

Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, όπου

- (1) \mathcal{C} κλάση από αντικείμενα.
- (2) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ από μορφισμούς από το A στο B και

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A, B \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

- (3) Για κάθε A, B, C αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:

$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται σύνθεση, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

- (1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \emptyset$.
- (2) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ και για κάθε $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ μπορούμε:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

- (3) Για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:

$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \rightarrow A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \rightarrow C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

Παραδείγματα:

- (1) \mathcal{S} = κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.
- (2) \mathcal{T} = κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).
- (3) \mathcal{G} = ομάδες με μορφισμούς ομάδων.
- (4) $\mathcal{A}b$ = αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.
- (5) \mathcal{S}_0 = κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:

$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

- (6) \mathcal{T}_0 = σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.
- (7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ = διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.
- (8) \mathcal{R} = δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

- (9) \mathcal{R}_1 = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.
- (10) \mathcal{M}_R^L = αριστερά R -πρότυπα με R -γραμμικές απεικονίσεις.
- (11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.
- (12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X, R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:

$$(X, R) \longrightarrow (Y, S)$$

είναι απεικόνιση:

$$f : X \rightarrow Y$$

με

$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

- (13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι (X, \leq) όπου X σύνολο και \leq σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:

$$(X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$$

με απεικόνιση:

$$f : X \rightarrow Y$$

όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή αν \mathcal{C} είναι σύνολο.

Παραδείγματα:

- (14) $(G, *)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G$, $\circ = *$)

- (15) (X, \leq) διατεταγμένο σύνολο με:

$$\left(\mathcal{C} = X, \quad \mathcal{M} = \bigcup_{x, y \in X} Mor(x, y), \quad \circ \right)$$

όπου:

$$Mor(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \emptyset, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και η σύνθεση του $\{(x, y)\}$ με το $\{(y, z)\}$ δίνει το $\{(x, z)\}$, ενώ η σύνθεση με \emptyset δίνει \emptyset .

- (16) Ομοίως για (X, R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_0, *)$ κατηγορίες, θα λέμε \mathcal{C}_0 είναι υποκατηγορία της \mathcal{C} $\iff \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:

$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

και $*$ είναι ο περιορισμός της \circ .

Αν για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} .

π.χ.

- (1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{G} .

(2) \mathcal{R}_1 υποκατηγορία της \mathcal{R} , όχι πλήρης.

Ορισμός. \mathcal{C}, \mathcal{D} κατηγορίες. Ένας (συναλλοιώτος) συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) :

$$F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F_2 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$:

$$F_2(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$$

(2) Για κάθε $A \in \mathcal{C}$:

$$F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$$

(3) Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{C}$ και $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ισχύει ότι:

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$ με

$$S \longrightarrow \langle S \rangle = \text{διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f : S \rightarrow T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) \mathcal{C} έχει αντικείμενα τα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n \in \mathbb{N}$, σημειωμένα (U, x) με $x \in U$ και μορφισμοί

$$f : (U, x) \rightarrow (V, y)$$

διαφορίσιμη με $f(x) = y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U, x) = \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f : (U, x) \longrightarrow (Y, y)$$

$$F_2(f) = Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. Ένα δράγμα (πάνω από τον X) είναι μια τριάδα (\mathcal{S}, π, X) όπου \mathcal{S}, X είναι τοπολογικοί χώροι και

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως βάση, στο π ως προβολή και στο \mathcal{S} ως ολικό χώρο.

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies \pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X , καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \rightarrow \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X , όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X , άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X . \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \rightarrow \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

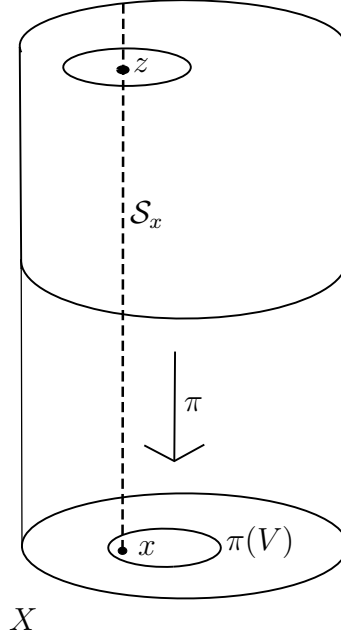
είναι βάση της τοπολογίας του \mathcal{S} .

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο \mathcal{B} αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. \square

Ορισμός. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x .

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \emptyset$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα \mathcal{S}_x σαν τοπολογικός υπόχωρος του \mathcal{S} είναι διακριτός.



