Μεταθετική Άλγεβρα

Εργασία 6

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
ΑΜ: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Άσκηση 8.4) Ποιες από τις ακόλουθες επεκτάσεις δακτυλίων του $\mathbb{Z}$ είναι ακέραιες;

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}]$.

(2) $\mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]$.

(3) $\mathbb{Z}[x]/(x^3)$.

Απόδειξη.

(1) Έχουμε ότι τα $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$ είναι ακέραια πάνω από το $\mathbb{Z}$ εφόσον είναι ρίζες των μονικών πολυωνύμων x^2-2, x^3-3, x^5-5 αντίστοιχα. Άρα το $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο και έτσι κάθε στοιχείο του είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$. Ειδικότερα, περιέχει τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}]$ και άρα αυτός είναι μια ακέραια επέκταση του $\mathbb{Z}$.

(2) Αν το $\mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]$ ήταν ακέραια επέκταση τότε θα ήταν ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$ και το στοιχείο

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

Ωστόσο, το $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια κλειστό στο $\mathbb{Q}$ όπως είναι κάθε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης στο σώμα πηλίκων της. Άρα έχουμε άτοπο αφού $\frac{1}{2}$ ακέραιο και δεν ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

(3) Καθώς το x^3 είναι μονικό, δηλαδή ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι αντιστρέψιμος, έχουμε αλγόριθμο διαίρεσης στο $\mathbb{Z}[x]$. Έτσι, η εικόνα ενός $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ μέσω του φυσικού επιμορφισμού θα είναι $f_0 + f_1 x + f_2 x^2$ στο $\mathbb{Z}[x]/(x^3)$. Δηλαδή, το $\mathbb{Z}[x]/(x^3)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο ίσο με $(1, x, x^2)$. Άρα είναι και ακέραια επέκταση του $\mathbb{Z}$. $\square$

Καθώς χρησιμοποιήσαμε την άσκηση 8.1), δηλαδή ότι κάθε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης είναι ακέραια κλειστή στο σώμα πηλίκων της, θα την αποδείξουμε.

Απόδειξη.

Αν το R είναι σώμα θα ταυτίζεται με το σώμα πηλίκων του άρα δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Έστω ότι το R δεν είναι σώμα και k το σώμα πηλίκων του. Αν $\frac{x}{y} \in k$ είναι ακέραιο πάνω από το R, με $x, y \in R$ θα δείξουμε ότι $\frac{x}{y} \in R$. Εφόσον είμαστε σε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ανάγωγο στοιχείο $p \in R$ που να διαιρεί ταυτόχρονα τα x και y, διαφορετικά από την μοναδική παραγοντοποίηση το διαγράφουμε από αριθμητή και παρονομαστή και παίρνουμε νέο κλάσμα χωρίς κοινό ανάγωγο διαιρέτη. Εφόσον το $\frac{x}{y}$ είναι ακέραιο πάνω από το R έχουμε ότι υπάρχουν $a_i \in R$ τέτοια ώστε

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{x}{y}\right) + a_0 = 0$$

την οποία σχέση πολλαπλασιάζουμε με το y^n. Έτσι έχουμε

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \ldots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n = 0$$

Αν τώρα ισχύει ότι $y \notin U(R)$, τότε λόγω μοναδικής παραγοντοποίησης έχουμε ότι υπάρχει ανάγωγο p τέτοιο ώστε $p|y$. Εφόσον το y είναι σε όλους τους όρους εκτός από τον πρώτο και στο δεύτερο μέλος της σχέσης έχουμε 0, έπεται ότι $p|x^n$. Καθώς το p είναι ανάγωγο σε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης έχουμε ότι $p|x$ εφόσον

$$\text{Αν } x = uq_1^{m_1}\cdots q_s^{m_s}, \quad p|x^n \implies pk = x^n = u^n q_1^{nm_1}\cdots q_s^{nm_s}$$

και λόγω μοναδικής παραγοντοποίησης το ανάγωγο p θα ταυτίζεται με κάποιο από τα q_i και άρα $p|x$. Αυτό είναι άτοπο καθώς έχουμε ότι δεν υπάρχει ανάγωγο p να διαιρεί ταυτόχρονα τα x, y. Συνεπώς $y \in U(R)$ και έτσι έχουμε

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}\cdot 1 = \frac{x}{y}\frac{y^{-1}}{y^{-1}} = xy^{-1} \in R$$

δηλαδή το R είναι ακέραια κλειστό στο k. □

Άσκηση 8.5) Αν $R \subseteq S$ είναι δακτύλιοι με S ακέραιο πάνω από το R, τότε ο $S[x]$ είναι ακέραιος πάνω από τον $R[x]$.

