Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. *Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, όπου*

(1) *$\mathcal{C}$ κλάση από <u>αντικείμενα</u>.*

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ από <u>μορφισμούς</u> από το A στο B και*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A,B\in\mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(3) *Για κάθε A, B, C αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:*

$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται <u>σύνθεση</u>, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

(1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \varnothing$.

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ και για κάθε $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ μπορούμε:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

(3) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:*

$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \to A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \to C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(1) $\mathcal{S}$ = κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.

(2) $\mathcal{T}$ = κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).

(3) $\mathcal{G}$ = ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(4) $\mathcal{A}b$ = αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(5) $\mathcal{S}_0$ = κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:

$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

(6) $\mathcal{T}_0$ = σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.

(7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ = διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.

(8) $\mathcal{R}$ = δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

(9) $\mathcal{R}_1$ = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.

(10) $\mathcal{M}_R^L$ = αριστερά R-πρότυπα με R-γραμμικές απεικονίσεις.

(11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.

(12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X,R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:

$$(X,R) \longrightarrow (Y,S)$$

είναι απεικόνιση:

$$f : X \to Y$$

με

$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

(13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι $(X,\leq)$ όπου X σύνολο και $\leq$ σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:

$$(X,\leq_1) \longrightarrow (Y,\leq_2)$$

με απεικόνιση:

$$f : X \to Y$$

όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. *Μια κατηγορία $(\mathcal{C},\mathcal{M},\circ)$ λέγεται μικρή αν $\mathcal{C}$ είναι σύνολο.*

Παραδείγματα:

(14) $(G,*)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G, \circ = *$)

(15) $(X,\leq)$ διατεταγμένο σύνολο με:

$$\left(\mathcal{C} = X, \quad M = \bigcup_{x,y\in X} Mor(x,y), \quad \circ\right)$$

όπου:

$$Mor(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και η σύνθεση του $\{(x,y)\}$ με το $\{(y,z)\}$ δίνει το $\{(x,z)\}$, ενώ η σύνθεση με $\varnothing$ δίνει $\varnothing$.

(16) Ομοίως για (X,R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. *$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C},\mathcal{M},\circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0,\mathcal{M}_0,*)$ κατηγορίες, θα λέμε $\mathcal{C}_0$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C} \iff \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A,B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:*

$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A,B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$$

και $*$ είναι ο περιορισμός της $\circ$.

Αν για κάθε $A,B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

π.χ.

(1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{R}_1$ υποκατηγορία της $\mathcal{R}$, όχι πλήρης.

Ορισμός. *$\mathcal{C},\mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας (συναλλοίωτος) <u>συναρτητής</u> $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος (F_1,F_2) :*

$$F_1:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$$

$$F_2:\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\longrightarrow\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) *Για κάθε $A,B\in\mathcal{C}$ και $f\in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$:*

$$F_2(f)\in Mor_{\mathcal{D}}(F_1(A),F_1(B))$$

(2) *Για κάθε $A\in\mathcal{C}$:*

$$F_2(1_A)=1_{F_1(A)}$$

(3) *Για κάθε $A,B,C\in\mathcal{C}$ και $f:A\to B,\quad g:B\to C$ ισχύει ότι:*

$$F_2(g\circ f)=F_2(g)\circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{V}_F$ με

$$S\longrightarrow\langle S\rangle=\text{ διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f:S\to T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F:\mathcal{T}\to\mathcal{S}$$

$$F:\mathcal{G}\to\mathcal{S}$$

$$F:\mathcal{T}g\to\mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) $\mathcal{C}$ έχει αντικείμενα τα $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n\in\mathbb{N}$, σημειωμένα (U,x) με $x\in U$ και μορφισμοί

$$f:(U,x)\to(V,y)$$

διαφορίσιμη με $f(x)=y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D}=\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U,x)=\mathbb{R}^m,\quad U\subseteq\mathbb{R}^m$$

$$f:(U,x)\longrightarrow(Y,y)$$

$$F_2(f)=Df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. *Ένα δράγμα (πάνω από τον X) είναι μια τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$ όπου $\mathcal{S}, X$ είναι τοπολογικοί χώροι και*

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιμορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως βάση, στο π ως προβολή και στο $\mathcal{S}$ ως ολικό χώρο.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies$ $\pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \to \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X, όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X, άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X. □

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το*

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \to \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

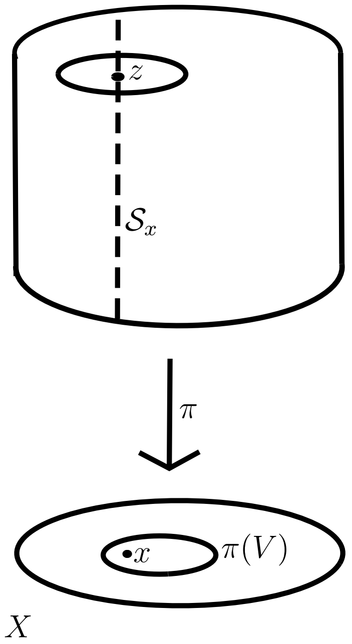
είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο $\mathcal{B}$ αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. □