Απόδειξη. Έστω $z \in S_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S_x . Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap S_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S_x . Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U , αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του S_x . \square

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. Έστω (S, π, X) δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq S$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).

Ορισμός. Έστω $(S, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(S, \pi, X) \rightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : S \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} \\ \pi \searrow & & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned} \rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in S \\ &\iff \forall z \in S_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\ &\iff \forall z \in S_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\ &\iff f(S_x) \subseteq \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δαγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δαγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ μορφισμός δαγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το $(\mathcal{S}, f, \mathcal{T})$ είναι δράγμα.

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε $f(z) \in \mathcal{T}$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{N}_z, W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \rightarrow \pi(V) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \rightarrow \rho(W) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V) \subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho \circ f = \pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} \supseteq V & \xrightarrow{f} & f(V) & & \subseteq W \\ & \searrow \pi|_V & \swarrow p & & \swarrow \rho|_W \\ & \pi(V) & \xrightarrow{\quad} & p(W) & \\ & & \text{---} & \subseteq & \end{array}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V = (\rho|_{f(V)})^{-1} \circ \pi|_V$, είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. \square

Θα ορίσουμε την κατηγορία Sh_X των δαγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X . Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δαγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. Η σύνθεση στην Sh_X είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} & \xrightarrow{g} & \mathcal{P} \\ & \searrow \pi & \downarrow p & \swarrow p & \\ & & X & & \end{array}$$

Έχουμε $g \circ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $p \circ (g \circ f) = \pi$. Πράγματι $p \circ (g \circ f) = (\rho \circ g) \circ f = \rho \circ f = \pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ είναι μορφισμός δαγμάτων και $id_{\mathcal{S}} \circ f = f, g \circ id_{\mathcal{S}} = g$ κλπ.

Ορισμός. Σε μια κατηγορία \mathcal{C} ένας μορφισμός $f : A \rightarrow B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g : B \rightarrow A$ έτσι ώστε:

$$f \circ g = 1_B$$

$$g \circ f = 1_A$$

Πρόταση. Έστω ο μορφισμός στην Sh_X :

$$f : (\mathcal{S}, \pi, X) \rightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) f ισομορφισμός.
- (2) f ισομορφισμός στα νήματα.

(3) f 1-1 και επί.

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δρασμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) \implies (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. \square

Παραδείγματα:

- (1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:

$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$

που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με

$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$

ομοιομορφισμό.

- (2) Έλικοι $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

- (3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια τομή του \mathcal{S} πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \rightarrow \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.

Ισοδύναμο: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{S} \\ & \nearrow s & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Μάθημα 3 - Τρίτη 01/03/2022.

Παρατήρηση. Έστω $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και $s : U \rightarrow \mathcal{S}$ τυχαία (όχι κατ'ανάγκη συνεχής) με $\pi \circ s = id_U$. Έπεται ότι η $s : U \rightarrow s(U)$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, υπάρχει $s^{-1} : s(U) \rightarrow U$ και από την σχέση $\pi \circ s = id_U$ παίρνουμε $\pi|_{s(U)} = s^{-1}$ από την μοναδικότητα αριστερής και δεξιάς αντίστροφης. Ισοδύναμα $s = (\pi|_{s(U)})$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο συνολοθεωρητικά επιχειρήματα και δεν έχουμε απαιτήσει ανοιχτά σύνολα και συνέχεια.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \supseteq & s(U) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{s(U)} \nearrow s \\ X & \supseteq & U \end{array}$$

$$\pi \circ s = id_U \implies \pi|_{s(U)} \circ s = id_U$$

Παρακάτω θα θεωρούμε (συνεχείς) τομές σε ανοιχτά $U \subseteq X$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ για το σύνολο

$$\{s : U \longrightarrow \mathcal{S} \mid s \text{ τομή} \}$$

Παρατήρηση. Έστω $z \in A \subseteq \mathcal{S}$, το A να είναι ανοιχτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοιχτό με $z \in V, \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμό με $V \subseteq A$ (Υπενθύμιση: τα V του ορισμού του δράγματος είναι βάση της τοπολογίας του \mathcal{S}).

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) , $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ τομή. Τότε $s(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $s : U \rightarrow s(U)$ ομοιομορφισμός.

Ουσιαστικά με αυτό το λήμμα έχουμε ότι οι τομές s είναι τοπικές αντίστροφες της π πάνω στα $s(U)$.

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $s(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} .

