Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. *Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, όπου*

(1) *$\mathcal{C}$ κλάση από <u>αντικείμενα</u>.*

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ από <u>μορφισμούς</u> από το A στο B και*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A,B\in\mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(3) *Για κάθε A, B, C αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:*

$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται <u>σύνθεση</u>, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

(1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \varnothing$.

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ και για κάθε $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ μπορούμε:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

(3) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:*

$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \to A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \to C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(1) $\mathcal{S} =$ κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.

(2) $\mathcal{T} =$ κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).

(3) $\mathcal{G} =$ ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(4) $\mathcal{A}b =$ αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(5) $\mathcal{S}_0 =$ κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:

$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

(6) $\mathcal{T}_0 =$ σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.

(7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}} =$ διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.

(8) $\mathcal{R} =$ δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

(9) $\mathcal{R}_1$ = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.

(10) $\mathcal{M}_R^L$ = αριστερά R-πρότυπα με R-γραμμικές απεικονίσεις.

(11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.

(12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X, R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:
$$(X, R) \longrightarrow (Y, S)$$
είναι απεικόνιση:
$$f : X \to Y$$
με
$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

(13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι $(X, \leq)$ όπου X σύνολο και $\leq$ σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:
$$(X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$$
με απεικόνιση:
$$f : X \to Y$$
όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. *Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή αν $\mathcal{C}$ είναι σύνολο.*

Παραδείγματα:

(14) $(G, *)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G, \circ = *$)

(15) $(X, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο με:
$$\left(\mathcal{C} = X, \quad M = \bigcup_{x,y \in X} Mor(x, y), \quad \circ \right)$$
όπου:
$$Mor(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$
και η σύνθεση του $\{(x, y)\}$ με το $\{(y, z)\}$ δίνει το $\{(x, z)\}$, ενώ η σύνθεση με $\varnothing$ δίνει $\varnothing$.

(16) Ομοίως για (X, R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. *$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_0, *)$ κατηγορίες, θα λέμε $\mathcal{C}_0$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ $\iff$ $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:*
$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$
και $*$ είναι ο περιορισμός της $\circ$.

Αν για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

π.χ.

(1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{R}_1$ υποκατηγορία της $\mathcal{R}$, όχι πλήρης.

Ορισμός. *$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας (συναλλοίωτος) <u>συναρτητής</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) :*

$$F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F_2 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$:*

$$F_2(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$$

(2) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$:*

$$F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$$

(3) *Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{C}$ και $f : A \to B, \quad g : B \to C$ ισχύει ότι:*

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$ με

$$S \longrightarrow \langle S \rangle = \text{ διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f : S \to T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{T}g \to \mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) $\mathcal{C}$ έχει αντικείμενα τα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n \in \mathbb{N}$, σημειωμένα (U, x) με $x \in U$ και μορφισμοί

$$f : (U, x) \to (V, y)$$

διαφορίσιμη με $f(x) = y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U, x) = \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f : (U, x) \longrightarrow (Y, y)$$

$$F_2(f) = Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. *Ένα <u>δράγμα</u> (πάνω από τον X) είναι μια τριάδα $(\mathcal{S},\pi,X)$ όπου $\mathcal{S},X$ είναι τοπολογικοί χώροι και*

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιμορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως <u>βάση</u>, στο π ως <u>προβολή</u> και στο $\mathcal{S}$ ως <u>ολικό χώρο</u>.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies$ $\pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \to \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X, όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X, άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X. □

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε το*

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \to \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

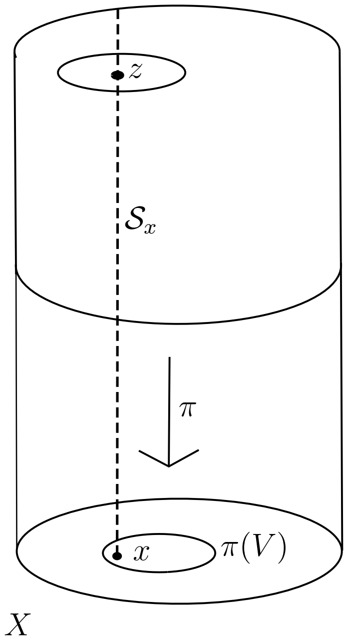
είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο $\mathcal{B}$ αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. □

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x.*

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \varnothing$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα $\mathcal{S}_x$ σαν τοπολογικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ είναι διακριτός.*



Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap \mathcal{S}_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \to \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U, αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. $\square$

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).*

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(\mathcal{S}, \pi, X) \to (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned} \rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\ &\iff f(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δραγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δραγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X),(\mathcal{T},\rho,X)$ δράγματα και $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το $(\mathcal{S},f,\mathcal{T})$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Έστω $z\in\mathcal{S}$, τότε $f(z)\in\mathcal{T}$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V\in\mathcal{N}_z, W\in\mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)\subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \longrightarrow \rho(W)\subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W\in\mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V)\subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho\circ f=\pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\supseteq V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi|_V"'] & & f(V) \arrow[dl, "p"'] & \subseteq W \arrow[dl, "p|_W"] \\
& \pi(V) \arrow[ur, dashed, bend right] & \subseteq p(W) &
\end{tikzcd}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V=\left(\rho|_{f(V)}\right)^{-1}\circ\pi|_V$, είναι ομοιμορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. $\square$

Θα ορίσουμε την κατηγορία $\mathcal{S}h_X$ των δραγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δραγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. *Η σύνθεση στην $\mathcal{S}h_X$ είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Έχουμε $g\circ f:\mathcal{S}\to\mathcal{P}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $\mathfrak{p}\circ(g\circ f)=\pi$. Πράγματι $\mathfrak{p}\circ(g\circ f)=(\rho\circ g)\circ f=\rho\circ f=\pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_{\mathcal{S}}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ είναι μορφισμός δραγμάτων και $id_{\mathcal{S}}\circ f=f, g\circ id_{\mathcal{S}}=g$ κλπ.

Ορισμός. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ένας μορφισμός $f:A\to B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g:B\to A$ έτσι ώστε:*

$$f\circ g=1_B$$

$$g\circ f=1_A$$

Πρόταση. *Έστω ο μορφισμός στην $\mathcal{S}h_X$:*

$$f:(\mathcal{S},\pi,X)\longrightarrow(\mathcal{T},\rho,X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *f ισομορφισμός.*

(2) *f ισομορφισμός στα νήματα.*

(3) *f 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δραγμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) $\implies$ (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. $\square$

Παραδείγματα:

(1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:
$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$
που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με
$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$
ομοιομορφισμό.

(2) Έλικα $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : \quad t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με
$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$
$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

(3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια τομή του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \to \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.*

Ισοδύναμα: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Μάθημα 3 - Τρίτη 01/03/2022.

Παρατήρηση. *Έστω $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και $s : U \to \mathcal{S}$ τυχαία (όχι κατ ανάγκη συνεχής) με $\pi \circ s = id_U$. Έπεται ότι η $s : U \to s(U)$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, υπάρχει $s^{-1} : s(U) \to U$ και από την σχέση $\pi \circ s = id_U$ παίρνουμε $\pi|_{s(U)} = s^{-1}$ από την μοναδικότητα αριστερής και δεξιάς αντίστροφης. Ισοδύναμα $s = \big(\pi|_{s(U)}\big)$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο συνολοθεωρητικά επιχειρήματα και δεν έχουμε απαιτήσει ανοιχτά σύνολα και συνέχεια.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] & \supseteq & s(U) \arrow[d, "\pi|_{s(U)}"'] \\
X & \supseteq & U \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}
$$

$$\pi \circ s = id_U \qquad \Longrightarrow \qquad \pi|_{s(U)} \circ s = id_U$$

Παρακάτω θα θεωρούμε (συνεχείς) τομές σε <u>ανοιχτά</u> $U \subseteq X$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ για το σύνολο

$$\{ s : U \longrightarrow \mathcal{S} | \quad s \text{ τομή } \}$$

Παρατήρηση. *Έστω $z \in A \subseteq \mathcal{S}$, το A να είναι ανοιχτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό με $V \subseteq A$ (Υπενθύμιση: τα V του ορισμού του δράγματος είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$).*

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ τομή. Τότε $s(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $s : U \to s(U)$ ομοιομορφισμός.*

Ουσιαστικά με αυτό το λήμμα έχουμε ότι οι τομές s είναι τοπικές αντίστροφες της π πάνω στα $s(U)$.

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $s(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$.

Έστω $z = s(x) \in s(U), x \in U$. Υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V$ έτσι ώστε το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η s είναι συνεχής στο x και $V \in \mathcal{N}_{s(x)}$, V ανοιχτό. Λόγω συνέχειας παίρνουμε ότι το A είναι ανοιχτή περιοχή του x με $A \subseteq U$ και $s(A) \subseteq V$. Εφαρμόζοντας την π παίρνουμε:

$$\pi(s(A)) = A \subseteq \pi(V)$$

και $\pi(V)$ ανοιχτό. Άρα $s(A) \subseteq V$, δηλαδή το $s(A)$ είναι ανοιχτό μέσα στο ανοιχτό V και άρα είναι και σε όλο το $\mathcal{S}$.

$s(A) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A \subseteq U \implies z = s(x) \in s(A) \subseteq s(U)$, άρα $s(U)$ ανοιχτό.

(2) $V \supseteq s(A)$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "\pi_V"'] & \supseteq & s(A) \arrow[d, "\pi|_{S(A)} = \text{ομοιομ.} = s^{-1}|_{s(A)}"] \\
\pi(V) & \supseteq & A \subseteq U
\end{tikzcd}
$$

και έχουμε s 1-1, επί, συνεχής, και τοπικός ομοιομορφισμός, άρα η s είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, $z \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $z \in s(U)$.*

Απόδειξη. $z \in \mathcal{S} \implies$ υπάρχει $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό, $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει:

$$s := (\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \longrightarrow V$$

συνεχής, με $\pi(V) \subseteq U$ και $\pi \circ s = id_U$. Άρα για $x = \pi(z)$ ισχύει $s(x) = s(\pi(z)) = z$. $\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το σύνολο:*

$$\{s(U) : \quad U \text{ ανοιχτό } \subseteq X, s \in \mathcal{S}(U)\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό:

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, $A, B \subseteq X$ ανοιχτά με $x \in A \cap B \neq \varnothing$ και $s \in \mathcal{S}(A), \sigma \in \mathcal{S}(B)$ με $s(x) = \sigma(x)$. Τότε υπάρχει $U \subseteq A \cap B$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s|_U = \sigma|_U$.*

Αν σκεφτεί κανείς ότι ο Leray που ασχολήθηκε με τα δράγματα με σκοπό την μελέτη διαφορικών εξισώσεων, αυτό το λήμμα είναι η κατάλληλη περίπτωση για αυτό που ήθελε μιας και αν οι αρχικές συνθήκες δύο λύσεων ταυτίζονται τότε ταυτίζονται και ολόκληρες οι λύσεις σε μια ανοιχτή περιοχή.

Απόδειξη. $z = s(x) = \sigma(x) \in \mathcal{S}$. Από ορισμό δράγματος υπάρχει V ανοιχτό $\subseteq X : \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V :\to \pi(V)$ ομοιομορφισμός.

$$s(x) = z \in s(A) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$
$$\sigma(x) = z \in \sigma(B) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

Θεωρούμε στην θέση του V το $V = V \cap \sigma(B) \cap s(A)$, μικραίνουμε το ανοιχτό δηλαδή να είναι μέσα στα άλλα δύο και άρα έχουμε:

$$\pi|_{s(A)} = s^{-1} : s(A) \longrightarrow A$$
$$\pi|_{\sigma(B)} = \sigma^{-1} : \sigma(B) \longrightarrow B$$

$$\pi|_V = s^{-1}|_V = \sigma^{-1}|_V \text{ μαζί με } \sigma|_U = s|_U \implies$$
$$s = \sigma|_{\pi(V)=U}$$

$\square$

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξαντλήσει όσα προκύπτουν με τον ορισμό, έχουμε μόνο τον τοπικό ομοιομορφισμό για να δουλέψουμε, μένει να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι μορφισμοί δραγμάτων στις τομές:

Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) f *μορφισμός δραγμάτων.*

(2) *Για κάθε* $U \subseteq X$ *ανοιχτό, για κάθε* $s \in \mathcal{S}(U)$ *ισχύει* $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) *Για κάθε* $z \in \mathcal{S}$ *υπάρχει ανοιχτό* $U \subseteq X$ *και τομή* $s \in \mathcal{S}(U)$ *τέτοια ώστε* $z \in s(U)$ *και* $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, shift right, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\rho"] \\ & X \arrow[ul, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Απόδειξη.
(1) $\implies$ (2) f συνεχής και f μορφισμός, άρα $\rho \circ f = \pi$. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $s \in \mathcal{S}(U)$. Τότε $f \circ s : U \to \mathcal{T}$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Επιπλέον:

$$\rho \circ (f \circ s) = (\rho \circ f) \circ s = \pi \circ s = id_U$$

άρα $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(2) $\implies$ (3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει U με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z$ και από προηγούμενο λήμμα έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) $\implies$ (1) Θα δείξουμε ότι $\rho \circ f = \pi$. Έστω $z \in \mathcal{S}$. Από (3) έχουμε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z \in s(U)$. Έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U) \implies \rho \circ (f \circ s) = id_U$. Δηλαδή, $\rho \circ f \circ s(x) = \rho \circ f(z)$ αλλά και $\rho \circ f \circ s(x) = id(x) = x = \pi(z)$. Άρα $\rho \circ f = \pi$ αφού το z τυχαίο, δηλαδή πράγματι f μορφισμός δραγμάτων.

□

Άρα σαν μνημονικό κανόνα έχουμε ότι οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Θα δούμε στην συνέχεια την αλγεβρική εικόνα των δραγμάτων, κάτι που αρχικά μοιάζει με τελείως διαφορετικό αντικείμενο.

Έστω X τοπολογικός χώρος, τ_X η τοπολογία του X. Ένα <u>προδράγμα συνόλων</u> πάνω από το X είναι ένα ζεύγος:

$$\left(\{P(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U\}_{V \subseteq U \in \tau_X}\right)$$

όπου $\{P(U)\}_{U \in \tau_X}$ οικογένεια συνόλων, με σύνολο δεικτών την τ_X και

$$\rho_V^U : P(U) \longrightarrow P(V)$$

απεικονίσεις: (περιορισμού)

(1) $\rho_U^U = id_{P(U)} : P(U) \to P(U) \quad \forall U \in \tau_X$.

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ στην τ_X, τότε ισχύει:

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$$

ή αλλιώς το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "P_V^U"] \arrow[dr, "P_W^V"'] & P(V) \arrow[d, "P_W^V"] \\ & P(W) \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα:

(1) (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε U ανοιχτό συμβολίζουμε:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{συνεχής }\}$$

και για κάθε $V \subseteq U$ με $V, U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$\rho^U_V : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$$

$$f \longmapsto f|_V$$

Τότε το ζεύγος των οικογενειών $(\{\mathcal{C}(U)\}, \{\rho^U_V\})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το X (:= το προδράγμα των συνεχών). Αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες:

(1)$\rho^U_U(f) = f|_U = f$ όπου $f : U \to \mathbb{R}$
(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ και $f : U \to \mathbb{R} \implies f|_W = (f|_V)|_W$

(2) $P(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{σταθερές }\}$ (οι συνήθεις περιορισμοί θα εννοούνται σε τέτοια παραδείγματα)

(3) $B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{φραγμένες }\}$

(4) $(M = \text{ πολλαπλότητα}, \tau_M)$ και

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \mathcal{C}^\infty\text{-διαφ}\}$$

(5) $X = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | \quad \text{ολόμορφη }\}$$

(6) $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το ζεύγος:

$$\big(\{\mathcal{S}(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho^U_V = \text{ συνήθεις περιορισμοί }\}_{V \subseteq U \in \tau_X}\big)$$

ονομάζεται το προδράγμα των τομών του δράγματος.

Ορισμός. *(X, τ_X) τοπολογικός χώρος και*

$$S \equiv (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}, \quad T \equiv (T(U), \lambda^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$$

προδράγματα πάνω από το X. Ένας μορφισμός προδραγμάτων $f : S \to T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$f_U : S(U) \longrightarrow T(U), \quad U \in \tau_X$$

έτσι ώστε για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ να είναι μεταθετικό το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ {\scriptstyle \rho^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^U_V} \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε προδράγμα $(P(U), \rho^U_V) \equiv P$ η οικογένεια $1 = \{1_U\} : P \to P$ με

$$1_U = id_U : P(U) \to P(U)$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια σύνθεση μορφισμών προδραγμάτων ώστε να φτιάξουμε μια νέα κατηγορία. Αν $f : S \to T$ και $g : T \to P$ μορφισμοί προδραγμάτων, όπου $f \equiv \{f_U\}_{U \in \tau_X}$ και $g \equiv \{g_U\}_{U \in \tau_X}$ τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$g \circ f \equiv \{(g \circ f) := g_U \circ f_U\}_{U \in \tau_X}$$

και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[rr, bend left, "g_U \circ f_U"] & T(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d, "\lambda_V^U"'] & P(U) \arrow[d, "\mu_V^U"] \\
S(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[rr, bend right, "g_V \circ f_V"'] & T(V) \arrow[r, "g_V"] & P(V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mu_V^U \circ (g_U \circ f_U) &= (g_V \circ f_V) \circ \rho_V^U \\
\mu_V^U \circ (g_V \circ f_V) &= (g_V \circ \lambda_V^U) \circ f_U \\
&= g_V \circ f_V \circ \rho_V^U
\end{aligned}$$

άρα πράγματι $g \circ f$ είναι μορφισμός προδραγμάτων $S \to P$.

Συνεπώς τα προδράγματα και μορφισμοί προδραγμάτων από μόνα τους αποτελούν μια κατηγορία $\mathcal{PS}h_X$.

Μάθημα 4 - Πέμπτη 03/03/2022.

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho_V^U"] \arrow[dd, "\rho_W^U"'] & & T(U) \arrow[dr, "\lambda_V^U"] \arrow[dd, "\lambda_W^U"] & \\
& S(V) \arrow[rr] \arrow[dl, "\rho_W^V"] & & T(V) \arrow[dl, "\lambda_W^V"] \\
S(W) \arrow[rr] & & T(W) &
\end{tikzcd}$$

Έστω $(\tau_X, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο με $A \leq B \iff B \subseteq A$. Τότε έχουμε μια κατηγορία με αντικείμενα τα $U \in \tau_X$ και μορφισμούς:

$$Mor(U,V) = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν } U, V \text{ δεν διατάσσονται} \\ \{(U,V)\}, & U \leq V \quad (\text{ δηλ. } V \subseteq U) \end{cases}$$

Αν $U \in \tau_X$, τότε $Mor(U,U) = \{(U,U)\}$.

Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ έχουμε την πράξη:

$$\circ : Mor(U,V) \times Mor(V,W) \longrightarrow Mor(U,W)$$

Έστω F συναρτητής: $(\tau_X, \leq) \to \mathcal{S}et$. Δηλαδή, για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε κάποιο $F(U)$ σύνολο, άρα υπάρχει οικογένεια $(F(U))_{U \in \tau_X}$ με $(U,V) \in Mor(U,V)$ στην $(\tau_X, \leq)$. Συνεπώς, έχουμε

$$F(U,V) : F(U) \to F(V)$$

ώστε:

(1) $(U,U) = 1_U \in Mor(U,U) \implies F(U,U) = F(1_U) = 1_{F(U)} : F(U) \to F(U)$

(2) Αν $W \subseteq V \subseteq U$, τότε $F(U,W) = F((V,W) \circ (U,V)) = F(V,W) \circ F(U,V)$

Συγκρίνοντας τους ορισμούς του προδράγματος και του συναρτητή $(\tau_X, \leq) \to \mathcal{S}et$, παίρνουμε ότι αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες και $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \to G$ είναι μια οικογένεια $\phi \equiv (\phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ όπου*

$$\phi_A : FA \to GA, \quad \forall A \in \mathcal{C}$$

έτσι ώστε για κάθε $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\phi_A"] & FB \arrow[d, "\phi_B"] \\
GA \arrow[r, "Gf"] & GB
\end{tikzcd}$$

Ένας μορφισμός προδραγμάτων $S = (S(U), \rho_V^U), T = (T(U), \lambda_V^U)$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : S \to T$.

Ορισμός (Συναρτητής-Τομή (section functor)).

$$\Gamma : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{PS}h_X$$
$$(\mathcal{S}, \pi, X) \longmapsto \big(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U\big)$$

προδράγμημα συνόλων, με ρ_V^U τους συνήθεις περιορισμούς. Αν $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων πάνω από το X, τότε για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε:

$$\Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{f_U} \Gamma(U, \mathcal{T})$$
$$s \longmapsto f \circ s$$

και η οικογένεια $(f_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{T}))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Πράγματι, εφόσον το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U,\mathcal{S}) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \Gamma(U,\mathcal{T}) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\
\Gamma(V,\mathcal{S}) \arrow[r, "f_V"] & \Gamma(V,\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

$$\Gamma(g \circ f) = ((g \circ f)_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{T}))$$
$$s \longmapsto g \circ f \circ s$$

Ορισμός (Directed System). *Έστω $(A, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα επαγωγικό σύστημα στην $\mathcal{C}$ (με δείκτες από το A) είναι ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $\mathbb{A} : (A, \leq) \to \mathcal{C}$. Δηλαδή, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μαζί με μια οικογένεια μορφισμών:*

$$\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \to A_{\lambda_2}$$

όπου $A_\lambda = \mathbb{A}(\lambda)$ και $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \mathbb{A}((\lambda_1, \lambda_2))$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$, έτσι ώστε:

(1) $\phi_\lambda^\lambda : A_\lambda \to A_\lambda \equiv id_{A_\lambda}$

(2) $\phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}$, *για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.*

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[r, "\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}"'] & A_{\lambda_2} \arrow[d, "\phi_{\lambda_3}^{\lambda_2}"] \\
& A_{\lambda_3}
\end{tikzcd}$$

Ορισμός (Directed Limit). *Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ επαγωγικό σύστημα στην $\mathcal{C}$, όπου $(\Lambda, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο. Επαγωγικό όριο του συστήματος έιναι ένα ζεύγος $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ όπου A αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $\phi_\lambda : A_\lambda \to A$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έτσι ώστε:*

(1) *Για κάθε* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *να ισχύει* $\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[dr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & & A \\
& A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) *Ισχύει η επόμενη καθολική συνθήκη: Αν* (B, ψ_λ) *με* B *αντικείμενο της* $\mathcal{C}$ *και για κάθε* $\lambda \in \Lambda$ *να έχουμε* $\psi_\lambda : A_\lambda \to B$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *να ισχύει* $\psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}$, *τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός* $h : A \to B$ *με* $\psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda$ *για κάθε* $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h"] & B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός. *Ένας μορφισμός* $f : A \to B$ *στην* $\mathcal{C}$ *λέγεται ισομορφισμός* $\iff$ *υπάρχει μορφισμός* $g : B \to A$ *στην* $\mathcal{C}$ *με* $g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B$.

Πρόταση. *Αν το επαγωγικό σύστημα* $(A_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$ *στην* $\mathcal{C}$ *έχει όριο τότε αυτό είναι (μοναδικό) μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφισμό.*

Απόδειξη. Έστω δύο όρια $(A, \phi_\lambda), (B, \psi_\lambda)$.

$$A \text{ όριο} \implies \exists! h : A \to B, \quad h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$B \text{ όριο} \implies \exists! h' : B \to A, \quad h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, shift left, "h"] & B \arrow[l, dashed, shift left, "h'"] \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε $\phi_\lambda = h' \circ \psi_\lambda \implies h \circ h' \circ \psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$. Υπάρχει ωστόσο μοναδικό $\xi : B \to B$ με $\xi \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Έχουμε ότι αυτό ισχύει για $\xi = 1_B$ αλλά και για $\xi = h \circ h'$]. Έπεται ότι $h \circ h' = 1_B$. Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι $h' \circ h = 1_A$, δηλαδή h ισομορφισμός. $\square$

Μάθημα 5 - Τρίτη 08/03/2022.

Θεώρημα. *Στην κατηγορία $\mathcal{S}et$ κάθε επαγωγικό σύστημα με σύνολο δεικτών ένα κατευθυνόμενο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ έχει όριο.*

Απόδειξη.
Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \to A_{\lambda_2})_{\lambda_1 \leq \lambda_2}$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων, με $(\Lambda, \leq)$ να είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

και θεωρούμε την εξής σχέση: Αν $a_1, a_2 \in \sqcup A_\lambda$, τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιοι ώστε $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Ορίζουμε:

$$a_1 \sim a_2 \iff \exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 :$$

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας (προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική).