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x.*

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \varnothing$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα $\mathcal{S}_x$ σαν τοπολογικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ είναι διακριτός.*



Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap \mathcal{S}_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \to \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U, αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. □

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).*

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(\mathcal{S}, \pi, X) \to (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned} \rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\ &\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\ &\iff f(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δραγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δραγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το $(\mathcal{S}, f, \mathcal{T})$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε $f(z) \in \mathcal{T}$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{N}_z, W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \longrightarrow \rho(W) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V) \subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho \circ f = \pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \supseteq V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi|_V"'] & & f(V) \arrow[dl, "p"'] & & \subseteq W \arrow[dl, "p|_W"] \\
& \pi(V) \arrow[ur, dashed, bend right] & & \subseteq p(W) &
\end{tikzcd}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V = \left(\rho|_{f(V)}\right)^{-1} \circ \pi|_V$, είναι ομοιμορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. $\square$

Θα ορίσουμε την κατηγορία $\mathcal{S}h_X$ των δραγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δραγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. *Η σύνθεση στην $\mathcal{S}h_X$ είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Έχουμε $g \circ f : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = \pi$. Πράγματι $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = (\rho \circ g) \circ f = \rho \circ f = \pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ είναι μορφισμός δραγμάτων και $id_{\mathcal{S}} \circ f = f, g \circ id_{\mathcal{S}} = g$ κλπ.

Ορισμός. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ένας μορφισμός $f : A \to B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g : B \to A$ έτσι ώστε:*

$$f \circ g = 1_B$$

$$g \circ f = 1_A$$

Πρόταση. *Έστω ο μορφισμός στην $\mathcal{S}h_X$:*

$$f : (\mathcal{S}, \pi, X) \longrightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *f ισομορφισμός.*

(2) *f ισομορφισμός στα νήματα.*

(3) *f 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δραγμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) $\implies$ (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. $\square$

Παραδείγματα:

(1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:

$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$

που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με

$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$

ομοιομορφισμό.

(2) Έλικα $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : \quad t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

(3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια τομή του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \to \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.*

Ισοδύναμα: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Μάθημα 3 - Τρίτη 01/03/2022.

Παρατήρηση. *Έστω $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και $s : U \to \mathcal{S}$ τυχαία (όχι κατ ανάγκη συνεχής) με $\pi \circ s = id_U$. Έπεται ότι η $s : U \to s(U)$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, υπάρχει $s^{-1} : s(U) \to U$ και από την σχέση $\pi \circ s = id_U$ παίρνουμε $\pi|_{s(U)} = s^{-1}$ από την μοναδικότητα αριστερής και δεξιάς αντίστροφης. Ισοδύναμα $s = \left(\pi|_{s(U)}\right)$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο συνολοθεωρητικά επιχειρήματα και δεν έχουμε απαιτήσει ανοιχτά σύνολα και συνέχεια.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] & \supseteq & s(U) \arrow[d, "\pi|_{s(U)}"'] \\
X & \supseteq & U \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

$$\pi \circ s = id_U \qquad \Longrightarrow \qquad \pi|_{s(U)} \circ s = id_U$$

Παρακάτω θα θεωρούμε (συνεχείς) τομές σε <u>ανοιχτά</u> $U \subseteq X$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ για το σύνολο

$$\{s : U \longrightarrow \mathcal{S} | \quad s \text{ τομή } \}$$

Παρατήρηση. *Έστω $z \in A \subseteq \mathcal{S}$, το A να είναι ανοιχτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό με $V \subseteq A$ (Υπενθύμιση: τα V του ορισμού του δράγματος είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$).*

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ τομή. Τότε $s(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $s : U \to s(U)$ ομοιομορφισμός.*

Ουσιαστικά με αυτό το λήμμα έχουμε ότι οι τομές s είναι τοπικές αντίστροφες της π πάνω στα $s(U)$.

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $s(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$.

Έστω $z = s(x) \in s(U), x \in U$. Υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V$ έτσι ώστε το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η s είναι συνεχής στο x και $V \in \mathcal{N}_{s(x)}$, V ανοιχτό. Λόγω συνέχειας παίρνουμε ότι το A είναι ανοιχτή περιοχή του x με $A \subseteq U$ και $s(A) \subseteq V$. Εφαρμόζοντας την π παίρνουμε:

$$\pi(s(A)) = A \subseteq \pi(V)$$

και $\pi(V)$ ανοιχτό. Άρα $s(A) \subseteq V$, δηλαδή το $s(A)$ είναι ανοιχτό μέσα στο ανοιχτό V και άρα είναι και σε όλο το $\mathcal{S}$.