Έστω $z = s(x) \in s(U), x \in U$. Υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} με $z \in V$ έτσι ώστε το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η s είναι συνεχής στο x και $V \in \mathcal{N}_{s(x)}, V$ ανοιχτό. Λόγω συνέχειας παίρνουμε ότι το A είναι ανοιχτή περιοχή του x με $A \subseteq U$ και $s(A) \subseteq V$. Εφαρμόζοντας την π παίρνουμε:

$$\pi(s(A)) = A \subseteq \pi(V)$$

και $\pi(V)$ ανοιχτό. Άρα $s(A) \subseteq V$, δηλαδή το $s(A)$ είναι ανοιχτό μέσα στο ανοιχτό V και άρα είναι και σε όλο το \mathcal{S} .

$s(A) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A \subseteq U \implies z = s(x) \in s(A) \subseteq s(U)$, άρα $s(U)$ ανοιχτό.

(2) $V \supseteq s(A)$

$$\begin{array}{ccc} V & \supseteq & s(A) \\ \downarrow \pi_V & & \downarrow \pi|_{s(A)} = s^{-1}|_{s(A)} \\ \pi(V) & \supseteq & A \subseteq U \end{array}$$

και έχουμε s 1-1, επί, συνεχής, και τοπικός ομοιομορφισμός, άρα η s είναι ομοιομορφισμός. \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, $z \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $z \in s(U)$.

Απόδειξη. $z \in \mathcal{S} \implies$ υπάρχει $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $z \in V$, $\pi(V)$ ανοιχτό, $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει:

$$s := (\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \longrightarrow V$$

συνεχής, με $\pi(V) \subseteq U$ και $\pi \circ s = id_U$. Άρα για $x = \pi(z)$ ισχύει $s(x) = s(\pi(z)) = z$. \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το σύνολο:

$$\{s(U) : U \text{ ανοιχτό } \subseteq X, s \in \mathcal{S}(U)\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας του \mathcal{S} .

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό:

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, $A, B \subseteq X$ ανοιχτά με $x \in A \cap B \neq \emptyset$ και $s \in \mathcal{S}(A), \sigma \in \mathcal{S}(B)$ με $s(x) = \sigma(x)$. Τότε υπάρχει $U \subseteq A \cap B$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s|_U = \sigma|_U$.

Αν σκεφτεί κανείς ότι ο Leray που ασχολήθηκε με τα δράγματα με σκοπό την μελέτη διαφορικών εξισώσεων, αυτό το λήμμα είναι η κατάλληλη περίπτωση για αυτό που ήθελε μιας και αν οι αρχικές συνθήκες δύο λύσεων ταυτίζονται τότε ταυτίζονται και ολόκληρες οι λύσεις σε μια ανοιχτή περιοχή.

Απόδειξη. $z = s(x) = \sigma(x) \in \mathcal{S}$. Από ορισμό δράγματος υπάρχει V ανοιχτό $\subseteq X : \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : \pi(V) \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός.

$$s(x) = z \in s(A) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

$$\sigma(x) = z \in \sigma(B) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

Θεωρούμε στην θέση του V το $V = V \cap \sigma(B) \cap s(A)$, μικραίνουμε το ανοιχτό δηλαδή να είναι μέσα στα άλλα δύο και άρα έχουμε:

$$\pi|_{s(A)} = s^{-1} : s(A) \longrightarrow A$$

$$\pi|_{\sigma(B)} = \sigma^{-1} : \sigma(B) \longrightarrow B$$

$$\pi|_V = s^{-1}|_V = \sigma^{-1}|_V \text{ μαζί με } \sigma|_U = s|_U \implies$$

$$s = \sigma|_{\pi(V)=U}$$

\square

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξαντλήσει όσα προκύπτουν με τον ορισμό, έχουμε μόνο τον τοπικό ομοιομορφισμό για να δουλέψουμε, μένει να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι μορφισμοί δρασμάτων στις τομές:

Πρόταση. Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) f μορφισμός δραγμάτων.
(2) Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, για κάθε $s \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.
(3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ και τομή $s \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε $z \in s(U)$ και $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} \\ & \searrow s & \downarrow \rho \\ & & X \\ & \nearrow \pi & \end{array}$$

Απόδειξη.

