

Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, όπου

- (1) \mathcal{C} κλάση από αντικείμενα.
- (2) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ από μορφισμούς από το A στο B και

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A, B \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

- (3) Για κάθε A, B, C αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:

$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται σύνθεση, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

- (1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \emptyset$.
- (2) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ και για κάθε $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ μπορούμε:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

- (3) Για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:

$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \rightarrow A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \rightarrow C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

Παραδείγματα:

- (1) \mathcal{S} = κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.
- (2) \mathcal{T} = κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).
- (3) \mathcal{G} = ομάδες με μορφισμούς ομάδων.
- (4) $\mathcal{A}b$ = αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.
- (5) \mathcal{S}_0 = κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:

$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

- (6) \mathcal{T}_0 = σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.
- (7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ = διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.
- (8) \mathcal{R} = δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

- (9) \mathcal{R}_1 = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.
- (10) \mathcal{M}_R^L = αριστερά R -πρότυπα με R -γραμμικές απεικονίσεις.
- (11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.
- (12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X, R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:

$$(X, R) \longrightarrow (Y, S)$$

είναι απεικόνιση:

$$f : X \rightarrow Y$$

με

$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

- (13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι (X, \leq) όπου X σύνολο και \leq σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:

$$(X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$$

με απεικόνιση:

$$f : X \rightarrow Y$$

όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή αν \mathcal{C} είναι σύνολο.

Παραδείγματα:

- (14) $(G, *)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G$, $\circ = *$)

- (15) (X, \leq) διατεταγμένο σύνολο με:

$$\left(\mathcal{C} = X, \quad \mathcal{M} = \bigcup_{x, y \in X} Mor(x, y), \quad \circ \right)$$

όπου:

$$Mor(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \emptyset, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και η σύνθεση του $\{(x, y)\}$ με το $\{(y, z)\}$ δίνει το $\{(x, z)\}$, ενώ η σύνθεση με \emptyset δίνει \emptyset .

- (16) Ομοίως για (X, R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_0, *)$ κατηγορίες, θα λέμε \mathcal{C}_0 είναι υποκατηγορία της \mathcal{C} $\iff \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:

$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

και $*$ είναι ο περιορισμός της \circ .

Αν για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{C} .

π.χ.

- (1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{G} .

(2) \mathcal{R}_1 υποκατηγορία της \mathcal{R} , όχι πλήρης.

Ορισμός. \mathcal{C}, \mathcal{D} κατηγορίες. Ένας (συναλλοιώτος) συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος $(F_1, F_2) :$

$$F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F_2 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) :$

$$F_2(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$$

(2) Για κάθε $A \in \mathcal{C} :$

$$F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$$

(3) Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{C}$ και $f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C$ ισχύει ότι:

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$ με

$$S \longrightarrow \langle S \rangle = \text{διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f : S \rightarrow T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{T}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) \mathcal{C} έχει αντικείμενα τα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n \in \mathbb{N}$, σημειωμένα (U, x) με $x \in U$ και μορφισμοί

$$f : (U, x) \rightarrow (V, y)$$

διαφορίσιμη με $f(x) = y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U, x) = \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f : (U, x) \longrightarrow (Y, y)$$

$$F_2(f) = Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. Ένα δράγμα (πάνω από τον X) είναι μια τριάδα (\mathcal{S}, π, X) όπου \mathcal{S}, X είναι τοπολογικοί χώροι και

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως βάση, στο π ως προβολή και στο \mathcal{S} ως ολικό χώρο.

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies \pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X , καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \rightarrow \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X , όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X , άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X . \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \rightarrow \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

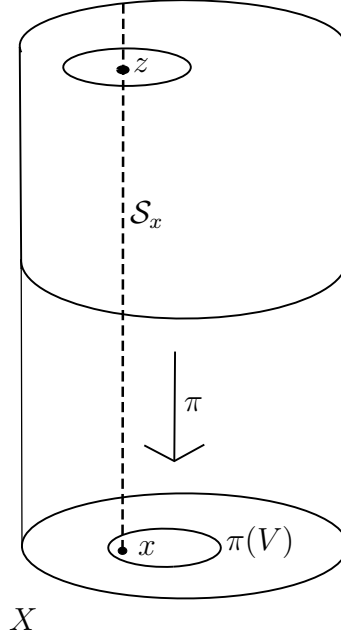
είναι βάση της τοπολογίας του \mathcal{S} .

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο \mathcal{B} αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. \square

Ορισμός. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x .

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \emptyset$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα \mathcal{S}_x σαν τοπολογικός υπόχωρος του \mathcal{S} είναι διακριτός.



Απόδειξη. Έστω $z \in S_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S_x . Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap S_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S_x . Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U , αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του S_x . \square

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. Έστω (S, π, X) δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq S$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).

Ορισμός. Έστω $(S, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(S, \pi, X) \rightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : S \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} \\ \pi \searrow & & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned} \rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in S \\ &\iff \forall z \in S_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\ &\iff \forall z \in S_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\ &\iff f(S_x) \subseteq \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δαγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δαγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. Έστω $(S, \pi, X), (T, \rho, X)$ δράγματα και $f : S \rightarrow T$ μορφισμός δαγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το (S, f, T) είναι δράγμα.

Απόδειξη. Έστω $z \in S$, τότε $f(z) \in T$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{N}_z, W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \rightarrow \pi(V) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \rightarrow \rho(W) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V) \subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho \circ f = \pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} S \supseteq V & \xrightarrow{f} & f(V) & & \subseteq W \\ & \searrow \pi|_V & \swarrow p & \nearrow p|_W & \\ & \pi(V) & \subseteq p(W) & & \end{array}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V = (\rho|_{f(V)})^{-1} \circ \pi|_V$, είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. \square

Θα ορίσουμε την κατηγορία Sh_X των δαγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X . Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δαγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. Η σύνθεση στην Sh_X είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{f} & T & \xrightarrow{g} & P \\ & \searrow \pi & \downarrow p & \swarrow p & \\ & & X & & \end{array}$$

Έχουμε $g \circ f : S \rightarrow P$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $p \circ (g \circ f) = \pi$. Πράγματι $p \circ (g \circ f) = (\rho \circ g) \circ f = \rho \circ f = \pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_S : S \rightarrow S$ είναι μορφισμός δαγμάτων και $id_S \circ f = f, g \circ id_S = g$ κλπ.

Ορισμός. Σε μια κατηγορία \mathcal{C} ένας μορφισμός $f : A \rightarrow B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g : B \rightarrow A$ έτσι ώστε:

$$f \circ g = 1_B$$

$$g \circ f = 1_A$$

Πρόταση. Έστω ο μορφισμός στην Sh_X :

$$f : (S, \pi, X) \rightarrow (T, \rho, X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) f ισομορφισμός.
- (2) f ισομορφισμός στα νήματα.

(3) f 1-1 και επί.

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δρασμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) \implies (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. \square

Παραδείγματα:

- (1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:

$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$

που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με

$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$

ομοιομορφισμό.

- (2) Έλικοι $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

- (3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια τομή του \mathcal{S} πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \rightarrow \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.

Ισοδύναμο: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{S} \\ & \nearrow s & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Μάθημα 3 - Τρίτη 01/03/2022.

Παρατήρηση. Έστω $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και $s : U \rightarrow \mathcal{S}$ τυχαία (όχι κατ'ανάγκη συνεχής) με $\pi \circ s = id_U$. Έπεται ότι η $s : U \rightarrow s(U)$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, υπάρχει $s^{-1} : s(U) \rightarrow U$ και από την σχέση $\pi \circ s = id_U$ παίρνουμε $\pi|_{s(U)} = s^{-1}$ από την μοναδικότητα αριστερής και δεξιάς αντίστροφης. Ισοδύναμα $s = (\pi|_{s(U)})$. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο συνολοθεωρητικά επιχειρήματα και δεν έχουμε απαιτήσει ανοιχτά σύνολα και συνέχεια.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \supseteq & s(U) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{s(U)} \nearrow s \\ X & \supseteq & U \end{array}$$

$$\pi \circ s = id_U \implies \pi|_{s(U)} \circ s = id_U$$

Παρακάτω θα θεωρούμε (συνεχείς) τομές σε ανοιχτά $U \subseteq X$.

Συμβολίζουμε: $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ για το σύνολο

$$\{s : U \rightarrow \mathcal{S} \mid s \text{ τομή}\}$$

Παρατήρηση. Έστω $z \in A \subseteq \mathcal{S}$, το A να είναι ανοιχτό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοιχτό με $z \in V$, $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμό με $V \subseteq A$ (Υπενθύμιση: τα V του ορισμού του δράγματος είναι βάση της τοπολογίας του \mathcal{S}).

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) , $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ τομή. Τότε $s(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $s : U \rightarrow s(U)$ ομοιομορφισμός.

Ουσιαστικά με αυτό το λήμμα έχουμε ότι οι τομές s είναι τοπικές αντίστροφες της π πάνω στα $s(U)$.

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $s(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} .

Έστω $z = s(x) \in s(U)$, $x \in U$. Υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του \mathcal{S} με $z \in V$ έτσι ώστε το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η s είναι συνεχής στο x και $V \in \mathcal{N}_{s(x)}$, V ανοιχτό. Λόγω συνέχειας παίρνουμε ότι το A είναι ανοιχτή περιοχή του x με $A \subseteq U$ και $s(A) \subseteq V$. Εφαρμόζοντας την π παίρνουμε:

$$\pi(s(A)) = A \subseteq \pi(V)$$

και $\pi(V)$ ανοιχτό. Άρα $s(A) \subseteq V$, δηλαδή το $s(A)$ είναι ανοιχτό μέσα στο ανοιχτό V και άρα είναι και σε όλο το \mathcal{S} .

$s(A) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A \subseteq U \implies z = s(x) \in s(A) \subseteq s(U)$, άρα $s(U)$ ανοιχτό.

(2) $V \supseteq s(A)$

$$\begin{array}{ccc} V & \supseteq & s(A) \\ \downarrow \pi_V & & \downarrow \pi|_{s(A)} = s^{-1}|_{s(A)} \\ \pi(V) & \supseteq & A \subseteq U \end{array}$$

και έχουμε s 1-1, επί, συνεχή, και τοπικός ομοιομορφισμός, άρα η s είναι ομοιομορφισμός. \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, $z \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχει $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $z \in s(U)$.

Απόδειξη. $z \in \mathcal{S} \implies$ υπάρχει $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $z \in V$, $\pi(V)$ ανοιχτό, $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός. Άρα υπάρχει:

$$s := (\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \longrightarrow V$$

συνεχής, με $\pi(V) \subseteq U$ και $\pi \circ s = id_U$. Άρα για $x = \pi(z)$ ισχύει $s(x) = s(\pi(z)) = z$. \square

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το σύνολο:

$$\{s(U) : U \text{ ανοιχτό } \subseteq X, s \in \mathcal{S}(U)\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας του \mathcal{S} .

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό:

Λήμμα. Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, $A, B \subseteq X$ ανοιχτά με $x \in A \cap B \neq \emptyset$ και $s \in \mathcal{S}(A)$, $\sigma \in \mathcal{S}(B)$ με $s(x) = \sigma(x)$. Τότε υπάρχει $U \subseteq A \cap B$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s|_U = \sigma|_U$.

Αν σκεφτεί κανείς ότι ο Leray που ασχολήθηκε με τα δράγματα με σκοπό την μελέτη διαφορικών εξισώσεων, αυτό το λήμμα είναι η κατάλληλη περίπτωση για αυτό που ήθελε μιας και αν οι αρχικές συνθήκες δύο λύσεων ταυτίζονται τότε ταυτίζονται και ολόκληρες οι λύσεις σε μια ανοιχτή περιοχή.