Για την μεταβατικότητα, αν έχουμε $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}, a_3 \in A_{\lambda_3}$, τότε υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

καθώς και ένα $\mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιο ώστε:

$$\phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3)$$

Στο κατευθυνόμενο Λ υπάρχει $k \geq \lambda, \mu$ με $\lambda_1 \leq \lambda \leq k$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_1 \arrow[dr] & & \\
& \lambda \arrow[dr] & \\
\lambda_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\
& \mu \arrow[ur] & \\
\lambda_3 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\phi_k^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3) = \phi_k^{\lambda_3}(a_3)$$

Θέτουμε $A = \sqcup A_\lambda \big/ \sim$ και θεωρούμε την κανονική προβολή:

$$q : \sqcup A_\lambda \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto q(a) = [a]$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$ ισχύει $A_{\lambda_0} \subseteq \sqcup A_\lambda$ και υπάρχει $\phi_{\lambda_0} := q|_{A_{\lambda_0}}$. Τότε το $(A, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι το όριο του επαγωγικού συστήματος.

Για το (1) έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2$ με μεταθετικό τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rrd, "\phi_{\lambda_1}=q|_{A_{\lambda_1}}"] \arrow[rdd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & & \\
& & A \\
& A_{\lambda_2} \arrow[ru, "\phi_{\lambda_2}=q|_{A_{\lambda_2}}"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1}$. Πράγματι αν έχουμε $a \in A_{\lambda_1}$ τότε

$$\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) = \phi_{\lambda_1}(a) \iff$$

$$[\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)] = [a] \iff$$

$$\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) \sim a$$

η οποία είναι προφανής, αφού $\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a) = \phi^{\lambda_2}_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)$ και $\lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_2$.

Για το (2) Έστω $(B, \psi_\lambda : A_\lambda \to B)$ με $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και μεταθετικό τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[rd, "\psi_{\lambda_1}"] & \\
& B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ru, "\psi_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

τότε μαζί με αυτό το τρίγωνο υπάρχει και το προηγούμενο που κατασκευάσαμε βασιζόμενοι στην κανονική προβολή q. Βάζουμε τα τρίγωνα μαζί και ψάχνουμε μια h:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[rd, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[rrd, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h?"] & B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ru, "\phi_{\lambda_2}"] \arrow[rru, bend right, "\psi_{\lambda_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Κάθε $[a] \in A$ προέρχεται από κάποιο $a \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Θέλουμε η h που θα βρούμε να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
a \in A_\lambda \arrow[rd, "q=\phi_\lambda"'] \arrow[rrd, bend left, "\psi_\lambda"] & & \\
& A \arrow[r, dashed, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

θέτουμε $h([a]) = \psi_\lambda(a)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου a της κλάσης $[a]$. Έστω $[a_1] = [a_2]$ και $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$ και εφόσον το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \in A_{\lambda_1} \arrow[dr, "\phi_\lambda^{\lambda_1}"'] \arrow[drr, bend left, "\psi_{\lambda_1}"] & & \\
& A_\lambda \arrow[r, "\psi_\lambda"'] & B
\end{tikzcd}$$

παίρνουμε ότι $h([a_1]) = \psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \psi_{\lambda_2}(a_2) = h([a_2])$.
Ορίσαμε την h έτσι ώστε να έχουμε μεταθετικότητα των τριγώνων, δηλαδή $h \circ q = \psi_\lambda$ και έχουμε την μοναδικότητα από το μονοσήμαντο αυτού του ορισμού. $\square$

Παρατήρηση. *Η παραπάνω απόδειξη αποτελεί και μεθοδολογία για το πώς βρίσκουμε το όριο.*

Εφαρμογή 1: Έστω $(\Lambda, \leq) \equiv (\mathbb{N}, \leq)$ με την συνήθη διάταξη και $A_n = \mathbb{R}^n$. Αν $m \leq n$ τότε ορίζουμε

$$\phi_n^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto (x, 0, 0, \ldots, 0)$$

με $(n-m)$-πλήθος μηδενικά. Το παραπάνω είναι ένα επαγωγικό σύστημα και από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου.

Άσκηση: Υπολογίστε το όριο (A, ϕ_n) και εξετάστε αν το A έχει δομή διανυσματικού χώρου έτσι ώστε οι ϕ_n να είναι γραμμικές. (Δηλαδή διατηρεί το όριο την δομή της κατηγορίας; αν θεωρήσουμε ότι ξεκινήσαμε από διανυσματικούς χώρους και όχι από σύνολα.)

Εφαρμογή 2: Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με περιορισμούς απεικονίσεις. Είναι ένα προδράγμμα συνόλων. Έστω $x \in X$ και $\mathcal{N}_x^0 = \mathcal{N}_x \cap \tau_X$, δηλαδή οι ανοιχτές περιοχές του x. Τότε το $(\mathcal{N}_x^0, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο με $U \leq V \iff V \subseteq U$ που δεν περιέχει κενά σύνολα αφού το καθένα θα περιέχει το x.

Αν περιοριστούμε στο $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$, τότε από το θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο.

Άσκηση: Να υπολογιστεί.

Έστω δύο επαγωγικά συστήματα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}), (B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και

$$f \equiv (f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)$$

ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, δηλαδή για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[r, "f_{\lambda_1}"] \arrow[d, "\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"'] & B_{\lambda_1} \arrow[d, "\psi_{\lambda_2}^{\lambda_1}"] \\
A_{\lambda_2} \arrow[r, "f_{\lambda_2}"] & B_{\lambda_2}
\end{tikzcd}$$

Πρόταση. *Αν το $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ έχει όριο (A, ϕ_λ) και όμοια το $(B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ να έχει όριο (B, ψ_λ) και $(f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)$ να είναι μορφισμός επαγωγικού συστήματος, τότε υπάρχει μοναδική $\overline{f} : A \to B$ που κάνει μεταθετικά όλα τα παρακάτω διαγράμματα:*

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda \arrow[r, "h_\lambda"] \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & B_\lambda \arrow[d, "\psi_\lambda"] \\
A \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[dr, bend left, "\psi_{\lambda_1} \circ f_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}"] \arrow[dd, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & \\
& B \\
A_{\lambda_2} \arrow[ur, bend right, "\psi_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_2} = x_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Το $(B, x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda)$ ικανοποιεί το (1) του ορισμού του επαγωγικού ορίου. Επειδή το όριο του $(A_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$ είναι το (A, ϕ_λ) υπάρχει μοναδική $h : A \to B$ με

$$x_\lambda = h \circ \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda = h \circ \phi_\lambda$$

και θέτουμε $\overline{f} = h$.

□

Δραγματοποίηση προδράγματος

Έστω $(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από τοπολογικό χώρο (X, τ_X). Έστω ένα σημείο $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{N}^0_x$ των ανοιχτών περιοχών του x και έτσι το κατευθυνόμενο σύνολο $(\mathcal{N}^0_x, \leq)$.

Άρα το $(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}^0_x}$ είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών $(\mathcal{N}^0_x, \leq)$. Από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου:

$$(\mathcal{S}_x, \rho^U_x : S(U) \to \mathcal{S}_x)_{U \in \mathcal{N}^0_x}$$

(θα δικαιολογηθεί στην συνέχεια που συμπίπτει ο συμβολισμός με τα νήματα.)

Παρατηρούμε ότι $U \in \tau_X \implies U \in \mathcal{N}^0_x, \quad \forall x \in U$. Άρα το $S(U)$ είναι σύνολο πολλών επαγωγικών συστημάτων. Για κάθε $x \in U$, το $S(U)$ συμμετέχει στο αντίστοιχο επαγωγικό σύστημα με δείκτες το $\mathcal{N}^0_x$.

Για κάθε $s \in S(U)$ και για $x \neq y \in U$ υπάρχει $[s]_x$ στο όριο $\mathcal{S}_x$ του $(S(W), \rho^V_W)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}^0_x}$. Όμοια, υπάρχει $[s]_y$ στο όριο $\mathcal{S}_y$ του $(S(W), \rho^V_W)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}^0_y}$.

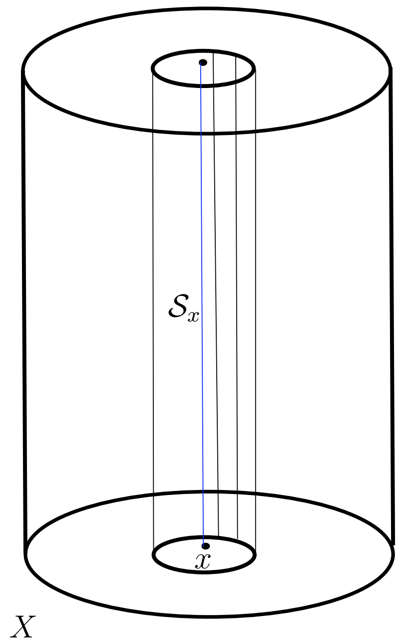
Θέτουμε

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και τότε για κάθε $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$ θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho^U_x(s) \in \mathcal{S}_x$$



Θέτουμε επιπλέον:

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$u \longmapsto \pi(u) = x$$

οταν $u \in \mathcal{S}_x$. Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Μάθημα 6 - Τρίτη 15/03/2022.

Ξεκινάμε με ένα $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X και σταθεροποιούμε ένα $x \in X$ και αντί να παίρνουμε όλα τα ανοιχτά, κρατάμε τις ανοιχτές περιοχές του x περιορίζοντας έτσι το σύνολο δεικτών στο $\mathcal{N}_x^0$. Έτσι περνάμε σε ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων:

$$(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$$

με σύνολο δεικτών να είναι το κατευθυνόμενο $(\mathcal{N}_x^0, \leq \equiv \supseteq)$. Άρα από το γενικό θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το επαγωγικό όριο. Το κατασκευάζουμε παίρνοντας την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U)$$

και ορίζοντας την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας. Έστω $s \in S(U), \sigma \in S(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Ορίζουμε:

$$s \sim_x \sigma \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0, \quad W \subseteq U \cap V$$

τέτοιο ώστε:

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$$

μάλιστα, είναι σχέση ισοδυναμίας που εξαρτάται από το $x \in X$ που έχουμε σταθεροποιήσει. Τις κλάσεις ισοδυναμίας τις συμβολίζουμε ως

$$\mathcal{S}_x = \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U) \right) \Big/ \sim_x$$

Επιπλέον, έχουμε την κανονική απεικόνιση για να πηγαίνουμε στις κλάσεις:

$$\rho_x : \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto \rho_x(s) = [s]_x$$

όπου γράφουμε και το x στην κλαση του s για να ξέρουμε σε ποια σχέση ισοδυναμίας αναφερόμαστε. Καθώς το πεδίο ορισμού της ρ_x ειναι μια διακεκριμένη ένωση, μπορούμε να πάρουμε περιορισμούς στα μικρά σύνολα:

$$\rho_x^U = \rho_x|_{S(U)} : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto [s]_x$$

Θέτουμε

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και έστω $z \in \mathcal{S}$, αφού το $\mathcal{S}$ είναι διακεκριμένη ένωση, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με $z \in \mathcal{S}_x$

Θέτουμε για αυτόν τον δείκτη $\pi(z) = x$ και έτσι έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση $\pi : \mathcal{S} \to X$.

Ισχυρισμός: Το $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα. Θέλουμε δηλαδή το $\mathcal{S}$ να επιδέχεται μια τοπολογία που κάνει την π τοπικό ομοιομορφισμό. Θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Έστω $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$, πριν αποδείξουμε ότι είναι δράγμα κατασκευάζουμε τις συνεχείς τομές του δράγματος. Θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{s}(x) = [s]_x$$

και ιδιαιτέρως $[s]_x \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$.

Επιπλέον, την κλάση $[s]_x$ την βλέπουμε σαν την εικόνα της κανονικής απεικόνισης που μας πάει στο επαγωγικό όριο εφαρμοσμένη στο s, δηλαδή $[s]_x = \rho_x^U(s)$. Άρα κρατάμε την σχέση:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s)$$

και οι $\tilde{s}$ που ορίσαμε είναι είναι 1-1, αφού δύο διαφορετικές εικόνες θα πέσουν σε διαφορετικά νήματα. Έτσι, αν θεωρήσουμε την $\tilde{s}$ στην εικόνα της:

$$\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

αυτή είναι 1-1, επί και ισχύει τετριμμένα ότι:

$$\pi \circ \tilde{s} = id_U$$

αφού $\tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$ και προβάλλοντας παίρνουμε το x.

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα δράγμα υπάρχει μια βάση της τοπολογίας που αποτελείται από τις εικόνες των τομών, η οποία συμπίπτει με την βάση της τοπολογίας που αποτελούν τα V στα οποία η προβολή είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Με αυτό σαν σκέψη θέτουμε:

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) | \quad U \in \tau_x, s \in S(U)\}$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτή η οικογένεια είναι βάση τοπολογίας.

Λήμμα (1). *Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει $U \in \tau_x$ και υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοια ώστε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$.*

Απόδειξη. Έστω

$$z \in \mathcal{S} = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \mathcal{S}_x \implies$$
$$\exists! x \in X : \quad z \in \mathcal{S}_x \implies$$
$$z = [s]_x$$

με $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in S(U)$. Ωστόσο, από τα προηγούμενα έχουμε $[s]_x = \tilde{s}(x)$. □

Λήμμα (2). *Έστω $s \in S(U), \sigma \in S(V)$ με $U, V \in \tau_X$ και υπάρχει $z \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοιχτό $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:*

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{\sigma} : V \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\text{Υπάρχει } x \in U : \quad z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$$
$$\text{Υπάρχει } y \in V : \quad z = \tilde{\sigma}(y) \in \mathcal{S}_y$$

και αφού το $\mathcal{S}$ είναι διακεκριμένη ένωση έχουμε $x = y$. Άρα $U, V \in \mathcal{N}_x^0$ και

$$\begin{gathered}
\tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(x) \implies \\
[s]_x = [\sigma]_x \implies \\
s \sim_x \sigma \implies
\end{gathered}$$

Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$$

Θέλουμε να δείξουμε τη ισότητα των $\tilde{s}, \tilde{\sigma}$ στο W, άρα θεωρούμε $y \in W$ και έχουμε τα μεταθετικά τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd}
s \in S(U) \arrow[dr, "\rho^U_W"'] \arrow[drr, bend left, "\rho^U_y"] & & \\
& S(W) \arrow[r, "\rho^W_y"] & \mathcal{S}_y \\
\sigma \in S(V) \arrow[ur, "\rho^V_W"] \arrow[urr, bend right, "\rho^V_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{s}(y) = [s]_y = \rho_y^U(s) = \rho_y^W \circ \rho_W^U(s) = \\
\rho_y^W \circ \rho_W^V(\sigma) = \rho_y^V(\sigma) = [\sigma]_y = \tilde{\sigma}(y)
\end{gathered}$$

□

Ουσιαστικά, στην προηγούμενη απόδειξη κρύβεται η εξής παρατήρηση που θα χρησιμοποιούμε συχνά:

Παρατήρηση. *Έστω $s \in S(U)$ με $V \subseteq U$ τότε:*

$$\tilde{s}|_V = \widetilde{\rho_V^U(s)}$$

Τώρα βασιζόμενοι στα δύο λήμματα έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση.

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) : \quad s \in S(U), \quad U \in \tau_X\}$$

είναι βάση μιας τοπολογίας.

Απόδειξη. Η μία συνθήκη της βάσης είναι το λήμμα (1) και η δεύτερη το λήμμα (2). □

Πρόταση. *Το $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε:

$$\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

είναι αντιστρέψιμη με

$$\tilde{s}^{-1} = \pi|_B : B \longrightarrow \pi(B) = U$$

όπου

$$\mathcal{B} \ni B = \tilde{s}(U)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\tilde{s} : U \to \tilde{s}(U) = B$ είναι ομοιομορφισμοί. Δεδομένου το ότι είναι 1-1 και επί, έχουμε να δείξουμε ότι είναι συνεχείς και ανοιχτές.

$\tilde{s}$ ανοιχτή: Έστω $V \subseteq U$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $\tilde{s}(V)$ είναι ανοιχτό. Ειδικότερα, είναι βασικό. Υπάρχει $t = \rho_V^U(s)$, αφού είχαμε ξεκινήσει με ένα $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε

$$\rho_V^U : S(U) \longrightarrow S(V) \ni t = \rho_V^U(s)$$

άρα, από την παρατήρηση:

$$\tilde{s}(V) = \tilde{s}|_V(V) = \widetilde{\rho_V^U(s)}(V) = \tilde{t}(V) \in \mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$$

με $\tau \in S(V)$.

$\tilde{s}$ συνεχής: Έστω $x \in U$, θα δείξουμε ότι η $\tilde{s}$ είναι συνεχής στο x. Εστω ανοιχτό $A \subseteq \tilde{s}(U)$ με $\tilde{s}(x) \in A$. Αφού A ανοιχτό, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$:

$$\tilde{s}(x) \in B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(U)$$

και αφού το B είναι βασικό, γράφεται ως $B = \tilde{\sigma}(V)$ με $V \in \tau_X$ και $\sigma \in S(V)$.

Επίσης $\tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$. Δηλαδή, από το λήμμα (2) υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ κα $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Θέτουμε $t := \rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$ και έτσι:

$$\tilde{s}(W) = \widetilde{\rho_W^U(s)}(W) = \tilde{t}(W) \in \mathcal{B}$$

αλλά και

$$\tilde{t}(W) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(V)$$

Δηλαδή, το $\tilde{s}(W) \subseteq A$ πέφτει μέσα στο ανοιχτό. □

Συμπέρασμα: κάθε προδράγμα συνόλων μας δίνει ένα δράγμα. Χρειαζόμαστε κάτι ακόμα για να είμαστε σωστοί.

Έστω $(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$ μορφισμός προδραγμάτων μεταξύ των $(S(U), \rho_V^U), (T(U), \lambda_V^U)$. Δηλαδή, έχουμε μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "f_V"] & T(V) \end{tikzcd}$$

Για κάθε $x \in X$:

$$(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \mathcal{N}_x^0}$$

είναι ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, τα οποία έχουν όρια $\mathcal{S}_x, \mathcal{T}_x$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός μορφισμός μεταξύ των ορίων

$$f_x : \mathcal{S}_x \to \mathcal{T}_x$$

που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_x^U"] \\ \mathcal{S}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{T}_x \end{tikzcd}$$

Θέτουμε:

$$\tilde{f} = \bigcup_{x \in X} f_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$$

Πρόταση. *Η $\tilde{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ είναι μορφισμός δραγμάτων.*

Λήμμα. *Για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $s \in S(U)$, αν θεωρήσουμε $t = f_U(s)$ ισχύει ότι:*

$$\tilde{t} = \tilde{f} \circ \tilde{s}$$

Απόδειξη. (του λήμματος.)

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$\tilde{t} : U \longrightarrow \mathcal{T}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & \mathcal{T} \\ & U \subseteq X \arrow[ul, "\tilde{s}"] \arrow[ur, "\tilde{t}"'] & \end{tikzcd}$$

Για κάθε $x \in U$, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\tilde{f} \circ \tilde{s}(x)$. Από την μεταθετικότητα στα προηγούμενα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(x) = [t]_x = \lambda_x^U(t) = \lambda_x^U \circ f_U(s) = f_x \circ \rho_x^U(s) = \\ = \tilde{f}\left([s]_x\right) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \end{aligned}$$

□

Ουσιαστικά, εδώ φαίνεται ότι οι $\tilde{s}, \tilde{\sigma}$ είναι (συνεχείς) τομές των δραγμάτων που κατασκευάσαμε. Το λήμμα μας προδίδει ότι $\tilde{f}$ είναι μορφισμός, αφού μεταφέρει τις τομές σε τομές. Υπάρχει ωστόσο το λεπτό σημείο, ότι δεν ξέρουμε αν εξαντλούμε όλες τις τομές έτσι ώστε να επικαλεστούμε τον πρόταση/χαρακτηρισμό των μορφισμών (μάθημα 3).

Απόδειξη. (της πρότασης.)

(1) Κάνει μεταθετικό το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

εφόσον, αν $z \in \mathcal{S}$ τότε από το πρώτο λήμμα γράφουμε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$ με $U \in \tau_x$ και $s \in S(U)$. Τότε:

$$\mathfrak{p} \circ \tilde{f}(z) = \mathfrak{p} \circ \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) = \mathfrak{p} \circ \tilde{t}(x)$$

όπου $t = f_U(s) = x = \pi(z)$ και $\tilde{t}(x) \in \mathcal{T}_x$. Ισοδύναμα, η $\tilde{f}$ διατηρεί τα νήματα εφόσον είναι η διακεκριμένη ένωση των f_x.

(2) Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής: Έστω $z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}$ (από το λήμμα (1)). Έστω B βασική περιοχή του $\tilde{f}(z)$. Το B γράφεται ως:

$$B = \tilde{\sigma}(V), \quad V \in \mathcal{N}_x^0, \quad \sigma \in T(V)$$

Θέτουμε $t = f_U(s) \in T(U)$.

Άρα $\tilde{f}(z) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \in \tilde{\sigma}(V)$ και ταυτόχρονα $\tilde{f}(z) = \tilde{t}(x) \in \tilde{t}(V)$. Άρα από το δεύτερο λήμμα, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{t}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

όμως από ορισμό $\tilde{t}$ έχουμε:

$$\tilde{f} \circ \tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W \implies$$

$$\tilde{f} \circ \widetilde{\rho_W^U(s)}|_W = \tilde{\sigma}|_W \implies$$

$$\tilde{f}\left(\widetilde{\rho_W^U(s)}(W)\right) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B$$

με $\widetilde{\rho_W^U(s)}(W)$ ένα βασικό σύνολο της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{S}}$, άρα και ανοιχτό και μέσα από την f πέφτει μέσα στην εικόνα που θέλουμε. □

Θεώρημα. *Το ζεύγος* $(F_1, F_2) : \mathcal{PS}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_X$:

$$F_1\big((S(U), \rho_V^U)\big) = \mathcal{S}$$

$$F_2\big((f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}\big) = \tilde{f}$$

είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

Απόδειξη. Είναι προφανές, αρκεί να δείξουμε ότι μεταφέρει την ταυτοτική στην ταυτοτική και την σύνθεση στην σύνθεση. □

Μάθημα 7 - Πέμπτη 17/03/2022.

Έχουμε βρει τρόπο από τα προδράγματα να φτιάχνουμε δράγματα μέσω του επαγωγικού ορίου, καθώς και αντίστροφα από τα δράγματα να φτιάχνουμε προδράγματα κάνοντας τα προδράγματα τομών. Αν κάνουμε διαδοχικά αυτές τις διαδικασίες φτάνουμε πάλι στο αρχικό αντικείμενο; Για να απαντήσουμε χρειαζόμαστε κάποιες βοηθητικές έννοιες.

Ορισμός. *Ένα προδράγμα συνόλων $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ λέγεται πλήρες, αν για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U ισχύουν οι συνθήκες:*

(1) *Αν $s, t \in S(U)$ έτσι ώστε:*

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t) \quad \forall a \in A \implies s = t$$

(2) *Για τα $s_a \in S(U_a)$ για κάθε $a \in A$ ισχύει:*

$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \quad \forall a, b \in A : \quad U_a \cap U_b \neq \varnothing \implies$$

$$\text{Υπάρχει } s \in S(U) : \quad \rho_{U_a}^U(s) = s_a$$

Πολύ συχνά ισχύει μόνο το (1) και τότε το προδράγμα λέγεται μονοπροδράγμα.

Παράδειγμα.

(1) Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $\big(\mathcal{C}(U), \rho_V^U\big)$ το προδράγμα των συνεχών συναρτήσεων με τους συνήθεις περιορισμούς. Είναι προφανές ότι είναι πλήρες.

(2) Τα προδράγματα των διαφορίσιμων, ολόμορφων, αναλυτικών;

(3) Το προδράγμα $(B(U), r_V^U))$ με συνήθεις περιορισμούς, όπου

$$B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \quad f \text{ φραγμένη}\}$$

είναι προδράγμα αλλά όχι πλήρες. Αν ενώσουμε φραγμένες συναρτήσεις δεν παίρνουμε φραγμένη απαραίτητα. Είναι όμως μονοπροδράγμα.

(4) Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το:

$$\big(\mathcal{S}(U), r_V^U\big)$$

όπου r_V^U είναι οι συνήθεις περιορισμοί και $\mathcal{S}(U)$ είναι οι τομές πάνω από το $U \in \tau_X$, είναι πλήρες προδράγμα (ως συναρτησιακό).

Έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ ένα προδράγμα και μέσω του συναρτητή δραγματοποίησης $\mathbb{S}$ παίρνουμε ένα $(\mathcal{S}, \pi, X)$, στο οποίο εφαρμόζουμε τον συναρτητή τομής Γ και φτάνουμε σε ένα $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$. Θα είναι το αρχικό προδράγμα S ισόμορφο με το τελικό $\Gamma\mathbb{S}(S)$;

Λήμμα. *Υπάρχει (φυσικός) μορφισμός προδραγμάτων:*

$$\rho : S \longrightarrow \Gamma\mathbb{S}(S)$$

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{\rho_U} & \mathcal{S}(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_V^U} \\ S(V) & \xrightarrow[\rho_V]{} & \mathcal{S}(V) \end{array}$$

Τον οποίο έχουμε ήδη κατασκευάσει προηγουμένως. Για κάθε $U \in \tau_X$:

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$

$$\rho_U(s) = \tilde{s}$$

Το διάγραμμα είναι μεταθετικό, εφόσον για κάθε $s \in S(U)$:

$$\rho_V \circ \rho_V^U(s) = \widetilde{\rho_V^U(s)} = \tilde{s}|_V = r_V^U(\tilde{s}) = r_V^U \circ \rho_U(s)$$

Παρατήρηση. *Τα $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ και $(\mathcal{S}(U), \rho_V^U)$ είναι ισόμορφα $\Longleftarrow$ Για κάθε $U \in \tau_X$ η ρ_U είναι 1-1 και επί. (Ισχύει και το ευθύ αλλά δεν είναι άμεσο.)*

Ένας μορφισμός προδραγμάτων λέγεται 1-1 (αντ. επί), αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 (αντ. επί) και ισομορφισμός αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 και επί. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι απεικονίσεις γυρίζουν προς τα πίσω ενώ διατηρούν την μεταθετικότητα των τετραγώνων.