(1) \implies (2) f συνεχής και f μορφισμός, άρα $\rho \circ f = \pi$. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $s \in \mathcal{S}(U)$. Τότε $f \circ s : U \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Επιπλέον:

$$\rho \circ (f \circ s) = (\rho \circ f) \circ s = \pi \circ s = id_U$$

άρα $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(2) \implies (3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει U με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z$ και από προηγούμενο λήμμα έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) \implies (1) Θα δείξουμε ότι $\rho \circ f = \pi$. Έστω $z \in \mathcal{S}$. Από (3) έχουμε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z \in s(U)$. Έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U) \implies \rho \circ (f \circ s) = id_U$. Δηλαδή, $\rho \circ f \circ s(x) = \rho \circ f(z)$ αλλά και $\rho \circ f \circ s(x) = id(x) = x = \pi(z)$. Άρα $\rho \circ f = \pi$ αφού το z τυχαίο, δηλαδή πράγματι f μορφισμός δραγμάτων. \square

Άρα σαν μνημονικό κανόνα έχουμε ότι οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Θα δούμε στην συνέχεια την αλγεβρική εικόνα των δραγμάτων, κάτι που αρχικά μοιάζει με τελείως διαφορετικό αντικείμενο.

Έστω X τοπολογικός χώρος, τ_X η τοπολογία του X . Ένα προδράγμα συνόλων πάνω από το X είναι ένα ζεύγος:

$$(\{P(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U\}_{V \subseteq U \in \tau_X})$$

όπου $\{P(U)\}_{U \in \tau_X}$ οικογένεια συνόλων, με σύνολο δεικτών την τ_X και

$$\rho_V^U : P(U) \longrightarrow P(V)$$

απεικονίσεις: (περιορισμού)

$$(1) \rho_U^U = id_{P(U)} : P(U) \rightarrow P(U) \quad \forall U \in \tau_X.$$

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ στην τ_X , τότε ισχύει:

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$$

ή αλλιώς το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\rho_V^U} & P(V) \\ & \searrow \rho_W^V & \downarrow \rho_W^V \\ & & P(W) \end{array}$$

Παραδείγματα:

(1) (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε U ανοιχτό συμβολίζουμε:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{συνεχής}\}$$

και για κάθε $V \subseteq U$ με $V, U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$$

$$f \mapsto f|_V$$

Τότε το ζεύγος των οικογενειών $(\{\mathcal{C}(U)\}, \{\rho_V^U\})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το X ($:=$ το προδράγμα των συνεχών). Αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες:

$$(1) \rho_U^U(f) = f|_U = f \text{ όπου } f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ Για κάθε } W \subseteq V \subseteq U \text{ και } f : U \rightarrow \mathbb{R} \implies f|_W = (f|_V)|_W$$

(2) $P(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{σταθερές}\}$ (οι συνήθεις περιορισμοί θα εννοούνται σε τέτοια παραδείγματα)

(3) $B(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{φραγμένες}\}$

(4) $(M = \text{πολλαπλότητα}, \tau_M)$ και

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{C}^\infty\text{-διαφ}\}$$

(5) $X = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{ολόμορφη}\}$$

(6) (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το ζεύγος:

$$(\{\mathcal{S}(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U = \text{συνήθεις περιορισμοί}\}_{V \subseteq U \in \tau_X})$$

ονομάζεται το προδράγμα των τομών του δράγματος.

Ορισμός. (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και

$$S \equiv (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}, \quad T \equiv (T(U), \lambda_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$$

προδράγματα πάνω από το X . Ένας μορφισμός προδραγμάτων $f : S \rightarrow T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$f_U : S(U) \longrightarrow T(U), \quad U \in \tau_X$$

έτσι ώστε για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ να είναι μεταθετικό το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \lambda_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε προδράγμα $(P(U), \rho_V^U) \equiv P$ η οικογένεια $1 = \{1_U\} : P \rightarrow P$ με

$$1_U = id_U : P(U) \rightarrow P(U)$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια σύνθεση μορφισμών προδραγμάτων ώστε να φτιάξουμε μια νέα κατηγορία. Αν $f : S \rightarrow T$ και $g : T \rightarrow P$ μορφισμοί προδραγμάτων, όπου $f \equiv \{f_U\}_{U \in \tau_X}$ και $g \equiv \{g_U\}_{U \in \tau_X}$ τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$g \circ f \equiv \{(g \circ f) := g_U \circ f_U\}_{U \in \tau_X}$$

και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} & & g_U \circ f_U & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) & \xrightarrow{g_U} & P(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \lambda_V^U \downarrow & & \downarrow \mu_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) & \xrightarrow{g_V} & P(V) \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & g_V \circ f_V & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu_V^U \circ (g_U \circ f_U) &= (g_V \circ f_V) \circ \rho_V^U \\ \mu_V^U \circ (g_V \circ f_V) &= (g_V \circ \lambda_V^U) \circ f_U \\ &= g_V \circ f_V \circ \rho_V^U \end{aligned}$$

άρα πράγματι $g \circ f$ είναι μορφισμός προδραγμάτων $S \rightarrow P$.

