Μεταθετική Άλγεβρα

Εργασία 1

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
ΑΜ: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Άσκηση 1.1) Θεωρούμε τα ιδεώδη $I = (m)$ και $J = (n)$ του $\mathbb{Z}$. Δείξτε τις εξής ισότητες:

(1) $I + J = (d), d = gcd(m, n)$.

(2) $I \cap J = (e), e = lcm(m, n)$.

(3) $IJ = (mn)$.

(4) $(I : J) = (c), c = m/d$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $a \in (d)$, δηλαδή $a = dk$. Υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $mx + ny = d$. Συνεπώς $a = (kx)m+(ky)n \in (m)+(n)$. Αντίστροφα, έστω $a \in (m)+(n)$. Δηλαδή $a = km+\lambda n$. Έχουμε $d|m, n \implies d|a \iff a = dk \iff a \in (d)$.

(2) Έστω $a \in I \cap J$, δηλαδή $a \in (m), (n)$ από όπου παίρνουμε $n, m|a \implies e|a \iff a = ek \iff a \in (e)$. Αντίστροφα, έστω $a \in (e)$. Δηλαδή $a = ke$ και από τις σχέσεις $m, n|e$ παίρνουμε $m, n|a$ δηλαδή $a \in (m), (n)$ και άρα $a \in I \cap J$.

(3) Έστω $a \in IJ$, δηλαδή $a = mkn\lambda = (k\lambda)mn \in (mn)$. Αντίστροφα, αν $a \in (mn)$ τότε $a = mnk = (km)n \in IJ$ αφού το I είναι ιδεώδες και άρα $km \in I$.

(4) Εστω $a \in (c)$, δηλαδή $a = ck = (m/d)k$. Έστω τυχόν $b \in J$, δηλαδή $b = \lambda n$. Τότε $ab = (m/d)kn\lambda = ((n/d)\,\lambda k)\,m \in I$ εφόσον το n/d είναι ακέραιος. Άρα από τον ορισμό του μεταφορέα $(c) \subseteq (I : J)$.

Αντίστροφα, έστω $a \in (I : J) = \{x \in \mathbb{Z} : \quad x(n) \subseteq (m)\}$. Τότε $a(n) \subseteq (m)$ δηλαδή υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $an = km$. Παίρνουμε $a(n/d) = k(m/d)$ και $gcd(n/d, m/d) = 1$ συνεπώς $\frac{n}{d}|k$. Άρα $y = \frac{k}{n/d} \in \mathbb{Z}$ και $a = cy \in (c)$.

$\square$

Άσκηση 1.3) Έστω μηδενοδύναμο στοιχείο $r \in R$. Δείξτε ότι $1 + r \in U(R)$. Συμπεράνατε ότι $u + r \in U(R)$ για κάθε $u \in U(R)$.

Απόδειξη.

Το r είναι μηδενοδύναμο συνεπώς υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $r^n = 0$. Αν το n είναι άρτιος διαλέγουμε το $n + 1$ και έχουμε $r^{n+1} = 0$ και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n είναι περιττός. Συνεπώς για $x, y \in R$ ισχύει η ταυτότητα για το περιττό n:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

εφόσον δεν υπάρχει πρόβλημα με τις πράξεις και την μεταθετικότητα στον δακτύλιο.

$$1 = 1 + r^n = (1 + r)(r^{n-1} - r^{n-2} + r^{n-3} - \ldots - r + 1)$$

Το στοιχείο $(r^{n-1} - r^{n-2} + r^{n-3} - \ldots - r + 1)$ είναι διάφορο του 0 καθώς το πρώτο μέρος $r^{n-1} - r^{n-2} + r^{n-3} - \ldots - r$ είναι μηδενοδιαιρέτης εφόσον το r είναι μηδενοδύναμο, άρα δεν μπορεί να είναι ίσο με 1. Συνεπώς το $(1 + r)$ είναι αντιστρέψιμο.

