Αλγεβρική Συνδυαστική

Εργασία 1

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

Με συνεργασία με τον φοιτητή Άλκη Ιωαννίδη

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

1. Έστω $a(n,k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1,2,\ldots,n\}$ με k στοιχεία τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους.

(1) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων $(r_1, r_2, \ldots, r_{k+1})$ του $n+1$ για τις οποίες $r_i \geq 2$ για $1 < i \leq k$.

(2) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum\limits_{n\geq 0} a(n,k)x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(3) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το $a(n,k)$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $\{a_1, \ldots a_k\}$ ένα υποσύνολο του $[n]$ το οποίο δεν περιέχει δυο διαδοχικούς ακεραίους. Ορίζουμε: $r_1 = a_1 \geq 1$ και $r_i = a_i - a_{i-1} \geq 2$ για κάθε $2 \leq i \leq k$. Επιπλέον, ορίζουμε $r_{k+1} = n + 1 - a_k \geq 1$. Έτσι έχουμε μια σύνθεση:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots (a_k - a_{k-1}) + (n + 1 - a_k) = n + 1$$

$$r_1 + r_2 + \ldots r_k + r_{k+1} = n + 1$$

με $r_1, r_{k+1} \geq 1$ και τα υπόλοιπα $r_i \geq 2$. Αντίστροφα, αν έχουμε μια τέτοια σύνθεση ορίζουμε $a_1 = r_1 \geq 1$ και αναδρομικά $a_i = r_i + a_{i-1}$ για $2 \leq i \leq k$. Έτσι, κανένα από τα a_i δεν είναι διαδοχικός ακέραιος με τον προηγούμενό του και $a_i < a_j$ για $i < j$. Επιπλέον, από την σύνθεση έχουμε την σχέση $a_k + r_k = n + 1$ και $r_k \leq 1$, δηλαδή $a_k \leq n$. Άρα το $\{a_1, \ldots, a_k\}$ είναι πράγματι ένα υποσύνολο του $[n]$.

(2) Έστω $A_{n,k}$ το σύνολο των συνθέσεων του ερωτήματος (1), τότε:

$$\sum_{n\geq 0} a(n,k)x^n = x^{-1}\sum_{n\geq 0} a(n,k)x^{n+1} = x^{-1} \sum_{(r_1,\ldots,r_{k+1})\in A_{n,k}} x^{r_1+r_2+\ldots+r_{k+1}} =$$

$$= x^{-1}\left(\sum_{r_1\geq 1} x^{r_1}\right)\left(\sum_{r_{k+1}\geq 1} x^{r_{k+1}}\right)\left(\sum_{r_2\geq 2} x^{r_2}\right)\cdots\left(\sum_{r_k\geq 2} x^{r_k}\right) =$$

$$= x^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)^{k-1} =$$

$$= x^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{k-1} = \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}}$$

(3)

$$\sum_{n\geq 0} a(n,k)x^n = x^{2k-1}(1-x)^{-k-1} = x^{2k-1}\sum_{n\geq 0}\binom{-k-1}{n}(-x)^n =$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{n!}x^{n+2k-1} =$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^{n+2k-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}x^{n+2k-1} =$$

$$\sum_{n\geq 2k-1}\binom{n-k+1}{k}x^n$$

άρα $a(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$.

$\square$

2.

(1)

Απόδειξη. □

3. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{x}{1-x^3}\right)^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

(1) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(2) Δείξτε ότι για $n \geq 2$, ο συντελεστής του x^n στην $F(x)$ είναι ίσος με το πλήθος των συνθέσεων του $n-1$ με μέρη ίσα με 1 ή 3.