Συνεπώς τα προδράγματα και μορφισμοί προδραγμάτων από μόνα τους αποτελούν μια κατηγορία \mathcal{PSh}_X .

Μάθημα 4 - Πέμπτη 03/03/2022.

$$\begin{array}{ccccc}
 S(U) & \xrightarrow{\quad} & T(U) & & \\
 \downarrow \rho_W^U & \searrow \rho_V^U & & \searrow \lambda_V^U & \\
 & & S(V) & \xrightarrow{\quad} & T(V) \\
 & \swarrow \rho_W^V & & \swarrow \lambda_W^V & \\
 S(W) & \xrightarrow{\quad} & T(W) & &
 \end{array}$$

Έστω (τ_X, \leq) διατεταγμένο σύνολο με $A \leq B \iff B \subseteq A$. Τότε έχουμε μια κατηγορία με αντικείμενα τα $U \in \tau_X$ και μορφισμούς:

$$\text{Mor}(U, V) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } U, V \text{ δεν διατάσσονται} \\ \{(U, V)\}, & U \leq V \quad (\text{δηλ. } V \subseteq U) \end{cases}$$

Αν $U \in \tau_X$, τότε $\text{Mor}(U, U) = \{(U, U)\}$.

Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ έχουμε την πράξη:

$$\circ : \text{Mor}(U, V) \times \text{Mor}(V, W) \longrightarrow \text{Mor}(U, W)$$

Έστω F συναρτητής: $(\tau_X, \leq) \rightarrow \text{Set}$. Δηλαδή, για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε κάποιο $F(U)$ σύνολο, άρα υπάρχει οικογένεια $(F(U))_{U \in \tau_X}$ με $(U, V) \in \text{Mor}(U, V)$ στην (τ_X, \leq) . Συνεπώς, έχουμε

$$F(U, V) : F(U) \rightarrow F(V)$$

ώστε:

- (1) $(U, U) = 1_U \in \text{Mor}(U, U) \implies F(U, U) = F(1_U) = 1_{F(U)} : F(U) \rightarrow F(U)$
- (2) Αν $W \subseteq V \subseteq U$, τότε $F(U, W) = F((V, W) \circ (U, V)) = F(V, W) \circ F(U, V)$

Συγκρίνοντας τους ορισμούς του προδράγματος και του συναρτητή $(\tau_X, \leq) \rightarrow \text{Set}$, παίρνουμε ότι αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Ορισμός. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} κατηγορίες και $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \rightarrow G$ είναι μια οικογένεια $\phi \equiv (\phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ όπου

$$\phi_A : FA \rightarrow GA, \quad \forall A \in \mathcal{C}$$

έτσι ώστε για κάθε $f : A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_B \\
 GA & \xrightarrow{Gf} & GB
 \end{array}$$

Ένας μορφισμός προδραγμάτων $S = (S(U), \rho_V^U), T = (T(U), \lambda_V^U)$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : S \rightarrow T$.

Ορισμός (Συναρτητής-Τομή (section functor)).

$$\Gamma : Sh_X \longrightarrow \mathcal{P}Sh_X$$

$$(\mathcal{S}, \pi, X) \longmapsto (\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$$

προδράγμα συνόλων, με ρ_V^U τους συνήθεις περιορισμούς. Αν $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων πάνω από το X , τότε για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε:

$$\Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{f_U} \Gamma(U, \mathcal{T})$$

$$s \longmapsto f \circ s$$

και η οικογένεια $(f_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{T}))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Πράγματι, εφόσον το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f_U} & \Gamma(U, \mathcal{T}) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \lambda_V^U \\ \Gamma(V, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f_V} & \Gamma(V, \mathcal{T}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} & \xrightarrow{g} & \mathcal{P} \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho & \swarrow \mathfrak{p} & \\ & & W & & \end{array}$$

$$\Gamma(g \circ f) = ((g \circ f)_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{T}))$$

$$s \longmapsto g \circ f \circ s$$

Ορισμός (Directed System). Έστω (A, \leq) ένα διατεταγμένο σύνολο και \mathcal{C} μια κατηγορία. Ένα επαγωγικό σύστημα στην \mathcal{C} (με δείκτες από το A) είναι ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $\mathbb{A} : (A, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$. Δηλαδή, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μαζί με μια οικογένεια μορφισμών:

$$\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \rightarrow A_{\lambda_2}$$