Αν έχουμε $u \in U(R)$ τότε υπάρχει $b \neq 0$ τέτοιο ώστε $ub = 1$. Έχουμε:

$$u^n = u^n + r^n = (u + r)(u^{n-1} - u^{n-2}r + u^{n-3}r^2 - \ldots - ur^{n-2} + r^{n-1})$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με b^n παίρνουμε:

$$1 = (u + r)b^n(u^{n-1} - u^{n-2}r + u^{n-3}r^2 - \ldots - ur^{n-2} + r^{n-1})$$

και το $(u^{n-1} - u^{n-2}r + u^{n-3}r^2 - \ldots - ur^{n-2} + r^{n-1})$ είναι διάφορο του 0 καθώς το κομμάτι $-u^{n-2}r + u^{n-3}r^2 - \ldots - ur^{n-2} + r^{n-1}$ είναι μηδενοδιαιρέτης και δεν μπορεί να είναι ίσο με u^{n-1}. Άρα το $u + r$ είναι αντιστρέψιμο. $\square$

Άσκηση 1.6) Έστω k σώμα ή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$. Θεωρούμε σημείο $P = (a_1, ..., a_n) \in k^n = k \times \cdots \times k$ και τον ομομορφισμό εκτίμησης

$$\phi_P : k[x_1, .., x_n] \to k, f(x_1, ..., x_n) \mapsto f(a_1, ..., a_n).$$

Δείξτε ότι $ker\phi_P = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ και $k[x_1, .., x_n]/ker\phi_P \simeq k$.

Απόδειξη.

Ο ομομορφισμός εκτίμησης είναι επιμορφισμός καθώς για κάθε $a \in k$ και σταθερό πολυώνυμο $f(x_1, \dots x_n) = a$ έχουμε $\phi_p(f(x_1, \dots, x_n)) = a$.

Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $f(x) \in (x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i - a_i)$$

τότε από τις ιδιότητες του ομομορφισμού παίρνουμε:

$$\phi_p(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P)(a_i - a_i) = 0$$

άρα $f(x) \in ker\phi_p$.

Αντίστροφα, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των μεταβλητών n. Για $n = 1$ είναι γνωστό ότι $ker\phi_{a_1} = (x_1 - a_1)$. Έστω ότι ισχύει για τους φυσικούς που είναι μικρότεροι του n και $f(x) \in ker\phi_P$.

Θέτουμε ως $R = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ το οποίο είναι ακέραια περιοχή είτε το k είναι σώμα είτε $k = \mathbb{Z}$. Σαφώς είναι και το $R[x_n]$ ακέραια περιοχή και σε αυτόν τον δακτύλιο θα εφαρμόσουμε Ευκλείδεια διαίρεση του $f(x)$ με το $g(x) = x_n - a_n$ το οποίο έχει αντιστρέψιμο μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Παίρνουμε:

$$f(x) = q(x)(x_n - a_n) + r$$

με $deg(r) < deg(x_n - a_n) = 1$ όπου ο βαθμός είναι ως προς την μεταβλητή x_n και άρα $r \in R$. Το πολυώνυμο r είναι στις $n - 1$ μεταβλητές και επειδή $f(x) \in ker\phi_P$:

$$0 = \phi_P(f(x)) = \phi_P(q(x)) \cdot 0 + \phi_P(r)$$

ωστόσο στο πολυώνυμο r η εκτίμηση γίνεται στο σημείο $P' = (a_1, \dots, a_{n-1})$ και έτσι $r \in ker\phi_{P'} = (x_1 - a_1, \dots, x_{n-1} - a_{n-1})$ από την επαγωγική υπόθεση. Άρα έχουμε:

$$f(x) = q(x)(x_n - a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i(x_1, \dots, x_{n-1})(x_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i - a_i)$$

□

Άσκηση 1.7) Έστω I, J ιδεώδη του δακτυλίου με $I + J = R$. Δείξτε ότι $I^m + J^n = R$ για κάθε $m, n > 0$.

Απόδειξη.

$1 \in R = I + J$ συνεπώς υπάρχουν $a \in I, b \in J$ τέτοια ώστε $a + b = 1$.

$$1 = a + b = (a+b)^{m+n-1} = \sum_{i=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} a^{m+n-1-i} b^i$$