Απόδειξη. $z = s(x) = \sigma(x) \in \mathcal{S}$. Από ορισμό δράγματος υπάρχει V ανοιχτό $\subseteq X : \pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : \pi(V) \rightarrow \pi(V)$ ομοιομορφισμός.

$$s(x) = z \in s(A) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

$$\sigma(x) = z \in \sigma(B) \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό}$$

Θεωρούμε στην θέση του V το $V = V \cap \sigma(B) \cap s(A)$, μικραίνουμε το ανοιχτό δηλαδή να είναι μέσα στα άλλα δύο και άρα έχουμε:

$$\pi|_{s(A)} = s^{-1} : s(A) \longrightarrow A$$

$$\pi|_{\sigma(B)} = \sigma^{-1} : \sigma(B) \longrightarrow B$$

$$\pi|_V = s^{-1}|_V = \sigma^{-1}|_V \text{ μαζί με } \sigma|_U = s|_U \implies$$

$$s = \sigma|_{\pi(V)=U}$$

\square

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξαντλήσει όσα προκύπτουν με τον ορισμό, έχουμε μόνο τον τοπικό ομοιομορφισμό για να δουλέψουμε, μένει να δούμε πώς συμπεριφέρονται οι μορφισμοί δρασμάτων στις τομές:

Πρόταση. Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) f μορφισμός δραγμάτων.
(2) Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, για κάθε $s \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.
(3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ και τομή $s \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε $z \in s(U)$ και $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} \\ & \searrow s & \downarrow \rho \\ & & X \\ & \nearrow \pi & \\ & & \end{array}$$

Απόδειξη.

(1) \implies (2) f συνεχής και f μορφισμός, άρα $\rho \circ f = \pi$. Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $s \in \mathcal{S}(U)$. Τότε $f \circ s : U \rightarrow \mathcal{T}$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Επιπλέον:

$$\rho \circ (f \circ s) = (\rho \circ f) \circ s = \pi \circ s = id_U$$

άρα $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(2) \implies (3) Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει U με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z$ και από προηγούμενο λήμμα έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U)$.

(3) \implies (1) Θα δείξουμε ότι $\rho \circ f = \pi$. Έστω $z \in \mathcal{S}$. Από (3) έχουμε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathcal{S}(U)$ με $s(x) = z \in s(U)$. Έχουμε $f \circ s \in \mathcal{T}(U) \implies \rho \circ (f \circ s) = id_U$. Δηλαδή, $\rho \circ f \circ s(x) = \rho \circ f(z)$ αλλά και $\rho \circ f \circ s(x) = id(x) = x = \pi(z)$. Άρα $\rho \circ f = \pi$ αφού το z τυχαίο, δηλαδή πράγματι f μορφισμός δραγμάτων. \square

Άρα σαν μνημονικό κανόνα έχουμε ότι οι μορφισμοί δραγμάτων μεταφέρουν τομές σε τομές. Θα δούμε στην συνέχεια την αλγεβρική εικόνα των δραγμάτων, κάτι που αρχικά μοιάζει με τελείως διαφορετικό αντικείμενο.

Έστω X τοπολογικός χώρος, τ_X η τοπολογία του X . Ένα προδράγμα συνόλων πάνω από το X είναι ένα ζεύγος:

$$(\{P(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U\}_{V \subseteq U \in \tau_X})$$

όπου $\{P(U)\}_{U \in \tau_X}$ οικογένεια συνόλων, με σύνολο δεικτών την τ_X και

$$\rho_V^U : P(U) \longrightarrow P(V)$$

απεικονίσεις: (περιορισμού)

$$(1) \rho_U^U = id_{P(U)} : P(U) \rightarrow P(U) \quad \forall U \in \tau_X.$$

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ στην τ_X , τότε ισχύει:

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$$

ή αλλιώς το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\rho_V^U} & P(V) \\ & \searrow \rho_W^V & \downarrow \rho_W^V \\ & & P(W) \end{array}$$

Παραδείγματα:

(1) (X, τ_X) τοπολογικός χώρος, για κάθε U ανοιχτό συμβολίζουμε:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{συνεχής}\}$$

και για κάθε $V \subseteq U$ με $V, U \in \tau_X$ θέτουμε:

$$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$$

$$f \mapsto f|_V$$

Τότε το ζεύγος των οικογενειών $(\{\mathcal{C}(U)\}, \{\rho_V^U\})$ είναι ένα προδράγμα πάνω από το X ($:=$ το προδράγμα των συνεχών). Αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες:

$$(1) \rho_U^U(f) = f|_U = f \text{ όπου } f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ Για κάθε } W \subseteq V \subseteq U \text{ και } f : U \rightarrow \mathbb{R} \implies f|_W = (f|_V)|_W$$

(2) $P(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{σταθερές}\}$ (οι συνήθεις περιορισμοί θα εννοούνται σε τέτοια παραδείγματα)

(3) $B(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{φραγμένες}\}$

(4) $(M = \text{πολλαπλότητα}, \tau_M)$ και

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{C}^\infty\text{-διαφ}\}$$

(5) $X = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{ολόμορφη}\}$$

(6) (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το ζεύγος:

$$(\{\mathcal{S}(U)\}_{U \in \tau_X}, \{\rho_V^U = \text{συνήθεις περιορισμοί}\}_{V \subseteq U \in \tau_X})$$

ονομάζεται το προδράγμα των τομών του δράγματος.

Ορισμός. (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και

$$S \equiv (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}, \quad T \equiv (T(U), \lambda_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$$

προδράγματα πάνω από το X . Ένας μορφισμός προδραγμάτων $f : S \rightarrow T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων:

$$f_U : S(U) \longrightarrow T(U), \quad U \in \tau_X$$

έτσι ώστε για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ να είναι μεταθετικό το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \lambda_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε προδράγμα $(P(U), \rho_V^U) \equiv P$ η οικογένεια $1 = \{1_U\} : P \rightarrow P$ με

$$1_U = id_U : P(U) \rightarrow P(U)$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια σύνθεση μορφισμών προδραγμάτων ώστε να φτιάξουμε μια νέα κατηγορία. Αν $f : S \rightarrow T$ και $g : T \rightarrow P$ μορφισμοί προδραγμάτων, όπου $f \equiv \{f_U\}_{U \in \tau_X}$ και $g \equiv \{g_U\}_{U \in \tau_X}$ τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$g \circ f \equiv \{(g \circ f) := g_U \circ f_U\}_{U \in \tau_X}$$

και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} & & g_U \circ f_U & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) & \xrightarrow{g_U} & P(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \lambda_V^U \downarrow & & \downarrow \mu_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) & \xrightarrow{g_V} & P(V) \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & g_V \circ f_V & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu_V^U \circ (g_U \circ f_U) &= (g_V \circ f_V) \circ \rho_V^U \\ \mu_V^U \circ (g_V \circ f_V) &= (g_V \circ \lambda_V^U) \circ f_U \\ &= g_V \circ f_V \circ \rho_V^U \end{aligned}$$

άρα πράγματι $g \circ f$ είναι μορφισμός προδραγμάτων $S \rightarrow P$.

Συνεπώς τα προδράγματα και μορφισμοί προδραγμάτων από μόνα τους αποτελούν μια κατηγορία \mathcal{PSh}_X .

Μάθημα 4 - Πέμπτη 03/03/2022.

$$\begin{array}{ccccc}
 S(U) & \xrightarrow{\quad} & T(U) & & \\
 \downarrow \rho_W^U & \searrow \rho_V^U & & \searrow \lambda_V^U & \\
 & & S(V) & \xrightarrow{\quad} & T(V) \\
 & \swarrow \rho_W^V & & \swarrow \lambda_W^V & \\
 S(W) & \xrightarrow{\quad} & T(W) & &
 \end{array}$$

Έστω (τ_X, \leq) διατεταγμένο σύνολο με $A \leq B \iff B \subseteq A$. Τότε έχουμε μια κατηγορία με αντικείμενα τα $U \in \tau_X$ και μορφισμούς:

$$\text{Mor}(U, V) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } U, V \text{ δεν διατάσσονται} \\ \{(U, V)\}, & U \leq V \quad (\text{δηλ. } V \subseteq U) \end{cases}$$

Αν $U \in \tau_X$, τότε $\text{Mor}(U, U) = \{(U, U)\}$.

Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U$ έχουμε την πράξη:

$$\circ : \text{Mor}(U, V) \times \text{Mor}(V, W) \longrightarrow \text{Mor}(U, W)$$

Έστω F συναρτητής: $(\tau_X, \leq) \rightarrow \text{Set}$. Δηλαδή, για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε κάποιο $F(U)$ σύνολο, άρα υπάρχει οικογένεια $(F(U))_{U \in \tau_X}$ με $(U, V) \in \text{Mor}(U, V)$ στην (τ_X, \leq) . Συνεπώς, έχουμε

$$F(U, V) : F(U) \rightarrow F(V)$$

ώστε:

- (1) $(U, U) = 1_U \in \text{Mor}(U, U) \implies F(U, U) = F(1_U) = 1_{F(U)} : F(U) \rightarrow F(U)$
- (2) Αν $W \subseteq V \subseteq U$, τότε $F(U, W) = F((V, W) \circ (U, V)) = F(V, W) \circ F(U, V)$

Συγκρίνοντας τους ορισμούς του προδράγματος και του συναρτητή $(\tau_X, \leq) \rightarrow \text{Set}$, παίρνουμε ότι αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Ορισμός. Έστω \mathcal{C}, \mathcal{D} κατηγορίες και $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \rightarrow G$ είναι μια οικογένεια $\phi \equiv (\phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ όπου

$$\phi_A : FA \rightarrow GA, \quad \forall A \in \mathcal{C}$$

έτσι ώστε για κάθε $f : A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_B \\
 GA & \xrightarrow{Gf} & GB
 \end{array}$$

Ένας μορφισμός προδραγμάτων $S = (S(U), \rho_V^U), T = (T(U), \lambda_V^U)$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : S \rightarrow T$.

Ορισμός (Συναρτητής-Τομή (section functor)).

$$\Gamma : Sh_X \longrightarrow \mathcal{P}Sh_X$$

$$(\mathcal{S}, \pi, X) \longmapsto (\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$$

προδράγμα συνόλων, με ρ_V^U τους συνήθεις περιορισμούς. Αν $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων πάνω από το X , τότε για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε:

$$\Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{f_U} \Gamma(U, \mathcal{T})$$

$$s \longmapsto f \circ s$$

και η οικογένεια $(f_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{T}))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.