$s(A) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A \subseteq U \implies z = s(x) \in s(A) \subseteq s(U)$, άρα $s(U)$ ανοιχτό.

(2) $V \supseteq s(A)$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "\pi_V"'] & \supseteq & s(A) \arrow[d, "\pi|_{S(A)}=\text{ομοιομ.}=s^{-1}|_{s(A)}"] \\
\pi(V) & \supseteq & A \subseteq U
\end{tikzcd}$$

και έχουμε s 1-1, επί, συνεχής, και τοπικός ομοιομορφισμός, άρα η s είναι ομοιομορφισμός.

$\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $z\in\mathcal{S}$. Τότε υπάρχει $U\subseteq X$ ανοιχτό και $s\in\mathcal{S}(U)$ με $z\in s(U)$.*

Απόδειξη. $z\in\mathcal{S} \implies$ υπάρχει $V\subseteq\mathcal{S}$ ανοιχτό με $z\in V,\pi(V)$ ανοιχτό, $\pi|_V:V\to\pi(V)$ ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει:

$$s:=(\pi|_V)^{-1}:\pi(V)\longrightarrow V$$

συνεχής, με $\pi(V)\subseteq U$ και $\pi\circ s=id_U$. Άρα για $x=\pi(z)$ ισχύει $s(x)=s(\pi(z))=z$. $\square$

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε το σύνολο:*

$$\{s(U):\quad U \text{ ανοιχτό } \subseteq X, s\in\mathcal{S}(U)\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό:

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $A,B\subseteq X$ ανοιχτά με $x\in A\cap B\neq\varnothing$ και $s\in\mathcal{S}(A),\sigma\in\mathcal{S}(B)$ με $s(x)=\sigma(x)$. Τότε υπάρχει $U\subseteq A\cap B$ ανοιχτό με $x\in U$ και $s|_U=\sigma|_U$.*

Αν σκεφτεί κανείς ότι ο Leray που ασχολήθηκε με τα δράγματα με σκοπό την μελέτη διαφορικών εξισώσεων, αυτό το λήμμα είναι η κατάλληλη περίπτωση για αυτό που ήθελε μιας και αν οι αρχικές συνθήκες δύο λύσεων ταυτίζονται τότε ταυτίζονται και ολόκληρες οι λύσεις σε μια ανοιχτή περιοχή.

Απόδειξη. $z=s(x)=\sigma(x)\in\mathcal{S}$. Από ορισμό δράγματος υπάρχει V ανοιχτό $\subseteq X:\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V:\to\pi(V)$ ομοιομορφισμός.

$$s(x)=z\in s(A)\subseteq\mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$
$$\sigma(x)=z\in\sigma(B)\subseteq\mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

Θεωρούμε στην θέση του V το $V=V\cap\sigma(B)\cap s(A)$, μικραίνουμε το ανοιχτό δηλαδή να είναι μέσα στα άλλα δύο και άρα έχουμε:

$$\pi|_{s(A)}=s^{-1}:s(A)\longrightarrow A$$
$$\pi|_{\sigma(B)}=\sigma^{-1}:\sigma(B)\longrightarrow B$$

$$\pi|_V=s^{-1}|_V=\sigma^{-1}|_V \text{ μαζί με } \sigma|_U=s|_U \implies$$
$$s=\sigma|_{\pi(V)=U}$$

$\square$

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξαντλήσει όσα προκύπτουν με τον ορισμό, έχουμε μόνο τον τοπικό ομοιομορφισμό για να δουλέψουμε, μένει να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι μορφισμοί δραγμάτων στις τομές:

Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{S},\pi,X),(\mathcal{T},\rho,X)$ δράγματα και $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *f μορφισμός δραγμάτων.*

(2) *Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, για κάθε $s \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.*

(3) *Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ και τομή $s \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε $z \in s(U)$ και $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, shift right, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\rho"] \\ & X \arrow[ul, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Απόδειξη.
(1) $\implies$ (2) f συνεχής και f μορφισμός, άρα $\rho \circ f = \pi$. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $s \in \mathcal{S}(U)$. Τότε $f \circ s : U \to \mathcal{T}$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Επιπλέον:

$$\rho \circ (f \circ s) = (\rho \circ f) \circ s = \pi \circ s = id_U$$

άρα $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(2) $\implies$ (3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει U με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z$ και από προηγούμενο λήμμα έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) $\implies$ (1) Θα δείξουμε ότι $\rho \circ f = \pi$. Έστω $z \in \mathcal{S}$. Από (3) έχουμε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z \in s(U)$. Έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U) \implies \rho \circ (f \circ s) = id_U$. Δηλαδή, $\rho \circ f \circ s(x) = \rho \circ f(z)$ αλλά και $\rho \circ f \circ s(x) = id(x) = x = \pi(z)$. Άρα $\rho \circ f = \pi$ αφού το z τυχαίο, δηλαδή πράγματι f μορφισμός δραγμάτων.