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι αν έχουμε για τυχαίους δακτυλίους $R \subseteq S$ ότι αν το S είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, τότε και το $S[x]$ θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο $R[x]$-πρότυπο. Πράγματι, έστω ότι έχουμε

$$S = (s_1, \ldots, s_n)$$

ως R-πρότυπο και $f(x) \in S[x]$ με

$$f(x) = f_n x^n + \ldots f_1 x + f_0, \quad f_i \in S$$

εφόσον $f_i \in S$ γράφουμε

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} s_j, \quad y_{ij} \in R$$

Αντικαθιστώντας τα f_i στο πολυώνυμο $f(x)$ και αναδιατάσσοντάς το σαν να είναι πολυώνυμο των $s_1, \ldots, s_n$ έχουμε

$$f(x) = g_1(x)s_1 + g_2(x)s_2 + \ldots + g_n(x)s_n$$

όπου τα g_i είναι πολυώνυμα του x με συντελεστές πράξεις των y_{ij}. Άρα $g_i(x) \in R[x]$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς τα $s_1, \ldots, s_n$ παράγουν το $S[x]$ ως $R[x]$-πρότυπο.

Τώρα θεωρούμε ένα πολυώνυμο $s(x) \in S[x]$ και θα δείξουμε ότι είναι ακέραιο πάνω από το $R[x]$. Έστω ότι οι συντελεστές του είναι οι $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$. Εφόσον αυτά είναι στοιχεία της ακέραιας επέκτασης S έχουμε ότι το R-πρότυπο $R[s_0, s_1, \ldots, s_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Με βάση την παρατήρηση, το $R[s_0, s_1, \ldots, s_n][x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $R[x]$-πρότυπο. Έτσι, έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $R[s_0, s_1, \ldots, s_n, x]$ είναι ακέραιο πάνω από το $R[x]$. Ειδικότερα, το $s(x)$ με το οποίο ξεκινήσαμε ανήκει σε αυτόν τον δακτύλιο, άρα το $s(x)$ είναι ακέραιο πάνω από το $R[x]$.

$\square$

Άσκηση 8.6). Έστω k σώμα, $R = k[x^2]$ και $S = k[x]$.

(1) Αληθεύει ότι το S είναι ακέραιο πάνω από το R;

(2) Αληθεύει ότι το S είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο; Ελεύθερο R-πρότυπο;

(3) Δείξτε ότι κάθε $f \in S$ είναι ρίζα πολυωνύμου βαθμού 2 με συντελεστές στο R.

Απόδειξη.

(1) Το S είναι πράγματι ακέραιο πάνω από το R καθώς μπορούμε να γράψουμε $S = k[x] = k[x, x^2] = (k[x^2])[x] = R[x]$ και αρκεί να δείξουμε ότι το x είναι ακέραιο πάνω από το R. Αυτό ισχύει εφόσον είναι ρίζα του μονικού $t^2 - x^2 \in R[t]$.

(2) Ισχύει ότι είναι και πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και ελεύθερο. Έστω $f(x) \in k[x]$. Χωρίζουμε τις δυνάμεις σε άρτιες και περιττές, δηλαδή

$$f(x) = \big(f_0 + f_2x^2 + \ldots\big) + \big(f_1x + f_3x^3 + \ldots\big) =$$

$$= \big(f_0 + f_2x^2 + \ldots\big) + x(f_1 + f_3x^2 + \ldots) = 1 \cdot g_1(x^2) + x \cdot g_2(x^2)$$

με $g_1(x^2), g_2(x^2) \in k[x^2]$. Άρα τα $1, x$ παράγουν το $k[x]$ ως $k[x^2]$-πρότυπο. Αυτά τα δύο είναι και $k[x^2]$-γραμμικά ανεξάρτητα, άρα το πρότυπο είναι ελεύθερο. Πράγματι, αν

$$g_1(x^2) + g_2(x^2)x = 0$$

τότε το πρώτο πολυώνυμο θα αποτελείται μόνο από άρτιες δυνάμεις και το δεύτερο μόνο από περιτές, δηλαδή αυτά τα δύο πολυώνυμα θα αθροίζουν στο μηδενικό πολυώνυμο αν είναι και τα δύο τα μηδενικά πολυώνυμα. Άρα το σύνολο $1, x$ είναι μια βάση του R-προτύπου S.