Πράγματι, εφόσον το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f_U} & \Gamma(U, \mathcal{T}) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \lambda_V^U \\ \Gamma(V, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f_V} & \Gamma(V, \mathcal{T}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} & \xrightarrow{g} & \mathcal{P} \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho & \swarrow \mathfrak{p} & \\ & & W & & \end{array}$$

$$\Gamma(g \circ f) = ((g \circ f)_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{T}))$$

$$s \longmapsto g \circ f \circ s$$

Ορισμός (Directed System). Έστω (A, \leq) ένα διατεταγμένο σύνολο και \mathcal{C} μια κατηγορία. Ένα επαγωγικό σύστημα στην \mathcal{C} (με δείκτες από το A) είναι ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $\mathbb{A} : (A, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$. Δηλαδή, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μαζί με μια οικογένεια μορφισμών:

$$\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \rightarrow A_{\lambda_2}$$

όπου $A_\lambda = \mathbb{A}(\lambda)$ και $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \mathbb{A}((\lambda_1, \lambda_2))$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$, έτσι ώστε:

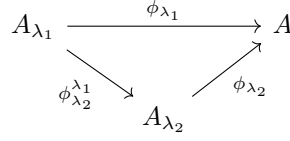
$$(1) \phi_\lambda^\lambda : A_\lambda \rightarrow A_\lambda \equiv id_{A_\lambda}$$

$$(2) \phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}, \text{ για κάθε } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

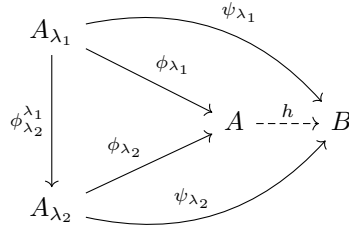
$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}} & A_{\lambda_2} \\ & \searrow \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1} & \downarrow \phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \\ & & A_{\lambda_3} \end{array}$$

Ορισμός (Directed Limit). Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ επαγωγικό σύστημα στην \mathcal{C} , όπου (Λ, \leq) διατεταγμένο σύνολο. Επαγωγικό όριο του συστήματος είναι ένα ζεύγος $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ όπου A αντικείμενο της \mathcal{C} και $\phi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έτσι ώστε:

(1) Για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ να ισχύει $\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_1}$.



(2) Ισχύει η επόμενη καθολική συνθήκη: Αν (B, ψ_λ) με B αντικείμενο της \mathcal{C} και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ να έχουμε $\psi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B$ τέτοια ώστε για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ να ισχύει $\psi_{\lambda_1} = \psi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφοισμός $h : A \rightarrow B$ με $\psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.



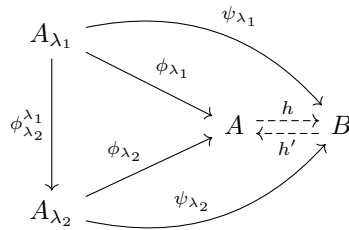
Ορισμός. Ένας μορφοισμός $f : A \rightarrow B$ στην \mathcal{C} λέγεται ισομορφοισμός \iff υπάρχει μορφοισμός $g : B \rightarrow A$ στην \mathcal{C} με $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$.

Πρόταση. Αν το επαγωγικό σύστημα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ στην \mathcal{C} έχει όριο τότε αυτό είναι (μοναδικό) μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφοισμό.

Απόδειξη. Έστω δύο όρια $(A, \phi_\lambda), (B, \psi_\lambda)$.

$$A \text{ όριο} \implies \exists! h : A \rightarrow B, \quad h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$B \text{ όριο} \implies \exists! h' : B \rightarrow A, \quad h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$$



Άρα έχουμε $\phi_\lambda = h' \circ \psi_\lambda \implies h \circ h' \circ \psi_\lambda = h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$. Υπάρχει ωστόσο μοναδικό $\xi : B \rightarrow B$ με $\xi \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$. Έχουμε ότι αυτό ισχύει για $\xi = 1_B$ αλλά και για $\xi = h \circ h'$. Έπεται ότι $h \circ h' = 1_B$. Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι $h' \circ h = 1_A$, δηλαδή h ισομορφοισμός. \square

Μάθημα 5 - Τρίτη 08/03/2022.

Θεώρημα. Στην κατηγορία *Set* κάθε επαγωγικό σύστημα με σύνολο δεικτών ένα κατευθυνόμενο σύνολο (Λ, \leq) έχει όριο.

Απόδειξη.

Έστω $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \rightarrow A_{\lambda_2})_{\lambda_1 \leq \lambda_2}$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων, με (Λ, \leq) να είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

και θεωρούμε την εξής σχέση: Αν $a_1, a_2 \in \bigsqcup A_\lambda$, τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιοι ώστε $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Ορίζουμε:

$$a_1 \sim a_2 \iff \exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 :$$

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας (προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική).

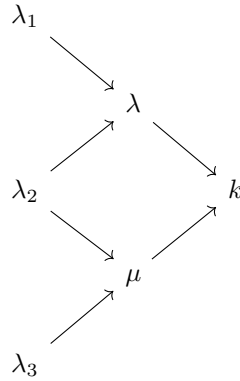
Για την μεταβατικότητα, αν έχουμε $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}, a_3 \in A_{\lambda_3}$, τότε υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με

$$\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$$

καθώς και ένα $\mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιο ώστε:

$$\phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3)$$

Στο κατευθυνόμενο Λ υπάρχει $k \geq \lambda, \mu$ με $\lambda_1 \leq \lambda \leq k$, τέτοιο ώστε:



$$\phi_k^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_k^\lambda \circ \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_2}(a_2) = \phi_k^\mu \circ \phi_\mu^{\lambda_3}(a_3) = \phi_k^{\lambda_3}(a_3)$$

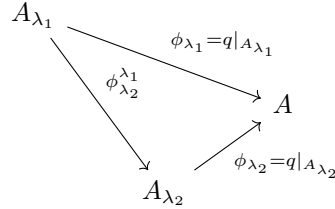
Θέτουμε $A = \bigsqcup A_\lambda / \sim$ και θεωρούμε την κανονική προβολή:

$$q : \bigsqcup A_\lambda \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto q(a) = [a]$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$ ισχύει $A_{\lambda_0} \subseteq \sqcup A_\lambda$ και υπάρχει $\phi_{\lambda_0} := q|_{A_{\lambda_0}}$. Τότε το $(A, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι το όριο του επαγωγικού συστήματος.

Για το (1) έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2$ με μεταθετικό τρίγωνο:



δηλαδή $\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}} = \phi_{\lambda_1}$. Πράγματι αν έχουμε $a \in A_{\lambda_1}$ τότε

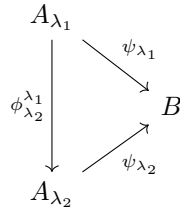
$$\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) = \phi_{\lambda_1}(a) \iff$$

$$[\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a)] = [a] \iff$$

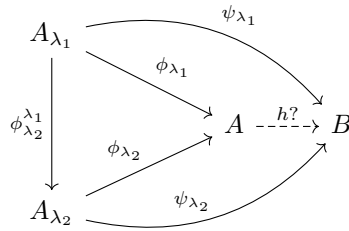
$$\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) \sim a$$

η οποία είναι προφανής, αφού $\phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a) = \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_2}} \circ \phi_{\lambda_2}^{A_{\lambda_1}}(a)$ και $\lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_2$.

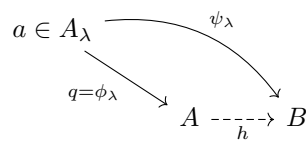
Για το (2) Έστω $(B, \psi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B)$ με $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και μεταθετικό τρίγωνο:



τότε μαζί με αυτό το τρίγωνο υπάρχει και το προηγούμενο που κατασκευάσαμε βασιζόμενοι στην κανονική προβολή q . Βάζουμε τα τρίγωνα μαζί και ψάχνουμε μια h :



Κάθε $[a] \in A$ προέρχεται από κάποιο $a \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Θέλουμε η h που θα βρούμε να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:



θέτουμε $h([a]) = \psi_\lambda(a)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου a της κλάσης $[a]$. Έστω $[a_1] = [a_2]$ και $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2)$ και εφόσον το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} a_1 \in A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_1}} & B \\ \phi_{\lambda}^{\lambda_1} \searrow & & \nearrow \psi_{\lambda} \\ & A_{\lambda} & \end{array}$$

παίρνουμε ότι $h([a_1]) = \psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \psi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2) = \psi_{\lambda_2}(a_2) = h([a_2])$. Ορίσαμε την h έτσι ώστε να έχουμε μεταθετικότητα των τριγώνων, δηλαδή $h \circ q = \psi_\lambda$ και έχουμε την μοναδικότητα από το μονοσήμαντο αυτού του ορισμού. \square

Παρατήρηση. Η παραπάνω απόδειξη αποτελεί και μεθοδολογία για το πώς βρίσκουμε το όριο.

Εφαρμογή 1: Έστω $(\Lambda, \leq) \equiv (\mathbb{N}, \leq)$ με την συνήθη διάταξη και $A_n = \mathbb{R}^n$. Αν $m \leq n$ τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned} \phi_n^m : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (x, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

με $(n - m)$ -πλήθος μηδενικά. Το παραπάνω είναι ένα επαγωγικό σύστημα και από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου.

Άσκηση: Υπολογίστε το όριο (A, ϕ_n) και εξετάστε αν το A έχει δομή διανυσματικού χώρου έτσι ώστε οι ϕ_n να είναι γραμμικές. (Δηλαδή διατηρεί το όριο την δομή της κατηγορίας; αν θεωρήσουμε ότι ξεκινήσαμε από διανυσματικούς χώρους και όχι από σύνολα.)

Εφαρμογή 2: Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ με περιορισμούς απεικονίσεις. Είναι ένα προδράγμα συνόλων. Έστω $x \in X$ και $\mathcal{N}_x^0 = \mathcal{N}_x \cap \tau_X$, δηλαδή οι ανοιχτές περιοχές του x . Τότε το (\mathcal{N}_x^0, \leq) είναι κατευθυνόμενο σύνολο με $U \leq V \iff V \subseteq U$ που δεν περιέχει κενά σύνολα αφού το καθένα θα περιέχει το x .

Αν περιοριστούμε στο $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$, τότε από το θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο.

Άσκηση: Να υπολογιστεί.

Έστω δύο επαγωγικά συστήματα $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}), (B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ για $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και

$$f \equiv (f_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda)$$

ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, δηλαδή για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$ το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda_1} & \xrightarrow{f_{\lambda_1}} & B_{\lambda_1} \\ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \downarrow & & \downarrow \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \\ A_{\lambda_2} & \xrightarrow{f_{\lambda_2}} & B_{\lambda_2} \end{array}$$

Πρόταση. Αν το $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ έχει όριο (A, ϕ_λ) και όμοια το $(B_\lambda, \psi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ να έχει όριο (B, ψ_λ) και $(f_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda)$ να είναι μορφισμός επαγωγικού συστήματος, τότε υπάρχει μοναδική $\bar{f} : A \rightarrow B$ που κάνει μεταθετικά όλα τα παρακάτω διαγράμματα:

$$\begin{array}{ccc}
A_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & B_\lambda \\
\phi_\lambda \downarrow & & \downarrow \psi_\lambda \\
A & \xrightarrow{\bar{f}} & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A_{\lambda_1} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_1} \circ f_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}} & B \\
\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \downarrow & & \uparrow \\
A_{\lambda_2} & \xrightarrow{\psi_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_2} = x_{\lambda_2}} & B
\end{array}$$

Απόδειξη. Το $(B, x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda)$ ικανοποιεί το (1) του ορισμού του επαγωγικού ορίου. Επειδή το όριο του $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ είναι το (A, ϕ_λ) υπάρχει μοναδική $h : A \rightarrow B$ με

$$x_\lambda = h \circ \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$x_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda = h \circ \phi_\lambda$$

και θέτουμε $\bar{f} = h$.

□

Δραματοποίηση προδράγματος

Έστω $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από τοπολογικό χώρο (X, τ_X) . Έστω ένα σημείο $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο \mathcal{N}_x^0 των ανοιχτών περιοχών του x και έτσι το κατευθυνόμενο σύνολο (\mathcal{N}_x^0, \leq) .

Άρα το $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$ είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών (\mathcal{N}_x^0, \leq) . Από το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη του ορίου:

$$(\mathcal{S}_x, \rho_x^U : S(U) \rightarrow \mathcal{S}_x)_{U \in \mathcal{N}_x^0}$$

(θα δικαιολογηθεί στην συνέχεια που συμπίπτει ο συμβολισμός με τα νήματα.)