για να έχουμε $a^m x + b^n y$ θέλουμε οι εκθέτες των a και b που θα μένουν αφού βγάλουμε τους κοινούς παράγοντες να είναι θετικοί. Δηλαδή $n - 1 - i > 0$ και $i - n > 0$ και αυτό το πετυχαίνουμε ως εξής:

$$(a+b)^{m+n-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} a^{m+n-1-i} b^i \right) + \left(\sum_{i=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} a^{m+n-1-i} b^i \right)$$

$$= a^m \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} a^{n-1-i} b^i \right) + b^n \left(\sum_{i=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} a^{m+n-1-i} b^{i-n} \right)$$

$$= a^m x + b^n y \in I^m + J^n$$

και εφόσον το 1 ανήκει στο ιδεώδες $I^m + J^n$ έχουμε ότι $I^m + J^n = R$. □

Άσκηση 1.11) Έστω k σώμα και I ιδεώδες του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x_1, ..., x_n]$. Ορίζουμε:

$$V(I) = \{P = (a_1, ..., a_n) \in k^n : f(P) = 0 \ \forall f(x_1, ..., x_n) \in I)\}.$$

Το $V(I)$ είναι το σύνολο των κοινών ριζών όλων των πολυωνύμων του I.

Για $k = \mathbb{R}$ και $n = 2$ σχεδιάστε το $V(I)$ στις εξής περιπτώσεις.

- $I = (x^2 + y^2 - 1)$.
- $I = (x - 1, x^2 - y)$.
- $I = ((x - 1)(x^2 - y))$.

Έστω I, J ιδεώδη του $k[x_1, ..., x_n]$. Δείξτε τα εξής.

(1) $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$.

(2) $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

Στη συνέχεια δώστε μια διαισθητική γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος της άσκησης $1.8ii$).

Απόδειξη.

(1) Έστω $P \in V(I + J)$, δηλαδή $f(P) = 0$ για κάθε $f(x_1, \ldots, x_n) \in I + J$. Έστω τώρα $g(x_1, \ldots, x_n) \in I$. Το ιδεώδες J περιέχει το μηδενικό πολυώνυμο, συνεπώς $g(x_1, \ldots, x_n) + 0 \in I + J$ και από την υπόθεση $g(P) = 0$. Άρα $P \in V(I)$ και όμοια στο $V(J)$.

Έστω $P \in V(I) \cap V(J)$ και $f(x_1, \ldots, x_n) \in I + J$. Τότε $f = g + h$ με $g \in I$ και $h \in J$. Από την υπόθεση $g(P) = h(P) = 0$ και άρα $f(P) = 0$ δηλαδή $P \in V(I + J)$.

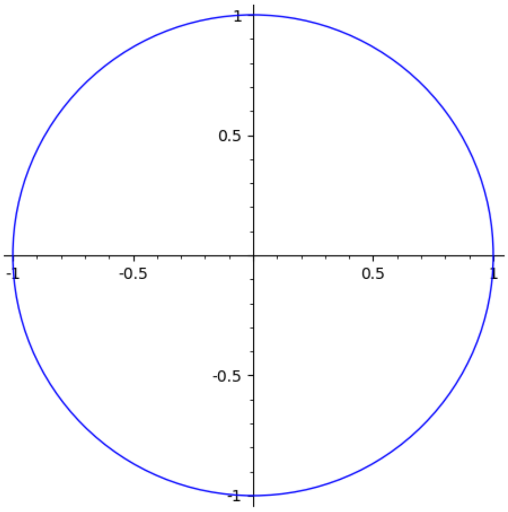
(2) Έστω $P \in V(I) \cup V(J)$, δηλαδή $P \in V(I)$ ή $P \in V(J)$ και έστω $f \in IJ$. Τότε $f = gh$ με $g \in I, h \in J$. Έχουμε $g(P) = 0$ ή $h(P) = 0$ και άρα $f(P) = 0$, συνεπώς $P \in V(IJ)$.

Αντίστροφα, έστω $P \in V(IJ)$ και $P \notin V(J)$, τότε υπάρχει $h \in J$ τέτοιο ώστε $h(P) \neq 0$. Έστω τυχόν $g \in I$. Τότε από την υπόθεση:

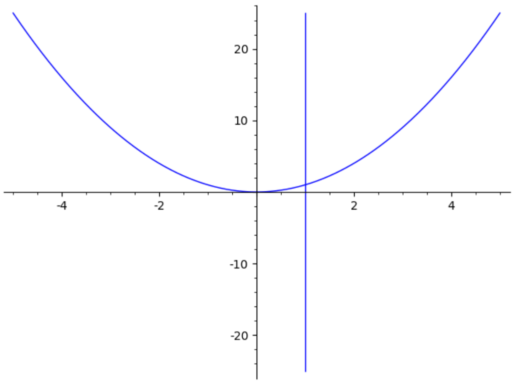
$$g(P)h(P) = 0$$

και επειδή είμαστε σε περιοχή $g(P) = 0$, άρα $P \in V(I)$. Όμοια αν $P \notin V(I) \implies P \in V(J)$. Άρα $P \in V(I) \cup V(J)$.