(3) Έστω $f(x) \in k[x]$. Το αποτέλεσμα είναι μια απλή εφαρμογή της πρότασης 1 της παραγράφου 8.1 των σημειώσεων. Πράγματι, για $M = S = k[x]$ και για $I = k[x^2]$ ιδεώδες του $k[x^2]$ έχουμε ότι το M ως R-πρότυπο παράγεται από δύο στοιχεία και $f(x)k[x] \subseteq k[x^2]k[x] = k[x]$ (αφού το $k[x^2]k[x]$ ως ιδεώδες του $k[x]$ περιέχει το 1). Άρα υπάρχουν $a_1 \in I, a_2 \in I^2 \subseteq k[x^2]$ τέτοια ώστε

$$\left(f(x)\right)^2 + a_1f(x) + a_2 \in Ann_SM$$

και φυσικά

$$Ann_SM = \{s(x) \in k[x] : \quad s(x)h(x) = 0 \quad \forall h(x) \in k[x]\} = \{0\}$$

$\square$

Άσκηση 9.3) Έστω $f \in k[x_1, ..., x_n]$ που δεν διαιρείται με το τετράγωνο αναγώγου πολυωνύμου. Αληθεύει ότι $I(V(f)) = (f)$;

Απόδειξη.

Από το Nullstellensatz αρκεί να δείξουμε ότι το ιδεώδες (f) είναι ριζικό και θα αληθεύει η παραπάνω σχέση. Έχουμε ότι το $k[x_1, \ldots, x_n]$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και μαζί με το γεγονός ότι το f είναι ελεύθερο τετραγώνων παίρνουμε ότι:

$$f = uf_1 f_2 \cdots f_n$$

με f_i ανάγωγα και $u \in U(k[x_1, \ldots, x_n]) = \{\pm 1\}$. Χωρίς την υπόθεση δηλαδή θα είχαμε εκθέτες μεγαλύτερου ίσου του 1 στα f_i. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό σε σχέση ιδεωδών γίνεται:

$$(f) = (f_1 \cdots f_n) = (f_1) \cap (f_2) \cap \ldots \cap (f_n)$$

και τα (f_i) είναι πρώτα ιδεώδη. Πράγματι, αν έχουμε

$$ab \in (f_i) \implies f_i h_i = ab \implies f_i | a \text{ ή } f_i | b$$

αφού είμαστε σε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και ο ανάγωγος παράγοντας f_i θα βρίσκεται αναγκαστικά και στο δεξί μέλος, δηλαδή θα είναι παράγοντας σε τουλάχιστον κάποιο από τα δύο a, b.

Με βάση τον ισχυρισμό, έχουμε ότι

$$\sqrt{(f)} = \sqrt{(f_1) \cap \ldots \cap (f_n)} = \sqrt{(f_1)} \cap \ldots \cap \sqrt{(f_n)} = (f_1) \cap \ldots \cap (f_n) = (f)$$

όπου φυσικά $\sqrt{(f_i)} = (f_i)$ αφού είναι πρώτα ιδεώδη. Άρα ισχύει

$$I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f)$$

Θα αποδείξουμε τώρα τον ισχυρισμό. Η σχέση $(\subseteq)$ είναι προφανής καθώς κάθε f_i διαιρεί το f και άρα $(f) \subseteq (f_i)$ για κάθε i. Αντίστροφα, έστω $g \in (f_1) \cap \ldots \cap (f_n)$. Έχουμε

$$g \in (f_1) \implies g = h_1 f_1$$

και στην συνέχεια

$$g = h_1 f_1 \in (f_2) \implies f_2 | h_1 f_1 \implies f_2 | h_1$$

εφόσον είμαστε σε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και τα f_1, f_2 είναι ανάγωγα. Δηλαδή, $g = h_2 f_2 f_1$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία σε πεπερασμένα n βήματα παίρνουμε

$$g = h_n f_n \cdots f_2 f_1 = h_n f \in (f)$$

και άρα αποδείξαμε τον ισχυρισμό. $\square$

Σημείωση για το (3) της άσκησης 8.6 από την βιβλιογραφία.