Παρατηρούμε ότι $U \in \tau_X \implies U \in \mathcal{N}_x^0, \quad \forall x \in U$. Άρα το $S(U)$ είναι σύνολο πολλών επαγωγικών συστημάτων. Για κάθε $x \in U$, το $S(U)$ συμμετέχει στο αντίστοιχο επαγωγικό σύστημα με δείκτες το \mathcal{N}_x^0 .

Για κάθε $s \in S(U)$ και για $x \neq y \in U$ υπάρχει $[s]_x$ στο όριο \mathcal{S}_x του $(S(W), \rho_W^V)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}_x^0}$. Όμοια, υπάρχει $[s]_y$ στο όριο \mathcal{S}_y του $(S(W), \rho_W^V)_{W \subseteq V \in \mathcal{N}_y^0}$.

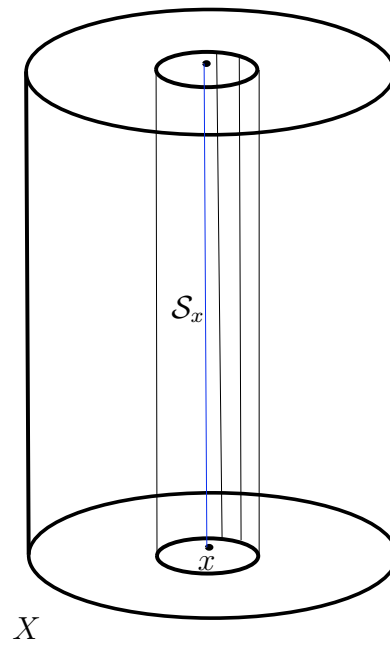
Θέτουμε

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και τότε για κάθε $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$ θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s) \in \mathcal{S}_x$$



Θέτουμε επιπλέον:

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$u \longmapsto \pi(u) = x$$

οταν $u \in \mathcal{S}_x$. Στην επόμενη διάλεξη θα δείξουμε ότι είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Μάθημα 6 - Τρίτη 15/03/2022.

Ξεκινάμε με ένα $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X και σταθεροποιούμε ένα $x \in X$ και αντί να παίρνουμε όλα τα ανοιχτά, κρατάμε τις ανοιχτές περιοχές του x περιορίζοντας έτσι το σύνολο δεικτών στο \mathcal{N}_x^0 . Έτσι περνάμε σε ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων:

$$(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$$

με σύνολο δεικτών να είναι το κατευθυνόμενο $(\mathcal{N}_x^0, \leq \equiv \supseteq)$. Άρα από το γενικό θεώρημα ξέρουμε ότι υπάρχει το επαγωγικό όριο. Το κατασκευάζουμε παίρνοντας την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U)$$

και ορίζοντας την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας. Έστω $s \in S(U), \sigma \in S(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Ορίζουμε:

$$s \sim_x \sigma \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0, \quad W \subseteq U \cap V$$

τέτοιο ώστε:

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$$

μάλιστα, είναι σχέση ισοδυναμίας που εξαρτάται από το $x \in X$ που έχουμε σταθεροποιήσει. Τις κλάσεις ισοδυναμίας τις συμβολίζουμε ως

$$\mathcal{S}_x = \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U) \right) / \sim_x$$

Επιπλέον, έχουμε την κανονική απεικόνιση για να πηγαίνουμε στις κλάσεις:

$$\rho_x : \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto \rho_x(s) = [s]_x$$

όπου γράφουμε και το x στην κλάση του s για να ξέρουμε σε ποια σχέση ισοδυναμίας αναφερόμαστε. Καθώς το πεδίο ορισμού της ρ_x είναι μια διακεκριμένη ένωση, μπορούμε να πάρουμε περιορισμούς στα μικρά σύνολα:

$$\rho_x^U = \rho_x|_{S(U)} : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x$$

$$s \longmapsto [s]_x$$

Θέτουμε

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και έστω $z \in \mathcal{S}$, αφού το \mathcal{S} είναι διακεκριμένη ένωση, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με $z \in \mathcal{S}_x$

Θέτουμε για αυτόν τον δείκτη $\pi(z) = x$ και έτσι έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση $\pi : \mathcal{S} \rightarrow X$.

Ισχυρισμός: Το (\mathcal{S}, π, X) είναι δράγμα. Θέλουμε δηλαδή το \mathcal{S} να επιδέχεται μια τοπολογία που κάνει την π τοπικό ομοιομορφισμό. Θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Έστω $U \in \tau_X$ και $s \in S(U)$, πριν αποδείξουμε ότι είναι δράγμα κατασκευάζουμε τις συνεχείς τομές του δράγματος. Θέτουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{s}(x) = [s]_x$$

και ιδιαιτέρως $[s]_x \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$.

Επιπλέον, την κλάση $[s]_x$ την βλέπουμε σαν την εικόνα της κανονικής απεικόνισης που μας πάει στο επαγωγικό όριο εφαρμοσμένη στο s , δηλαδή $[s]_x = \rho_x^U(s)$. Άρα κρατάμε την σχέση:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s)$$

και οι \tilde{s} που ορίσαμε είναι είναι 1-1, αφού δύο διαφορετικές εικόνες θα πέσουν σε διαφορετικά νήματα. Έτσι, αν θεωρήσουμε την \tilde{s} στην εικόνα της:

$$\tilde{s} : U \rightarrow \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

αυτή είναι 1-1, επί και ισχύει τετριμμένα ότι:

$$\pi \circ \tilde{s} = id_U$$

αφού $\tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$ και προβάλλοντας παίρνουμε το x .

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα δράγμα υπάρχει μια βάση της τοπολογίας που αποτελείται από τις εικόνες των τομών, η οποία συμπίπτει με την βάση της τοπολογίας που αποτελούν τα V στα οποία η προβολή είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Με αυτό σαν σκέψη θέτουμε:

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) \mid U \in \tau_x, s \in S(U)\}$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτή η οικογένεια είναι βάση τοπολογίας.

Λήμμα (1). Για κάθε $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει $U \in \tau_x$ και υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοια ώστε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$.

Απόδειξη. Έστω

$$z \in \mathcal{S} = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \mathcal{S}_x \implies$$

$$\exists! x \in X : z \in \mathcal{S}_x \implies$$

$$z = [s]_x$$

με $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in S(U)$. Ωστόσο, από τα προηγούμενα έχουμε $[s]_x = \tilde{s}(x)$. □

Λήμμα (2). Έστω $s \in S(U)$, $\sigma \in S(V)$ με $U, V \in \tau_X$ και υπάρχει $z \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοιχτό $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{\sigma} : V \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\text{Υπάρχει } x \in U : z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}_x$$

$$\text{Υπάρχει } y \in V : z = \tilde{\sigma}(y) \in \mathcal{S}_y$$

και αφού το \mathcal{S} είναι διακεκριμένη ένωση έχουμε $x = y$. Άρα $U, V \in \mathcal{N}_x^0$ και

$$\tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(x) \implies$$

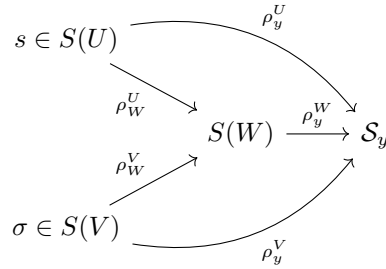
$$[s]_x = [\sigma]_x \implies$$

$$s \sim_x \sigma \implies$$

Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ τέτοιο ώστε:

$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$$

Θέλουμε να δείξουμε τη ισότητα των $\tilde{s}, \tilde{\sigma}$ στο W , άρα θεωρούμε $y \in W$ και έχουμε τα μεταθετικά τρίγωνα:



$$\begin{aligned} \tilde{s}(y) &= [s]_y = \rho_y^U(s) = \rho_y^W \circ \rho_W^U(s) = \\ &= \rho_y^W \circ \rho_W^V(\sigma) = \rho_y^V(\sigma) = [\sigma]_y = \tilde{\sigma}(y) \end{aligned}$$

□

Ουσιαστικά, στην προηγούμενη απόδειξη κρύβεται η εξής παρατήρηση που θα χρησιμοποιούμε συχνά:

Παρατήρηση. Έστω $s \in S(U)$ με $V \subseteq U$ τότε:

$$\tilde{s}|_V = \widetilde{\rho_V^U(s)}$$

Τώρα βασιζόμενοι στα δύο λήμματα έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση.

$$\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) : s \in S(U), U \in \tau_X\}$$

είναι βάση μιας τοπολογίας.

Απόδειξη. Η μία συνθήκη της βάσης είναι το λήμμα (1) και η δεύτερη το λήμμα (2). □

Πρόταση. Το (S, π, X) είναι δράγμα.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε:

$$\tilde{s} : U \rightarrow \tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$$

είναι αντιστρέψιμη με

$$\tilde{s}^{-1} = \pi|_B : B \longrightarrow \pi(B) = U$$

όπου

$$B \ni B = \tilde{s}(U)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\tilde{s} : U \rightarrow \tilde{s}(U) = B$ είναι ομοιομορφισμοί. Δεδομένου το ότι είναι 1-1 και επί, έχουμε να δείξουμε ότι είναι συνεχείς και ανοιχτές.

\tilde{s} ανοιχτή: Έστω $V \subseteq U$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $\tilde{s}(V)$ είναι ανοιχτό. Ειδικότερα, είναι βασικό. Υπάρχει $t = \rho_V^U(s)$, αφού είχαμε ξεκινήσει με ένα $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε

$$\rho_V^U : S(U) \longrightarrow S(V) \ni t = \rho_V^U(s)$$

άρα, από την παρατήρηση:

$$\tilde{s}(V) = \tilde{s}|_V(V) = \widetilde{\rho_V^U(s)}(V) = \tilde{t}(V) \in \mathcal{B} \subseteq \tau_S$$

με $\tau \in S(V)$.

\tilde{s} συνεχής: Έστω $x \in U$, θα δείξουμε ότι η \tilde{s} είναι συνεχής στο x . Έστω ανοιχτό $A \subseteq \tilde{s}(U)$ με $\tilde{s}(x) \in A$. Αφού A ανοιχτό, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$:

$$\tilde{s}(x) \in B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(U)$$

και αφού το B είναι βασικό, γράφεται ως $B = \tilde{\sigma}(V)$ με $V \in \tau_X$ και $\sigma \in S(V)$.

Επίσης $\tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$. Δηλαδή, από το λήμμα (2) υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ και $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

Θέτουμε $t := \rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma)$ και έτσι:

$$\tilde{s}(W) = \widetilde{\rho_W^U(s)}(W) = \tilde{t}(W) \in \mathcal{B}$$

αλλά και

$$\tilde{t}(W) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(V)$$

Δηλαδή, το $\tilde{s}(W) \subseteq A$ πέφτει μέσα στο ανοιχτό. □

Συμπέρασμα: κάθε προδράγμα συνόλων μας δίνει ένα δράγμα. Χρειαζόμαστε κάτι ακόμα για να είμαστε σωστοί.