(3) Υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $(F(x))^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

(1) Θέτουμε $G(x) = \frac{x}{1-x^3}$, τότε $G(0) = 0$ και άρα από πρόταση 2.6 έχουμε

$$F(x) = \sum_{n\geq 0}(G(x))^n = \frac{1}{1-G(x)} = \frac{1}{1-\frac{x}{1-x^3}} = \frac{1-x^3}{1-x-x^3} = 1 + \frac{x}{1-x-x^3}$$

(2) Έστω c_n το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη ίσα με 1 ή 3. Τότε:

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{(r_1,\ldots,r_k)\in\{1,3\}^k} x^{r1+r_2+\ldots+r_k} = \sum_{k\geq 0}\sum_{r_i\in\{1,3\}} x^{r_1}x^{r_2}\cdots x^{r_k} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{r_1\in\{1,3\}} x^{r_1}\right)\left(\sum_{r_2\in\{1,3\}} x^{r_2}\right)\cdots\left(\sum_{r_k\in\{1,3\}} x^{r_k}\right) = \sum_{k\geq 0}(x+x^3)^k =$$

$$= \frac{1}{1-x-x^3}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει πάλι από την πρόταση 2.6 εφόσον $H(x) = x + x^3, H(0) = 0$.

Για $n \geq 2$ παίρνουμε ότι:

$$[x^n]F(x) = [x^n]\left(1 - \frac{x}{1-x-x^3}\right) = [x^n]\frac{x}{1-x-x^3} = [x^{n-1}]\frac{1}{1-x-x^3} = c_{n-1}$$

(3)

$$[x^n](F(x))^{-1} = [x^n]\frac{1-x^3-x}{1-x^3} = [x^n]\left(1 - \frac{x}{1-x^3}\right)$$

Αν $G(x) = \frac{x}{1-x^3}$ τότε $G(0) = 0$. Συνεπώς, για $n = 0$ ο ζητούμενος συντελεστής είναι 1. Για $n > 1$:

$$[x^n](F(x))^{-1} = [x^n] - \frac{x}{1-x^3} = [x^{n-1}] - \frac{1}{1-x^3} = [x^{n-1}]\sum_{n\geq 0} -x^{3n} =$$

$$= [x^{n-1}] - \left(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots\right)$$

δηλαδή:

$$[x^n](F(x))^{-1} = \begin{cases} -1, & n = 1 \bmod 3, n \neq 1 \\ 0, & n = 0, 2 \bmod 3 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

□

4. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(0) = 1$ και $F(x)^{-1} = (1 - x^2)F(x)$ και υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $F(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

Η $(1 - x^2)$ είναι αντιστρέψιμη στον δακτύλιο $\mathbb{C}[[x]]$ με μοναδική αντίστροφο:

$$(1 - x^2)^{-1} = \frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n \geq 0} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

με $a_n = 1$ αν $n = 0 \ \mathrm{mod} 2$ και $a_n = 0$ διαφορετικά.

Ορίζουμε ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $b_0 = 1$ και αναδρομικά:

$$b_n = \frac{1}{2} \left(a_n - \sum_{i \geq 1}^{n-1} b_i b_{n-i} \right)$$

για τα $n \geq 1$.

Έτσι έχουμε την σχέση:

$$a_n = \sum_{k \geq 0}^{n} b_k b_{n-k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή ορίζοντας την αντιστρέψιμη τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum\limits_{n \geq 0} b_n x^n$, έχουμε:

$$1 = (1 - x^2)(1 - x^2)^{-1} = (1 - x^2) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = (1 - x^2)(F(x))^2$$

$$1 = (1 - x^2)(F(x))^2$$

$$F(x)^{-1} = (1 - x^2)F(x)$$

και η μοναδικότητα έπεται από τον μονοσήμαντο τρόπο που ορίζεται η ακολουθία (b_n).

Γράφοντας την $F(x)$ ως $F(x) = 1 + G(x)$ με $G(0) = 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 2.15 έτσι ώστε:

$$F(x) = (1 + G(x)) = \left((1 + G(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (F(x)^2)^{\frac{1}{2}} = \left((1 - x^2)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

το οποίο είναι ίσο με την διωνυμική σειρά για $a = -\frac{1}{2}$ για την οποία έχουμε υπολογίσει το ανάπτυγμα στο παράδειγμα 2.14. Άρα έχουμε

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n}$$

Συνεπώς:

$$[x^n]F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}, & n = 0 \ \mathrm{mod} 2 \\ 0, & n = 1 \ \mathrm{mod} 2 \end{cases}$$

□