Θεώρημα. *Ο μορφισμός προδραγμάτων*

$$(\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U), \quad \rho_U(s) = \tilde{s})_{U \in \tau_X}$$

είναι ισομορφισμός $\iff$ κάθε ρ_U είναι 1-1 και επί $\iff$ το αρχικό προδράγμα $(S(U), \rho_V^U)$ είναι πλήρες.

Απόδειξη. Η πρώτη ισοδυναμία είναι ορισμός. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Το πρώτο είναι ότι το 1-1 $\Longrightarrow$ μονοπροδράγμα.

(1) Δείχνουμε ότι ρ_U 1-1 για κάθε $U \in \tau_X \iff (S(U), \rho_V^U)$ μονοπροδράγμα.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι όλα τα ρ_U είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι το S είναι μονοπροδράγμα. Παίρνουμε ένα τυχαίο $U \in \tau_X$ και $(U_a)_{a \in A}$ ανοιχτό κάλυμμα του U. Έστω $s, t \in S(U)$ με

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t)$$

για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και $x \in U_a$ έχουμε:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(t) = \rho_t^U = [t]_x = \tilde{t}(x)$$

αφού $\tilde{s}, \tilde{t}$ είναι τομές που ορίζονται στο $U \to \mathcal{S}$, καθώς και το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[dd, "\rho^U_{U_a}"'] \arrow[dr, "\rho^U_x"] & \\
& \mathcal{S} \\
S(U_a) \arrow[ur, "\rho^{U_a}_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει:

$$\tilde{s}|_{U_a} = \tilde{t}|_{U_a} \quad \forall a \in A$$

δηλαδή, ικανοποιείται η υπόθεση της (1) για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ και την κάλυψη (U_a) του U. Επειδή $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$ είναι πλήρες, έπεται ότι $\tilde{s} = \tilde{t}$. Δηλαδή, $\rho_U(s) = \rho_U(t)$ και ρ_U 1-1, συνεπώς $s = t$.

$(\Longleftarrow)$ Αν S μονοπροδράγμα, τότε κάθε ρ_U 1-1. Πράγματι, έστω $U \in \tau_X$ και $s, t \in S(U)$ με

$$\rho_U(s) = \rho_U(t) \implies$$

$$\tilde{s} = \tilde{t} \in \mathcal{S}(U) \implies$$

$$\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x) \quad \forall x \in U \implies$$

$$[s]_x = [t]_x$$

δηλαδή υπάρχει $U_x \in \mathcal{N}_x^0$:

$$\rho_{U_x}^U(s) = \rho_{U_x}^U(t)$$

και με τα U_x έχουμε μια ανοιχτή κάλυψη του U καθώς και ισχύει η υπόθεση του μονοπροδράγματος, άρα παίρνουμε $s = t$ και άρα η ρ_U είναι 1-1.

(2)

Θα περίμενε κανείς ότι εφόσον το 1-1 είναι ισοδύναμο με την συνθήκη (1), τότε και το επί θα ήταν με την συνθήκη (2). Ωστόσο, δεν είναι έτσι, όπως θα δούμε χρειάζεται και το 1-1 και το επί για την συνθήκη (2).

$(\Longrightarrow)$ Έστω κάθε ρ_U 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2). Έστω $U \in \tau_X$, μια ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U και

$$s_a \in S(U_a) \quad \forall a \in A$$

$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \in S(U_a \cap U_b)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ με $\rho_{U_a}^U(s) = s_a$. Έχουμε:

$$\widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a)} = \widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_b)} \implies$$

$$\tilde{s_a}|_{U_a \cap U_b} = \tilde{s_b}|_{U_a \cap U_b}$$

Έχουμε τώρα τα $(U_a)_{a \in A}$ και $\tilde{s_a} \in \mathcal{S}(U_a)$, δηλαδή έχουμε μεταφέρει την κατάσταση από το αρχικό προδράγμα στο προδράγμα των τομών. Το δεύτερο είναι πλήρες, δηλαδή ισχύει για αυτό η ιδιότητα (2) και άρα υπάρχει μια τομή $xi \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε, ο (συνήθης) περιορισμός της στο U_a να δίνει την τομή στο a.

$$\xi|_{U_a} = \tilde{s}_a$$

Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι οι ρ_U είναι επί:

$$\rho_U \longrightarrow \mathcal{S}(U) \ni \xi \implies$$

$$\text{Υπάρχει } \sigma \in S(U): \quad \rho_U(\sigma) = \xi$$

$$\tilde{\sigma} = \xi$$

Θα δείξουμε ότι $\rho_{U_a}^U(\sigma) = s_a$. Πράγματι:

$$\widetilde{\rho^U_{U_a}(\sigma)} = \tilde{\sigma}|_{U_a} = \xi|_{U_a} = \tilde{s_a} \implies$$
$$\rho_{U_a}\left(\rho^U_{U_a}(\sigma)\right) = \rho_{U_a}(s_a)$$

και εφόσον όλες οι ρ_{U_a} είναι 1-1 έχουμε:

$$\rho^U_{U_a}(\sigma) = s_a$$

($\Longleftarrow$) Έστω S πλήρες. Θα δείξουμε ότι κάθε ρ_U είναι επί. Έστω $U \in \tau_X$ και $\xi \in \mathcal{S}(U)$. Θα βρούμε $s \in S(U)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi = \tilde{s}$.

Για κάθε $x \in U$ ξέρουμε ότι $\xi(x) \in \mathcal{S}_x$, άρα από τον ορισμό του επαγωγικού ορίου υπάρχουν $U_x \in \mathcal{N}^0_x$ και $\sigma_x \in S(U_x)$ τέτοια ώστε:

$$\xi(x) = [\sigma_x]_x = \tilde{\sigma_x}(x) \implies$$
$$\text{Υπάρχει } V_x \subseteq U \cap U_x, \quad V_x \in \mathcal{N}^0_x :$$
$$\xi|_{V_x} = \tilde{\sigma_x}|_{V_x}$$

Θέτουμε $s_x := \rho^{U_x}_{V_x}(\sigma_x) \in S(V_x)$ και σχηματίζουμε τις οικογένειες $(V_x)_{x\in U}$ μαζί με $(s_x \in S(V_x))_{x\in U}$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτά ικανοποιούν την υπόθεση της συνθήκης (2).

Έστω $V_x \cap V_y \neq \varnothing$. Θα δείξουμε ότι:

$$\rho^{V_x}_{V_x\cap V_y}(s_x) = \rho^{V_y}_{V_x\cap V_y}(s_y)$$

και συμβολίζουμε τα δύο μέλη της ζητούμενης ισότητας με t_x και t_y αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $z \in V_x \cap V_y$ έχουμε:

$$\tilde{s}_x(z) = \tilde{\sigma_x}(z) = \xi(z) = \tilde{\sigma_y}(z) = \tilde{s_y}(z)$$

άρα αφού οι δύο τομές συμπίπτουν στο ίδιο σημείο, υπάρχει $W_z \subseteq V_x \cap V_y$ με:

$$\rho^{V_x}_{W_z}(s_x) = \rho^{V_y}_{W_z}(s_y) \implies$$
$$\rho^{V_x\cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_x}_{V_x\cap V_y}(s_x) = \rho^{V_x\cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_y}_{V_x\cap V_y}(s_y) \implies$$
$$\rho^{V_x\cap V_y}_{W_z}(t_x) = \rho^{V_x\cap V_y}_{W_z}(t_y)$$

οπότε η οικογένεια (W_z) είναι ανοιχτή κάλυψη του $V_x\cap V_y$ και $t_x, t_y \in S(V_x\cap V_y)$ με ίσους περιορισμούς στο W_z. Άρα από την συνθήκη (1) έχουμε $t_x = t_y$. Άρα οι οικογένειες $(V_x), (s_x)$ ικανοποιούν την (2). Μαζί με την υπόθεση ότι το S είναι πλήρες έχουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε:

$$\rho^U_{V_x}(s) = s_x$$

Τότε, για κάθε $x \in U$ ισχύει:

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s_x}(x) = \tilde{\sigma_x}(x) = \xi(x)$$

δηλαδή, πράγματι έχουμε $\tilde{s} = \rho_U(s) = \xi$ και άρα ρ_U επί.

□

Αν ξεκινήσουμε λοιπόν από ένα προδράγμα και φτιάξουμε το δράγμα και πάμε μετά στο προδράγμα των τομών, τότε το πρώτο και το τελευταίο είναι ισόμορφα προδράγματα αν και μόνο αν είχαμε ξεκινήσει από πλήρες προδράγμα. Άρα γενικά αυτή η διαδικασία δεν γυρίζει πίσω στο αρχικό προδράγμα, αλλά φτιάχνει κάτι πιο πλούσιο.

Μάθημα 8 - Τρίτη 22/03/2022.

Αν ξεκινήσουμε με ένα προδράγμα $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ στο οποίο εφαρμόσουμε τον συναρτητή δραγματοποίησης παίρνουμε ένα δράγμα $(\mathcal{S}, \pi, X)$, στο οποίο εφαρμόζουμε τον συναρτητή τομή και φτάνουμε σε ένα προδράγμα $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$. Αυτό δεν είναι απαραίτητα ισόμορφο με το αρχικό.

Πρόταση. *Το* $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ *είναι ισόμορφο με το* $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$

$$\iff \forall U \in \tau_X : \rho_U : S(U) \to \mathcal{S}(U)$$

η φυσική απεικόνιση (φυσικός μετασχηματισμός) είναι 1-1 και επί $\iff$ $(S(U), \rho_V^U)$ *πλήρες.*

Μπορούμε να κάνουμε την διαδικασία αλλιώς, ξεκινώντας από ένα δράγμα.

$$(\mathcal{S}, \pi, X) \rightsquigarrow (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X} \rightsquigarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\pi}, X)$$

Θεώρημα. *Τα* $(\mathcal{S}, \pi, X)$ *και* $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\pi}, X)$ *είναι ισόμορφα.*

Απόδειξη. Από το πλήρες προδράγμα των τομών $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$, για κάθε $x \in X$ παίρνουμε το επαγωγικό σύστημα $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$ που έχει όριο το $\tilde{\mathcal{S}}_x$.

$$\tilde{\mathcal{S}}_x = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \Gamma(U, \mathcal{S}) \Big/ \sim_x$$

όπου $s, \sigma \in \bigsqcup \Gamma(U, \mathcal{S}) \implies s \in \Gamma(U, \mathcal{S}), \sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S})$, $U, V \in \mathcal{N}_x^0$ με

$$s \sim_x \sigma \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0$$

με $W \subseteq U \cap V$:

$$\rho_V^U(s) = \rho_W^V(\sigma) \iff s|_W = \sigma|_W \iff s(x) = \sigma(x)$$

από το λήμμα της τρίτης διάλεξης που από ισότητα σε σημείο είχαμε ισότητα σε περιοχή.

Για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^0$ ονομάζουμε:

$$r_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_x :$$

$$\rho_U(s) = [s]_x$$

και ζητάμε ομοιομορφισμό $R : \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{S}}$ που κάνει το τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{\mathcal{S}} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε υπάρχει $x = \pi(z) \in X$ με $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in \mathcal{S}(U) = \Gamma(U, \mathcal{S})$ με $s(x) = z$.

Θέτουμε $R(z) = [s]_x \in \tilde{\mathcal{S}}_x$ και είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, εφόσον αν $z = \sigma(x)$ με $\sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S}), V \in \mathcal{N}_x^0$ τότε $s(x) = \sigma(x) = z$ και άρα υπάρχει $W \subseteq U \cap V, W \in \mathcal{N}_x^0$ έτσι ώστε:

$$s|_W = \sigma|_W \iff$$

$$s \sim_x \sigma \iff$$

$$[s]_x = [\sigma]_x$$

R 1-1: Έστω $z, w \in \mathcal{S}$, τότε $z = s(x)$ για κάποιο $x = \pi(z)$ με $U \in \mathcal{N}_x^0, s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ και όμοια $w = \sigma(y)$ και $y = \pi(w)$ με $V \in \mathcal{N}_y^0, \sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S})$.

Αν $R(z) = R(w) \implies [s]_x = [\sigma]_y$ ανήκουν σε διαφορετικά νήματα και άρα $x = y$. (Για $x \neq y, \tilde{\mathcal{S}}_x \cap \tilde{\mathcal{S}}_y = \varnothing$). Άρα $[s]_x = [\sigma]_x$, συνεπώς υπάρχει W κατά τα γνωστά με:

$$s|_W = \sigma|_W \implies z = s(x) = \sigma(x) = w \quad (w \in W)$$

R επί: Έστω $\xi \in \tilde{\mathcal{S}} \implies \xi = [s]_x$ με $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, από ορισμό $\xi = R(s(x) = z)$

$$\tilde{\pi} \circ R(z) = \tilde{\pi}([s]_x) = x$$

και

$$\pi(z) = \pi(s(x)) = x \implies$$
$$\tilde{\pi} \circ R = \pi$$

Το ότι η R είναι ομοιομορφισμός είναι προφανές διότι μεταφέρει τα βασικά της $\tau_{\mathcal{S}}$ στα βασικά της $\tau_{\tilde{\mathcal{S}}}$ όπου αυτά είναι οι εικόνες των τομών. $\square$

Προδράγματα με αλγεβρική δομή

Ορισμός (Προδράγμα Ομάδων). *Ένα προδράγμα ομάδων πάνω από τον χώρο (X, τ_X) είναι ένα προδράγμα συνόλων $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ έτσι ώστε:*

(1) Για κάθε $U \in \tau_X$, το $S(U)$ είναι ομάδα και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ η απεικόνιση $\rho_V^U : S(U) \to S(V)$ είναι μορφισμός ομάδων.

(2) Αν $S \equiv (S(U), \rho_V^U), T \equiv (T(U), \phi_V^U)$ είναι προδράγματα ομάδων ένας μορφισμός προδραγμάτων ομάδων $f : S \to T$ είναι μια οικογένεια

$$(f_U : S(U) \to T(U))$$

που είναι μορφισμός προδραγμάτων συνόλων, δηλαδή κάνει τα τετράγωνα μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & T(U) \arrow[d, "\phi_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "f_V"] & T(V) \end{tikzcd}$$

και επιπλέον κάθε f_U είναι μορφισμός ομάδων.

Ερώτηση: Η δομή της ομάδας περνάει στην δραγματοποίηση;

Θεώρημα. *Έστω $(G_\lambda, \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}$ ένα επαγωγικό σύστημα ομάδων, έτσι το $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο, άρα υπάρχει το επαγωγικό όριο (G, ρ_λ) και αυτό δέχεται δομή ομάδας στο G:*

(1) Κάθε $\rho_\lambda : G_\lambda \to G$ είναι μορφισμός ομάδας.

(2) *Αν* $(G_\lambda, \rho^{\lambda_1}_{\lambda_2})_{\lambda_1 \le \lambda_2 \in \Lambda}$ *και* $(H_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})_{\lambda_1 \le \lambda_2 \in \Lambda}$ *είναι επαγωγικά συστήματα ομάδων με* $(\Lambda, \le)$ *κατευθυνόμενο και*

$$(f_\lambda : G_\lambda \to H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

μορφισμός επαγωγικών συστημάτων ομάδων, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $f : G \to H$ *είναι μορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. Στο $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ θεωρώ για $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ την σχέση $x \sim y \iff$ υπάρχει $\lambda \ge \lambda_1, \lambda_2$:

$$\rho^{\lambda_1}_{\lambda}(x) = \rho^{\lambda_2}_{\lambda}(y)$$

$$G = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Big/ \sim$$

Έστω $[x] = \rho_{\lambda_1}(x)$ και $[y] = \rho_{\lambda_2}(y) \in G$, όπου $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Αν $\lambda_1 \le \lambda_2$ τότε το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G_{\lambda_1} \arrow[rr, bend left, "\rho_{\lambda_1}"] \arrow[dr, bend right, "\rho^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & & G \\
& G_{\lambda_2} \arrow[ur, bend right, "\rho_{\lambda_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $[x] = [\rho^{\lambda_1}_{\lambda_2}(x)]$.

Ξεκινήσαμε με $[x], [y] \in G$, δηλαδή $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ και υπάρχει $\lambda \ge \lambda_1, \lambda_2$ και μπορούμε να πετάξουμε τα x, y στην ομάδα G_λ:

$$\begin{tikzcd}
x \in G_{\lambda_1} \arrow[dr, bend left] & \\
& G_\lambda \\
y \in G_{\lambda_2} \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Οπότε παίρνουμε τα $\rho^{\lambda_1}_{\lambda}(x), \rho^{\lambda_2}_{\lambda}(y) \in G_\lambda$ μέσα στην ομάδα, άρα υπάρχει το γινόμενό τους

$$\rho^{\lambda_1}_{\lambda}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_{\lambda}(y) \in G_\lambda \implies$$

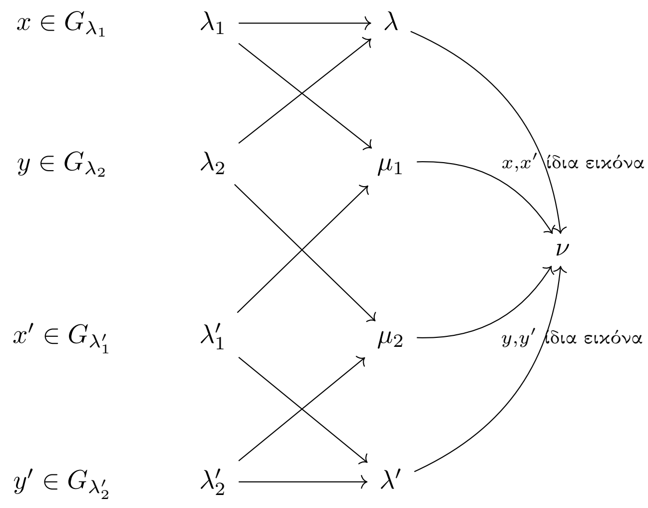
$$\rho_\lambda(\rho^{\lambda_1}_{\lambda}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_{\lambda}(y)) = [\rho^{\lambda_1}_{\lambda}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_{\lambda}(y)] \in G$$

θέτουμε το τελευταίο με $[x] \cdot [y]$.

Η πράξη $[x] \cdot [y]$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους x, y, δηλαδή είναι καλά ορισμένη. Αν $[x] = [x']$ και $[y] = [y']$ τότε θα πρέπει $[x] \cdot [y] = [x'] \cdot [y']$.

Πράγματι, αν $x \in G_{\lambda_1}, x' \in G_{\lambda_1'}, y \in G_{\lambda_2}, y' \in G_{\lambda_2'}$

$$[x] = [x'] \iff \exists \mu_1 \ge \lambda_1, \lambda_1' : \quad \rho^{\lambda_1}_{\mu_1}(x) = \rho^{\lambda_1'}_{\mu_1}(x')$$



$[y] = [y'] \iff \exists \mu_2 \geq \lambda_2, \lambda_2' :$

$$\rho_{\mu_2}^{\lambda_2}(y) = \rho_{\mu_2}^{\lambda_2'}(y')$$

Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$:

$$[x] \cdot [y] = [\rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y)]$$

Υπάρχει $\lambda' \geq \lambda_1', \lambda_2'$:

$$\rho_{\lambda'}^{\lambda_1'}(x') \cdot \rho_{\lambda'}^{\lambda_2'}(y')$$

Θέλουμε να δούμε αν είναι ίσα. Υπάρχει $\nu \geq \lambda, \lambda', \mu_1, \mu_2$ με

$$\begin{gathered}
\rho_{\nu}^{\lambda}(\rho_{\lambda}^{\lambda_1} \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y)) = \\
\rho_{\nu}^{\lambda} \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y) = \\
\rho_{\nu}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\lambda_2}(y) = \\
\rho_{\nu}^{\mu_1} \circ \rho_{\mu_1}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\mu_2} \circ \rho_{\mu_2}^{\lambda_2}(y) = \\
\rho_{\nu}^{\mu_1} \circ \rho_{\mu_1}^{\lambda_1'}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\mu_2} \circ \rho_{\mu_2}^{\lambda_2'}(y') = \\
\rho_{\nu}^{\lambda_1'}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\lambda_2'}(y') = \\
\rho_{\nu}^{\lambda'} \circ \rho_{\lambda'}^{\lambda_1'}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\lambda'} \circ \rho_{\lambda'}^{\lambda_2'}(y') = \\
\rho_{\nu}^{\lambda'}(\rho_{\lambda'}^{\lambda_1'} \cdot \rho_{\lambda'}^{\lambda_2'}(y'))
\end{gathered}$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{gathered}
\rho_{\lambda} : G_{\lambda} \to G \\
x \mapsto [x]
\end{gathered}$$

είναι μορφισμός ομάδων. Πράγματι, έστω $x, y \in G_{\lambda}$

Θέλουμε να ισχύει $\rho_{\lambda}(xy) = \rho_{\lambda}(x) \cdot \rho_{\lambda}(y)$.

$$\rho_{\lambda}(x) \cdot \rho_{\lambda}(y) = [x] \cdot [y] = [xy] = \rho_{\lambda}(xy)$$

□

Μάθημα 9 - Πέμπτη 24/03/2022.

Θεώρημα. (1) *Αν* $(G_\lambda, \rho^{\lambda_1}_{\lambda_2})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}, ((\Lambda, \leq)$ *κατευθυνόμενο*) *επαγωγικό σύστημα ομάδων, τότε υπάρχει το όριο* (G, ρ_λ) *με* G *ομάδα και* $\rho_\lambda : G_\lambda \to G$ *μορφισμός ομάδων για κάθε* $\lambda \in \Lambda$.

(2) *Αν έχουμε δύο επαγωγικά συστήματα ομάδων* $(G_\lambda, \rho^{\lambda_1}_{\lambda_2}), (H_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$ *με όρια* $(G, \rho_\lambda), (H, \phi_\lambda)$ *και* $(f_\lambda : G_\lambda \to H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *μορφισμός επαγωγικών συστημάτων ομάδων, τότε η επαγόμενη* $f : G \to H$ *είναι μορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. (1) Ως συνήθως θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

και ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας: αν $x, y \in \sqcup G_\lambda$ τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ με $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ με

$$x \sim y \iff \exists\ \lambda \geq \lambda_1 \lambda_2 : \quad \rho^{\lambda_1}_\lambda(x) = \rho^{\lambda_2}_\lambda(y)$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και για κάθε $x \in G_\lambda$ έχουμε ότι $x \sim \rho^\lambda_\mu(x)$ για κάθε $\mu \geq \lambda$. Ως γνωστόν, η $G = \sqcup G_\lambda /$ είναι το επαγωγικό όριο του συστήματος. Θα βάλουμε δομή ομάδας.

Έστω $[x], [y] \in G$. Τότε υπάρχουν δείκτες λ_1, λ_2 με $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\rho^{\lambda_1}_\lambda(x), \rho^{\lambda_2}_\lambda(y) \in G_\lambda$ άρα και το γινόμενο θα ανήκει στην ομάδα

$$\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_\lambda(y) \in G$$

δηλαδή έχουμε την σχέση:

$$\rho_\lambda \left(\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_\lambda(y) \right) = [\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_\lambda(y)]$$

Η πράξη $[x][y]$ είναι καλά ορισμένη και είναι πράξη ομάδας με ουδέτερο στοιχείο το $[e_\lambda]$ για κάθε $\lambda \in \Lambda, (e_{\lambda_1} \sim e_{\lambda_2}, \forall\ \lambda_1, \lambda_2)$ και $[x]^{-1} = [x^{-1}]$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\rho_\lambda : G_\lambda \to G$ με $\rho_\lambda(x) = [x]$ είναι μορφισμός ομάδων. Πράγματι:

$$\rho_\lambda(xy) = [xy] = [\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}_\lambda(y)] \overset{\text{ορσ}}{=} [x] \cdot [y] = \rho_\lambda(x) \cdot \rho_\lambda(y)$$

(2)

$$\begin{tikzcd}
G_{\lambda_1} \arrow[r, "f_{\lambda_1}"] \arrow[d, "\rho^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dd, bend right, "\rho_{\lambda_1}"'] & H_{\lambda_1} \arrow[d, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] \arrow[dd, bend left, "\phi_{\lambda_1}"] \\
G_{\lambda_2} \arrow[r, "f_{\lambda_2}"] \arrow[d, "\rho_{\lambda_2}"] & H_{\lambda_2} \arrow[d, "\phi_{\lambda_2}"'] \\
G \arrow[r, dashed, "f"] & H
\end{tikzcd}$$

Έχουμε δείξει ότι στα επαγωγικά συστήματα συνόλων την ύπαρξη μοναδικής $f : G \longrightarrow H$ που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα. Αν $[x] \in G$ τότε $x \in G_\lambda \implies f_\lambda(x) \in H_\lambda \implies [f_\lambda(x)] \in H$, δηλαδή $\phi_\lambda(f_\lambda(x)) = [f_\lambda(x)] \in H$.