Έστω $(f_U : S(U) \rightarrow T(U))_{U \in \tau_X}$ μορφισμός προδραγμάτων μεταξύ των $(S(U), \rho_V^U), (T(U), \lambda_V^U)$. Δηλαδή, έχουμε μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \lambda_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

Για κάθε $x \in X$:

$$(f_U : S(U) \rightarrow T(U))_{U \in \mathcal{N}_x^0}$$

είναι ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, τα οποία έχουν όρια $\mathcal{S}_x, \mathcal{T}_x$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός μορφισμός μεταξύ των ορίων

$$f_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{T}_x$$

που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ \rho_x^U \downarrow & & \downarrow \lambda_x^U \\ \mathcal{S}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{T}_x \end{array}$$

Θέτουμε:

$$\tilde{f} = \bigcup_{x \in X} f_x : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$$

Πρόταση. Η $\tilde{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ είναι μορφισμός δαγμάτων.

Λήμμα. Για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $s \in S(U)$, αν θεωρήσουμε $t = f_U(s)$ ισχύει ότι:

$$\tilde{t} = \tilde{f} \circ \tilde{s}$$

Απόδειξη. (του λήμματος.)

$$\tilde{s} : U \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\tilde{t} : U \rightarrow \mathcal{T}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{T} \\ \tilde{s} \swarrow & & \searrow \tilde{t} \\ & U \subseteq X & \end{array}$$

Για κάθε $x \in U$, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\tilde{f} \circ \tilde{s}(x)$. Από την μεταθετικότητα στα προηγούμενα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{t}(x) &= [t]_x = \lambda_x^U(t) = \lambda_x^U \circ f_U(s) = f_x \circ \rho_x^U(s) = \\ &= \tilde{f}([s]_x) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \end{aligned}$$

□

Ουσιαστικά, εδώ φαίνεται ότι οι \tilde{s}, \tilde{t} είναι (συνεχείς) τομές των δαγμάτων που κατασκευάσαμε. Το λήμμα μας προδίδει ότι \tilde{f} είναι μορφισμός, αφού μεταφέρει τις τομές σε τομές. Υπάρχει ωστόσο το λεπτό σημείο, ότι δεν ξέρουμε αν εξαντλούμε όλες τις τομές έτσι ώστε να επικαλεστούμε τον πρόταση/χαρακτηρισμό των μορφισμών (μάθημα 3).

Απόδειξη. (της πρότασης.)

(1) Κάνει μεταθετικό το τρίγωνο:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{T} \\ & \searrow \pi & \swarrow \mathfrak{p} \\ & X & \end{array}$$

εφόσον, αν $z \in \mathcal{S}$ τότε από το πρώτο λήμμα γράφουμε $z = \tilde{s}(x)$ για $x \in U$ με $U \in \tau_x$ και $s \in S(U)$. Τότε:

$$\mathfrak{p} \circ \tilde{f}(z) = \mathfrak{p} \circ \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) = \mathfrak{p} \circ \tilde{t}(x)$$

όπου $t = f_U(s) = x = \pi(z)$ και $\tilde{t}(x) \in \mathcal{T}_x$. Ισοδύναμα, η \tilde{f} διατηρεί τα νήματα εφόσον είναι η διακεκριμένη ένωση των f_x .

(2) Η \tilde{f} είναι συνεχής: Έστω $z = \tilde{s}(x) \in \mathcal{S}$ (από το λήμμα (1)). Έστω B βασική περιοχή του $\tilde{f}(z)$. Το B γράφεται ως:

$$B = \tilde{\sigma}(V), \quad V \in \mathcal{N}_x^0, \quad \sigma \in T(V)$$

Θέτουμε $t = f_U(s) \in T(U)$.

Άρα $\tilde{f}(z) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x) \in \tilde{\sigma}(V)$ και ταυτόχρονα $\tilde{f}(z) = \tilde{t}(x) \in \tilde{t}(V)$. Άρα από το δεύτερο λήμμα, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ για το οποίο:

$$\tilde{t}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

όμως από ορισμό \tilde{t} έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \circ \tilde{s}|_W &= \tilde{\sigma}|_W \implies \\ \tilde{f} \circ \widetilde{\rho_W^U(s)}|_W &= \tilde{\sigma}|_W \implies \\ \tilde{f} \left(\widetilde{\rho_W^U(s)(W)} \right) &= \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B \end{aligned}$$

με $\widetilde{\rho_W^U(s)(W)}$ ένα βασικό σύνολο της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{S}}$, άρα και ανοιχτό και μέσα από την f πέφτει μέσα στην εικόνα που θέλουμε. \square

Θεώρημα. Το ζεύγος $(F_1, F_2) : \mathcal{PSh}_X \longrightarrow \mathcal{Sh}_X :$

$$F_1((S(U), \rho_V^U)) = \mathcal{S}$$

$$F_2((f_U : S(U) \rightarrow T(U))_{U \in \tau_X}) = \tilde{f}$$

είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

Απόδειξη. Είναι προφανές, αρκεί να δείξουμε ότι μεταφέρει την ταυτοτική στην ταυτοτική και την σύνθεση στην σύνθεση. \square

Μάθημα 7 - Πέμπτη 17/03/2022.

Έχουμε βρει τρόπο από τα προδράγματα να φτιάχνουμε δράγματα μέσω του επαγωγικού ορίου, καθώς και αντίστροφα από τα δράγματα να φτιάχνουμε προδράγματα κάνοντας τα προδράγματα τομών. Αν κάνουμε διαδοχικά αυτές τις διαδικασίες φτάνουμε πάλι στο αρχικό αντικείμενο; Για να απαντήσουμε χρειαζόμαστε κάποιες βοηθητικές έννοιες.

Ορισμός. Ένα προδράγμα συνόλων $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ λέγεται πλήρες, αν για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U ισχύουν οι συνθήκες:

- (1) Αν $s, t \in S(U)$ έτσι ώστε:

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t) \quad \forall a \in A \implies s = t$$

- (2) Για τα $s_a \in S(U_a)$ για κάθε $a \in A$ ισχύει:

$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \quad \forall a, b \in A : U_a \cap U_b \neq \emptyset \implies$$

$$\text{Υπάρχει } s \in S(U) : \rho_{U_a}^U(s) = s_a$$

Πολύ συχνά ισχύει μόνο το (1) και τότε το προδράγμα λέγεται μονοπροδράγμα.

Παράδειγμα.

- (1) Έστω (X, τ_X) τοπολογικός χώρος και $(\mathcal{C}(U), \rho_V^U)$ το προδράγμα των συνεχών συναρτήσεων με τους συνήθεις περιορισμούς. Είναι προφανές ότι είναι πλήρες.
- (2) Τα προδράγματα των διαφορίσιμων, ολόμορφων, αναλυτικών;
- (3) Το προδράγμα $(B(U), r_V^U)$ με συνήθεις περιορισμούς, όπου

$$B(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένη}\}$$

είναι προδράγμα αλλά όχι πλήρες. Αν ενώσουμε φραγμένες συναρτήσεις δεν παίρνουμε φραγμένη απαραίτητα. Είναι όμως μονοπροδράγμα.

- (4) Έστω (\mathcal{S}, π, X) δράγμα, τότε το:

$$(\mathcal{S}(U), r_V^U)$$

όπου r_V^U είναι οι συνήθεις περιορισμοί και $\mathcal{S}(U)$ είναι οι τομές πάνω από το $U \in \tau_X$, είναι πλήρες προδράγμα (ως συναρτησιακό).

Έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ ένα προδράγμα και μέσω του συναρτητή δραματοποίησης \mathbb{S} παίρνουμε ένα (\mathcal{S}, π, X) , στο οποίο εφαρμόζουμε τον συναρτητή τομής Γ και φτάνουμε σε ένα $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$. Θα είναι το αρχικό προδράγμα S ισόμορφο με το τελικό $\Gamma\mathbb{S}(S)$;

Λήμμα. Υπάρχει (φυσικός) μορφισμός προδραγμάτων:

$$\rho : S \longrightarrow \Gamma\mathbb{S}(S)$$

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{\rho_U} & \mathcal{S}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow r_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{\rho_V} & \mathcal{S}(V) \end{array}$$

Τον οποίο έχουμε ήδη κατασκευάσει προηγουμένως. Για κάθε $U \in \tau_X$:

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U)$$

$$\rho_U(s) = \tilde{s}$$

Το διάγραμμα είναι μεταθετικό, εφόσον για κάθε $s \in S(U)$:

$$\rho_V \circ \rho_V^U(s) = \widetilde{\rho_V^U(s)} = \tilde{s}|_V = r_V^U(\tilde{s}) = r_V^U \circ \rho_U(s)$$

Παρατήρηση. Τα $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ και $(S(U), \rho_V^U)$ είναι ισόμορφα \iff Για κάθε $U \in \tau_X$ η ρ_U είναι 1-1 και επί. (Ισχύει και το ευθύ αλλά δεν είναι άμεσο.)

Ένας μορφισμός προδραγμάτων λέγεται 1-1 (αντ. επί), αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 (αντ. επί) και ισομορφισμός αν όλες οι απεικονίσεις είναι 1-1 και επί. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι απεικονίσεις γυρίζουν προς τα πίσω ενώ διατηρούν την μεταθετικότητα των τετραγώνων.

Θεώρημα. Ο μορφισμός προδραγμάτων

$$(\rho_U : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U), \quad \rho_U(s) = \tilde{s})_{U \in \tau_X}$$

είναι ισομορφισμός \iff κάθε ρ_U είναι 1-1 και επί \iff το αρχικό προδράγμα $(S(U), \rho_V^U)$ είναι πλήρες.

Απόδειξη. Η πρώτη ισοδυναμία είναι ορισμός. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Το πρώτο είναι ότι το 1-1 \implies μονοπροδράγμα.

(1) Δείχνουμε ότι ρ_U 1-1 για κάθε $U \in \tau_X \iff (S(U), \rho_V^U)$ μονοπροδράγμα.

(\implies) Έστω ότι όλα τα ρ_U είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι το S είναι μονοπροδράγμα. Παίρνουμε ένα τυχαίο $U \in \tau_X$ και $(U_a)_{a \in A}$ ανοιχτό κάλυμμα του U . Έστω $s, t \in S(U)$ με

$$\rho_{U_a}^U(s) = \rho_{U_a}^U(t)$$

για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και $x \in U_a$ έχουμε:

$$\tilde{s}(x) = [s]_x = \rho_x^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(s) = \rho_x^{U_a} \circ \rho_{U_a}^U(t) = \rho_t^U = [t]_x = \tilde{t}(x)$$

αφού \tilde{s}, \tilde{t} είναι τομές που ορίζονται στο $U \rightarrow \mathcal{S}$, καθώς και το παρακάτω τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & & \\ \downarrow \rho_{U_a}^U & \searrow \rho_x^U & \\ & \mathcal{S} & \\ \uparrow \rho_x^{U_a} & & \\ S(U_a) & & \end{array}$$

Άρα για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ ισχύει:

$$\tilde{s}|_{U_a} = \tilde{t}|_{U_a} \quad \forall a \in A$$

δηλαδή, ικανοποιείται η υπόθεση της (1) για τα $\tilde{s}, \tilde{t} \in \mathcal{S}(U)$ και την κάλυψη (U_a) του U . Επειδή $(\mathcal{S}(U), r_V^U)$ είναι πλήρες, έπεται ότι $\tilde{s} = \tilde{t}$. Δηλαδή, $\rho_U(s) = \rho_U(t)$ και ρ_U 1-1, συνεπώς $s = t$.

(\Leftarrow) Αν S μονοπροδράγμα, τότε κάθε ρ_U 1-1. Πράγματι, έστω $U \in \tau_X$ και $s, t \in S(U)$ με

$$\begin{aligned}\rho_U(s) &= \rho_U(t) \implies \\ \tilde{s} &= \tilde{t} \in \mathcal{S}(U) \implies \\ \tilde{s}(x) &= \tilde{t}(x) \quad \forall x \in U \implies \\ [s]_x &= [t]_x\end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχει $U_x \in \mathcal{N}_x^0$:

$$\rho_{U_x}^U(s) = \rho_{U_x}^U(t)$$

και με τα U_x έχουμε μια ανοιχτή κάλυψη του U καθώς και ισχύει η υπόθεση του μονοπροδράγματος, άρα παίρνουμε $s = t$ και άρα η ρ_U είναι 1-1.