όπου $A_\lambda = \mathbb{A}(\lambda)$ και $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \mathbb{A}((\lambda_1, \lambda_2))$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$, έτσι ώστε:

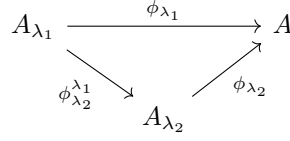
$$(1) \phi_\lambda^\lambda : A_\lambda \rightarrow A_\lambda \equiv id_{A_\lambda}$$

$$(2) \phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}, \text{ για κάθε } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

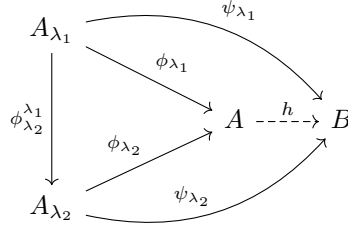
$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}} & A_{\lambda_2} \\ & \searrow \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1} & \downarrow \phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \\ & & A_{\lambda_3} \end{array}$$

Ορισμός (Directed Limit). Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ επαγωγικό σύστημα στην \mathcal{C} , όπου (Λ, \leq) διατεταγμένο σύνολο. Επαγωγικό όριο του συστήματος είναι ένα ζεύγος $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ όπου A αντικείμενο της \mathcal{C} και $\phi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έτσι ώστε:

(1) Για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ να ισχύει $\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_1}$.



(2) Ισχύει η επόμενη καθολική συνθήκη: Αν (B, ψ_λ) με B αντικείμενο της \mathcal{C} και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ να έχουμε $\psi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B$ τέτοια ώστε για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ να ισχύει $\psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφοισμός $h : A \rightarrow B$ με $\psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.



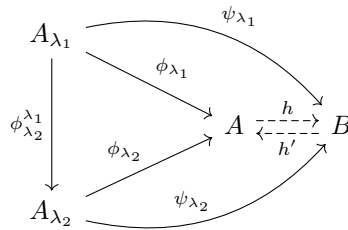
Ορισμός. Ένας μορφοισμός $f : A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} λέγεται ισομορφοισμός \iff υπάρχει μορφοισμός $g : B \rightarrow A$ στην \mathcal{C} με $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$.

Πρόταση. Αν το επαγωγικό σύστημα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ στην \mathcal{C} έχει όριο τότε αυτό είναι (μοναδικό) μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφοισμό.

Απόδειξη. Έστω δύο όρια $(A, \phi_\lambda), (B, \psi_\lambda)$.

$$A \text{ όριο} \implies \exists! h : A \rightarrow B, \quad h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$B \text{ όριο} \implies \exists! h' : B \rightarrow A, \quad h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$



Άρα έχουμε $\phi_\lambda = h' \circ \psi_\lambda \implies h \circ h' \circ \psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$. Υπάρχει ωστόσο μοναδικό $\xi : B \rightarrow B$ με $\xi \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Έχουμε ότι αυτό ισχύει για $\xi = 1_B$ αλλά και για $\xi = h \circ h'$. Έπεται ότι $h \circ h' = 1_B$. Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι $h' \circ h = 1_A$, δηλαδή h ισομορφοισμός. \square

Μάθημα 5 -Τρίτη 08/03/2022.

Θεώρημα. Στην κατηγορία *Set* κάθε επαγωγικό σύστημα με σύνολο δεικτών ένα κατευθυνόμενο σύνολο (Λ, \leq) έχει όριο.

Απόδειξη.

Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \rightarrow A_{\lambda_2})_{\lambda_1 \leq \lambda_2}$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων, με (Λ, \leq) να είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

και θεωρούμε την εξής σχέση: Αν $a_1, a_2 \in \bigsqcup A_\lambda$, τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιοι ώστε $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Ορίζουμε:

$$a_1 \sim a_2 \iff \exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 :$$

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας (προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική).

