Άσκηση 1 (1). *Έστω $(X, d, \mu,)$ μετρικός χώρος πιθανότητας και $\phi : (X, d) \to (Y, \sigma)$Lipschitz με συνάρτηση με σταθερά 1.*
Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας μ_ϕ στην $\mathcal{B}(Y)$ που ορίζεται από την

$$\mu_\phi(A) = \mu(\phi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(Y)$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_{\mu_\phi}(t) \leq \alpha_\mu(t)$$

Απόδειξη. Έστω $t > 0$. Από τον ορισμό των $\alpha_{\mu_\phi}(t), \alpha_\mu(t)$ αρκεί για κάθε $A \in \mathcal{B}(Y)$ με $\mu_\phi(A) = \mu(\phi^{-1}(A)) \geq \frac{1}{2}$ να δείξουμε ότι $1 - \mu(\phi^{-1}(A_t)) \leq 1 - \mu(\phi^{-1}(A)_t) \iff \mu(\phi^{-1}(A)_t) \leq \mu(\phi^{-1}(A_t))$.
Για αυτό αρκεί $\phi^{-1}(A)_t \subseteq \phi^{-1}(A_t)$
Αφού ϕ 1-Λιποσχιτζ έχουμε

$$dist(x, \phi^{-1}(A)) \geq dist(\phi(x), \phi(\phi^{-1}(A))) \geq dist(\phi(x), A)$$

Άρα $dist(x, \phi^{-1}(A)) < t \Rightarrow dist(\phi(x), A) < t$
Οπότε

$$\phi^{-1}(A)_t = \{x \in X : dist(x, \phi^{-1}(A)) < t\} \subseteq \{x \in X : dist(\phi(x), A) < t\} = \{x \in X : \phi(x) \in A_t\} = \phi^{-1}(A_t) \blacksquare$$

$\blacksquare$

Άσκηση 2 (2). *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon \in (0, 1)$ και για κάποιο $t > 0$ ισχύει $\alpha_\mu(t) < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι: αν $A \in \mathcal{B}(X)$ και $\mu(A) \geq \varepsilon$, τότε $1 - \mu(A_{t+r}) \leq \alpha_\mu(r)$ για κάθε $r > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $r > 0$, $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) \geq \varepsilon$.
Αν $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ τότε

$$(A_t)_r \subseteq A_{t+r} \Rightarrow \mu((A_t)_r) \leq \mu(A_{t+r}) \Rightarrow 1 - \mu(A_{t+r}) \leq 1 - \mu((A_t)_r) \leq \alpha_\mu(r)$$

Αφού $1 - \mu(A_t) \leq \alpha_\mu(t) < \varepsilon \Rightarrow \mu(A_t) > 1 - \varepsilon \geq \frac{1}{2}$
Αν $\varepsilon > \frac{1}{2}$ τότε

$$A_r \subseteq A_{t+r} \Rightarrow 1 - \mu(A_{t+r}) \leq 1 - \mu(A_r) \leq \alpha_\mu(r)$$

Αφού $\mu(A) \geq \varepsilon > \frac{1}{2}$.
Σε κάθε περίπτωση έχεουμε το ζητούσμενο αποτέλεσμα. $\blacksquare$