με την συνθήκη (1), τότε και το επί θα ήταν με την συνθήκη (2). Ωστόσο, δεν είναι έτσι, όπως θα δούμε χρειάζεται και το 1-1 και το επί για την συνθήκη (2).

($\Longrightarrow$) Έστω κάθε ρ_U 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2). Έστω $U \in \tau_X$, μια ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U και

$$s_a \in S(U_a) \quad \forall a \in A$$
$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \in S(U_a \cap U_b)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ με $\rho_{U_a}^U(s) = s_a$. Έχουμε:

$$\widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a)} = \widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_b)} \implies$$
$$\tilde{s_a}|_{U_a \cap U_b} = \tilde{s_b}|_{U_a \cap U_b}$$

Έχουμε τώρα τα $(U_a)_{a \in A}$ και $\tilde{s_a} \in \mathcal{S}(U_a)$, δηλαδή έχουμε μεταφέρει την κατάσταση από το αρχικό προδράγμα στο προδράγμα των τομών. Το δεύτερο είναι πλήρες, δηλαδή ισχύει για αυτό η ιδιότητα (2) και άρα υπάρχει μια τομή $xi \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε, ο (συνήθης) περιορισμός της στο U_a να δίνει την τομή στο a.

$$\xi|_{U_a} = \tilde{s}_a$$

Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι οι ρ_U είναι επί:

$$\rho_U \longrightarrow \mathcal{S}(U) \ni \xi \implies$$
$$\text{Υπάρχει } \sigma \in S(U): \quad \rho_U(\sigma) = \xi$$
$$\tilde{\sigma} = \xi$$

Θα δείξουμε ότι $\rho_{U_a}^U(\sigma) = s_a$. Πράγματι:

$$\widetilde{\rho^U_{U_a}(\sigma)} = \tilde{\sigma}|_{U_a} = \xi|_{U_a} = \tilde{s_a} \implies$$
$$\rho_{U_a}\left(\rho^U_{U_a}(\sigma)\right) = \rho_{U_a}(s_a)$$

και εφόσον όλες οι ρ_{U_a} είναι 1-1 έχουμε:

$$\rho^U_{U_a}(\sigma) = s_a$$

($\Longleftarrow$) Έστω S πλήρες. Θα δείξουμε ότι κάθε ρ_U είναι επί. Έστω $U \in \tau_X$ και $\xi \in \mathcal{S}(U)$. Θα βρούμε $s \in S(U)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi = \tilde{s}$.

Για κάθε $x \in U$ ξέρουμε ότι $\xi(x) \in \mathcal{S}_x$, άρα από τον ορισμό του επαγωγικού ορίου υπάρχουν $U_x \in \mathcal{N}^0_x$ και $\sigma_x \in S(U_x)$ τέτοια ώστε:

$$\xi(x) = [\sigma_x]_x = \tilde{\sigma_x}(x) \implies$$
$$\text{Υπάρχει } V_x \subseteq U \cap U_x, \quad V_x \in \mathcal{N}^0_x :$$
$$\xi|_{V_x} = \tilde{\sigma_x}|_{V_x}$$

Θέτουμε $s_x := \rho^{U_x}_{V_x}(\sigma_x) \in S(V_x)$ και σχηματίζουμε τις οικογένειες $(V_x)_{x\in U}$ μαζί με $(s_x \in S(V_x))_{x\in U}$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτά ικανοποιούν την υπόθεση της συνθήκης (2).

Έστω $V_x \cap V_y \neq \varnothing$. Θα δείξουμε ότι:

$$\rho^{V_x}_{V_x\cap V_y}(s_x) = \rho^{V_y}_{V_x\cap V_y}(s_y)$$

και συμβολίζουμε τα δύο μέλη της ζητούμενης ισότητας με t_x και t_y αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $z \in V_x \cap V_y$ έχουμε:

$$\tilde{s}_x(z) = \tilde{\sigma_x}(z) = \xi(z) = \tilde{\sigma_y}(z) = \tilde{s_y}(z)$$

άρα αφού οι δύο τομές συμπίπτουν στο ίδιο σημείο, υπάρχει $W_z \subseteq V_x \cap V_y$ με:

$$\rho^{V_x}_{W_z}(s_x) = \rho^{V_y}_{W_z}(s_y) \implies$$
$$\rho^{V_x\cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_x}_{V_x\cap V_y}(s_x) = \rho^{V_x\cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_y}_{V_x\cap V_y}(s_y) \implies$$
$$\rho^{V_x\cap V_y}_{W_z}(t_x) = \rho^{V_x\cap V_y}_{W_z}(t_y)$$

οπότε η οικογένεια (W_z) είναι ανοιχτή κάλυψη του $V_x\cap V_y$ και $t_x, t_y \in S(V_x\cap V_y)$ με ίσους περιορισμούς στο W_z. Άρα από την συνθήκη (1) έχουμε $t_x = t_y$. Άρα οι οικογένειες $(V_x), (s_x)$ ικανοποιούν την (2). Μαζί με την υπόθεση ότι το S είναι πλήρες έχουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε:

$$\rho^U_{V_x}(s) = s_x$$

Τότε, για κάθε $x \in U$ ισχύει:

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s_x}(x) = \tilde{\sigma_x}(x) = \xi(x)$$

δηλαδή, πράγματι έχουμε $\tilde{s} = \rho_U(s) = \xi$ και άρα ρ_U επί.

□

Αν ξεκινήσουμε λοιπόν από ένα προδράγμα και φτιάξουμε το δράγμα και πάμε μετά στο προδράγμα των τομών, τότε το πρώτο και το τελευταίο είναι ισόμορφα προδράγματα αν και μόνο αν είχαμε ξεκινήσει από πλήρες προδράγμα. Άρα γενικά αυτή η διαδικασία δεν γυρίζει πίσω στο αρχικό προδράγμα, αλλά φτιάχνει κάτι πιο πλούσιο.