Ορίζουμε $f([x]) = \phi_\lambda(f_\lambda(x)) = [f_\lambda(x)]$ και θα δείξουμε ότι είναι μορφισμός ομάδων.

$$\begin{tikzcd}
G_{\lambda_1} \arrow[r, "f_{\lambda_1}"] \arrow[dd] & H_{\lambda_1} \arrow[dd] & & \\
 & & G_{\lambda_2} \arrow[r, "f_{\lambda_2}"] \arrow[dll, "\rho_\lambda^{\lambda_2}"'] & H_{\lambda_2} \arrow[dll, "\phi_\lambda^{\lambda_2}"] \\
G_\lambda \arrow[r, "f_{\lambda_2}"'] \arrow[d, "\rho_\lambda"] & H_\lambda \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & & \\
G \arrow[r, dashed, "f"] & H & &
\end{tikzcd}$$

Έστω $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $z := \rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_\lambda^{\lambda_2}(y) \in G_\lambda$. Τότε:

$$\begin{aligned}
f([x][y]) &= f([z]) = [f_\lambda(z)] = \phi_\lambda(f_\lambda(z)) = \phi_\lambda \circ (z) = \\
&= \phi_\lambda \circ f_\lambda \circ \rho_\lambda^{\lambda_1}(x) \cdot \phi_\lambda \circ f_\lambda \circ \rho_\lambda^{\lambda_2}(y) = \\
&= [f_\lambda \circ \rho_\lambda^{\lambda_1}(x)] \cdot [f_\lambda \circ \rho_\lambda^{\lambda_2}(y)] = \\
&= [\phi_\lambda^{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x))] \cdot [\phi_\lambda^{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y))] = \\
&= \Big(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x))\Big) \cdot \Big(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y))\Big) = \\
&= \phi_{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x)) \cdot \phi_{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y)) = \\
&= [f_{\lambda_1}(x)] \cdot [f_{\lambda_2}(y)] = \\
&= f([x]) \cdot f([y])
\end{aligned}$$

□

Ανάλογα αποτελέσματα θα έχουμε για προδράγματα δακτυλίων, διανυσματικών χώρων πάνω από το F, αλγεβρών και προτύπων.

Έστω $R \equiv (R(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα δακτυλίων. Ένα R-πρότυπο είναι ένα προδράγμα (συνόλων) $M = (M(U), \lambda_V^U)$ έτσι ώστε για κάθε $U \in \tau_X$ το $M(U)$ είναι $R(U)$-πρότυπο και για κάθε $V \subseteq U$ η απεικόνιση $\lambda_V^U : M(U) \longrightarrow M(V)$ είναι ρ_V^U-μορφισμός προτύπων. Δηλαδή:

(1) λ_V^U προσθετική: $\lambda_V^U(x+y) = \lambda_V^U(x) + \lambda_V^U(y)$ για κάθε $x, y \in M(U)$.

(2) Αν $x \in M(U), r \in R(U)$ τότε $rx \in M(U)$ και $\lambda_V^U(rx) = \rho_V^U(r)\lambda_V^U(x) \in M(V)$, όπου $\rho_V^U(r) \in R(V), \lambda_V^U(x) \in M(V)$.

Παραδείγματα:

(1) Αν (X, τ_X) είναι τοπολογικός χώρος τότε το $(\mathcal{C}(U), r_V^U)$ είναι προδράγμα αλγεβρών.

(2) Αν (M, τ_M) είναι διαφορική πολλαπλότητα, το $(C^\infty(U), \rho_V^U)$ είναι προδράγμα αλγεβρών και το $(\mathcal{X}(U), \lambda_V^U)$ είναι προδράγμα των διανυσματικών πεδίων της M. Κάθε $\mathcal{X}(U)$ είναι C^∞-πρότυπο (γενικά οι τομές διανυσματικών δεσμών είναι $\mathcal{C}$ ή C^∞-πρότυπα.)

Αν έχουμε ένα προδράγμα ομάδων $(G(U), \rho_V^U)$ τότε ξέρουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει το όριο του επαγωγικού συστήματος ομάδων $((G(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$. Τα νήματα G_x έχουν δομή ομάδας όπου G είναι το αντίστοιχο δράγμα. Δεν έχουμε ωστόσο μια πράξη ομάδας $G \times G \to G$ αλλά μόνο

$$*_x : G_x \times G_x \to G_X \rightsquigarrow \sqcup *_x \bigsqcup_{x \in X} G_x \times G_x \to \bigsqcup_{x \in X} G_x = G$$

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός (Νηματικό Γινόμενο)**.** *Έστω δύο δράγματα $(\mathcal{S},\pi,X),(\mathcal{T},p,X)$. Ορίζουμε το νηματικό τους γινόμενο να είναι το σύνολο:*

$$\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}=\big\{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}\mid\quad \pi(s)=p(t)\big\}=\bigcup_{x\in X}(\mathcal{S}_x\times\mathcal{T}_x)\subseteq\mathcal{S}\times\mathcal{T}$$

και το νηματικό γινόμενο γίνεται τοπολογικός χώρος που κληρονομεί την σχετική τοπολογία από την τοπολογία γινόμενο του $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$. Επιπλέον, έχουμε μια καλά ορισμένη προβολή στον χώρο βάσης:

$$\Pi:\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}\longrightarrow X$$

$$\Pi(s,t)=\pi(s)=p(t)\in X$$

Πρόταση. *Το $(\mathcal{S}\times_X\mathcal{T},\Pi,X)$ είναι δράγμα (γινόμενο στην κατηγορία δραγμάτων)*

Απόδειξη.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\times_X\mathcal{T} \arrow[ddrr] & \subseteq & \mathcal{S}\times\mathcal{T} \arrow[d, "p_{\mathcal{S}}=\text{συνεχής και ανοιχτή}"] \\
& & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi=\text{ συνεχής και ανοιχτή}"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \arrow[r, "p_{\mathcal{S}}"] \arrow[dr, "\Pi"'] & p_{\mathcal{S}}(t,s)=s \arrow[d, "\pi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Άρα $\Pi=\pi\circ p_{\mathcal{S}}=p\circ p_{\mathcal{T}}$ =συνεχής και ανοιχτή. Δηλαδή το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό και μένει να δείξουμε ότι η Π είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\times_X\mathcal{T} \arrow[r, "p_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "p_{\mathcal{T}}"'] \arrow[dr, "\Pi"] & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

Έστω $(s,t)\in\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}$, τότε για κάποιο $x\in X$ έχουμε $s\in\mathcal{S}_x,t\in\mathcal{T}_x$. Άρα εφόσον π,p είναι τοπικοί ομοιομορφισμοί έχουμε ότι υπάρχουν $U\subseteq\mathcal{S}$ ανοιχτό με $s\in U,\pi|_U:U\to\pi(U)\subseteq X$ ανοιχτό με π_U ομοιομορφισμό αντίστοιχα $V\subseteq\mathcal{T}$ ανοιχτό με $t\in V$ και $p_V:V\to p(V)$ ομοιομορφισμό. Θέτουμε $W:=p(V)\cap\pi(U)\in\mathcal{N}_x^0$ και μικραίνοντας κατάλληλα τα αρχικά U,V παίρνουμε

$$\pi|_U:U\longrightarrow W,\quad p|_V:V\longrightarrow W$$

ομοιομορφισμούς. Το $U\times V\subseteq\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ είναι ανοιχτό στην τοπολογία γινόμενο και άρα

$$A=(U\times V)\cap(\mathcal{S}\times_X\mathcal{T})$$

είναι ανοιχτό του $\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι $\Pi|_A\to W$ 1-1 και επί.

Μάθημα 10 - Τρίτη 29/03/2022.

Απόδειξη. (συνέχεια)

Έστω $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in A$, τότε $\Pi(s_1,t_1) = \Pi(s_2,t_2) \implies \pi(s_1) = \pi(s_2) = p(t_1) = p(t_2) = x \in W$ άρα $s_1, s_2 \in U, t_1, t_2 \in V$. Αφού $\pi|_U$ είναι 1-1 έχουμε $s_1 = s_2$. Ομοίως, $p|_V$ είναι 1-1 και άρα $t_1 = t_2$. Άρα Π 1-1.

Έστω $x \in W = \pi(U) = p(V) \implies \exists s \in U : \pi(s) = x$ και υπάρχει $t \in V : p(t) = x$. Άρα $(s,t) \in \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ και $(s,t) \in U \times V$. Άρα $(s,t) \in A$, δηλαδή Π επί. $\square$

Τομές του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$:

$$X \supseteq U \xrightarrow{a} \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$$

θέλουμε a να είναι συνεχής με

$$\Pi \circ a = id_U \implies$$

$$\Pi(a(x)) = x \quad \forall\, x \in U \implies$$

$$a(x) \in \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x \quad \forall\, x \in U$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \times_X \mathcal{T} \arrow[r, "p_{\mathcal{S}}"] & \mathcal{S} \arrow[dl, "\pi"] \\
X \supseteq U \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "p_{\mathcal{S}} \circ a"'] &
\end{tikzcd}$$

$p_{\mathcal{S}} \circ a$ συνεχής και $\pi \circ p_{\mathcal{S}} \circ a = \Pi \circ a = id_U$, άρα $p_{\mathcal{S}} \circ a \in \mathcal{S}(U), p_{\mathcal{T}} \circ a \in \mathcal{T}(U)$. Δηλαδή,

$$a \in \Gamma(U, \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}) \iff a = (a_1, a_2), a_1 \in \Gamma(U, \mathcal{S}), a_2 \in \Gamma(U, \mathcal{T})$$

πράγματι, ισχύει και αντίστροφα εφόσον αν $s \in \Gamma(U, \mathcal{S}), t \in \Gamma(U, \mathcal{T})$ τότε το $a = (s,t) : U \to \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ είναι τομή.

Έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U), T \equiv (T(U), \lambda_V^U)$ προδράγματα συνόλων πάνω από το X. Τότε το $(S(U) \times T(U), \rho_V^U \times \lambda_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ είναι προδράγμα συνόλων. Πράγματι:

(1) Για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε $\rho_U^U \times \lambda_U^U : S(U) \times T(U) \to S(U) \times T(U) = id_{S(U)} \times id_{T(U)} = id_{S(U) \times T(U)}$.

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε μεταθετικότητα:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \times T(U) \arrow[rr, "\rho_V^U \times \lambda_V^U"] \arrow[dr, "\rho_W^U \times \lambda_W^U"'] & & S(V) \times T(V) \arrow[dl, "\rho_W^V \times \lambda_W^V"] \\
& S(W) \times T(W) &
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $U \in \tau_X$ θεωρούμε την συνήθη προβολή:

$$p_{SU} : S(U) \times T(U) \longrightarrow S(U)$$

$$(s,t) \longmapsto s$$

Η $(p_{SU} : S(U) \times T(U) \to S(U))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων. Πράγματι έχουμε μεταθετικότητα στο τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \times T(U) \arrow[r, "p_{SU}"] \arrow[d, "\rho_V^U \times \lambda_V^U"'] & S(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
S(V) \times T(V) \arrow[r, "p_{SV}"] & S(V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \arrow[r, "p_{SU}"] \arrow[d, "\rho_V^U \times \lambda_V^U"'] & s \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
(\rho_V^U(s), \lambda_V^U(t)) \arrow[r, "p_{SV}"'] & \rho_V^U(s)
\end{tikzcd}$$

Ομοίως η $(p_{TU} : S(U) \times T(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων

Πρόταση. *$S \equiv (S(U), \rho_V^U) \rightsquigarrow (\mathcal{S}, \pi, X), T \equiv (T(U), \lambda_V^U) \rightsquigarrow (\mathcal{T}, p, X)$ και $S \times T \equiv P \rightsquigarrow (\mathcal{P}, \Pi, X)$. Τότε τα $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}, \mathcal{P}$ έχουν ισόμορφα νήματα, δηλαδή για κάθε $x \in X$ έχουμε $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in \mathcal{P}_x \implies \xi = [(s,t)]_x$ όπου $(s,t) \in S(U) \times T(U)$ για κάποιο $U \in \mathcal{N}_x^0$. Τότε $s \in S(U), t \in T(U), U \in \mathcal{N}_x^0 \implies \exists\ [s]_x \in \mathcal{S}_x, [t]_x \in \mathcal{T}_x$. Θέτουμε:

$$\Phi_x : \mathcal{P}_x \longrightarrow \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$$

$$\xi \longmapsto ([s]_x, [t]_x)$$

όπου $\xi = [(s,t)]_x$.

(1) Η Φ_x είναι καλά ορισμένη: Έστω $\mathcal{P}_x \ni [(s,t)]_x = [(s',t')]_x$. πρέπει να δείξουμε ότι $[s]_x = [s']_x, [t]_x = [t']_x$.

$$[(s,t)]_x = [(s',t')]_x \iff (s,t) \sim_x (s',t')$$

Έστω ότι $(s,t) \in S(U) \times T(U), (s',t') \in S(V) \times T(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ και

$$\left(\rho_W^U \times \lambda_W^U\right)(s,t) = \left(\rho_W^V \times \lambda_W^V\right)(s',t') \iff$$

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(s') \quad \text{και} \quad \lambda_W^U(t) = \lambda_W^V(t') \iff$$

$$s \sim_x s' \quad \text{και} \quad t \sim_x t' \iff$$

$$[s]_x = [s']_x \quad \text{και} \quad [t]_x = [t']_x$$

(2) Η Φ_x είναι 1-1: Έστω $\xi_1 = [(s_1,t_1)]_x, \xi_2 = [(s_2,t_2)]_x, (s_i,t_i) \in S(U_i) \times T(U_i)$ με $U_i \in \mathcal{N}_x^0$ για $i = 1, 2$. Αν έχουμε:

$$\Phi_x(\xi_1) = \Phi_x(\xi_2) \implies$$

$$([s_1]_x, [t_1]_x) = ([s_2]_x, [t_2]_x) \implies$$

$$s_1 \sim_x s_2 \quad \text{και} \quad t_1 \sim_x t_2 \implies$$

$$\exists\ V_1 \subseteq U_1 \cap U_2 : \quad \rho_{V_1}^{U_1}(s_1) = \rho_{V_2}^{U_2}(s_2) \quad \text{και}$$

$$\exists\ V_2 \subseteq U_1 \cap U_2 : \quad \lambda_{V_1}^{U_1}(t_1) = \lambda_{V_2}^{U_2}(t_2)$$

και άρα για $V = V_1 \cap V_2$ έχουμε:

$$\rho_V^{V_1}\left(\rho_{V_1}^{U_1}(s_1)\right) = \rho_V^{V_1}\left(\rho_{V_1}^{U_2}(s_2)\right) \implies \rho_V^{U_1}(s_1) = \rho_V^{U_2}(s_2)$$

$$\lambda_V^{V_2}\left(\rho_{V_2}^{U_1}(t_1)\right) = \lambda_V^{V_2}\left(\lambda_{V_2}^{U_2}(t_2)\right) \implies \lambda_V^{U_1}(t_1) = \lambda_V^{U_2}(t_2)$$

$$\left(\rho_V^{U_1} \times \lambda_V^{U_1}\right)(s_1, t_1) = \left(\rho_V^{U_2} \times \lambda_V^{U_2}\right)(s_2, t_2) \implies (s_1, t_1) \sim_x (s_2, t_2) \implies \xi_1 = \xi_2$$

(3) Η Φ είναι επί: Αν $([s]_x, [t]_x) \in \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$ τότε $s \in S(U), t \in T(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Για $W = U \cap V$ έχουμε:

$$\left(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t)\right) \in S(W) \times T(W)$$

$$\left[\left(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t)\right)\right]_x \in \mathcal{P}_x$$

και

$$\Phi_x\left(\left[\left(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t)\right)\right]\right) = \left([\rho_W^U(s)]_x, [\lambda_W^V(t)]_x\right) = ([s]_x, [t]_x)$$

Έστω $\Phi = \cup \Phi_x : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός δραγμάτων. Για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός αρκεί να δείξουμε ότι μεταφέρει τις εικόνες των τομών του $\mathcal{P}$ στις εικόνες των τομών του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$.

Βάση τοπολογίας του $\mathcal{P}$: τα $\widetilde{(s,t)}(U)$ για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $(s,t) \in S(U) \times T(U)$ όπου:

$$\widetilde{(s,t)}(U) = \left\{\widetilde{(s,t)}(x) | \quad x \in U\right\} = \left\{[(s,t)]_x | \quad x \in U\right\}$$

$$\Phi\left(\widetilde{(s,t)}(U)\right) = \left\{\Phi\left([s,t]_x\right) | \quad x \in U\right\} = \left\{([s]_x, [t]_x) | \quad x \in U\right\} =$$

$$= \left\{\, \left(\tilde{s}(x), \tilde{t}(x)\right) | \quad x \in U\right\}$$

Το οποίο είναι εικόνα τομής του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$.

□

Μάθημα 11 - Πέμπτη 31/03/2022.

Έστω $(G(U), \rho_V^U)$ προδράγμα ομάδων. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{G}_x$ εφοδιάζεται με δομή ομάδας. Τι ισχύει για το επαγόμενο δράγμα πάνω από το X;

$$\mathcal{G} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{G}_x$$

Για $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το τετράγωνο με τις πράξεις:

$$\begin{tikzcd}
G(U) \times G(U) \arrow[r, "*_U"] \arrow[d, "\rho_V^U \times \rho_V^U"'] & G(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
G(V) \times G(V) \arrow[r, "*_V"] & G(V)
\end{tikzcd}$$

Το οποίο είναι μεταθετικό. Πράγματι:

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x *_U y \arrow[d, mapsto] \\
(\rho_V^U(x), \rho_V^U(y)) \arrow[r, mapsto] & \rho_V^U(x) *_V \rho_V^U(y) = \rho_V^U(x *_U y)
\end{tikzcd}$$

Η ισότητα ισχύει εφόσον η ρ_V^U είναι μορφισμός ομάδων, από τον ορισμό του προδράγματος ομάδων. Από την ιδιότητα του μορφισμού ομάδων για τις ρ_V^U έχουμε ότι όλα τα τετράγωνα σαν το παραπάνω για τα $U \in \tau_X$ είναι μεταθετικά, δηλαδή έχουμε έναν μορφισμό προδραγμάτων:

$$(*_U : G(U) \times G(U) \to G(U))_{U \in \tau_X}$$

Συνεπώς για κάθε $x \in X$ υπάρχει η αντίστοιχη πράξη ομάδας στα νήματα:

$$*_x : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

και έτσι παίρνουμε έναν μορφισμό δραγμάτων:

$$* = \bigsqcup_{x \in X} *_x : \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x \longrightarrow \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{G}_x$$

Εφαρμογή:

Έστω $R = (R(U), \rho_V^U)$ προδράγμα δακτυλίων. Έστω M ενα R-πρότυπο, δηλαδή ένα $R(U)$-πρότυπο για κάθε $U \in \tau_X$.

$$M = (M(U), \lambda_V^U)$$

Για κάθε $U \in \tau_X$ το $M(U)$ είναι $R(U)$-πρότυπο και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ οι απεικονίσεις περιορισμού

$$\lambda_V^U : M(U) \longrightarrow M(V)$$

είναι ρ_V^U-μορφισμοί προτύπων, δηλαδή:

$$\lambda_V^U(x + y) = \lambda_V^U(x) + \lambda_V^U(y)$$
$$\lambda_V^U(rx) = \rho_V^U(r) \cdot \lambda_V^U(x),$$
$$\forall\, x \in M(U),\ \forall\, r \in R(U)$$

Για κάθε $x \in X$ περνώντας στα όρια έχουμε τον δακτύλιο $\mathcal{R}_x$ και το $\mathcal{M}_x$ να είναι $\mathcal{R}_x$-πρότυπο και

$$\mathcal{R} \times_X M \longrightarrow M$$

να είναι συνεχής σαν μορφισμός δραγμάτων, αφού παίρνει ένα (r, x) το οποίο ανήκει και στο $\mathcal{R}_x \times \mathcal{M}_x$ και το απεικονίζει στο $rx \in \mathcal{M}_x$.

Ερώτηση: Αν έχουμε έναν μορφισμό δραγμάτων $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, είναι το $Mor(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ δράγμα;
Αν πάμε να απαντήσουμε μέσω προδραγμάτων θα αποτύχουμε, έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}, T \equiv (T(U), \lambda_V^U)$. Μπορεί να είναι το $Mor(S, T)$ προδράγμα; Αν είναι συνόλων θα πρέπει να ορίζεται το $M(S, T)(U) = M(S(U), T(U)) \ni f$ και με περιορισμούς s_V^U και να έχουμε μεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\
S(V) \arrow[r, "?"'] & T(V)
\end{tikzcd}$$

Για να είναι μεταθετικό το τετράγωνο θα θέλαμε η ρ_V^U να αντιστρέφεται, το οποίο γίνεται μόνο στο σταθερό δράγμα.

Αν προσπαθήσουμνε με δράγμα $(\mathcal{S}, \pi, X)$, έχουμε ότι για κάθε $U \in \tau_X$ το $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$ είναι δράγμα πάνω από το U με π^{-1} ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$. Ομοίως για ένα δεύτερο δράγμα $(\mathcal{T}, p, X)$ έχουμε το δράγμα περιορισμό $(p^{-1}(U), p|_{p^{-1}(U)}, U)$ του $\mathcal{T}$ πάνω από το U.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[rrrr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "\pi"'] & \supseteq \pi^{-1}(U) \arrow[rr, leftrightarrow, "f|_{\pi^{-1}(U)}"] \arrow[dr, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"] & & p^{-1}(U) \subseteq \arrow[dl, "p|_{p^{-1}(U)}"] & \mathcal{T} \arrow[dll, bend left, "p"] \\
& & U & &
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το πλήρες προδράγμα $(Mor(\mathcal{S}\,|_U, \mathcal{T}\,|_U), \rho_V^U)$ με τους σύνηθες περιορισμούς. Έτσι παράγεται δράγμα πάνω από το $Mor(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ το οποίο ονομάζεται το δράγμα των σπερμάτων των μορφισμών από το $\mathcal{S}$ στο $\mathcal{T}$.

Αλλαγή Χώρου Βάσης

Αν $S \equiv (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα πάνω από το X και $f : X \to Y$ συνεχής, όπου Y τοπολογικός χώρος, τότε θέτουμε για κάθε $V \in \tau_Y$

$$f_*(S)(V) \overset{\text{ορσ}}{=} S(f^{-1}(V))$$

και για κάθε $V' \subseteq V \in \tau_Y$ πρέπει να φτιάξουμε τις απεικονίσεις περιορισμών:

$$\rho^V_{V'} : f_*(S)(V) = S(f^{-1}(V)) \longrightarrow f_*(S)(V') = S(f^{-1}(V'))$$

Έχουμε για κάθε $V' \subseteq V$ ότι $f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V)$ και άρα υπάρχει απεικόνιση:

$$\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')} : S(f^{-1}(V)) \longrightarrow S(f^{-1}(V'))$$

Άρα ονομάζουμε $r^V_{V'} := \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}$ και τότε το

$$\left(f_*(S)(V), r^V_{V'}\right)_{V' \subseteq V \in \tau_Y}$$

είναι προδράγμα συνόλων πάνω από το Y.

Πράγματι, για κάθε $V \in \tau_Y$:

$$r^V_V = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V)} = id_{f^{-1}(V)} = id_{S(f^{-1}(V))} = id_{f_*(S)(V)}$$

και αν $V'' \subseteq V' \subseteq V \in \tau_Y$ τότε για να ισχύει η σύνθεση:

$$r^{V'}_{V''} \circ r^V_{V'} = r^V_{V''}$$

δηλαδή να είναι μεταθετικό το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
f_*(S)(V) \arrow[r, "r^V_{V'}"] \arrow[dr, "r^V_{V''}"'] & f_*(S)(V') \arrow[d, "r^{V'}_{V''}"] \\
& f_*(S)(V'')
\end{tikzcd}$$

Το οποίο είναι το παρακάτω διάγραμμα, που γνωρίζουμε ότι είναι μεταθετικό, απλά γραμμένο αλλιώς:

$$\begin{tikzcd}
S(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"] \arrow[dr, "\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V'')}"'] & S(f^{-1}(V')) \arrow[d, "\rho^{f^{-1}(V')}_{f^{-1}(V'')}"] \\
& S(f^{-1}(V''))
\end{tikzcd}$$

Το προδράγμα που ορίσαμε μέσω της f ονομάζεται push-out ή αλλιώς προδράγμα εικόνα μέσω της f.

Άσκηση: Αν το S είναι πλήρες προδράγμα τότε και το push-out $f_*(S)$ είναι πλήρες.