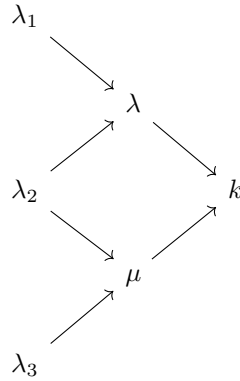
Για την μεταβατικότητα, αν έχουμε $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}, a_3 \in A_{\lambda_3}$, τότε υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

καθώς και ένα $\mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιο ώστε:

$$\phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3)$$

Στο κατευθυνόμενο Λ υπάρχει $k \geq \lambda, \mu$ με $\lambda_1 \leq \lambda \leq k$, τέτοιο ώστε:



$$\phi_k^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3) = \phi_k^{\lambda_3}(a_3)$$

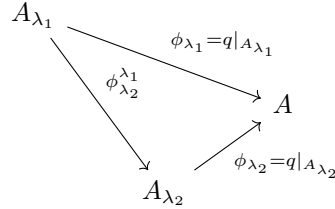
Θέτουμε $A = \bigsqcup A_\lambda / \sim$ και θεωρούμε την κανονική προβολή:

$$q : \bigsqcup A_\lambda \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto q(a) = [a]$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$ ισχύει $A_{\lambda_0} \subseteq \sqcup A_\lambda$ και υπάρχει $\phi_{\lambda_0} := q|_{A_{\lambda_0}}$. Τότε το $(A, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι το όριο του επαγωγικού συστήματος.

Για το (1) έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2$ με μεταθετικό τρίγωνο:



δηλαδή $\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}} = \phi_{\lambda_1}$. Πράγματι αν έχουμε $a \in A_{\lambda_1}$ τότε

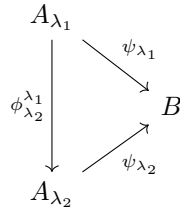
$$\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) = \phi_{\lambda_1}(a) \iff$$

$$[\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a)] = [a] \iff$$

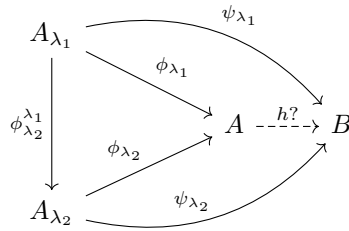
$$\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) \sim a$$

η οποία είναι προφανής, αφού $\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) = \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_2}} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a)$ και $\lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_2$.

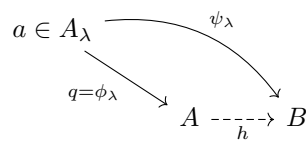
Για το (2) Έστω $(B, \psi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B)$ με $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και μεταθετικό τρίγωνο:



τότε μαζί με αυτό το τρίγωνο υπάρχει και το προηγούμενο που κατασκευάσαμε βασιζόμενοι στην κανονική προβολή q . Βάζουμε τα τρίγωνα μαζί και ψάχνουμε μια h :



Κάθε $[a] \in A$ προέρχεται από κάποιο $a \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Θέλουμε η h που θα βρούμε να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:



θέτουμε $h([a]) = \psi_\lambda(a)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου a της κλάσης $[a]$. Έστω $[a_1] = [a_2]$ και $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2)$ και εφόσον το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} a_1 \in A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_1}} & B \\ \phi_{\lambda}^{\lambda_1} \searrow & & \nearrow \psi_{\lambda_2} \\ & A_{\lambda} & \xrightarrow{\psi_{\lambda}} B \end{array}$$

παίρνουμε ότι $h([a_1]) = \psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \psi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2) = \psi_{\lambda_2}(a_2) = h([a_2])$. Ορίσαμε την h έτσι ώστε να έχουμε μεταθετικότητα των τριγώνων, δηλαδή $h \circ q = \psi_\lambda$ και έχουμε την μοναδικότητα από το μονοσήμαντο αυτού του ορισμού. \square

Παρατήρηση. Η παραπάνω απόδειξη αποτελεί και μεθοδολογία για το πώς βρίσκουμε το όριο.

Εφαρμογή 1: Έστω $(\Lambda, \leq) \equiv (\mathbb{N}, \leq)$ με την συνήθη διάταξη και $A_n = \mathbb{R}^n$. Αν $m \leq n$ τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned} \phi_n^m : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (x, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

με $(n - m)$ -πλήθος μηδενικά. Το παραπάνω είναι ένα επαγωγικό σύστημα και από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου.

Άσκηση: Υπολογίστε το όριο (A, ϕ_n) και εξετάστε αν το A έχει δομή διανυσματικού χώρου έτσι ώστε οι ϕ_n να είναι γραμμικές. (Δηλαδή διατηρεί το όριο την δομή της κατηγορίας; αν θεωρήσουμε ότι ξεκινήσαμε από διανυσματικούς χώρους και όχι από σύνολα.)

Εφαρμογή 2: Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με περιορισμούς απεικονίσεις. Είναι ένα προδράγμα συνόλων. Έστω $x \in X$ και $\mathcal{N}_x^0 = \mathcal{N}_x \cap \tau_X$, δηλαδή οι ανοιχτές περιοχές του x . Τότε το (\mathcal{N}_x^0, \leq) είναι κατευθυνόμενο σύνολο με $U \leq V \iff V \subseteq U$ που δεν περιέχει κενά σύνολα αφού το καθένα θα περιέχει το x .