Αν συμβουλευτούμε την λύση που υπάρχει στους Altman-Kleinman θα δούμε ότι αφενός κρύβεται το θεώρημα Cayley-Hamilton και αφετέρου μπορούμε να βρούμε αυτά τα a_1, a_2. Αρχικά, αντί για την πρόταση 1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική πρόταση 2.4 των Atiyah-Macdonald η οποία λέει το εξής:

Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, I ένα ιδεώδες του R και $\phi : M \to M$ ένας ομομορφισμός R-προτύπων ή αλλιώς ενδομορφισμός του M τέτοιος ώστε $\phi(M) \subseteq IM$. Τότε ο ομομορφισμός ϕ ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

όπου το 0 εδώ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός $M \to M$ και το n είναι ο αριθμός των γεννητόρων του M. Ουσιαστικά, η πρόταση 1 είναι ειδική περίπτωση αυτής της πρότασης για τον ομομορφισμό $m \mapsto s \cdot m$. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι εντελώς όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1 και βασίζεται στο τέχνασμα της ορίζουσας. Με βάση αυτήν την πρόταση έχουμε και το θεώρημα Cayley-Hamilton για πίνακες με στοιχεία από μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.

Φυσικά, η πρόταση αναφέρεται για ομομορφισμούς R-προτύπων και όχι συγκεκριμένα για k-διανυσματικούς χώρους που έχουμε συνηθίσει από τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας. Έτσι, αν θεωρήσουμε πίνακα $\mathcal{A}$ που προκύπτει ως πίνακας R-ομομορφισμού προτύπων ως προς συγκεκριμένη βάση ελευθέρου προτύπου, όμοια με τους πίνακες των γραμμικών απεικονίσεων της γραμμικής άλγεβρας, αυτός ο πίνακας $\mathcal{A}$ θα ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Αυτό το έχουμε από την πρόταση των Atiyah-Macdonald αν θεωρήσουμε το R^n ως R-πρότυπο με την συνήθη βάση $e_1, \ldots, e_n$ και θεωρήσουμε ως ϕ τον ενδομορφισμό του R^n που προκύπτει ως προς την συνήθη βάση και τον πίνακα $\mathcal{A}$. Υπενθυμίζουμε ότι ο ενδομορφισμός ϕ θα καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες του στα e_i και τις εικόνες αυτές τις παίρνουμε από τον πολλαπλασιασμό $\mathcal{A} \cdot e_i^T$.

Επιπλέον, οι Altman-Kleinman αποδεικνύουν ότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτή την πρόταση των Atiyah-Macdonald ξεκινώντας απο το θεώρημα Cayley-Hamilton, δηλαδή το θεώρημα Cayley-Hamilton και το τέχνασμα της ορίζουσας είναι ισοδύναμα.

Έτσι αν θεωρήσουμε στην συγκεκριμένη άσκηση τον ενδομορφισμό

$$\phi : k[x] \to k[x]$$

$$g(x) \mapsto f(x)g(x)$$

και γράψουμε $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ όπου ξεχωρίζουμε τις άρτιες και περιττές δυνάμεις, τότε για την βάση $\{1, x\}$ έχουμε ότι

$$\phi(1) = f(x) = f_e(x) + f_o(x) = f_e(x) + G \cdot x$$

όπου G είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $f_o(x)$ με το x και $G \in k[x^2]$ αφού το $f_o(x)$ περιέχει τις περιττές δυνάμεις. Επιπλέον

$$\phi(x) = f(x)x = f_e(x)x + Gx^2 = 1 \cdot Gx^2 + x \cdot f_e(x)$$

Δηλαδή, ο πίνακας που ορίζεται από την ϕ ως προς την βάση $\{1, x\}$ (και του πεδίου ορισμού και του πεδίου άφιξης) είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{pmatrix} f_e & Gx^2 \\ G & f_e \end{pmatrix} \in M_2(k[x^2])$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $T^2 - 2f_e(x)T + (f_e(x))^2 - (f_o(x))^2$. Άρα από την ισοδυναμία του θεωρήματος Cayley-Hamilton με το τέχνασμα της ορίζουσας, έχουμε ότι ο ϕ ικανοποιεί αυτή τη σχέση. Δηλαδή:

$$(f(x))^2 - f_e(x)f(x) + (f_e(x))^2 - (f_o(x))^2 = 0$$

και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν από το δοσμένο πολυώνυμο τα a_1, a_2.