Πώς αλληλεπιδρά μια συνεχής $f : X \to Y$ με έναν μορφισμό προδραγμάτων $(g_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$; Θέτουμε $f_*(g)_V = g_{f^{-1}(V)} : S(f^{-1}(V)) \to T(f^{-1}(V))$ και έτσι έχουμε μορφισμό προδραγμάτων:

$$(f_*(g)_V : f_*(S)(V) \longrightarrow f*(T)(V))_{V\in\tau_Y}$$

και είναι πράγματι μορφισμός προδραγμάτων αφού ουσιαστικά είναι το προδράγμα που ξεκινήσαμε με λιγότερα ανοιχτά σύνολα, αυτά που είναι προεικόνες τις f. Δηλαδή όλα τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} f_*(S)(V) \arrow[r, "f_*(g)_V"] \arrow[d, "r^V_{V'}"'] & f_*(T)(V) \arrow[d, "\lambda^V_{V'}"] \\ f*(S)(V') \arrow[r, "f_*(g)_{V'}"'] & f_*(T)(V') \end{tikzcd}$$

Είναι μεταθετικά, εφόσον είναι ακριβώς τα μεταθετικά τετράγωνα: (g μορφισμός προδραγμάτων.)

$$\begin{tikzcd} S(f^{-1}(V)) \arrow[r, "g_{f^{-1}(V)}"] \arrow[d, "r^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"'] & T(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\lambda^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"] \\ S(f^{-1}(V')) \arrow[r, "g_{f^{-1}(V')}"'] & T(f^{-1}(V')) \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PS}h_X \ni \mathcal{S} & \rightsquigarrow & f_*(\mathcal{S}) \in \mathcal{PS}h_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} & \rightsquigarrow & f_*(\mathcal{T}) \end{array}$$

Η παραπάνω αντιστοιχία είναι συναλλοίωτος συναρτητής. Πράγματι:

$$id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\big(id_{S(U)} : S(U) \longrightarrow S(U)\big)_{U\in\tau_X}$$

είναι ο ταυτοτικός μορφισμός προδραγμάτων.

$$f_*(id_{\mathcal{S}}) : f_*(\mathcal{S}) \longrightarrow f_*(\mathcal{S})$$

$$\begin{aligned} &= (f_*(id_{\mathcal{S}}) : f_*(\mathcal{S})(V) \longrightarrow f_*(\mathcal{S})(V))_{V\in\tau_Y} \\ &= \big(id_{S(f^{-1}(V))} : S(f^{-1}(V)) \longrightarrow S(f^{-1}(V))\big)_{V\in\tau_Y} \\ &= id_{f_*(\mathcal{S})} \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε την πρώτη ιδιότητα του συναρτητή. Για την σύνθεση:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "(g_U)"] \arrow[rr, bend left, "(h_U\circ g_U)"] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[r, "(h_U)"] \arrow[d] & \mathcal{P} \arrow[d] \\ f_*(\mathcal{S}) \arrow[r, "f_*(g)"] \arrow[rr, bend right, "f_*(h\circ g)"'] & f_*(\mathcal{T}) \arrow[r, "f_*(h)"] & f_*(\mathcal{P}) \end{tikzcd}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f_*(h \circ g) = f_*(h) \circ f_*(g)$. Ισοδύναμα:

$$\iff (f_*(h \circ g))_V = f_*(h)_V \circ f_*(g)_V$$

$$\iff (h \circ g)_{f^{-1}(V)} = h_{f^{-1}(V)} \circ g_{f^{-1}(V)}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από ορισμό της σύνθεσης μορφισμών προδραγμάτων.

Άρα πράγματι έχουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή:

$$f_* : \mathcal{PS}h_X \longrightarrow \mathcal{PS}h_Y$$

και ένα ερώτημα είναι πώς συνθέτονται τέτοιοι συναρτητές; Θα δείξουμε ότι:

$$\mathcal{S} \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$(g \circ f)_*(\mathcal{S}) = g_*\left(f_*(\mathcal{S})\right) \quad \forall\ \mathcal{S}$$

και αν $(g \circ f)_*(h) = g_*(f_*(h))$ για κάθε h μορφισμό προδραγμάτων, τότε

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Μάθημα 12 - Τρίτη 05/04/2022.

Είδαμε ότι αν έχουμε ένα προδράγμα $S \equiv (S(U), \rho^U_V)$ πάνω από τον X και μια συνεχή $f : X \to Y$ παίρνουμε το προδράγμα

$$f_*(S) \equiv (f_*(S)(V), r^V_{V'}) \overset{\text{ορσ}}{\equiv} \left(S(f^{-1}(V)), \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}\right)$$

πάνω από τον Y. Ουσιαστικά πρόκειται για το ίδιο προδράγμα, μόνο που έχουμε αλλάξει το σύνολο δεικτών. Τα σύνολα και οι απεικονίσεις είναι ακριβώς τα ίδια, απλά έχουμε διώξει όσα δεν μπορούμε να τα πετύχουμε σαν αντίστροφη εικόνα της f.

Επιπλέον είδαμε ότι αν έχουμε έναν μορφισμό προδραγμάτων $g : S \to T$ πάνω από το X, δηλαδή $g \equiv (g_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$ τότε ορίσαμε τον μορφισμό προδραγμάτων:

$$\begin{aligned} f_*(g) &: f_*(S) \longrightarrow f_*(T) \\ f_*(g) &\equiv (f_*(g)_V : f_*(S)(V) \longrightarrow f_*(T)(V))_{V \in \tau_Y} \\ &\overset{\text{ορσ}}{\equiv} \left(g_{f^{-1}(V)} : S(f^{-1}(V)) \longrightarrow T(f^{-1}(V))\right)_{V \in \tau_Y} \end{aligned}$$

Έχουμε δείξει ότι:

$$f_*(id_S) = id_{f_*(S)}$$
$$f_*(h \circ g) = f_*(h) \circ f_*(g)$$

Δηλαδή, έχουμε έναν συναλλοίωτο συναρτητή

$$f_* : \mathcal{P}\mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{S}h_Y$$

Άσκηση: Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συνεχείς.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}\mathcal{S}h_X \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "g_* \circ f_*"] \arrow[rr, bend right=60, "(g \circ f)_*"'] & \mathcal{P}\mathcal{S}h_Y \arrow[r, "g_*"] & \mathcal{P}\mathcal{S}h_Z \end{tikzcd}$$

Να δείξετε ότι $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Έχουμε λοιπόν έναν τρόπο τα προδράγματα πάνω από τον X να τα στέλνουμε στον Y, τι γίνεται όμως με τα δράγματα; Κάθε φορά που πάμε να κατασκευάσουμε ένα δράγμα ουσιαστικά φτιάχνουμε τα νήματά του και βάζαμε μια τοπολογία ώστε να ενώσουμε τα νήματα με διακεκριμένη ένωση.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"'] & f_*(\mathcal{S}) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Τι θα μποορούσαν να είναι τα νήματα $f_*(\mathcal{S})_y$ για τα $y \in Y$; Αυτή η προσέγγιση είναι δύσκολη καθώς προκύπτουν προβλήματα όταν η f δεν είναι 1-1, επί και ακόμα και να είναι μπορεί να υπάρχει πρόβλημα με την τοπολογία. Εφόσον έχουμε δείξει ότι από προδράγματα παίρνουμε δράγματα και αντίστροφα θα δουλέψουμε έτσι. Αν συμβολίζουμε με $\mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$ τα πλήρη προδράγματα πάνω από τον X τότε:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}h_X \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[rrr, bend right, "f_*"'] & \mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_Y \arrow[r, "\mathbb{S}"] & \mathcal{S}h_Y
\end{tikzcd}$$

Ουσιαστικά ο $f_* : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_Y$ περνά μέσα από τα προδράγματα των τομών. Ωστόσο, αυτό είναι δύσχρηστο καθώς στην τελική εικόνα, στο δράγμα που θα πάρουμε με τον συναρτητή δραγματοποίησης $\mathbb{S}$, δεν έχουμε τρόπο να περιγράψουμε τα νήματα του τελικού δράγματος μέσω των νημάτων του αρχικού.

Άσκηση:

(1) Ποια είναι τα νήματα του $(\mathbb{S} \circ f_* \circ \Gamma)(\mathcal{S}) \in \mathcal{S}h_Y$ για τυχαίο $\mathcal{S} \in \mathcal{S}h_X$;

(2) Να δείξετε ότι $S \in \mathcal{P}\mathcal{S}h_X$ πλήρες $\implies f_*(S) \in \mathcal{P}\mathcal{S}h_Y$ πλήρες.

(3) Να δείξετε ότι ο συναρτητής f_* διατηρεί την αλγεβρική δομή των προδραγμάτων.

Θα κάνουμε ωστόσο την διαδικασία ανάποδα μέσω αντίστροφης εικόνας.

Ορισμός (Pullback)**.** *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, Y)$ δράγμα πάνω από τον Y και $f : X \to Y$ συνεχής. Θεωρούμε το $X \times \mathcal{S}$ με την τοπολογία γινόμενο και θεωρούμε*

$$f^*(\mathcal{S}) \overset{\text{ορσ}}{=} X \times_Y \mathcal{S} = \{(x, s) \in X \times \mathcal{S} \mid \quad f(x) = \pi(s)\} \subseteq X \times \mathcal{S}$$

που εφοδιάζεται με την σχετική τοπολογία. Καθώς $f^*(\mathcal{S}) \subseteq X \times \mathcal{S}$ μπορούμε να το προβάλουμε στο X με την πρώτη προβολή p_X.

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "p_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "p_X"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Πρόταση. *Το $(f^*(\mathcal{S}), p_X, X)$ είναι δράγμα πάνω από το X.*

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι η p_X είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Έστω $(x, s) \in f^*(\mathcal{S})$, τότε $f(x) = \pi(s)$. Δηλαδή, $s \in \mathcal{S}_{f(x)}$. Έχουμε $s \in \mathcal{S}$ το οποίο είναι δράγμα και άρα υπάρχουν:

$$A \in \mathcal{N}_s^0, \quad A \subseteq \mathcal{S}$$

$$V \in \mathcal{N}_{f(x)}^0, \quad V \subseteq Y$$

με

$$\pi\mid_A : A \longrightarrow V \subseteq Y$$

να είναι ομοιομορφισμός. Άρα $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in U$. Συνεπώς, το $U \times A$ είναι ανοιχτό (βασικό) του $X \times \mathcal{S}$.

$$B = (U \times A) \cap f^*(\mathcal{S})$$

ανοιχτό στην σχετική τοπολογία. Θα δείξουμε ότι έχουμε τον ομοιομορφισμό:

$$p_X\mid_B : B \longrightarrow U$$

Το ότι η $p_X\mid_B$ είναι συνεχής το ξέρουμε αφού είναι περιορισμός συνεχούς σε έναν υπόχωρο που έχει σχετική τοπολογία.

1-1: Έστω $(x',s'),(x'',s'')\in B$ με $p_X(x',s')=p_X(x'',s'')\implies x'=x''$.

$$(x',s'),(x'',s'')\in f^*(\mathcal{S})\implies f(x')=\pi(s')=f(x'')=\pi(s'')$$

και $s',s''\in A$ με $\pi\mid_A$ ομοιομορφισμό, άρα $s'=s''$.

Επί: Έστω $x'\in U=f^{-1}(V)$, δηλαδή $f(x')\in V$. Αφού $\pi\mid_A\colon A\to V$ ομοιομορφισμός υπάρχει $s'\in A\subseteq\mathcal{S}$ με $\pi(s')=f(x')$. Έχουμε $(x',s')\in f^*(\mathcal{S})$ με $x'\in U, s'\in A$, άρα $(x',s')\in U\times A$. Συνεπώς $(x',s')\in B$ και $p_X(x',s')=x'$.

Μένει να δείξουμε ότι $p_X\mid_B$ ανοιχτή. (Άσκηση.) □

Παρατήρηση. *Η παραπάνω απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη ότι το νηματικό γινόμενο είναι δράγμα. Με την διαφορά ότι σε εκείνη την απόδειξη δείξαμε την αμφισυνέχεια ως σύνθεση δύο ανοιχτών και συνεχών απεικονίσεων, δύο προβολών. Εδώ με την τυχαία f δεν δουλεύει το ίδιο επιχείρημα αφού δεν ξέρουμε αν είναι ανοιχτή. Άρα πρέπει να δουλέψουμε με τα ανοιχτά σύνολα για την $p_X\mid_B$.*

Έχουμε τρόπο να μεταφέρουμε δράγματα πάνω από τον Y στον X, θέλουμε να τα μεταφέρουμε με συναρτητές, δηλαδή να μεταφέρουμε και τους μορφισμούς. Αν έχουμε $(\mathcal{S},\pi,Y),(\mathcal{T},p,Y)\in \mathcal{S}h_Y$ και $g:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων. Δηλαδή, g συνεχής και το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Ζητάμε απεικόνιση $f^*(g):f^*(\mathcal{S})\to f^*(\mathcal{T})$ που να είναι μορφισμός δραγμάτων, δηλαδή να είναι και το κάτω αριστερό τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{S}) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p_X"'] & & f^*(\mathcal{T}) \arrow[dl, "p_X"] & \mathcal{S} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X \arrow[rrr, "f"] & & & Y & \end{tikzcd}$$

Η ζητούμενη απεικόνιση είναι η $(x,s)\longmapsto(x,g(s))$ αφού οι μορφισμοί διατηρούν τα νήματα και έτσι πρέπει να κρατήσουμε το σημείο στήριξης $x\in X$ σταθερό, καθώς και το φυσιολογικό που θέλουμε να πάμε ένα στοιχείο του $\mathcal{S}$ σε ένα στοιχείο του $\mathcal{T}$ και θα το κάνουμε μέσω του μορφισμού g.

(1) Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη:

$$f^*(g):f^*(\mathcal{S})\longrightarrow f^*(\mathcal{T})$$

$$f^*(g)(x,s)=(x,g(s))$$

Πράγματι, αν $(x,s)\in f^*(\mathcal{S})$, δηλαδή αν $f(x)=\pi(s)$ τότε $f^*(g)(x,s)=(x,g(s))\in f^*(\mathcal{T})$ διότι $f(x)=\pi(s)=p(g(s))$ λόγω μεταθετικότητας, άρα $f(x)=p(g(s))$ και έτσι είναι καλά ορισμένη.

(2) Η $f^*(g)$ είναι συνεχής ως ζεύγος συνεχών σε τοπολογικό υπόχωρο.

(3) Το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{S}) \arrow[rr, "f^*(g)"] \arrow[dr, "p_X"'] & & f^*(\mathcal{T}) \arrow[dl, "p_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$p_X \circ f^*(g)(x,s) = p_X(x, g(s)) = x = p_X(x,s)$$

δηλαδή

$$p_X \circ f^*(g) = p_X$$

για τις αντίστοιχες προβολές (με κατάχρηση συμβολισμού) άρα έχουμε μεταθετικότητα.

Διαπιστώνουμε ότι:

$$f^* : \mathcal{S}h_Y \longrightarrow \mathcal{S}h_X$$

είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής. Πώς δρα στα προδράγματα; Πώς συνθέτονται αυτοί·

$$\mathcal{PS}h_Y \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathcal{S}h_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{S}h_X \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{C}o\mathcal{PS}h_X$$

Η σύνθεση $\Gamma \circ f^* \circ \mathbb{S}$ είναι ο αντίστοιχος συναρτητής για τα προδράγματα που πάλι θα συμβολίζουμε με f^*.

Αν έχουμε $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συνεχείς, είναι και η $g \circ f$ συνεχής και έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}h_Z \arrow[r, "g^*"] \arrow[rr, bend left, "f^* \circ g^*"] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f)^*"'] & \mathcal{S}h_Y \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{S}h_X \end{tikzcd}$$

Ισχύει τετριμμένα ότι $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Παρατηρείστε ότι στο pushout η σειρά μένει ίδια ενώ στο pullback αντιστρέφεται.

Για να προσεγγίσουμε το pullback ενός δράγματος είναι να φτιάξουμε το προδράγμα των τομών και να προσπαθήσουμε να γυρίσουμε πίσω τις τομές σε τομές του pullback. Πώς συνδέονται οι τομές του $\mathcal{S}$ με του $f^*(\mathcal{S})$;

Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και θεωρούμε:

$$a : U \longrightarrow f^*(\mathcal{S})$$

(συνεχής) τομή, δηλαδή $p_X \circ a = id_U$. Αν $x \in U$ τότε $a(x) \in f^*(\mathcal{S}) \subseteq X \times \mathcal{S}$. Δηλαδή:

$$a(x) = (a_1(x), a_2(x))$$

με $a_1(x) \in X, a_2(x) \in \mathcal{S}$.

$$p_X(a(x)) = p_X(a_1(x), a_2(x)) = a_1(x)$$

και λόγω τομής πρέπει το $p_X \circ a$ να είναι η ταυτοτική. Συνεπώς:

$$p_X \circ a(x) = x$$

και έχουμε:

$$a(x) = (x, a_2(x)) \in f^*(\mathcal{S}) \implies$$
$$f(x) = \pi(a_2(x)) \implies$$
$$a_2(x) \in \mathcal{S}_{f(x)}$$

Η τομή που θέλουμε είναι η

$$f^*(\mathcal{S})_x = \{(x, s) | \quad s \in \mathcal{S}_{f(x)}\} = \{x\} \times \mathcal{S}_{f(x)}$$

Δηλαδή έχουμε μεταθετικό τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ X \supseteq U \arrow[ur, "a_2"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Την ίδια κατάσταση συναντάμε στην διαφορική γεωμετρία των πολλαπλοτήτων, στα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f. Η a_2 λέγεται τομή κατά μήκος της f.

Μάθημα 13 - Πέμπτη 07/04/2022.

Συμβολίζουμε με
$$\Gamma_f(U,\mathcal{S}) = \{a : U \longrightarrow \mathcal{S} \text{ συνεχής } : \quad \pi\circ a = f\}$$
για $U \subseteq X$ ανοιχτό και αυτά σχηματίζουν ένα πλήρες προδράγμα με τους συνήθεις περιορισμούς:
$$(\Gamma_f(U,\mathcal{S}), r^U_{U'})$$
Για κάθε $U \in \tau_X$ η αεπικόνιση:
$$\phi_U : \Gamma(U, f^*(\mathcal{S})) \longrightarrow \Gamma_f(U,\mathcal{S})$$
$$a = (id, a_2) \longmapsto a_2$$
είναι 1-1 και επί καθώς και:
$$(\phi_U : \Gamma(U, f^*(\mathcal{S})) \longrightarrow \Gamma_f(U,\mathcal{S}))_{U\in\tau_X}$$
είναι (ισο-)μορφισμός (πλήρων) προδραγμάτων.

Δηλαδή, η δραγματοποίηση αυτού του προδράγματος είναι ακριβώς το pullback:
$$\mathbb{S}\left(\Gamma_f(U,\mathcal{S})\right) \equiv f^*(\mathcal{S})$$

Έστω $(x,s) \in f^*(\mathcal{S})$, ξέρουμε ότι όλα τα σημεία του δράγματος μπορούμε να τα πάρουμε ως εικόνες τομών. Ποια είναι η τομή; Για για το $s \in \mathcal{S}_{f(x)}$, έχουμε $\pi(s) = f(x)$ και υπάρχει $V \in \mathcal{N}^0_x$ και $\sigma \in \Gamma(V,\mathcal{S})$ με $\sigma(f(x)) = s$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \\
X \supseteq f^{-1}(V) \arrow[ur, "a_2=\sigma\circ f"] \arrow[r, "f"] & V \subseteq Y \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

και $\pi\circ a_2 = \pi\circ\sigma\circ f = id_V\circ f = f$. Άρα για κάθε $\sigma \in \mathcal{S}(V)$ έχουμε ότι $\sigma\circ f \in \Gamma_f(f^{-1}(V),\mathcal{S})$.
$$a_2 = \sigma\circ f : U = f^{-1}(V) \longrightarrow \mathcal{S}$$
η οποία επάγει:
$$a = (id_{f^{-1}(V)}, \sigma\circ f) \in \Gamma(f^{-1}(V), f^*(\mathcal{S}))$$
$$a(x) = (x, \sigma\circ f(x)) = (x,s)$$
Πώς σχετίζονται οι $\Gamma(U, f^*(\mathcal{S}))$ με $\Gamma(V,\mathcal{S})$;

Αν $U \in \tau_X$ και $x \in U$ θεωρούμε μια τομή $a \in \Gamma(U, f^*(\mathcal{S}))$, δηλαδή $a = (id_U, a_2)$ με $a_2 \in \Gamma_f(U,\mathcal{S})$.
$$a(x) = (x, a_2(x) = s) \in \{x\}\times\mathcal{S}_{f(x)} = f^*(\mathcal{S})_x$$
και $s = \sigma(x)$ για $\sigma \in \Gamma(V,\mathcal{S})$ με $f(x) \in V \subseteq Y$ ανοιχτό. Άρα
$$b = (id, \sigma\circ f) \in \Gamma(f^{-1}(V), f^*(\mathcal{S}))$$

και αν εφαρμόσουμε τις τομές στο x:

$$a(x) = b(x) = (x, s) \implies$$
$$\exists\, W \subseteq U \cap f^{-1}(V): \quad a\,|_W = b\,|_W$$

Έστω $f : X \to Y$ συνεχής, τότε:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}h_X \arrow[r, shift left, "f_*"] & \mathcal{S}h_Y \arrow[l, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Ερώτηση: $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X \rightsquigarrow f_*(A) \in \mathcal{S}h_Y \rightsquigarrow f^*(f_*(A)) \in \mathcal{S}h_X$. Ισχύει ότι είναι ισόμορφο το τελικό με το αρχικό;

$$\mathcal{A} \simeq f^*(f_*(\mathcal{A}))?$$

ή ανάποδα;

Αν $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y \rightsquigarrow f^*(\mathcal{B}) \in \mathcal{S}h_X \rightsquigarrow f_*(f^*(\mathcal{B})) \in \mathcal{S}h_Y$

$$\mathcal{B} \simeq f_*(f^*(\mathcal{B}))?$$

Η απάντηση είναι όχι και στα δύο. Ωστόσο σχετίζονται ισχυρά η τελική εικόνα με το αρχικό.

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{B}) \arrow[d] & & \mathcal{B} \arrow[dr] & & f_*\left(f^*(\mathcal{B})\right) \arrow[ll, dashed, "?"'] \arrow[dl] \\ X \arrow[rrr, "f"'] & & & Y & \end{tikzcd}$$

Θα συσχετίσουμε τα $\mathcal{B}, f_*(f^*(B))$ συσχετίζοντας αντί αυτών τα πλήρη προδράγματα των τομών τους:

$$(\mathcal{B}(V), r^V_{V'})$$
$$(f_*(f^*(\mathcal{B}))(V), r^V_{V'})$$

και τα δύο με τους συνήθεις περιορισμούς.

$$f_*(f^*(\mathcal{B}))(V) \overset{\text{ορσ}}{=} f^*(\mathcal{B})(f^{-1}(V)) \equiv \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B})$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι ο ορισμός του pushout.

Θα θέλαμε μια αντιστοίχιση $\phi_f : \mathcal{B} \to f_* f^* \mathcal{B}$. Ισοδύναμα θέλουμε μορφισμό προδραγμάτων:

$$(\phi^f_{\mathcal{B}V} : \mathcal{B}(V) \to f_* f^*(\mathcal{B})(V))_{V \in \tau_Y}$$

Πράγματι, έστω $V \in \tau_X$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \\ X \supseteq f^{-1}(V) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & V \subseteq Y \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

$$\sigma \in \mathcal{B}(V) \longmapsto \sigma \circ f \in \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \equiv f_* f^*(\mathcal{B})(V)$$

άρα έτσι έχουμε έναν φυσιολογικό τρόπο να πάρουμε μια αντιστοίχιση:

$$\phi^f_{\mathcal{B}V} : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \equiv f_* f^*(\mathcal{B})(V)$$

Λειτουργεί σαν μορφισμός προδραγμάτων; Για $V' \subseteq V$ πρέπει να έχουμε τα μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(V) \arrow[r, "\phi^f_{\mathcal{B}V}"] \arrow[d, "r^V_{V'}"'] & \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \arrow[d, "r^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"] \\
\mathcal{B}(V') \arrow[r, "\phi^f_{\mathcal{B}V'}"'] & \Gamma_f(f^{-1}(V'), \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Πράγματι είναι μεταθετικά αφού:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & s \circ f \arrow[d, mapsto] \\
s \,|_{V'} \arrow[r, mapsto] & s \,|_{V'} \circ f = (s \circ f) \,|_{V'}
\end{tikzcd}$$

Άρα υπάρχει μορφισμός (πλήρων) προδραγμάτων τομών:

$$(\phi^f_{\mathcal{B}V} :\longrightarrow f_* f^*(\mathcal{B})(V))_{V \in \tau_Y}$$

από τον οποίο παίρνουμε έναν μορφισμό δραγμάτων:

$$\phi^f_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow f_* f^*(\mathcal{B})$$

Η οικογένεια $(\phi^f_B)_V$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών: $id \longrightarrow f_* f^*$.

Μάθημα 14 - Τρίτη 12/04/2022.