Αν περιοριστούμε στο $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$, τότε από το θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο.

Άσκηση: Να υπολογιστεί.

Έστω δύο επαγωγικά συστήματα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}), (B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και

$$f \equiv (f_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda)$$

ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, δηλαδή για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda_1} & \xrightarrow{f_{\lambda_1}} & B_{\lambda_1} \\ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \downarrow & & \downarrow \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \\ A_{\lambda_2} & \xrightarrow{f_{\lambda_2}} & B_{\lambda_2} \end{array}$$

Πρόταση. Αν το $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ έχει όριο (A, ϕ_λ) και όμοια το $(B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ να έχει όριο (B, ψ_λ) και $(f_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda)$ να είναι μορφισμός επαγωγικού συστήματος, τότε υπάρχει μοναδική $\bar{f} : A \rightarrow B$ που κάνει μεταθετικά όλα τα παρακάτω διαγράμματα:

$$\begin{array}{ccc}
A_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & B_\lambda \\
\phi_\lambda \downarrow & & \downarrow \psi_\lambda \\
A & \xrightarrow{\bar{f}} & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_1} \circ f_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}} & B \\
\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \downarrow & & \uparrow \\
A_{\lambda_2} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_2} = x_{\lambda_2}} & B
\end{array}$$

Απόδειξη. Το $(B, x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda)$ ικανοποιεί το (1) του ορισμού του επαγωγικού ορίου. Επειδή το όριο του $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ είναι το (A, ϕ_λ) υπάρχει μοναδική $h : A \rightarrow B$ με

$$x_\lambda = h \circ \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda = h \circ \phi_\lambda$$

και θέτουμε $\bar{f} = h$.

□

Δραματοποίηση προδράγματος

Έστω $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από τοπολογικό χώρο (X, τ_X) . Έστω ένα σημείο $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο \mathcal{N}_x^0 των ανοιχτών περιοχών του x και έτσι το κατευθυνόμενο σύνολο (\mathcal{N}_x^0, \leq) .

Άρα το $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$ είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών (\mathcal{N}_x^0, \leq) . Από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου:

$$(\mathcal{S}_x, \rho_x^U : S(U) \rightarrow \mathcal{S}_x)_{U \in \mathcal{N}_x^0}$$

(θα δικαιολογηθεί στην συνέχεια που συμπίπτει ο συμβολισμός με τα νήματα.)

Παρατηρούμε ότι $U \in \tau_X \implies U \in \mathcal{N}_x^0, \quad \forall x \in U$. Άρα το $S(U)$ είναι σύνολο πολλών επαγωγικών συστημάτων. Για κάθε $x \in U$, το $S(U)$ συμμετέχει στο αντίστοιχο επαγωγικό σύστημα με δείκτες το \mathcal{N}_x^0 .

Για κάθε $s \in S(U)$ και για $x \neq y \in U$ υπάρχει $[s]_x$ στο όριο \mathcal{S}_x του $(S(W), \rho_W^V)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}_x^0}$. Όμοια, υπάρχει $[s]_y$ στο όριο \mathcal{S}_y του $(S(W), \rho_W^V)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}_y^0}$.

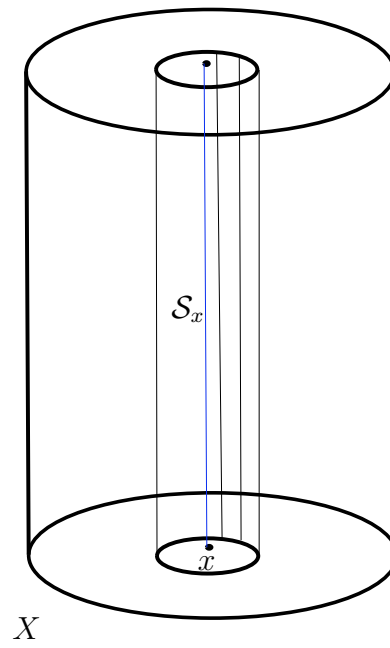
Θέτουμε

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και τότε για κάθε $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$ θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s) \in \mathcal{S}_x$$



Θέτουμε επιπλέον:

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$u \longmapsto \pi(u) = x$$

οταν $u \in \mathcal{S}_x$. Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι είναι τοπικός ομοιομορφισμός.