(2)

Θα περίμενε κανείς ότι εφόσον το 1-1 είναι ισοδύναμο με την συνθήκη (1), τότε και το επί θα ήταν με την συνθήκη (2). Ωστόσο, δεν είναι έτσι, όπως θα δούμε χρειάζεται και το 1-1 και το επί για την συνθήκη (2).

(\Rightarrow) Έστω κάθε ρ_U 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2). Έστω $U \in \tau_X$, μια ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a \in A}$ του U και

$$s_a \in S(U_a) \quad \forall a \in A$$

$$\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a) = \rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b) \in S(U_a \cap U_b)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ με $\rho_{U_a}^U(s) = s_a$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_a}(s_a)} &= \widetilde{\rho_{U_a \cap U_b}^{U_b}(s_b)} \implies \\ \tilde{s}_a|_{U_a \cap U_b} &= \tilde{s}_b|_{U_a \cap U_b}\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα τα $(U_a)_{a \in A}$ και $\tilde{s}_a \in \mathcal{S}(U_a)$, δηλαδή έχουμε μεταφέρει την κατάσταση από το αρχικό προδράγμα στο προδράγμα των τομών. Το δεύτερο είναι πλήρες, δηλαδή ισχύει για αυτό η ιδιότητα (2) και άρα υπάρχει μια τομή $xi \in \mathcal{S}(U)$ τέτοια ώστε, ο (συνήθης) περιορισμός της στο U_a να δίνει την τομή στο a .

$$\xi|_{U_a} = \tilde{s}_a$$

Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι οι ρ_U είναι επί:

$$\rho_U \longrightarrow \mathcal{S}(U) \ni \xi \implies$$

$$\text{Υπάρχει } \sigma \in S(U) : \quad \rho_U(\sigma) = \xi$$

$$\tilde{\sigma} = \xi$$

Θα δείξουμε ότι $\rho_{U_a}^U(\sigma) = s_a$. Πράγματι:

$$\widetilde{\rho_{U_a}^U(\sigma)} = \tilde{\sigma}|_{U_a} = \xi|_{U_a} = \tilde{s}_a \implies \\ \rho_{U_a}(\rho_{U_a}^U(\sigma)) = \rho_{U_a}(s_a)$$

και εφόσον όλες οι ρ_{U_a} είναι 1-1 έχουμε:

$$\rho_{U_a}^U(\sigma) = s_a$$

(\Leftarrow) Έστω S πλήρες. Θα δείξουμε ότι κάθε ρ_U είναι επί. Έστω $U \in \tau_X$ και $\xi \in S(U)$. Θα βρούμε $s \in S(U)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi = \tilde{s}$.

Για κάθε $x \in U$ ξέρουμε ότι $\xi(x) \in \mathcal{S}_x$, άρα από τον ορισμό του επαγωγικού ορίου υπάρχουν $U_x \in \mathcal{N}_x^0$ και $\sigma_x \in S(U_x)$ τέτοια ώστε:

$$\xi(x) = [\sigma_x]_x = \tilde{\sigma}_x(x) \implies \\ \text{Υπάρχει } V_x \subseteq U \cap U_x, \quad V_x \in \mathcal{N}_x^0 : \\ \xi|_{V_x} = \tilde{\sigma}_x|_{V_x}$$

Θέτουμε $s_x := \rho_{V_x}^{U_x}(\sigma_x) \in S(V_x)$ και σχηματίζουμε τις οικογένειες $(V_x)_{x \in U}$ μαζί με $(s_x \in S(V_x))_{x \in U}$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτά ικανοποιούν την υπόθεση της συνθήκης (2).

Έστω $V_x \cap V_y \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι:

$$\rho_{V_x \cap V_y}^{V_x}(s_x) = \rho_{V_x \cap V_y}^{V_y}(s_y)$$

και συμβολίζουμε τα δύο μέλη της ζητούμενης ισότητας με t_x και t_y αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $z \in V_x \cap V_y$ έχουμε:

$$\tilde{s}_x(z) = \tilde{\sigma}_x(z) = \xi(z) = \tilde{\sigma}_y(z) = \tilde{s}_y(z)$$

άρα αφού οι δύο τομές συμπίπτουν στο ίδιο σημείο, υπάρχει $W_z \subseteq V_x \cap V_y$ με:

$$\rho_{W_z}^{V_x}(s_x) = \rho_{W_z}^{V_y}(s_y) \implies \\ \rho_{W_z}^{V_x \cap V_y} \circ \rho_{V_x \cap V_y}^{V_x}(s_x) = \rho_{W_z}^{V_x \cap V_y} \circ \rho_{V_x \cap V_y}^{V_y}(s_y) \implies \\ \rho_{W_z}^{V_x \cap V_y}(t_x) = \rho_{W_z}^{V_x \cap V_y}(t_y)$$

οπότε η οικογένεια (W_z) είναι ανοιχτή κάλυψη του $V_x \cap V_y$ και $t_x, t_y \in S(V_x \cap V_y)$ με ίσους περιορισμούς στο W_z . Άρα από την συνθήκη (1) έχουμε $t_x = t_y$. Άρα οι οικογένειες $(V_x), (s_x)$ ικανοποιούν την (2). Μαζί με την υπόθεση ότι το S είναι πλήρες έχουμε ότι υπάρχει $s \in S(U)$ τέτοιο ώστε:

$$\rho_{V_x}^U(s) = s_x$$

Τότε, για κάθε $x \in U$ ισχύει:

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}_x(x) = \tilde{\sigma}_x(x) = \xi(x)$$

δηλαδή, πράγματι έχουμε $\tilde{s} = \rho_U(s) = \xi$ και άρα ρ_U επί.

□

Αν ξεκινήσουμε λοιπόν από ένα προδράγμα και φτιάξουμε το δράγμα και πάμε μετά στο προδράγμα των τομών, τότε το πρώτο και το τελευταίο είναι ισόμορφα προδράγματα αν και μόνο αν είχαμε ξεκινήσει από πλήρες προδράγμα. Άρα γενικά αυτή η διαδικασία δεν γυρίζει πίσω στο αρχικό προδράγμα, αλλά φτιάχνει κάτι πιο πλούσιο.

Μάθημα 8 - Τρίτη 22/03/2022.

Αν ξεκινήσουμε με ένα προδράγμα $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ στο οποίο εφαρμόσουμε τον συναρτητή δραγατοποίησης παίρνουμε ένα δράγμα (\mathcal{S}, π, X) , στο οποίο εφαρμόζουμε τον συναρτητή τομή και φτάνουμε σε ένα προδράγμα $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$. Αυτό δεν είναι απαραίτητα ισόμορφο με το αρχικό.

Πρόταση. Το $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ είναι ισόμορφο με το $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$

$$\iff \forall U \in \tau_X : \rho_U : S(U) \rightarrow \mathcal{S}(U)$$

η φυσική απεικόνιση (φυσικός μετασχηματισμός) είναι 1-1 και επί $\iff (S(U), \rho_V^U)$ πλήρες.

Μπορούμε να κάνουμε την διαδικασία αλλιώς, ξεκινώντας από ένα δράγμα.

$$(\mathcal{S}, \pi, X) \rightsquigarrow (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X} \rightsquigarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\pi}, X)$$

Θεώρημα. Τα (\mathcal{S}, π, X) και $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\pi}, X)$ είναι ισόμορφα.

Απόδειξη. Από το πλήρες προδράγμα των τομών $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)$, για κάθε $x \in X$ παίρνουμε το επαγωγικό σύστημα $(\Gamma(U, \mathcal{S}), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^0}$ που έχει όριο το $\tilde{\mathcal{S}}_x$.

$$\tilde{\mathcal{S}}_x = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}_x^0} \Gamma(U, \mathcal{S}) / \sim_x$$

όπου $s, \sigma \in \bigsqcup \Gamma(U, \mathcal{S}) \implies s \in \Gamma(U, \mathcal{S}), \sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S}), U, V \in \mathcal{N}_x^0$ με

$$s \sim_x \sigma \iff \exists W \in \mathcal{N}_x^0$$

με $W \subseteq U \cap V$:

$$\rho_V^U(s) = \rho_W^V(\sigma) \iff s|_W = \sigma|_W \iff s(x) = \sigma(x)$$

από το λήμμα της τρίτης διάλεξης που από ισότητα σε σημείο είχαμε ισότητα σε περιοχή.

Για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^0$ ονομάζουμε:

$$\begin{aligned} r_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_x : \\ \rho_U(s) &= [s]_x \end{aligned}$$

και ζητάμε ομοιομορφισμό $R : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ που κάνει το τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{R} & \tilde{\mathcal{S}} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & X & \end{array}$$

Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε υπάρχει $x = \pi(z) \in X$ με $U \in \mathcal{N}_x^0$ και $s \in \mathcal{S}(U) = \Gamma(U, \mathcal{S})$ με $s(x) = z$.

Θέτουμε $R(z) = [s]_x \in \tilde{\mathcal{S}}_x$ και είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, εφόσον αν $z = \sigma(x)$ με $\sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S}), V \in \mathcal{N}_x^0$ τότε $s(x) = \sigma(x) = z$ και άρα υπάρχει $W \subseteq U \cap V, W \in \mathcal{N}_x^0$ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} s|_W &= \sigma|_W \iff \\ s \sim_x \sigma &\iff \end{aligned}$$

$$[s]_x = [\sigma]_x$$

R 1-1: Έστω $z, w \in \mathcal{S}$, τότε $z = s(x)$ για κάποιο $x = \pi(z)$ με $U \in \mathcal{N}_x^0, s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ και όμοια $w = \sigma(y)$ και $y = \pi(w)$ με $V \in \mathcal{N}_y^0, \sigma \in \Gamma(V, \mathcal{S})$.

Αν $R(z) = R(w) \implies [s]_x = [\sigma]_y$ ανήκουν σε διαφορετικά νήματα και άρα $x = y$. (Για $x \neq y, \tilde{\mathcal{S}}_x \cap \tilde{\mathcal{S}}_y = \emptyset$). Άρα $[s]_x = [\sigma]_x$, συνεπώς υπάρχει W κατά τα γνωστά με:

$$s|_W = \sigma|_W \implies z = s(x) = \sigma(x) = w \quad (w \in W)$$

R επί: Έστω $\xi \in \tilde{\mathcal{S}} \implies \xi = [s]_x$ με $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, από ορισμό $\xi = R(s(x) = z)$

$$\tilde{\pi} \circ R(z) = \tilde{\pi}([s]_x) = x$$

και

$$\pi(z) = \pi(s(x)) = x \implies$$

$$\tilde{\pi} \circ R = \pi$$

Το ότι η R είναι ομοιομορφισμός είναι προφανές διότι μεταφέρει τα βασικά της $\tau_{\mathcal{S}}$ στα βασικά της $\tau_{\tilde{\mathcal{S}}}$ όπου αυτά είναι οι εικόνες των τομών. \square

Προδράγματα με αλγεβρική δομή

Ορισμός (Προδράγμα Ομάδων). Ένα προδράγμα ομάδων πάνω από τον χώρο (X, τ_X) είναι ένα προδράγμα συνόλων $(S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ έτσι ώστε:

(1) Για κάθε $U \in \tau_X$, το $S(U)$ είναι ομάδα και για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$ η απεικόνιση $\rho_V^U : S(U) \rightarrow S(V)$ είναι μορφισμός ομάδων.