Έχουμε την εξής κατάσταση:

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{B}) \arrow[d] & & \mathcal{B} \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, "\pi"'] & f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[dl] \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y & \end{tikzcd}$$

Συνδέονται κάπως τα $\mathcal{B}$ και $f_*f^*(\mathcal{B})$; Ισοδύναμα συνδέονται τα προδράγματα των τομών τους ή κάποια προδράγματα που τα παράγουν; Τα προδράγματα των τομών είναι πλήρη και άρα σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα δράγματα. Εφόσον έχουμε τα δράγματα $\mathcal{B}, f_*f^*(\mathcal{B})$ η ύπαρξη μορφισμού δραγμάτων $\mathcal{B} \longrightarrow f_*f^*(\mathcal{B})$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μορφισμού προδραγμάτων:

$$(\mathcal{B}(V) \longrightarrow f_*f^*(\mathcal{B}(V)))_{V \in \tau_Y}$$

Τι είναι το $f_*\left(f^*(\mathcal{B})\right)(V)$; Ως pushout:

$$f_*\left(f^*(\mathcal{B})\right)(V) = f^*(\mathcal{B})\left(f^{-1}(V)\right)\big) = \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B})$$

Άρα ψάχνουμε μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$\mathcal{B}(V) \longrightarrow \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B})$$

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{B} \\ X \supseteq f^{-1}(V) \arrow[urr, "\sigma\circ f"] \arrow[rr, "f"'] & & V \subseteq Y \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Άρα ορίζουμε:

$$(\phi_V : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}))_{V \in \tau_Y}$$
$$\phi_V(b) = b \circ f$$

και έτσι ορίζουμε την ϕ που συνδέει τα δράγματα που θέλουμε μέσω του αντίστοιχου μορφισμού προδραγμάτων:

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{B}) \arrow[d] & & \mathcal{B} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[dl] \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y & \end{tikzcd}$$

Η $(\phi_V)_{V \in \tau_Y}$ είναι πράγματι μορφισμός προδραγμάτων, διότι κάθε τετράγωνο της μορφής:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "r^V_{V'}"] & \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \arrow[d, "l^V_{V'}"] \\ \mathcal{B}(V') \arrow[r, "\phi_{V'}"'] & \Gamma_f(f^{-1}(V'), \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

Είναι μεταθετικό εφόσον:

$$\mathcal{B}(V) \ni b \;\longmapsto\; \phi_V(b) = b \circ f \;\longmapsto\; l^V_{V'}(b \circ f) = b \circ f \mid_{f^{-1}(V)}$$

$$\mathcal{B}(V) \ni b \;\longmapsto r^V_{V'}(b) = b \mid_{V'} \longmapsto\; \phi_{V'}(b \mid_{V'}) = b \mid_{V'} \circ f$$

και σαφώς οι τελικές εικόνες είναι ίσες.

Επειδή τα παραπάνω τα κάναμε για συγκεκριμένο δράγμα $\mathcal{B}$, η ϕ εξαρτάται από αυτό και θα γράφουμε $\phi_{\mathcal{B}}$ (και $\phi_{\mathcal{B}V}$ στον μορφισμό προδραγμάτων). Ουσιαστικά για κάθε $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ υπάρχει

$$\phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow f_*(f^*(\mathcal{B}))$$

Είναι η οικογένεια $(\phi_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y}$ φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών I και $f_* f^*$; Είμαστε στην εξής κατάσταση:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathcal{T} \arrow[d] & & f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "f_*f^*(g)"] \arrow[dll] & f_*f^*(\mathcal{T}) \arrow[dlll] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y & & &
\end{tikzcd}$$

Για να είναι φυσικός μετασχηματισμός θα πρέπει για κάθε $\mathcal{B}, \mathcal{T} \in \mathcal{S}h_Y$ και για κάθε μορφισμό δραγμάτων $g : \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ τα παρακάτω τετράγωνα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "g"'] & f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "f_*f^*(g)"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "\phi_{\mathcal{T}}"'] & f_*f^*(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

Ισοδύναμα τα παραπάνω τετράγωνα είναι μεταθετικά αν για κάθε $V \in \tau_Y$ είναι μεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(V) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{B}V}"] \arrow[d, "g_V"'] & f_*f^*(\mathcal{B})(V) \equiv \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \arrow[d, "f_*f^*(g)_V"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "\phi_{\mathcal{T}V}"'] & f_*f^*(\mathcal{T})(V) \equiv \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

Το οποίο ισχύει εφόσον από την μία κατεύθυνση:

$$\mathcal{B}(V) \ni b \;\longmapsto g_V(b) = g \circ b \;\longmapsto \phi_{\mathcal{T}V}(g \circ b) = g \circ b \circ f$$

που τις αρχικές τομές τις συνθέτουμε με τον μορφισμό g για να έιναι τομές του $\mathcal{T}$ και μετά κατά μήκος της f. Για την άλλη κατεύθυνση, από τους ορισμούς pullback και pushout:

$$\mathcal{B}(V) \ni b \;\longmapsto \phi_{\mathcal{B}V}(b) = b \circ f \;\longmapsto\; f_*f^*(g)_V(b \circ f) = g \circ b \circ f$$

$$f_*(f^*(g))_V \equiv f^*(g)_{f^{-1}(V)} : f^*(B)(V) \longrightarrow f^*(\mathcal{T})(V)$$

δηλαδή συνδέει τα

$$\mathcal{B}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{T}(f^{-1}(V))$$

συνθέτοντας με g, άρα τα παραπάνω τετράγωνα είναι μεταθετικά.

Άρα βρήκαμε φυσικό μετασχηματισμό:

$$\phi : I \longrightarrow f_* f^*$$

Για την ανάποδη διαδικασία, αν $\mathcal{A}, f^* f_*(\mathcal{A}) \in \mathcal{S}h_X$ αυτά πώς σχετίζονται;

$$\begin{tikzcd}
f^* f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, dashed, "?"] \arrow[dr] & & \mathcal{A} \arrow[dl] & f_*(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
& X \arrow[rr] & & Y
\end{tikzcd}$$

Αν $V \subseteq Y$ ανοιχτό, έχουμε:

$$f_*(\mathcal{A})(V) \overset{\text{ορσ}}{=} \mathcal{A}(f^{-1}(V)) \ni a : f^{-1}(V) \longrightarrow \mathcal{A}$$

δηλαδή υπάρχουν οι τιμές $a(x) \in \mathcal{A}_x$, όμως $a(x) = [a]_x$ ως προς την σχέση $\sim_x$.

αν $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}(U), \rho^U_{U'})$ τότε ξέρουμε

$$[a]_X = \rho^U_x(a) \in \mathcal{A}_x$$

από την άλλη πλευρά, το $f_*(\mathcal{A})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το Y: (παρόλο που οι περιορισμοί εξακολουθούν να είναι οι ρ θα τους συμβολίζουμε με r για να ξεχωρίζουμε την οπτική γωνία που βλέπουμε το προδράγμα.)

$$f_*(\mathcal{A}) \equiv (f_*(\mathcal{A}(V)), r^V_{V'}) := (B, r^V_{V'})$$

για τα $V \in \mathcal{N}^0_y$ με $y = f(x)$ και αν

$$b \in f_*(A)(V), \quad b' \in f_*(A)(V')$$

όπου $V, V' \in \mathcal{N}^0_{y=f(x)}$ και ορίζουμε:

$$b \sim_y b' \iff \exists\, W \in \mathcal{N}^0_y, \quad W \subseteq V \cap V' :$$

$$r^V_W(b) = r^{V'}_W(b') \implies$$

$$r^V_y(b) = r^{V'}_y(b') \implies$$

$$\tilde{b}(y) = \tilde{b}'(y)$$

Για να τα ξεχωρίζουμε, για κάθε $a \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ θα γράφουμε $\tilde{a}$ όταν το θεωρώ σαν στοιχείο του $f_*(\mathcal{A})(V)$

Θέλουμε να συσχετίσουμε τα $f^*(f_*(\mathcal{A}))(U)$ και $\mathcal{A}(U)$. Το πρώτο ως pullback ενός δράγματος είναι:

$$f^*(f_*(\mathcal{A}))(U) = \Gamma_f(U, f_*(\mathcal{A})) = ?$$

Θα πάμε μέσα από τα δράγματα

$$f^*(f_*(\mathcal{A})) \ni (x, \xi)$$

όπου $\xi \in f_*(\mathcal{A})_{f(x)}$, άρα υπάρχει τομή $\tilde{a}$ στο $f_*(\mathcal{A})(V) = \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ (όπου $a \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ με άλλη δομή) που εφαρμοσμένη στο $f(x)$ δίνει ξ, δηλαδή:

$$\tilde{a}(f(x)) = \xi$$

με $\tilde{a}$ για να θυμόμαστε ότι φτιάχνουμε επαγωγικά όρια ως προς τον Y. Δηλαδή:

$$r^V_{f(x)}(\tilde{a}) = \tilde{a}(f(x)) = \xi$$

$$f_*(\mathcal{A}) \ni \tilde{a} \equiv a \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$$

$$y = f(x) \in V \implies x \in f^{-1}(V)$$

Η a ως τομή $X \supseteq f^{-1}(V) \longrightarrow \mathcal{A}$ έχει τιμή στο νήμα $a(x) \in \mathcal{A}_x$ και είναι:

$$a(x) = \rho^U_x(a) = [a]_x$$

Ουσιαστικά το ίδιο a έχει δύο επαγωγικά όρια ανάλογα σε ποιο προδράγμα το βλέπουμε, πάνω από τον Y έχουμε την τιμή $\xi = \tilde{a}(x)$ ενώ πάνω από τον X την τιμή $a(x)$.

Ορίζουμε:

$$\psi_{\mathcal{A}}(x,\xi) = a(x) = \rho^{f^{-1}(V)}_x(a)$$

όπου $r^V_{f(x)} = \xi$.

Επειδή ξεκινήσαμε με ένα σημείο και πήραμε τομή που περνάει από αυτό, και ορίσαμε την εικόνα της $\psi_{\mathcal{A}}$ χρησιμοποιώντας αυτήν την τομή. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη της τομής γιατί θα μπορούσαμε να βρούμε άλλη τομή που να περνάει από το ίδιο σημείο, οπότε θέλουμε να μην αλλάζει η εικόνα.

(1) Η ψ_A είναι ανεξάρτητη της $a \equiv \tilde{a}$. Έστω

$$\mathcal{A}(f^{-1}(V')) \ni a' \equiv \tilde{a}' \in f_*(\mathcal{A})(V)$$

με

$$r^{V'}_{f(x)}(\tilde{a}') = \xi = r^V_{f(x)}(\tilde{a}) \implies \tilde{a} \sim_{f(x)} \tilde{a}'$$

δηλαδή υπάρχει $W \in \mathcal{N}^0_{f(x)},\ W \subseteq V \cap V'$ με

$$\begin{aligned}
r^V_W(\tilde{a}) &= r^{V'}_W(\tilde{a'}) \implies \\
\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}(a) &= \rho^{f^{-1}(V')}_{f^{-1}(W)}(a') \implies \\
\rho^{f^{-1}(V)}_z(a) &= \rho^{f^{-1}}_x(V')(a') \quad \forall\ z \in f^{-1}(W) \implies \\
\rho^{f^{-1}(V)}_x(a) &= \rho^{f^{-1}(V')}_x(a') \quad \forall\ z \in f^{-1}(W) \implies \\
a(x) &= a'(x)
\end{aligned}$$

(2) Η ψ είναι μορφισμός δραγμάτων: αφού κάνει μεταθετικό το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
f^*f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "\psi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr] & & \mathcal{A} \arrow[dl] & f_*(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
& X \arrow[rr] & & Y
\end{tikzcd}$$

και για κάθε (x,ξ) βρίσκουμε τομή $(id, \tilde{a} \circ f)$ με τιμή στο x το (x,ξ), που μέσω της ψ_A μεταφέρεται στην τομή $a \in \mathcal{A}(f^{-1}(V))$ και άρα έχουμε μορφισμό δραγμάτων από την ισοδύναμη συνθήκη που μεταφέρουμε τομές σε τομές.

Όμοια με πριν, κάνουμε την ερώτηση αν είναι η οικογένεια

$$(\psi_{\mathcal{A}} : f^* f_*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A})_{A \in \mathcal{S}h_X}$$

φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των $f^* f_*$ και I;

$$\psi : f^* f_* \longrightarrow I$$

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, για κάθε $\mathcal{A}, \mathcal{S} \in \mathcal{S}h_X$ και για κάθε μορφισμό δραγμάτων $g : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, αν έχουμε τις εικόνες των $f^* f_*$ και I στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
f^* f_*(\mathcal{A}) \arrow[r, "f^* f_*(g)"] \arrow[drr] & f^* f_*(\mathcal{S}) \arrow[dr] & & \mathcal{A} \arrow[r, "g"] \arrow[dl] & \mathcal{S} \arrow[dll] \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

τότε θα πρέπει τα παρακάτω τετράγωνα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
f^* f_*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "f^*(f_*(g))"] & \mathcal{A} \arrow[d, "g"] \\
f^* f_*(\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi_{\mathcal{S}}"'] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

όπου έχουμε ταυτίσει:

$$A \equiv (A(U), \rho^U_V)$$
$$f_*(A) \equiv (f_*(A)(V), r^V_{V'})$$
$$\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}(U), \lambda^U_{U'})$$
$$f_*(\mathcal{S}) \equiv (f_*(\mathcal{S})(V), l^V_{V'})$$

και έχουμε μεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
f_*(\mathcal{A})(V) \arrow[r, "f_*(g)_V"] \arrow[d, "r^V_{f(x)}"'] & f_*(\mathcal{S})(V) \arrow[d, "l^V_{f(x)}"] \\
f_*(\mathcal{A})_{f(x)} \arrow[r, "f_*(g)"'] & f_*(\mathcal{S})_{f(x)}
\end{tikzcd}$$

και άρα:

$$f_*(g)(\xi) = r^V_{f(x)}(\tilde{a})$$

$$(x, f_*(g)(\xi)) = (x, f_*(g) \circ r^V_{f(x)}(\tilde{a})) = (x, l^V_{f(x)} \circ f_*(g)_V(\tilde{a})) = (x, l^V_{f(x)} \circ g_{f^{-1}(V)}(a))$$

όπου γνωρίζουμε το τελευταίο καθώς και την εικόνα του μέσω της $\psi_{\mathcal{S}}$. Άρα πράγματι το ζητούμενο τετράγωνο είναι μεταθετικό εφόσον:

$$
\begin{tikzcd}
(x,\xi) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a(x) \arrow[d, mapsto] \\
(x, f_*(g)(\xi)) = (x, l^V_{f(x)}(f_*(g)_V(\tilde{a}))) \arrow[r, mapsto] & g \circ a(x)
\end{tikzcd}
$$

Μάθημα 15 - Πέμπτη 14/04/2022.

Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε $U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$C(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ συνεχής } \}$$

Αν έχουμε $U' \subseteq U$ ανοιχτά τότε έχουμε τους συνήθεις περιορισμούς απεικονίσεων:

$$r^U_{U'} : C(U) \longrightarrow C(U')$$
$$f \longmapsto r^U_{U'}(f) = f|_{U'}$$

Άρα έχουμε το ζεύγος οικογενειών $(C(U), r^U_{U'})_{U' \subseteq U \in \tau_X}$ που για $U'' \subseteq U' \subseteq U$ ικανοποιεί:

$$\begin{tikzcd}
C(U) \arrow[r, "r^U_{U'}"] \arrow[dr, "r^U_{U''}"'] & C(U') \arrow[d, "r^{U'}_{U''}"] \\
& C(U'')
\end{tikzcd}$$

$$r^{U'}_{U''} \circ r^U_{U'} = r^U_{U''}$$

Δηλαδή είναι προδράγμα συνόλων πάνω από το X. Θα εξετάσουμε αν είναι πλήρες. Έστω $U \in \tau_X$ και $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτό κάλυμμα, δηλαδή $U_i \in \tau_X$ για κάθε $i \in I$ και $U = \cup_{i \in I} U_i$.

(1) Αν $f, g \in C(U)$:

$$\rho^U_{U_i}(f) = \rho^U_{U_i}(g) \quad \forall \ i \in I \implies$$
$$f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f|_{U_i} = g|_{U_i} \quad \forall \ i \in I \implies$$
$$f = g$$

(2) Αν έχουμε $f_i \in C(U_i)$ με

$$r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(f_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(f_j), \quad \forall \ i, j \implies$$

$$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

συνεχείς με $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Παίρνουμε ότι για κάθε $x \in U$ υπάρχει δείκτης $i \in I$ με $x \in U_i$. Θέτουμε $f(x) = f_i(x)$. Έπεται ότι η f είναι καλά ορισμένη αφού αν $x \in U_i \cap U_j$ τότε $f_i(x) = f_j(x) =: f(x)$ και f συνεχής. Άρα υπάρχει στοιχείο $f \in C(U)$ με

$$f|_{U_i} = f_i$$

Δηλαδή

$$r^U_{U_i}(f) = f_i$$

άρα το προδράγμα είναι πλήρες. Μας δίνει ένα δράγμα, για $x \in X$:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{N}^0_x} C(U)$$

εδώ συνήθως παίρνουμε διακεκριμένη ένωση, αλλά σε αυτή την περίπτωση αυτά θα είναι αναγκαστικά ξένα αφού διαφορετικά πεδία ορισμού $U \in \mathcal{N}^0_x$ θα καθορίζουν τελείως διαφορετικές συναρτήσεις μέσα στα $C(U)$. Βάζουμε την σχέση ισοδυναμίας:

$$f,g \in \bigcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} C(U) \implies \exists\, U, U' \in \mathcal{N}_x^0 : \quad f \in C(U),\ g \in C(U')$$

θέτουμε

$$f \sim_x g \iff \exists\, U'' \subseteq U \cap U', \quad U'' \in \mathcal{N}_x^0$$
$$r_{U''}^{U}(f) = r_{U''}^{U'}(g)$$

Δηλαδή

$$f|_{U''} = g|_{U''}$$

$$\mathcal{C}_x = \bigcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} C(U) \Big/ \sim_x$$

και ονομάζουμε

$$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C} = \bigcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \mathcal{C}_x, \pi, X)$$

το δράγμα αυτό ονομάζεται δράγμα των σπερμάτων (germs) των τοπικά ορισμένων συνεχών συναρτήσεων στο X. Πώς είναι τα στοιχεία του;

$$\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_x \ni [f]_x, \quad f : U_0 \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ συνεχής }, U_0 \in \mathcal{N}_x^0$$
$$[f]_x = \{g : U \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ συνεχής }, U \in \mathcal{N}_x^0, \ \text{ με } \ g|_{U'} = f|_{U'} \ \text{ για κάποιο } U' \in \mathcal{N}_x^0,\ U' \subseteq U_0 \cap U\}$$

Παρατήρηση. *Για κάθε $U \in \tau_X$ το $C(U)$ έχει αλγεβρική δομή:*

$$f, g \in C(U) \longrightarrow f + g \in C(U)$$
$$f \in C(U),\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \cdot f \in C(U)$$
$$f, g \in C(U) \implies f \cdot g \in C(U)$$

Με τα δύο πρώτα έχουμε δομή $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου και αν το U έχει πολλά σημεία θα είναι απειροδιάστατος. Με το πρώτο και το τρίτο έχουμε δομή δακτυλίου. Συνεπώς όλα μαζί μας δίνουν μία $\mathbb{R}$-άλγεβρα.

$$\forall\, U \in \tau_X \implies (C(U), +, \cdot_{\mathbb{R}}, \cdot) \ \textit{ άλγεβρα}$$

και μάλιστα ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός, δηλαδή η άλγεβρα είναι μεταθετική, όχι σαν τους πίνακες. Επίσης, έχει ως μονάδα στον πολλαπλασιασμό την σταθερή συνάρτηση. Καθώς έχουμε δείξει ότι η δομή μεταφέρεται στα δράγματα με τα επαγωγικά όρια παίρνουμε ότι:

$$\mathcal{C} \ \textit{ δράγμα μεταθετικών αλγεβρών με μονάδα}$$

Έστω $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$ τα δράγματα των τοπικά συνεχών απεικονίσεων πάνω από το X και αντίστοιχα Y. Μας δίνει η f έναν τρόπο να τα συνδέουμε αυτά; πιο συγκεκριμένα, συνδέει τα germs των συνεχών τοπικά ορισμένων συναρτήσεων στο X με αυτών στο Y;

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_X \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Αν πάμε να το δούμε κατευθείαν στα προδράγματα, αν $X \supseteq U \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ συνεχής και μέσω της f παίρνουμε $Y \supseteq f(U)$. Η g δίνει ένα germ για κάθε σημείο $x \in U$ αλλά δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τα germs της $f(U) \to \mathbb{R}$. Πιο φυσιολογικό είναι να δουλέψουμε ως εξής:

$$\begin{tikzcd} X \supseteq f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & V \subseteq Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Για κάθε $V \in \tau_Y$ και για κάθε $g \in C_Y(V)$:

$$g \circ f|_{f^{-1}(V)} \in C_X(f^{-1}(V))$$

άρα για καθε $V \in \tau_Y$ μπορούμε να βρούμε μια απεικόνιση:

$$f_V : C_Y(V) \longrightarrow C_X(f^{-1}(V))$$

$$f_V(g) = g \circ f|_{f^{-1}(V)}$$

Παρατηρούμε ότι για $V' \subseteq V$:

$$\begin{tikzcd} C_Y(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[d, "r^V_{V'}"'] & C_X(f^{-1}(V)) \arrow[d, "r^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"] \\ C_Y(V') \arrow[r, "f_{V'}"'] & C_X(f^{-1}(V')) \end{tikzcd}$$

Το τετράγωνο είναι μεταθετικό, εφόσον:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \circ f|_{f^{-1}(V)} \arrow[d] \\ g|_{V'} \arrow[r, mapsto] & g \circ f|_{f^{-1}(V')} \end{tikzcd}$$

Με αυτή την παρατήρηση έχουμε τον μορφισμό προδραγμάτων:

$$(f_V : C_Y(V) \longrightarrow C_X(f^{-1}(V)))$$

με

$$C_X(f^{-1}(V)) = f_*(C_X)(V)$$

Συνεπώς, υπάρχει ο επαγόμενος μορφισμός δραγμάτων:

$$\hat{f} : \mathcal{C}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{C}_X)$$

Άρα για να απαντήσουμε στην αρχική ερώτηση για το πώς συνδέουμε τα $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$ η σύνδεση είναι η:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & f_*(\mathcal{C}_X) \arrow[dl] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}
$$

Θα αναφερόμαστε σε αυτό ως μια πρώτη ανάγνωση της κατάστασης και πάμε να ξαναδούμε τα πράγματα με άλλο μάτι. Σαν δεύτερη ανάγνωση, έστω $x \in X, f(x) \in Y$ και το νήμα $\mathcal{C}_{Y,f(x)}$ με το στοιχείο $[g]_{f(x)}$. Έχουμε ότι υπάρχει:

$$V \in \mathcal{N}^0_{f(x)}, \quad g : V \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ συνεχής}$$

$$g \circ f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \in f^{-1}(V) \subseteq X$$

άρα ορίζεται:

$$[g \circ f]_x \in \mathcal{C}_{X,x} \subseteq \mathcal{C}_X$$

Έτσι, αν βλέπουμε και το σημείο x μαζί έχουμε:

$$\forall (x, [g]_{f(x)}) \in f^*(\mathcal{C}_Y)$$

και άρα για κάθε $x \in X$ ορίζεται απεικόνιση νημάτων:

$$f_x : f^*(\mathcal{C}_Y)_x \longrightarrow \mathcal{C}_{X,x}$$

έτσι υπάρχει μορφισμός δραγμάτων:

$$\tilde{f} = \cup f_x : f^*(\mathcal{C}_Y) \longrightarrow \mathcal{C}_X$$

δηλαδή έχουμε την σύνδεση όπως φαίνεται στο διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{C}_Y) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & \mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Έχουμε και μια τρίτη ανάγνωση της κατάστασης, αν στα προηγούμενα δεν πάμε στο ζεύγος $(x, [g]_{f(x)})$ και κρατήσουμε ότι:

$$\forall\ x \in X \quad \forall\ [g]_{f(x)} \in \mathcal{C}_{Y,f(x)}$$

βρίσκουμε

$$[g \circ f]_x \in \mathcal{C}_X$$

και ονομάσουμε αυτήν την απεικόνιση με $\overline{f}$, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{C}_Y|_{f(X)}$ το υποσύνολο του $\mathcal{C}$ που κρατάμε ότι είναι πάνω από την εικόνα, τότε έχουμε την εξής κατάσταση:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y|_{f(x)} \subseteq \mathcal{C}_Y \arrow[l, "\overline{f}"] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] & f(X) \subseteq Y
\end{tikzcd}
$$

Ωστόσο, οι τρεις προσεγγίσεις όπως θα δούμε δεν είναι τρία διαφορετικά πράγματα αλλά η ίδια κατασκευή. Ουσιαστικά η καθεμία από τις $\hat{f}, \tilde{f}, \overline{f}$ περνάει στις άλλες με αμφιμονοσήμαντο τρόπο μέσω των φυσικών μετασχηματισμών από τις προηγούμενες διαλέξεις.

Μάθημα 16 - Τρίτη 3/05/2022.