□

Άρα σαν μνημονικό κανόνα έχουμε ότι οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Θα δούμε στην συνέχεια την αλγεβρική εικόνα των δραγμάτων, κάτι που αρχικά μοιάζει με τελείως διαφορετικό αντικείμενο.

Έστω X τοπολογικός χώρος, τ_X η τοπολογία του X. Ένα προδράγμα συνόλων πάνω από το X είναι ένα ζεύγος:

$$\left(\{P(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U\}_{V \subseteq U \in \tau_X}\right)$$

όπου $\{P(U)\}_{U \in \tau_X}$ οικογένεια συνόλων, με σύνολο δεικτών την τ_X και

$$\rho_V^U : P(U) \longrightarrow P(V)$$

απεικονίσεις: (περιορισμού)

(1) $\rho_U^U = id_{P(U)} : P(U) \to P(U) \quad \forall U \in \tau_X$.

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ στην τ_X, τότε ισχύει:

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$$

ή αλλιώς το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "P_V^U"] \arrow[dr, "P_W^V"'] & P(V) \arrow[d, "P_W^V"] \\ & P(W) \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα:

(1) (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε U ανοιχτό συμβολίζουμε:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{συνεχής } \}$$

και για κάθε $V \subseteq U$ με $V, U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$\rho^U_V : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$$

$$f \longmapsto f|_V$$

Τότε το ζεύγος των οικογενειών $(\{\mathcal{C}(U)\}, \{\rho^U_V\})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το X (:= το προδράγμα των συνεχών). Αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες:

$(1) \rho^U_U(f) = f|_U = f$ όπου $f : U \to \mathbb{R}$
(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ και $f : U \to \mathbb{R} \implies f|_W = (f|_V)|_W$

(2) $P(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{σταθερές } \}$ (οι συνήθεις περιορισμοί θα εννοούνται σε τέτοια παραδείγματα)

(3) $B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \text{φραγμένες } \}$

(4) $(M = \text{ πολλαπλότητα}, \tau_M)$ και

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad \mathcal{C}^\infty\text{-διαφ}\}$$

(5) $X = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | \quad \text{ολόμορφη } \}$$

(6) $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το ζεύγος:

$$\left(\{\mathcal{S}(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho^U_V = \text{ συνήθεις περιορισμοί } \}_{V \subseteq U \in \tau_X}\right)$$

ονομάζεται το προδράγμα των τομών του δράγματος.

Ορισμός. *(X, τ_X) τοπολογικός χώρος και*

$$S \equiv (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}, \quad T \equiv (T(U), \lambda^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$$

προδράγματα πάνω από το X. Ένας μορφισμός προδραγμάτων $f : S \to T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$f_U : S(U) \longrightarrow T(U), \quad U \in \tau_X$$

έτσι ώστε για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ να είναι μεταθετικό το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda^U_V"] \\ S(V) \arrow[r, "f_V"] & T(V) \end{tikzcd}$$

Για κάθε προδράγμα $(P(U), \rho^U_V) \equiv P$ η οικογένεια $1 = \{1_U\} : P \to P$ με

$$1_U = id_U : P(U) \to P(U)$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια σύνθεση μορφισμών προδραγμάτων ώστε να φτιάξουμε μια νέα κατηγορία. Αν $f : S \to T$ και $g : T \to P$ μορφισμοί προδραγμάτων, όπου $f \equiv \{f_U\}_{U \in \tau_X}$ και $g \equiv \{g_U\}_{U \in \tau_X}$ τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$g \circ f \equiv \{(g \circ f) := g_U \circ f_U\}_{U \in \tau_X}$$

και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[rr, bend left, "g_U \circ f_U"] & T(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d, "\lambda_V^U"'] & P(U) \arrow[d, "\mu_V^U"] \\
S(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[rr, bend right, "g_V \circ f_V"'] & T(V) \arrow[r, "g_V"] & P(V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mu_V^U \circ (g_U \circ f_U) &= (g_V \circ f_V) \circ \rho_V^U \\
\mu_V^U \circ (g_V \circ f_V) &= (g_V \circ \lambda_V^U) \circ f_U \\
&= g_V \circ f_V \circ \rho_V^U
\end{aligned}$$

άρα πράγματι $g \circ f$ είναι μορφισμός προδραγμάτων $S \to P$.

Συνεπώς τα προδράγματα και μορφισμοί προδραγμάτων από μόνα τους αποτελούν μια κατηγορία $\mathcal{PS}h_X$.