(2) Αν $S \equiv (S(U), \rho_V^U), T \equiv (T(U), \phi_V^U)$ είναι προδράγματα ομάδων ένας μορφισμός προδραγμάτων ομάδων $f : S \rightarrow T$ είναι μια οικογένεια

$$(f_U : S(U) \rightarrow T(U))$$

που είναι μορφισμός προδραγμάτων συνόλων, δηλαδή κάνει τα τετράγωνα μεταθετικά:

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{f_U} & T(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \phi_V^U \\ S(V) & \xrightarrow{f_V} & T(V) \end{array}$$

και επιπλέον κάθε f_U είναι μορφισμός ομάδων.

Ερώτηση: Η δομή της ομάδας περνάει στην δραματοποίηση;

Θεώρημα. Έστω $(G_\lambda, \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}$ ένα επαγωγικό σύστημα ομάδων, έτσι το (Λ, \leq) είναι κατευθυνόμενο σύνολο, άρα υπάρχει το επαγωγικό όριο (G, ρ_λ) και αυτό δέχεται δομή ομάδας στο G :

(1) Κάθε $\rho_\lambda : G_\lambda \rightarrow G$ είναι μορφισμός ομάδας.

(2) Αν $(G_\lambda, \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}$ και $(H_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}$ είναι επαγωγικά συστήματα ομάδων με (Λ, \leq) κατευθυνόμενο και

$$(f_\lambda : G_\lambda \rightarrow H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

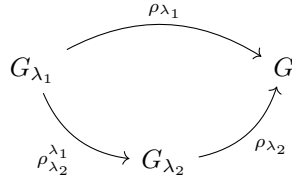
μορφισμός επαγωγικών συστημάτων ομάδων, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $f : G \rightarrow H$ είναι μορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Στο $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ θεωρώ για $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ την σχέση $x \sim y \iff$ υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$:

$$\rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x) = \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y)$$

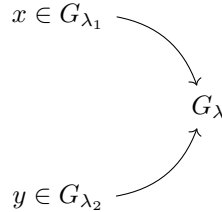
$$G = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda / \sim$$

Έστω $[x] = \rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x)$ και $[y] = \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y) \in G$, όπου $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ τότε το τρίγωνο είναι μεταθετικό:



δηλαδή $[x] = [\rho_{\lambda_2}^{\lambda_1}(x)]$.

Ξεκινήσαμε με $[x], [y] \in G$, δηλαδή $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ και υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ και μπορούμε να πετάξουμε τα x, y στην ομάδα G_λ :



Οπότε παίρνουμε τα $\rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x), \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y) \in G_\lambda$ μέσα στην ομάδα, άρα υπάρχει το γινόμενο τους

$$\rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y) \in G_\lambda \implies$$

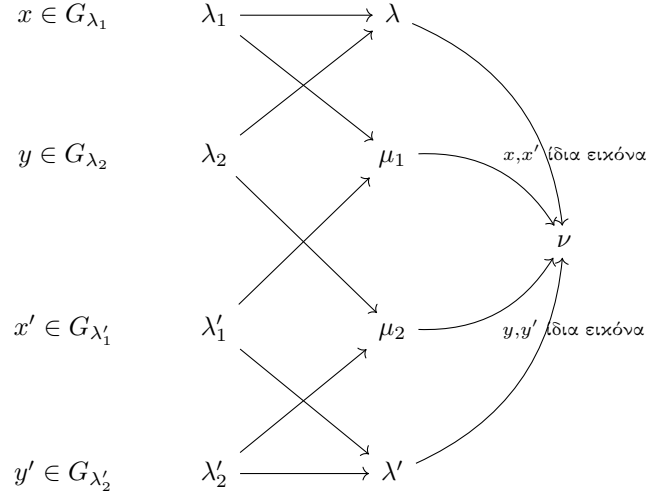
$$\rho_\lambda(\rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y)) = [\rho_{\lambda_1}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\lambda_2}^{\lambda_2}(y)] \in G$$

θέτουμε το τελευταίο με $[x] \cdot [y]$.

Η πράξη $[x] \cdot [y]$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους x, y , δηλαδή είναι καλά ορισμένη. Αν $[x] = [x']$ και $[y] = [y']$ τότε θα πρέπει $[x] \cdot [y] = [x'] \cdot [y']$.

Πράγματι, αν $x \in G_{\lambda_1}, x' \in G_{\lambda'_1}, y \in G_{\lambda_2}, y' \in G_{\lambda'_2}$

$$[x] = [x'] \iff \exists \mu_1 \geq \lambda_1, \lambda'_1 : \rho_{\mu_1}^{\lambda_1}(x) = \rho_{\mu_1}^{\lambda'_1}(x')$$



$$[y] = [y'] \iff \exists \mu_2 \geq \lambda_2, \lambda'_2 :$$

$$\rho_{\mu_2}^{\lambda_2}(y) = \rho_{\mu_2}^{\lambda'_2}(y')$$

Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$:

$$[x] \cdot [y] = [\rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y)]$$

Υπάρχει $\lambda' \geq \lambda'_1, \lambda'_2$:

$$\rho_{\lambda'}^{\lambda'_1}(x') \cdot \rho_{\lambda'}^{\lambda'_2}(y')$$

Θέλουμε να δούμε αν είναι ίσα. Υπάρχει $\nu \geq \lambda, \lambda', \mu_1, \mu_2$ με

$$\begin{aligned} & \rho_{\nu}^{\lambda}(\rho_{\lambda}^{\lambda_1} \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y)) = \\ & \rho_{\nu}^{\lambda} \cdot \rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y) = \\ & \rho_{\nu}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\lambda_2}(y) = \\ & \rho_{\nu}^{\mu_1} \circ \rho_{\mu_1}^{\lambda_1}(x) \cdot \rho_{\nu}^{\mu_2} \circ \rho_{\mu_2}^{\lambda_2}(y) = \\ & \rho_{\nu}^{\mu_1} \circ \rho_{\mu_1}^{\lambda'_1}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\mu_2} \circ \rho_{\mu_2}^{\lambda'_2}(y') = \\ & \rho_{\nu}^{\lambda'_1}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\lambda'_2}(y') = \\ & \rho_{\nu}^{\lambda'} \circ \rho_{\lambda'}^{\lambda'_1}(x') \cdot \rho_{\nu}^{\lambda'} \circ \rho_{\lambda'}^{\lambda'_2}(y') = \\ & \rho_{\nu}^{\lambda'}(\rho_{\lambda'}^{\lambda'_1} \cdot \rho_{\lambda'}^{\lambda'_2}(y')) \end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda} &: G_{\lambda} \rightarrow G \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

είναι μορφισμός ομάδων. Πράγματι, έστω $x, y \in G_{\lambda}$

Θέλουμε να ισχύει $\rho_{\lambda}(xy) = \rho_{\lambda}(x) \cdot \rho_{\lambda}(y)$.

$$\rho_{\lambda}(x) \cdot \rho_{\lambda}(y) = [x] \cdot [y] = [xy] = \rho_{\lambda}(xy)$$

□

Μάθημα 9 - Πέμπτη 24/03/2022.

Θεώρημα. (1) Αν $(G_\lambda, \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1})_{\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \Lambda}, ((\Lambda, \leq)$ κατευθυνόμενο) επαγωγικό σύστημα ομάδων, τότε υπάρχει το όριο (G, ρ_λ) με G ομάδα και $\rho_\lambda : G_\lambda \rightarrow G$ μορφισμός ομάδων για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

(2) Αν έχουμε δύο επαγωγικά συστήματα ομάδων $(G_\lambda, \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1}), (H_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$ με όρια $(G, \rho_\lambda), (H, \phi_\lambda)$ και $(f_\lambda : G_\lambda \rightarrow H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μορφισμός επαγωγικών συστημάτων ομάδων, τότε η επαγόμενη $f : G \rightarrow H$ είναι μορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. (1) Ως συνήθως θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση:

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

και ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας: αν $x, y \in \bigsqcup G_\lambda$ τότε υπάρχουν δείκτες $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ με $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$ με

$$x \sim y \iff \exists \lambda \geq \lambda_1 \lambda_2 : \rho_\lambda^{\lambda_1}(x) = \rho_\lambda^{\lambda_2}(y)$$

Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και για κάθε $x \in G_\lambda$ έχουμε ότι $x \sim \rho_\mu^\lambda(x)$ για κάθε $\mu \geq \lambda$. Ως γνωστόν, η $G = \bigsqcup G_\lambda /$ είναι το επαγωγικό όριο του συστήματος. Θα βάλουμε δομή ομάδας.

Έστω $[x], [y] \in G$. Τότε υπάρχουν δείκτες λ_1, λ_2 με $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\rho_\lambda^{\lambda_1}(x), \rho_\lambda^{\lambda_2}(y) \in G_\lambda$ άρα και το γινόμενο θα ανήκει στην ομάδα

$$\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}(y) \in G$$

δηλαδή έχουμε την σχέση:

$$\rho_\lambda \left(\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}(y) \right) = [\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}(y)]$$

Η πράξη $[x][y]$ είναι καλά ορισμένη και είναι πράξη ομάδας με ουδέτερο στοιχείο το $[e_\lambda]$ για κάθε $\lambda \in \Lambda, (e_{\lambda_1} \sim e_{\lambda_2}, \forall \lambda_1, \lambda_2)$ και $[x]^{-1} = [x^{-1}]$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\rho_\lambda : G_\lambda \rightarrow G$ με $\rho_\lambda(x) = [x]$ είναι μορφισμός ομάδων. Πράγματι:

$$\rho_\lambda(xy) = [xy] = [\rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}(y)] \stackrel{\circ\circ\sigma}{=} [x] \cdot [y] = \rho_\lambda(x) \cdot \rho_\lambda(y)$$

(2)

$$\begin{array}{ccc} G_{\lambda_1} & \xrightarrow{f_{\lambda_1}} & H_{\lambda_1} \\ \downarrow \rho_{\lambda_2}^{\lambda_1} & & \downarrow \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} \\ \rho_{\lambda_1} \left(G_{\lambda_2} \xrightarrow{f_{\lambda_2}} H_{\lambda_2} \right) \phi_{\lambda_1} & & \\ \downarrow \rho_{\lambda_2} & & \downarrow \phi_{\lambda_2} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Έχουμε δείξει ότι στα επαγωγικά συστήματα συνόλων την ύπαρξη μοναδικής $f : G \rightarrow H$ που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα. Αν $[x] \in G$ τότε $x \in G_\lambda \implies f_\lambda(x) \in H_\lambda \implies [f_\lambda(x)] \in H$, δηλαδή $\phi_\lambda(f_\lambda(x)) = [f_\lambda(x)] \in H$.