- $V(x^2+y^2-1) =$



- $V(x-1, x^2-y) = V(x-1) \cap V(x^2-y) = \{(1,y) : \quad y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,x^2) : \quad x \in \mathbb{R}\} = \{(1,1)\}$
- $V(x-1, x^2-y) = V(x-1) \cup V(x^2-y) = \{(1,y) : \quad y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,x^2) : \quad x \in \mathbb{R}\} =$



Αλγεβρικά έχουμε $x^2 = y$ στον παρακάτω δακτύλιο και άρα:

$$\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2-y, x-x^3+xy)} \simeq \frac{\mathbb{R}[x,x^2]}{(x-x^3+x^3)} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x)} \simeq \mathbb{R}$$

Γεωμετρικά, επειδή στο δεξί μέλος έχουμε ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}$ αυτό σημαίνει ότι οι περιορισμοί των δύο πολυωνύμων στο 0 είναι ένα συγκεκριμένο σημείο. Αυτό μπορούμε να το δούμε και ως:

$$V(x^2-y, x-x^3+xy) = V(x^2-y) \cap V(x-x^3+xy) = \{(0,0)\}$$

$\square$

Τα σχέδια έγιναν με το λογισμικό SageMath που ζει πάνω στην γλώσσα προγραμματισμού Python:

SageMath 9.0 Console

```
sage: line([(1,25),(1,-25)]) + plot(x^2,-5,5)
Launched png viewer for Graphics object consisting of 2 graphics primitives
sage: circle((0,0),1)
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage:
```

Άσκηση 1.12) Έστω $\phi : R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

(1) Δείξτε ότι αν I είναι ιδεώδες του R και ο ϕ είναι επί, τότε το σύνολο $\phi(I)$ είναι ιδεώδες του S.

(2) Δείξτε με παράδειγμα ότι ο προηγούμενος ισχυρισμός δεν αληθεύει γενικά χωρίς την υπόθεση περί επί.

(3) Δείξτε ότι αν K είναι ιδεώδες του S, τότε το σύνολο $\phi^{-1}(K)$ είναι ιδεώδες του R.

Απόδειξη.

(1) Έστω $y_1, y_2 \in \phi(I)$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ τέτοια ώστε $y_1 = \phi(x_1), y_2 = \phi(x_2)$.

$$y_1 - y_2 = \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2)$$

και $x_1 - x_2 \in I$, αφού το I είναι ιδεώδες, άρα $y_1 - y_2 \in \phi(I)$. Έστω $s \in S$, τότε αφού ϕ επί υπάρχει ένα $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $s = \phi(x_0)$.

$$sy_1 = \phi(x_0)\phi(x_1) = \phi(x_0 x_1)$$

και $x_0 x_1 \in I$, αφού το I είναι ιδεώδες, άρα $sy_1 \in \phi(I)$.

(2) Θεωρούμε την εμφύτευση δακτυλίων $\mathbb{Z} \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ με $i(x) = x$. Είναι ομομορφισμός δακτυλίων αλλά δεν είναι επί και ενώ το $2\mathbb{Z}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ το $i(2\mathbb{Z})$ δεν είναι ιδεώδες του $\mathbb{Q}$ καθώς:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \notin i(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$$

το $\mathbb{Q}$ είναι σώμα εξάλλου και έχει μόνο τον εαυτό του και το τετριμμένο ιδεώδες.

(3) Έστω $x_1, x_2 \in \phi^{-1}(K)$, τότε $\phi(x_1), \phi(x_2) \in K$, δηλαδή

$$\phi(x_1 - x_2) = \phi(x_1) - \phi(x_2) \in K$$

αφού το K είναι ιδεώδες. Άρα $x_1 - x_2 \in \phi^{-1}(K)$.

Έστω $r \in R$, τότε $\phi(rx_1) = \phi(r)\phi(x_1) \in K$, αφού το K είναι ιδεώδες. Άρα $rx_1 \in \phi^{-1}(K)$.

□