Έστω $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ τοπολογικοί χώροι.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Όπου $\mathcal{C}_X$ είναι το δράγμα που παράγεται από το (πλήρες) προδράγμα $(C_X(U), r^U_{U'})_{U' \subseteq U \in \tau_X}$:

$$C_X(U) = \{h : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχείς } \}$$

με απεικονίσεις τους συνήθεις περιορισμούς. Ένας φυσιολογικός τρόπος να τα συνδέσουμε αυτά είναι:

$$\begin{tikzcd} X \supseteq f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \supseteq V \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f_V : C_Y(V) \longrightarrow C_X(f^{-1}(V))$$

δηλαδή υπάρχει οικογένεια απεικονίσεων:

$$(f_V : C_Y(V) \longrightarrow C_X(f^{-1}(V)) = f_*(C_X)(V))_{V \in \tau_Y}$$

δηλαδή το (f_V) είναι μορφισμός προδραγμάτων $C_Y \longrightarrow f_*(C_X)$. Άρα ορίζεται μορφισμός δραγμάτων $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} : \mathcal{C}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{C}_X)$$

και έτσι κάναμε την εξής σύνδεση στο αρχικό πρόβλημα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[d] \arrow[r, "\tilde{f}"] & f_*(\mathcal{C}_X) \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y & \end{tikzcd}$$

Αν το δούμε αλλιώς:

$$f^{-1}(V) \subseteq X \xrightarrow{f} V \subseteq Y \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in f^{-1}(V)$ και $h \in C_Y(V)$ το $[h]_{f(x)}$ είναι μέσα στο νήμα $\mathcal{C}_{Y,f(x)}$. Ισοδύναμα:

$$(x, [h]_{f(x)}) \in f^*(\mathcal{C}_Y)_x$$

στο νήμα του pullback.

Κατασκευάζουμε το $[h \circ f]_x \in \mathcal{C}_{X,x}$ και έτσι έχουμε απεικόνιση:

$$\hat{f} : f^*(\mathcal{C}_Y) \longrightarrow X$$

άρα γυρνώντας στο αρχικό πρόβλημα έχουμε:

$$
\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{C}_Y) \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dr] & \mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

Εναλλακτικά, για κάθε $x \in X$ υπάρχει απεικόνιση νημάτων (θα θέλαμε να τις κολλήσουμε και να πάρουμε απεικόνιση αλλά μπορεί δύο x_1, x_2 να έχουν ίδια εικόνα)

$$\overline{f}_x : \mathcal{C}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{C}_{X,x}$$

και άρα και οικογένεια

$$(\overline{f}_x : \mathcal{C}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{C}_{X,x})_{x \in X}$$

(όχι απεικόνιση)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_X \arrow[d] & \mathcal{C}_Y \arrow[l, dashed, "(\overline{f}_x)_{x \in X}"'] \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

Θα ασχοληθούμε κυρίως με τις δύο πρώτες προσεγγίσεις.

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής και $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X, \mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$.

Ορισμός. *Ένας μορφισμός μεταξύ των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ πάνω από την f είναι ένας μορφισμός δραγμάτων:*

1η κατάσταση: $g : \mathcal{B} \longrightarrow f_*(\mathcal{A})$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & f_*(\mathcal{A}) \arrow[dl] \\
X \arrow[r, "f"] & Y &
\end{tikzcd}
$$

2η κατάσταση: $g : f^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A}$

$$
\begin{tikzcd}
f^*(B) \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathcal{A} \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Ουσιαστικά και στις δύο περιπτώσεις ξεκινάμε από το $\mathcal{B}$ και πάμε στο $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής. Για κάθε $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$ και $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία:*

$$\Phi : Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$$

Υπενθύμιση (1): για $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\phi^f : I \longrightarrow f_* f^*$ για τους συναρτητές $I, f_* f^* : \mathcal{S}h_Y \longrightarrow \mathcal{S}h_Y$. Επιπλέον, για κάθε $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ έχουμε:

$$\phi^f_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow f_* f^*(\mathcal{B})$$

έτσι ώστε για κάθε $V \in \tau_Y$:

$$\phi^f_{\mathcal{B}V} : \mathcal{B}(V) \longrightarrow f_* f^*(\mathcal{B})(V) = f^*(\mathcal{B}(f^{-1}(V))) = \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B})$$

(Η πρώτη ισότητα ως pushout και η δεύτερη ως pullback)

Αν $\beta : V \subseteq Y \longrightarrow \mathcal{B}$ τομή, τότε έχουμε $\phi^f_{\mathcal{B}V}(\beta) = \beta \circ f$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \\ f^{-1}(V) \arrow[ur, "\beta\circ f"] \arrow[r, "f"'] & V \subseteq Y \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Εφόσον ϕ^f είναι φυσικός μετασχηματισμός, έχουμε για κάθε $\mathcal{B}, \mathcal{T} \in \mathcal{S}h_Y$ και για κάθε μορφισμό δραγμάτων $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{T}$ τα μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\phi^f_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "g"'] & f_* f^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "f_* f^*(g)"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "\phi^f_{\mathcal{T}}"'] & f_* f^*(\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

Υπενθύμιση (2): Έχουμε φυσικό μετασχηματισμό $\psi^f : f^* f_* \to I$ για τους συναρτητές $f^* f_*, I : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_X$, όπου για $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$:

$$\psi^f_{\mathcal{A}} : f^* f_*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(x, a) \in f^*(f_*(\mathcal{A}))_x \implies a \in f_*(\mathcal{A})_{f(x)}$$

Προέρχεται από $a \in f_*(\mathcal{A})(V) = A(f^{-1}(V))$ με $V \in \mathcal{N}^0_{f(x)}$

Άρα το (x, a) προέρχεται (από το όριο) της $a \circ f$. Δηλαδή:

$$\psi^f_{\mathcal{A}}(x, a) = [a]_x$$

Οι διαδικασίες είναι ανάποδες η μία της άλλης. Η μία συνθέτει με f ενώ η άλλη διώχνει την f, χωρίς να είναι η μία αντίστροφη της άλλης αφού δεν συμπίπτουν τα πεδία ορισμού και τιμών. Το ότι η ψ^f είναι φυσικός μετασχηματισμός έπεται ότι για κάθε $\mathcal{A}, \mathcal{S} \in \mathcal{S}h_X$ και για κάθε μορφισμό δραγμάτων $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$ έχουμε μεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} f^* f_*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi^f_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "f^* f_*(g)"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "g"] \\ f^* f_*(\mathcal{S}) \arrow[r, "\psi^f_{\mathcal{S}}"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Λήμμα. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής, $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$ και $\mathcal{B} = f_*(\mathcal{A}) \in \mathcal{S}h_Y$. Τότε:*

$$\phi^f_{\mathcal{B}} = \phi^f_{f_*(A)} \ \ \textit{ισομορφισμός}$$

και

$$\left(\phi^f_{f_*(\mathcal{A})}\right)^{-1} = f_*(\psi^f_{\mathcal{A}})$$

$$\begin{tikzcd} f^*f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "\psi^f_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr] & & \mathcal{A} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f_*f^*f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "f_*(\psi^f_{\mathcal{A}})"] \arrow[dr] & & f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "\phi^f_{f_*(\mathcal{A})}"] \arrow[dl] & & f_*f^*f_*(\mathcal{A}) \arrow[dlll] \\ & Y & & & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι

$$f_*(\psi^f_{\mathcal{A}}) \circ \phi^f_{f_*(\mathcal{A})} = id_{f_*(\mathcal{A})}$$

και

$$\phi^f_{f_*(\mathcal{A})} \circ f_*(\psi^f_{\mathcal{A}}) = id_{f_*f^*f_*}$$

$$\begin{aligned} f_*(\psi^f_{\mathcal{A}})_V \circ \phi^f_{f_*(\mathcal{A})V}(a) &= f_*(\psi^f_{\mathcal{A}})_V(a \circ f) \\ &= \psi^f_{\mathcal{A}f^{-1}(V)}(a \circ f) \\ &= a \end{aligned}$$

Για το δεύτερο:

$$f_*f^*f_*(\mathcal{A})(V) = f^*f_*(\mathcal{A})(f^{-1}(V)) = \Gamma_f(f^{-1}(V), f_*(\mathcal{A}))$$

το οποίο περιέχει στοιχεία $\beta \circ f$:

$$\begin{aligned} [\phi^f_{f_*(\mathcal{A})} \circ f_*(\psi^f_{\mathcal{A}})]_V(\beta \circ f) &= \phi^f_{f_*(\mathcal{A})V} \circ \psi^f_{\mathcal{A}f^{-1}(V)}(\beta \circ f) \\ &= \phi^f_{f_*(\mathcal{A})V}(\beta) = \beta \circ f \end{aligned}$$

□

Λήμμα. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής, $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ και $A = f^*(\mathcal{B}) \in \mathcal{S}h_X$. Τότε:*

$$\psi^f_{\mathcal{A}} = \psi^f_{f^*(\mathcal{B})} \text{ αντιστρέψιμος}$$

και

$$\left(\psi^f_{f^*(\mathcal{B})}\right)^{-1} = f^*(\phi^f_{\mathcal{B}})$$

$$\begin{tikzcd} f^*f_*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi^f_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f^*f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "\psi^f_{f^*(\mathcal{B})}"] & f^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "f^*(\phi^f_{\mathcal{B}})"] \\ & f^*f_*f^*(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

Απόδειξη.

$$(x, b) \in f^*(\mathcal{B}) \; b \in \mathcal{B}_{f(x)}$$

δηλαδή
$$(x,b) \in f^*(\mathcal{B})_x$$
με $b = [\beta]_{f(x)}$

$$\begin{aligned} f^*(\phi^f_{\mathcal{B}})(x,b) &= (x, \phi^f_{\mathcal{B}}(b)) \\ &= (x, [\phi^f_{\mathcal{B}}(\beta)]_{f(x)}) \\ &= (x, [\beta \circ f]_{f(x)}) \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^f_{f^*(\mathcal{B})} \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}})(x,b) &= \psi^f_{f^*(\mathcal{B})}(x, [\beta \circ f]_{f(x)}) \\ &= (x, [\beta]_{f(x)}) \\ &= (x,b) \end{aligned}$$

Ανάποδα: Αν $(x,c) \in f^* f_* f^*(\mathcal{B})$ τότε

$$c \in f_* f^*(\mathcal{B})_{f(x)} \implies c = [\gamma]_{f(x)}$$

με $\gamma \in f_* f^*(\mathcal{B})(V)$ για $V \in \mathcal{N}^0_{f(x)}$, συνεπώς:

$$\gamma \in f_*(\mathcal{B})(f^{-1}(V)) = \Gamma_f(f^{-1}(V), \mathcal{B}) \implies$$

$$\gamma = \gamma_1 \circ f \;\; \gamma_1 \in \mathcal{B}(V)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) \circ \psi^f_{f^*(\mathcal{B})}(x,c) &= f^*(\phi^f_{\mathcal{B}})(x, [\gamma_1]) \\ &= (x, \phi^f_{\mathcal{B}}([\gamma_1])) \\ &= (x, [\gamma_1 \circ f]_{f(x)}) \\ &= (x,c) \end{aligned}$$

□

Γυρνάμε στο θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω $f : X \to Y$ συνεχής, $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$ και $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός:*

$$\Phi : Mor(f^*(\mathcal{B}, \mathcal{A})) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$$

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & \mathcal{A} \arrow[d] & & \mathcal{B} \arrow[d] \\ & X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\phi^f_{\mathcal{B}}} f_* f^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{f_*(h)} f_*(\mathcal{A})$$

Οπότε θέτουμε:
$$\Phi(h) = f_*(h) \circ \phi^f_{\mathcal{B}}$$
Απόδειξη στην επόμενη διάλεξη.

Μάθημα 17 - Πέμπτη 5/05/2022.

Θεώρημα. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής και $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X, \mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός:*

$$\Phi : Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$$

Λέμε ισομορφισμός και όχι μόνο αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση γιατί θα διατηρείται η όποια αλγεβρική δομή έχουμε.

Απόδειξη. Έστω $h \in Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A})$. Θέτουμε $\Phi(h) = f_*(h) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} \in Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$ καλά ορισμένη.

Φ 1-1:
Έστω $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$ τότε:

$$\begin{aligned}
f_*(h_1) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} &= f_*(h_2) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} \\
f^* f_*(h_1) \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) &= f^* f_*(h_2) \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) \\
\psi^f_{\mathcal{A}} \circ f^* f_*(h_1) \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) &= \psi^f_{\mathcal{A}} \circ f^* f_*(h_2) \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) \\
h_1 \circ \psi^f_{f_*(B)} \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) &= h_2 \circ \psi^f_{f_*(B)} \circ f^*(\phi^f_{\mathcal{B}}) \\
h_1 &= h_2
\end{aligned}$$

από τις υπενθυμίσεις για τους φυσικούς μετασχηματισμούς της προηγούμενης διάλεξης.

Φ επί:
Έστω $g : \mathcal{B} \longrightarrow f_*(\mathcal{A})$ τότε

$$f^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{f^*(g)} f^* f_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\psi^f_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

Θέτουμε $h = \psi^f_{\mathcal{A}} \circ f^*(g) \in Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A})$. Θα δείξουμε ότι $\Phi(h) = g$.

$$\begin{aligned}
\Phi(h) = f_*(h) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} &= \\
f_*(\psi^f_{\mathcal{A}} \circ f^*(g)) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} &= \\
f_*(\psi^f_{\mathcal{A}}) \circ f_* f^*(g) \circ \phi^f_{\mathcal{B}} &= \\
f_*(\psi^f_{\mathcal{A}}) \circ \phi^f_{f_*(\mathcal{A})} \circ g &= \\
&= g
\end{aligned}$$

αφού αυτά είναι αντίστροφα από λήμμα της προηγούμενης διάλεξης. $\square$

Παραδείγματα: Να εξετάσετε αν είναι προδράγματα, πλήρη και να υπολογίσετε το επαγόμενο δράγμα.

(1) Σταθερό προδράγμα. Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $A \neq \varnothing$ σύνολο. Θεωρούμε το ζεύγος $(A(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με

$$A(U) = A, \quad \forall\, U \in \tau_X$$

$$\rho_V^U = id_A, \quad \forall\, V \subseteq U \in \tau_X$$

1) Προδράγμα:

$1a)$ Για κάθε $U \in \tau_X$: $\rho_U^U = id_{A(U)}$.

$1b)$ Για $W \subseteq V \subseteq U \in \tau_X$: Η σχέση $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ ισχύει ως $id_A \circ id_A = id_A$

2) Πλήρες; Έστω $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$

$2a)$ Αν $s, t \in A(U)$ με $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t)$ για κάθε $i \in I$ τότε $id(s) = id(t) \implies s = t$. Άρα είναι μονοπροδράγμα.

$2b)$ Έστω $s_i \in A(U_i) = A$ τέτοια ώστε:

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j) \quad \forall\, i, j \in I \text{ με } U_i \cap U_j \neq \varnothing$$

Θα πρέπει να υπάρχει $s \in A = A(U)$ με

$$\rho_{U_i}^U(s) = s_i \iff s = s_i$$

Δεν ισχύει, μπορούμε να πάρουμε ως ανοιχτά δύο ξένα U_1, U_2 και $U := U_1 \cup U_2$. Αν λοιπόν το A δεν είναι μονοσύνολο και υπάρχουν διακεκριμένα $s_1 \in A(U_1) = A = A(U_2) \ni s_2$ τότε δεν υπάρχει $s \in A(U)$ αφού θα πρέπει $s_1 = s = s_2$.

3) Δράγμα:

Έστω $x \in X$ και $U, V \in \mathcal{N}_x^0$ (δηλαδή αυτά τέμνονται) και $s \in A(U), t \in A(V)$ με την σχέση ισοδυναμίας:

$$s \sim_x t \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0,\ W \subseteq U \cap V \text{ με}$$

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t) \implies s = t$$

Δηλαδή, για κάθε $s \in A(U)$ έχουμε τις κλάσεις $[s]_x = \{s\}$ και άρα ταυτίζουμε το νήμα $\mathcal{A}_x \equiv A$ (στοιχειώδης θεωρία συνόλων). Το δράγμα θα είναι:

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{A}_x \equiv X \times A$$

και με τι τοπολογία; Ξέρουμε ότι έχει βάση από τα σύνολα $\tilde{s}(U)$ για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $s \in A(U)$.

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$\tilde{s}(x) = \rho_x^U(s) = [s]_x = s$$

δηλαδή $\tilde{s}(U) = U \times \{s\}$.

Ένα σχόλιο για την πληρότητα:

Αν έχουμε $s_1 \in A(U_1)$ και $s_2 \in A(U_2)$ με $s_1 \neq s_2$ τα $\tilde{s}_1(U_1), \tilde{s}_2(U_2)$ ειναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathcal{A}$ αφού είναι βασικά. Αν ορίσουμε:

$$\tilde{s} = \tilde{s}_1 \cup \tilde{s}_2 : U = U_1 \cup U_2 \longrightarrow \mathcal{A}$$

αυτή είναι μια (συνεχής) τομή του $\mathcal{A}$. Αν το προδράγμα ήταν πλήρες αυτή η τομή θα προερχόταν από στοιχείο του προδράγματος, αλλά η $\tilde{s}$ δεν προέρχεται από $s \in A(U)$.

Ερώτηση: Αν το A είναι το προδράγμα πάνω από το X όπως προηγουμένως και έχουμε $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ συνεχείς τότε ισχύει ότι $f_*(A)$ θα είναι το σταθερό προδράγμα; Επιπλέον για το $\mathcal{A}$ σταθερό δράγμα θα ισχύει ότι το $f^*(\mathcal{A})$ είναι σταθερό; $(f, g;)$

(2) Έστω $X = [0,1]$ με την σχετική τοπολογία. Θεωρούμε το ζεύγος $(P(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με

$$P(U) = \begin{cases} \{0\}, & U \neq X \\ \mathbb{Z}, & U = X \end{cases}$$

$$\rho_V^U = \begin{cases} id_{\mathbb{Z}}, & U = V = X \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

1) Προδράγμα:

$1a)$

$$\rho_U^U = \begin{cases} \rho_X^X = id_{\mathbb{Z}} = id_{P(X)}, & U = X \\ 0 = id_{P(U)}, & U \neq X \end{cases} = id_{P(U)}$$

$1b)$ $W \subseteq V \subseteq U \in \tau_X$. Θέλουμε να ισχύει $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$. Αν $W = X$ ισχύει η σχέση ως $id_{\mathbb{Z}} \circ id_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$. Αν $W \neq X$ πάλι ισχύει ως $0 \circ \rho_V^U = 0$.

2) Πλήρες;

$2a)$ Έστω $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ και $s, t \in P(U)$ με

$$\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t)$$

για κάθε i. Ισχύει ότι $s = t$;

Αν $U \neq X$ τότε $s, t \in \{0\} \implies s = t = 0$. Αν $U = X$ τότε αν υπάρχει $U_i = X$ έχουμε:

$$\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t) \implies$$

$$id(s) = id(t) \implies s = t$$

Αν $U_i \neq X$ για κάθε $i \in I$ τότε:

$$\rho_{U_i}^U = 0$$

και άρα $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t) = 0$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Z}$ συνεπώς δεν είναι μονοπροδράγμα άρα ούτε πλήρες.

$2b)$ Έστω $s_i \in P(U_i)$ τέτοια ώστε:

$$\rho_{U_i}^U(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$$

για κάθε i, j με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$.

Αν $U \neq X$ τότε $s_i = 0$ για κάθε i αφού και τα $U_i \neq X$. Συνεπώς υπάρχει $s = 0 \in P(U)$ με $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$.

Αν $U = X$ και αν υπάρχει $U_i = X$ τότε για όλα τα $s_i \in P(U_i)$ με $U_i = X$ έχουμε:

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j) \implies$$

$$id(s_i) = id(s_j) = s \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή $s \in \mathbb{Z} = P(U)$ με

$$\rho^U_{U_i}(s) = \begin{cases} s = s_i & U_i = X \\ 0 = s_i \in P(U_i) = \{0\} & U_i \neq X \end{cases}$$

Αν για κάθε $i \in I$ έχουμε $U_i \neq X$ τότε $s_i = 0$ για κάθε i, δηλαδή οποιοδήποτε $s \in \mathbb{Z} = P(U)$ μας δίνει $\rho^U_{U_i}(s) = 0 = s_i$.

3) Δράγμα:

Για τα $s \in P(U), t \in P(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}^0_x$ για κάποιο $x \in X$ ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας:

$$s \sim_x t \iff \exists W \in \mathcal{N}^0_x, W \subseteq U \cap V :$$
$$\rho^U_W(s) = \rho^U_W(t)$$

πάντα υπάρχει περιοχή $W \neq X$ και άρα η σχέση μας δίνει $0 = 0$, δηλαδή όλα τα στοιχεία είναι ισοδύναμα.

Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική κλάση $[s]_x$ στο νήμα $\mathcal{P}_x$, δηλαδή $\mathcal{P}_x = \{0\}$. Άρα το δράγμα είναι το $\mathcal{P} = X \times \{0\}$ και η τοπολογία είναι αυτή που παίρνει από τον X.

Μάθημα 18 - Τρίτη 10/05/2022.

(3): Έστω $X = [0,1]$ με την σχετική τοπολογία. Θεωρούμε το ζεύγος $(Q(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με

$$Q(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & 1 \in U \\ \{0\}, & 1 \notin U \end{cases}$$

$$\rho_V^U = \begin{cases} id_{\mathbb{Z}}, & 1 \in V \\ 0, & 1 \notin V \end{cases}$$

1) Προδράγμα

1a) Έστω $U \in \tau_X$. Αν $1 \in U \implies \rho_U^U = id_{\mathbb{Z}} = id_{Q(U)}$. Αν $1 \notin U \implies \rho_U^U = 0 = id_{\{0\}}$.

1b) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$, αν $1 \in W$ τότε η σχέση $\rho_V^U \circ \rho_W^V = \rho_W^U$ ισχύει ως $id_{\mathbb{Z}} \circ id_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$. Αν $1 \notin W$ ισχύει ως $\rho_V^U \circ 0 = 0$.

2) Πλήρες;

2a) Έστω $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ με $U_i, U \in \tau_X$ για κάθε $i \in I$. Για $s, t \in Q(U)$, αν έχουμε $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t)$ για κάθε i, θα πρέπει $s = t$. Αν $1 \notin U$ τότε $s, t \in Q(U) = \{0\} \implies s = t = 0$. Αν $1 \in U$, τότε υπάρχει δείκτης $i \in I$ με $1 \in U_i$ και έτσι $Q(U) = Q(U_i) = \mathbb{Z}$ και

$$\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t) \implies id(s) = id(t) \implies s = t$$

άρα είναι μονοπροδράγμα.

2b) Έστω $s_i \in Q(U_i)$ για κάθε i, j με $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(t)$ για τα $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Ζητάμε $s \in Q(U)$ με $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ για κάθε $i \in I$. Αν $1 \notin U$ τότε $1 \notin U_i$ για κάθε i και άρα $Q(U) = Q(U_i) = \{0\}$, δηλαδή $s_i = 0$ για κάθε i και άρα για το $s = 0 \in Q(U)$ ισχύει το ζητούμενο.

Αν $1 \in U$ τότε υπάρχει $I_1 \subseteq I$ μη κενό υποσύνολο τέτοιο ώστε $1 \in U_i \forall\ i \in I_1$. Αν $i, j \in I_1$ τότε:

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j) \implies id(s_i) = id(s_j) \implies s_i = s_j$$

άρα υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ με $s_i = s$ για κάθε $i \in I_1$ και αφού ισχύει ότι $s_j = 0$ για κάθε $j \notin I_1$ παίρνουμε το ζητούμενο για αυτό το s. Δηλαδή, το προδράγμα είναι πλήρες.

Υπενθύμιση: Εφόσον έχουμε πληρότητα το δράγμα που θα φτιάξουμε θα έχει τα σύνολα τομών του σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα σύνολα $Q(U)$.

3) Δράγμα:
Έστω $x \in X = [0,1]$. Για $x \neq 1$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x^0$ με $1 \notin U$ και άρα $Q(U) = \{0\}$ και $X \in \mathcal{N}_x^0 \implies Q(X) = \mathbb{Z}$. Άρα

$$s, t \in \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} Q(U) \supseteq \mathbb{Z}$$

$$s \in Q(U),\ t \in Q(V)$$
$$s \sim_x t \iff \exists\ W \in \mathcal{N}_x^0,\ W \subseteq U \cap V :$$
$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$$

μικραίνω την ανοιχτή περιοχή να μην περιέχει το 1, άρα $1 \notin W$ και η σχέση ισχύει πάντα ως $0 = 0$, δηλαδή έχουμε μοναδική κλάση ισοδυναμίας και άρα:

$$\mathcal{Q}_x = \{0\}, x \neq 1$$

Αν $x = 1$ τότε κάθε ανοιχτή περιοχή θα περιέχει το 1 δηλαδή $Q(U) = \mathbb{Z}$ για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^0$.Για $s, t \in \sqcup Q(U)$ με $s \in Q(U), t \in Q(V)$ έχουμε:

$$s \sim_1 t \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0, W \subseteq U \cap V :$$

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^U(t) \implies id(s) = id(t) \implies s = t$$

άρα η σχέση ισοδυναμίας είναι η ισότητα και:

$$\mathcal{Q}_1 = \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{Q}_x$$

και η τοπολογία του $\mathcal{Q}$ έχει βάση τα $\tilde{s}(U)$ όπου $U \in \tau_X$ με $s \in Q(U)$. Αν $U \not\ni 1$ τότε $Q(U) = \{0\}$ και άρα:

$$\tilde{0} : U \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$\tilde{0}(x) = \rho_x^U(0) = [0]_x = 0 \in \mathcal{Q}_x$$

και αν $1 \in U$ τότε $Q(U) = \mathbb{Z} \ni s$:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$\tilde{s}(x) = \rho_x^U(s) = [s]_x = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ s, & x = 1 \end{cases}$$

άρα τα $(1 - \varepsilon, 1) \cup \{a\}$ είναι ανοιχτά για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.

Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες και συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Θα θέλαμε υπό μια έννοια $G = F^{-1}$ με F 1-1, επί μεταξύ κλάσεων, οπότε θα είχαμε *ισόμορφες* κατηγορίες.

Ορισμός. *Οι F, G λέγονται προσαρτημένοι συναρτητές (adjoint) με F προσαρτημένος αριστερά του G αν για κάθε $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$ υπάρχει ισομορφισμός:*

$$\Phi_{CD} \in Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

που είναι φυσικός μετασχηματισμός για κάθε ένα από τα C, D.

Ποιών συναρτητών; Υπενθύμιση: υπάρχει $\Phi : Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A}) \to Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$.

Έστω $D \in \mathcal{D}$ σταθερό, για κάθε $C \in \mathcal{C}$ υπάρχει σύνολο $Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D) \in \mathcal{S}et$ το οποίο ονομάζουμε ως $H(C)$. Άρα αν έχουμε $f : C_1 \to C_2$ στην $\mathcal{C}$ και $g : F(C_2) \to D$ με $g \in Mor_{\mathcal{D}}(F(C_2), D) = H(C_2)$ θα έχουμε $g \circ F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(C_1), D) = H(C_1)$, δηλαδή έχουμε απεικόνιση:

$$H(f) : H(C_2) \longrightarrow H(C_1)$$
$$g \longmapsto g \circ F(f)$$

και άρα έχουμε τον ανταλλοίωτο συναρτητή $H : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$.

Όμοια για $D \in \mathcal{D}$ σταθερό και για κάθε $C \in \mathcal{C}$ υπάρχει το σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \in \mathcal{S}et$ το οποίο ονομάζουμε $K(C)$. Αν έχουμε στην $\mathcal{C}$:

$$C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} G(D)$$

με $g \in Mor(C_2, G(D)) = K(C)$, τότε

$$g \circ f : C_1 \longrightarrow G(D)$$

δηλαδή $g \circ f \in Mor_{\mathcal{C}}(C_1, G(D)) = K(C_1)$. Ονομάζουμε:

$$K(f) : K(C_2) \longrightarrow K(C_1)$$
$$g \longmapsto K(f)(g) = g \circ f$$

καθώς F αριστερά adjoint του G υπάρχει:

$$\Phi_{CD} : Mor(F(C), D) \longrightarrow Mor(C, G(D))$$

άρα αν $f : C_1 \longrightarrow C_2$ έχουμε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
H(C_1) \arrow[r, "\Phi_{C_1 D}"] & K(C_1) \\
H(C_2) \arrow[u, "H(f)"] \arrow[r, "\Phi_{C_2 D}"] & K(C_2) \arrow[u, "K(f)"']
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή για $D \in \mathcal{D}$ σταθερό, η οικογένεια $(\Phi_{CD})_{C \in \mathcal{C}}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός των συναρτητών H, K.

Αν τώρα κρατήσουμε σταθερό ένα $C \in \mathcal{C}$ τότε για κάθε $D \in \mathcal{D}$ ορίζουμε συναρτητή:

$$L : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

$$L(D) := Mor(F(C), D)$$

και για $f : D_1 \to D_2$ και $g \in Mor(F(C), D_1) = L(D_1)$ έχουμε $f \circ g \in Mor(F(C), D_2) = L(D_2)$:

$$L(f) : L(D_1) \longrightarrow L(D_2)$$

$$g \longmapsto L(f)(g) = f \circ g$$

και σε αυτή τη περίπτωση η φορά διατηρείται, δηλαδή ο συναρτητής είναι συναλλοίωτος. Ορίζουμε ομοίως:

$$M : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

$$M(D) := Mor(C, G(D))$$

και αν έχουμε $f : D_1 \longrightarrow D_2$ και $g \in Mor(C, G(D_1)) = M(D_1)$ τότε έχουμε $G(f) \circ g \in Mor(C, G(D_2)) = M(D_2)$ και άρα το $M : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}et$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής. Έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
L(D_1) \arrow[r, "\Phi_{CD_1}"] \arrow[d, "L(f)"'] & M(D_1) \arrow[d, "M(f)"] \\
L(D_2) \arrow[r, "\Phi_{CD_2}"] & M(D_2)
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(\Phi_{CD})_{D\in\mathcal{D}}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός των συναρτητών L, M.

Μάθημα 19 - Τρίτη 17/05/2022.

Στα δράγματα αν έχουμε $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής βλέπουμε σαν $\mathcal{C} = \mathcal{S}h_Y$ και $\mathcal{D} = \mathcal{S}h_X$ και έχουμε τους συναρτητές:

$$F = f^* : \mathcal{S}h_Y \longrightarrow \mathcal{S}h_X$$

$$G = f_* : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_Y$$

και έχουμε αποδείξει ότι για κάθε δράγμα $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X, \mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ υπάρχει φυσικός ισομορφισμός (δηλ. αν κρατήσουμε σταθερό το ένα αντικείμενο της μια κατηγορίας και για την άλλη κατηγορία τα αντικείμενα τρέχουν έχουμε φυσικό μετασχηματισμό)

$$\Phi_{\mathcal{B}\mathcal{A}} : Mor(f^*(\mathcal{B}), \mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{A}))$$

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathcal{A} \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r, "\Phi(g)"] \arrow[d] & f_*(\mathcal{A}) \arrow[dl] \\
 & X \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι υπάρχει ζεύγος φυσικών μετασχηματισμών:

$$\phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow f_*f^*(\mathcal{B}) \quad \forall\ \mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$$

$$\psi_{\mathcal{A}} : f^*f_*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \quad \forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$$

$$f^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\quad g \quad} \mathcal{A}$$

$$\begin{tikzcd}
f_*f^*(\mathcal{B}) \arrow[r, "f_*(g)"] & f_*(\mathcal{A}) \\
\mathcal{B} \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(g)=f_*(g)\circ\phi_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Έχουμε το αποτέλεσμα ότι οι $\phi_{\mathcal{B}}, \psi_{\mathcal{A}}$ είναι προσαρτημένοι ο ένας στον άλλον με βάση το ακόλουθο θεώρημα από την θεωρία κατηγοριών.

Θεώρημα. *Έστω $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ δύο συναρτητές. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *F είναι αριστερά προσαρτημένος στον G.*

(2) *Υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί:*

$$\phi : I_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$$

$$\psi : FG \longrightarrow I_{\mathcal{D}}$$

που κάνουν μεταθετικά τα τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\phi G"'] & & G & F \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "F\phi"] & & F \\
 & GFG \arrow[ur, "G\psi"'] & & & FGF \arrow[ur, "\psi F"'] &
\end{tikzcd}$$

Ερμηνεία των τριγώνων:

Για κάθε $D \in \mathcal{D}$ το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G(D) \arrow[rr, "id_{G(D)}"] \arrow[dr, "\phi_{G(D)}"'] & & G(D) & & D \\
& GFG(D) \arrow[ur, "G\psi_D"'] & & FG(D) \arrow[ur, "\psi_D"] &
\end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα, για κάθε $C \in \mathcal{C}$ το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "\phi_C"'] & & F(C) \arrow[rr, "id_{F(C)}"] \arrow[dr, "F\phi_C"'] & & F(C) \\
& GF(C) & & FGF(C) \arrow[ur, "\psi_{F(C)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα, στα δράγματα έχουμε ότι f^* αριστερά προσαρτημένος στον f_* αν και μόνο αν υπάρχει ζεύγος φυσικών μετασχηματισμών:

$$\phi : I_{\mathcal{S}h_Y} \longrightarrow f_* f^*$$

$$\psi : f^* f_* \longrightarrow I_{\mathcal{S}h_X}$$

που για κάθε $\mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X$ και για κάθε $\mathcal{B} \in \mathcal{S}h_Y$ κάνουν τα τρίγωνα μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
f_*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "id_{f_*(\mathcal{A})}"] \arrow[dr, "\phi_{f_*(\mathcal{A})}"'] & & f_*(\mathcal{A}) & f^*(\mathcal{B}) \arrow[rr, "id_{f^*(\mathcal{B})}"] \arrow[dr, "f^*(\phi_{\mathcal{B}})"'] & & f^*(\mathcal{B}) \\
& f_* f^* f_*(\mathcal{A}) \arrow[ur, "f_*(\psi_{\mathcal{A}})"'] & & & f^* f_* f^*(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\psi_{f^*(\mathcal{B})}"'] &
\end{tikzcd}$$

Τα οποία ισχύουν, αφού έχουμε δείξει στα προηγούμενα μαθήματα ότι:

$$\left(\phi_{f_*(\mathcal{A})}\right)^{-1} = f_*(\psi_{\mathcal{A}})$$

$$\left(f^*(\phi_{\mathcal{B}})\right)^{-1} = \psi_{f^*(\mathcal{B})}$$

και άρα πράγματι ο f^* είναι αριστερά προσαρτημένος στον f_*.

Άλλο παράδειγμα:

$$\mathcal{S}h_X \underset{\mathbb{S}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$$

Είναι ο Γ αριστερά προσαρτημένος στον $\mathbb{S}$; Αρκεί να δείξουμε μια από τις δύο συνθήκες του θεωρήματος, δηλαδή είτε:

$$1) \quad \forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{S}h_X,\ \forall\ P \equiv (P(U), \rho_V^U) \in \mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$$

υπάρχει φυσικός ισομορφισμός:

$$\Phi_{\mathcal{A}P} : Mor(\Gamma(\mathcal{A}), P) \longrightarrow Mor(\mathcal{A}, \mathbb{S}(P))$$

ή

2) υπάρχει ζεύγος φυσικών μετασχηματισμών:

$$\phi_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{S} \circ \Gamma(\mathcal{A}), \quad \Gamma(\mathcal{A}) \text{ πλήρες}$$

$$\psi_P : \Gamma \circ \mathbb{S}(P) \longrightarrow P$$

που κάνουν μεταθετικά τα αντίστοιχα τρίγωνα. Θα δείξουμε ότι ισχύει η πρώτη. Έστω

$$f \equiv (f_U : \mathcal{A}(U) = \Gamma(U, \mathcal{A}) \longrightarrow P(U))_{U \in \tau_X} \in Mor(\Gamma(\mathcal{A}), P)$$

$$\Phi(f) = \tilde{f} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{S}(P) := \mathcal{P}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & & \mathcal{P} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Έστω $a \in \mathcal{A}$, τότε βρίσκεται σε κάποιο νήμα $a \in \mathcal{A}_x$ για κάποιο $x \in X$. Συνεπώς, ξέρουμε από τα πρώτα μαθήματα ότι υπάρχει περιοχή $U \in \mathcal{N}_x^0$ όπου έχουμε το στοιχείο a σαν εικόνα τομής, δηλαδή $\alpha(x) = a$ για $\alpha \in \mathcal{A}(U)$. Άρα έχουμε $f_U(\alpha) \in P(U)$ (από πληρότητα;).

$$\exists \rho_x^U(f_U(\alpha)) \in \mathcal{P}_x$$

αν το δούμε στο όριο για την δραγματοποίηση. Θέτουμε:

$$\tilde{f}(a) = \rho_x^U(f_U(\alpha))$$

και η $\tilde{f}$ κάνει μεταθετικό το παραπάνω τρίγωνο αφού διατηρεί τα νήματα, είναι όμως συνεχής; Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}(U)$ έχουμε:

$$\tilde{f} \circ \alpha \in \mathcal{P}(U)$$

Έστω $x \in U$, το a βρίσκεται στο νήμα $\mathcal{A}_x$, επιπλέον θέτουμε $f_U(a) = p \in P(U)$ και άρα:

$$(\tilde{f} \circ \alpha)(x) = \tilde{f}(\alpha(x)) = \tilde{f}(a) = \rho_x^U(f_U(a)) = [f_U(a)]_x = [p]_x = \tilde{p}(x)$$

που είναι τομή του $\mathcal{P}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\Phi_{\mathcal{A}P}$ είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1, έστω $f \equiv (f_U), g \equiv (g_U) \in Mor(\Gamma(\mathcal{A}), P)$, με $\Phi(f) = \Phi(g) \iff \tilde{f} = \tilde{g}$. Θέλουμε $f = g \iff f_U = g_U$ για κάθε $U \in \tau_X$. Έστω $U \in \tau_X$, θα δείξουμε ότι:

$$f_U = g_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow P(U)$$

δηλαδή, θα δείξουμε ότι:

$$f_U(\alpha) = g_U(\alpha)$$

για κάθε τομή $\alpha \in \mathcal{A}(U)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\tilde{f} = \tilde{g}$, δηλαδή για κάθε $x \in U$ έχουμε:

$$\tilde{f}(\alpha(x)) = \tilde{g}(\alpha(x)), \quad \alpha(x) = a \in \mathcal{A}_x \implies$$

$$\rho_x^U(f_U(\alpha)) = \rho_x^U(g_U(\alpha)) \implies$$

$$[f_U(\alpha)]_x = [g_U(\alpha)]_x$$
$$f_U(\alpha) \sim_x g_U(\alpha) \iff$$
$$\exists\ U_x \in \mathcal{N}_x^0, \quad U_x \subseteq U :$$
$$\rho^U_{U_x}(f_U(\alpha)) = \rho^U_{U_x}(g_U(\alpha)) \quad \forall\ x \in U$$

δηλαδή έχουμε (U_x) μια ανοιχτή κάλυψη του U και εφόσον το προδράγμα είναι πλήρες από υπόθεση, από την ιδιότητα του μονοπροδράγματος παίρνουμε:

$$f_U(\alpha) = g_U(\alpha) \implies f_U = g_U$$

και άρα $f \equiv (f_U) = (g_U) \equiv g$.

Για το επί: Έστω $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{S}(P) = \mathcal{P}$ μορφισμός δραγμάτων. Ζητάμε $f \equiv (f_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow P(U))_{U \in \tau_X}$ με

$$\Phi_{\mathcal{A}P}(f) = g$$

δηλαδή, $\tilde{f} = g$.

$$g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P} \text{ μορφισμός δραγμάτων } \implies$$
$$(g_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U))_{U \in \tau_X} \text{ μορρφισμός προδραγμάτων}$$

με $g_U = \Gamma(g)_U(;)$

Υπενθυμίζουμε, για κάθε προδράγμα $(S(U), \rho^U_V)$ υπάρχει μορφισμός προδραγμάτων στις τομές:

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$
$$s \longmapsto \rho_U(s) = \tilde{s}$$

με $\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho^U_x(s)$ για κάθε $x \in U$. Επιπλέον, (ρ_U) είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν το προδράγμα S είναι πλήρες. Εδώ έχουμε P πλήρες και άρα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(U) \arrow[r] \arrow[dr, "\rho_U^{-1} \circ g_U = f_U"'] & \mathcal{P}(U) \arrow[d, "\rho_U^{-1}"] \\
 & P(U)
\end{tikzcd}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{f} = \Phi_{\mathcal{A}P}(f) = g$. $\tilde{f}(x) = \alpha(x)$ για τομή $\alpha \in \mathcal{A}(U)$. Εξ ορισμού έχουμε:

$$\tilde{f}(\alpha) = \rho^U_x(f_U(\alpha)) = \rho^U_x(\rho_U^{-1} \circ g_U(\alpha)) = \rho^U_x \circ \rho_U^{-1}(g \circ \alpha)$$

όπου θέτουμε $g \circ \alpha := \tilde{p}$ τομή του $\mathcal{P}$ αφού σύνθεση μορφισμού με τομή μας δίνει τομή του δεύτερου δράγματος. Λόγω πληρότητας:

$$\tilde{p} = \rho_U(\mathfrak{p})$$

με $\mathfrak{p} \in P(U)$ και άρα

$$\rho^U_x \circ \rho_U^{-1}(g \circ \alpha) = \rho^U_x \circ \rho_U^{-1}(\tilde{p}) = \rho^U_x(\mathfrak{p}) = \tilde{p}(x) = g \circ \alpha(x) = g(\alpha)$$

Μάθημα 20 - Τρίτη 24/05/2022.

Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δράγματα $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μορφισμός δραγμάτων διανυσματικών χώρων, δηλαδή είναι μορφισμός δραγμάτων και για κάθε $x \in X$:

$$f_x : \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \quad \mathbb{R} - \text{γραμμική}$$

$$\mathcal{K} = \ker f := \bigsqcup_{x \in X} \ker f \subseteq \mathcal{E}$$

Αν $\pi, \mathfrak{p}$ είναι οι προβολές στον X των $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ αντίστοιχα, τότε δίνουμε στο $\mathcal{K}$ την σχετική τοπολογία και έχουμε προβολή:

$$\pi|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow X$$

ισχύει ότι $\pi|_{\mathcal{K}}$ είναι τοπικός ομοιμορφισμός; Αν ναι έχουμε φτιάξει νέο δράγμα.

Αν αντίστοιχα στα προδράγματα έχουμε $E \equiv (E(U), \rho_V^U), F \equiv (F(U), \lambda_V^U)$ προδράγματα $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων και

$$f \equiv (f_U : E(U) \longrightarrow F(U))_{U \in \tau_X}$$

ένας μορφισμός προδραγμάτων, τότε για κάθε $U \in \tau_X$ υπάρχει ο αντίστοιχος πυρήνας που είναι διανσυματικός υπόχωρος:

$$\ker f_U \leq E(U)$$

και η ερώτηση εδώ είναι περιορίζοντας τον συνήθη περιορισμό $\rho_V^U|_{\ker f_U}$ μπορούμε να φτιάξουμε προδράγμα; Ισχύει δηλαδή ότι $\rho_V^U(\ker f_U) \subseteq \ker f_V$ για κάθε $V \subseteq U$; Θέτουμε $\rho_V^U := \rho_V^U|_{\ker f_U}$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f_U \arrow[r, hook, "i_U"] \arrow[d, "r_V^U"'] & E(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & F(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\
\ker f_V \arrow[r, hook, "i_V"] & E(V) \arrow[r, "f_V"'] & F(V)
\end{tikzcd}$$

Έστω $u \in \ker f_U$, ισχύει ότι $\rho_V^U(u) \in \ker f_V$; Αυτό είναι ισοδύναμο με $f_V(\rho_V^U(u)) = 0$ και από μεταθετικότητα του διαγράμματος ισοδύναμα $\lambda_V^U(f_U(u)) = 0$ το οποίο προφανώς ισχύει αφού $u \in \ker f_U$.

<u>Συμπεράσματα</u>:

$$(\ker f_U, r_V^U) \qquad \text{προδράγμα δ.χ.}$$

και

$$(i_U : \ker f_U \longrightarrow E(U))_{U \in \tau_X}$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων διανυσματικών χώρων.

Με τις ίδιες υποθέσεις στα προδράγματα, μπορούμε να κάνουμε το αντίστοιχο στις εικόνες, δηλαδή για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε:

$$f(E(U)) \leq F(U)$$

γραμμικός υπόχωρος. Θέτουμε $\ell_V^U := \lambda_V^U|_{f_U(E(U))}$ και έχουμε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
E(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & f_U(E(U)) \subseteq F(U) \arrow[d, "\ell_V^U"'] \arrow[d, shift left=8ex, "\lambda_V^U"] \\
E(V) \arrow[r, "f_V"] & f_V(E(V)) \subseteq F(V)
\end{tikzcd}$$

Είναι $\ell_V^U(f_U(E(U))) \subseteq f_V(E(V))$. Έστω $w \in f_U(E(U))$ τότε υπάρχει $u \in E(U)$ με $f_U(u) = w$. Είναι $\ell_V^U(w) = \lambda_V^U(w) \in f_V(E(V))$ και από μεταθετικότητα διαγράμματος:

$$\lambda_V^U(w) = \lambda_V^U(f_U(u)) = f_V(\rho_V^U(u)) \in f_V(E(V))$$

Άρα αντίστοιχα έχουμε προδράγμα διανυσματικών χώρων

$$(f_U(E(U)), \ell_V^U)$$

και μορφισμό προδραγμάτων διανυσματικών χώρων

$$(i_U : f_U(E(U)) \longrightarrow F(U))_{U \in \tau_X}$$

Γυρνώντας στα δράγματα, το $\pi|_{\mathcal{K}}$ είναι τοπικός ομοιομορφισμός αν και μόνο αν για κάθε $u \in \mathcal{K}$ υπάρχει V ανοιχτό στο $\mathcal{E}$ και U ανοιχτό στο X με $\pi(u) = x \in U$ έτσι ώστε η απεικόνιση:

$$\pi|_{V \cap \mathcal{K}} : V \cap \mathcal{K} \longrightarrow U$$

να είναι ομοιομορφισμός. Ισοδύναμα να υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ με $s(x) = u$ και $s(U) \subseteq \mathcal{K}$.

Γνωστό: Αν $u \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ τότε υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x^0,\ x = \pi(u), s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ με $s(x) = u$.

Γνωστό: $f \circ s : U \longrightarrow \mathcal{F}$ (συνεχής) τομή του $\mathcal{F}$ αφού οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Δηλαδή, $f \circ s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ και

$$(f \circ s)(x) = f(U) = 0_x \in \mathcal{F}_x$$

Θέλουμε $f \circ s(y) = 0_y$ για κάθε $y \in U$ για να είναι $s \in \Gamma(U, \mathcal{K})$. Θέτουμε:

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$\omega(x) = 0_x \in \mathcal{F}_x$$

είναι τομή; είναι συνεχής;

Έστω τυχαία $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, οι πράξεις στον διανυσματικό χώρο είναι συνεχείς και άρα:

$$-\sigma = (-1) \cdot \sigma$$

συνεχής τομή. Συνεπώς:

$$\sigma + (-\sigma) = \omega$$

συνεχής τομή. Έχουμε δηλαδή δύο τομές που ταυτίζονται σε ένα σημείο, άρα και σε μια περιοχή:

$$f \circ s(x) = \omega(x) \implies$$
$$\exists\ V \in \mathcal{N}_x^0, V \subseteq U \quad f \circ s|_V = \omega|_V \implies$$

$$f(s(y)) = 0_y \quad \forall\ y \in V \implies s|_V(V) \subseteq \mathcal{K}$$

και άρα έχουμε το δράγμα διανυσματικών χώρων:

$$(\mathcal{K}, \pi|_{\mathcal{K}}, X)$$

και τον μορφισμό δραγμάτων διανυσματικών χώρων:

$$i : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Όμοια στις εικόνες, αν έχουμε μορφισμό δραγμάτων διανσυματικών χώρων $f : (\mathcal{E}, \pi, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathfrak{p}, X)$ και δώσουμε την σχετική τοπολογία στο $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$ είναι τότε ο $\mathfrak{p}|_{f(\mathcal{E})}$ τοπικός ομοιομορφισμός;

Έστω $w \in f(\mathcal{E}) \implies \exists\ u \in \mathcal{E}_x$ με $f_x(u) = w$. Υπάρχει περιοχή $U \in \mathcal{N}_x^0$ και τομή $s \in \Gamma(U, \mathcal{E}) : s(x) = u$. Άρα έχουμε:

$$f(s(x)) = w$$

και

$$f \circ s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$$

με $f \circ s(U) \subseteq f(\mathcal{E})$.

Στους διανυσματικούς χώρους κάθε γραμμική $f : E \longrightarrow F$ επάγει μια σύντομη (ή βραχεία) ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ f\ } f(E) \longrightarrow 0$$

και μια λιγότερο σύντομη:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ f\ } F \longrightarrow F/f(E) \longrightarrow 0$$

Ερωτήματα:

(1) Ένας μορφισμός προδραγμάτων διανυσματικών χώρων $(f_U : E(U) \longrightarrow F(U))_{U \in \tau_X}$ ορίζει την σύντομη ακριβή ακολουθία;

(2) Όμοια ορίζει την αντίστοιχη λιγότερο σύντομη;

(3) Ένας μορφισμός δραγμάτων $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ ορίζει την σύντομη ακριβή ακολουθία;

(4) Όμοια ορίζει την αντίστοιχη λιγότερο σύντομη; (πρέπει να οριστεί έννοια του πηλίκου ως $\bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x / f_x(\mathcal{E}_x)$ και ποια τοπολογία το κάνει δράγμα;)

(5) Αν έχουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία δραγμάτων και εφαρμόσουμε τον συναρτητή τομή Γ παίρνουμε σύντομη ακριβή ακολουθία στα προδράγματα;

(6) Ανάποδα, αν έχουμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία προδραγμάτων και εφαρμόσουμε τον συναρτητή δραγματοποίησης $\mathbb{S}$ παίρνουμε σύντομη ακριβή ακολουθία στα δράγματα;

Καλό Καλοκαίρι!