Ορίζουμε $f([x]) = \phi_\lambda(f_\lambda(x)) = [f_\lambda(x)]$ και θα δείξουμε ότι είναι μορφισμός ομάδων.

$$\begin{array}{ccccc}
G_{\lambda_1} & \xrightarrow{f_{\lambda_1}} & H_{\lambda_1} & & \\
\downarrow & & \downarrow & \nearrow \rho_{\lambda}^{\lambda_2} & \\
G_{\lambda} & \xrightarrow{f_{\lambda_2}} & H_{\lambda} & \xleftarrow{\phi_{\lambda}^{\lambda_2}} & H_{\lambda_2} \\
\downarrow \rho_{\lambda} & & \downarrow \phi_{\lambda} & & \\
G & \xrightarrow{f} & H & &
\end{array}$$

Έστω $x \in G_{\lambda_1}, y \in G_{\lambda_2}$. Υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $z := \rho^{\lambda_1}(x) \cdot \rho^{\lambda_2}(y) \in G_{\lambda}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
f([x][y]) &= f([z]) = [f_{\lambda}(z)] = \phi_{\lambda}(f_{\lambda}(z)) = \phi_{\lambda} \circ (z) = \\
&= \phi_{\lambda} \circ f_{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x) \cdot \phi_{\lambda} \circ f_{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y) = \\
&= [f_{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_1}(x)] \cdot [f_{\lambda} \circ \rho_{\lambda}^{\lambda_2}(y)] = \\
&= [\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x))] \cdot [\phi_{\lambda}^{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y))] = \\
&= (\phi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x))) \cdot (\phi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y))) = \\
&= \phi_{\lambda_1}(f_{\lambda_1}(x)) \cdot \phi_{\lambda_2}(f_{\lambda_2}(y)) = \\
&= [f_{\lambda_1}(x)] \cdot [f_{\lambda_2}(y)] = \\
&= f([x]) \cdot f([y])
\end{aligned}$$

□

Ανάλογα αποτελέσματα θα έχουμε για προδράγματα δακτυλίων, διανυσματικών χώρων πάνω από το F , αλγεβρών και προτύπων.

Έστω $R \equiv (R(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα δακτυλίων. Ένα R -πρότυπο είναι ένα προδράγμα (συνόλων) $M = (M(U), \lambda_V^U)$ έτσι ώστε για κάθε $U \in \tau_X$ το $M(U)$ είναι $R(U)$ -πρότυπο και για κάθε $V \subseteq U$ η απεικόνιση $\lambda_V^U : M(U) \rightarrow M(V)$ είναι ρ_V^U -μορφισμός προτύπων. Δηλαδή:

- (1) λ_V^U προσθετική: $\lambda_V^U(x + y) = \lambda_V^U(x) + \lambda_V^U(y)$ για κάθε $x, y \in M(U)$.
- (2) Αν $x \in M(U), r \in R(U)$ τότε $rx \in M(U)$ και $\lambda_V^U(rx) = \rho_V^U(r)\lambda_V^U(x) \in M(V)$, όπου $\rho_V^U(r) \in R(V), \lambda_V^U(x) \in M(V)$.

Παραδείγματα:

- (1) Αν (X, τ_X) είναι τοπολογικός χώρος τότε το $(\mathcal{C}(U), r_V^U)$ είναι προδράγμα αλγεβρών.
- (2) Αν (M, τ_M) είναι διαφορική πολλαπλότητα, το $(C^{\infty}(U), \rho_V^U)$ είναι προδράγμα αλγεβρών και το $(\mathcal{X}(U), \lambda_V^U)$ είναι προδράγμα των διανυσματικών πεδίων της M . Κάθε $\mathcal{X}(U)$ είναι C^{∞} -πρότυπο (γενικά οι τομές διανυσματικών δεσμών είναι \mathcal{C} ή C^{∞} -πρότυπα.)

Αν έχουμε ένα προδράγμα ομάδων $(G(U), \rho_V^U)$ τότε ξέρουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει το όριο του επαγωγικού συστήματος ομάδων $((G(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}_x^o})$. Τα νήματα G_x έχουν δομή ομάδας όπου G είναι το αντίστοιχο δράγμα. Δεν έχουμε ωστόσο μια πράξη ομάδας $G \times G \rightarrow G$ αλλά μόνο

$$*_x : G_x \times G_x \rightarrow G_x \rightsquigarrow \sqcup *_x \bigsqcup_{x \in X} G_x \times G_x \rightarrow \bigsqcup_{x \in X} G_x = G$$

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός (Νηματικό Γινόμενο). Έστω δύο δράγματα $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, p, X)$. Ορίζουμε το νηματικό τους γινόμενο να είναι το σύνολο:

$$\mathcal{S} \times_X \mathcal{T} = \{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \mid \pi(s) = p(t)\} = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x) \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{T}$$

και το νηματικό γινόμενο γίνεται τοπολογικός χώρος που κληρονομεί την σχετική τοπολογία από την τοπολογία γινόμενο του $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Επιπλέον, έχουμε μια καλά ορισμένη προβολή στον χώρο βάσης:

$$\Pi : \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} \longrightarrow X$$

$$\Pi(s, t) = \pi(s) = p(t) \in X$$

Πρόταση. Το $(\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}, \Pi, X)$ είναι δράγμα (γινόμενο στην κατηγορία δραγμάτων)

Απόδειξη.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} & \subseteq & \mathcal{S} \times \mathcal{T} \\ & \searrow & \downarrow p_{\mathcal{S}} = \text{συνεχής και ανοιχτή} \\ & & \mathcal{S} \\ & & \downarrow \pi = \text{συνεχής και ανοιχτή} \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (s, t) & \xrightarrow{p_{\mathcal{S}}} & p_{\mathcal{S}}(t, s) = s \\ & \searrow \Pi & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Άρα $\Pi = \pi \circ p_{\mathcal{S}} = p \circ p_{\mathcal{T}} = \text{συνεχής και ανοιχτή}$. Δηλαδή το παρακάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό και μένει να δείξουμε ότι η Π είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} & \xrightarrow{p_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S} \\ p_{\mathcal{T}} \downarrow & \searrow \Pi & \downarrow \pi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Έστω $(s, t) \in \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$, τότε για κάποιο $x \in X$ έχουμε $s \in \mathcal{S}_x, t \in \mathcal{T}_x$. Άρα εφόσον π, p είναι τοπικοί ομοιομορφισμοί έχουμε ότι υπάρχουν $U \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $s \in U, \pi|_U : U \rightarrow \pi(U) \subseteq X$ ανοιχτό με $\pi|_U$ ομοιομορφισμό αντίστοιχα $V \subseteq \mathcal{T}$ ανοιχτό με $t \in V$ και $p|_V : V \rightarrow p(V)$ ομοιομορφισμό. Θέτουμε $W := p(V) \cap \pi(U) \in \mathcal{N}_x^0$ και μικραίνοντας κατάλληλα τα αρχικά U, V παίρνουμε

$$\pi|_U : U \longrightarrow W, \quad p|_V : V \longrightarrow W$$

ομοιομορφισμούς. Το $U \times V \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ είναι ανοιχτό στην τοπολογία γινόμενο και άρα

$$A = (U \times V) \cap (\mathcal{S} \times_X \mathcal{T})$$

είναι ανοιχτό του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι $\Pi|_A \rightarrow W$ 1-1 και επί.

Μάθημα 10 - Τρίτη 29/03/2022.

Απόδειξη. (συνέχεια)

Έστω $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in A$, τότε $\Pi(s_1, t_1) = \Pi(s_2, t_2) \implies \pi(s_1) = \pi(s_2) = p(t_1) = p(t_2) = x \in W$ άρα $s_1, s_2 \in U, t_1, t_2 \in V$. Αφού $\pi|_U$ είναι 1-1 έχουμε $s_1 = s_2$. Ομοίως, $p|_V$ είναι 1-1 και άρα $t_1 = t_2$. Άρα Π 1-1.

Έστω $x \in W = \pi(U) = p(V) \implies \exists s \in U : \pi(s) = x$ και υπάρχει $t \in V : p(t) = x$. Άρα $(s, t) \in \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ και $(s, t) \in U \times V$. Άρα $(s, t) \in A$, δηλαδή Π επί. \square

Τομές του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$:

$$X \supseteq U \xrightarrow{a} \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$$

θέλουμε a να είναι συνεχής με

$$\begin{aligned} \Pi \circ a &= id_U \implies \\ \Pi(a(x)) &= x \quad \forall x \in U \implies \\ a(x) &\in \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} & \xrightarrow{p_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S} \\ \uparrow a & \swarrow p_{\mathcal{S}} \circ a & \nearrow \pi \\ X \supseteq U & & \end{array}$$

$p_{\mathcal{S}} \circ a$ συνεχής και $\pi \circ p_{\mathcal{S}} \circ a = \Pi \circ a = id_U$, άρα $p_{\mathcal{S}} \circ a \in \mathcal{S}(U), p_{\mathcal{T}} \circ a \in \mathcal{T}(U)$. Δηλαδή,

$$a \in \Gamma(U, \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}) \iff a = (a_1, a_2), a_1 \in \Gamma(U, \mathcal{S}), a_2 \in \Gamma(U, \mathcal{T})$$

πράγματι, ισχύει και αντίστροφα εφόσον αν $s \in \Gamma(U, \mathcal{S}), t \in \Gamma(U, \mathcal{T})$ τότε το $a = (s, t) : U \rightarrow \mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ είναι τομή.

Έστω $S \equiv (S(U), \rho_V^U), T \equiv (T(U), \lambda_V^U)$ προδράγματα συνόλων πάνω από το X . Τότε το $(S(U) \times T(U), \rho_V^U \times \lambda_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ είναι προδράγμα συνόλων. Πράγματι:

(1) Για κάθε $U \in \tau_X$ έχουμε $\rho_U^U \times \lambda_U^U : S(U) \times T(U) \rightarrow S(U) \times T(U) = id_{S(U)} \times id_{T(U)} = id_{S(U) \times T(U)}$.

(2) Για κάθε $W \subseteq V \subseteq U \in \tau_X$ έχουμε μεταθετικότητα:

$$\begin{array}{ccc} S(U) \times T(U) & \xrightarrow{\rho_V^U \times \lambda_V^U} & S(V) \times T(V) \\ \searrow \rho_W^U \times \lambda_W^U & & \swarrow \rho_W^V \times \lambda_W^V \\ & S(W) \times T(W) & \end{array}$$

Για κάθε $U \in \tau_X$ θεωρούμε την συνήθη προβολή:

$$p_{SU} : S(U) \times T(U) \longrightarrow S(U)$$

$$(s, t) \longmapsto s$$

Η $(p_{SU} : S(U) \times T(U) \rightarrow S(U))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων. Πράγματι έχουμε μεταθετικότητα στο τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} S(U) \times T(U) & \xrightarrow{p_{SU}} & S(U) \\ \rho_V^U \times \lambda_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ S(V) \times T(V) & \xrightarrow{p_{SV}} & S(V) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (s, t) & \xrightarrow{p_{SU}} & s \\ \rho_V^U \times \lambda_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ (\rho_V^U(s), \lambda_V^U(t)) & \xrightarrow{p_{SV}} & \rho_V^U(s) \end{array}$$

Ομοίως η $(p_{TU} : S(U) \times T(U) \rightarrow T(U))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων

Πρόταση. $S \equiv (S(U), \rho_V^U) \rightsquigarrow (\mathcal{S}, \pi, X), T \equiv (T(U), \lambda_V^U) \rightsquigarrow (\mathcal{T}, p, X)$ και $S \times T \equiv P \rightsquigarrow (\mathcal{P}, \Pi, X)$. Τότε τα $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}, \mathcal{P}$ έχουν ισόμορφα νήματα, δηλαδή για κάθε $x \in X$ έχουμε $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$.

Απόδειξη. Έστω $\xi \in \mathcal{P}_x \implies \xi = [(s, t)]_x$ όπου $(s, t) \in S(U) \times T(U)$ για κάποιο $U \in \mathcal{N}_x^0$. Τότε $s \in S(U), t \in T(U), U \in \mathcal{N}_x^0 \implies \exists [s]_x \in \mathcal{S}_x, [t]_x \in \mathcal{T}_x$. Θέτουμε:

$$\Phi_x : \mathcal{P}_x \longrightarrow \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$$

$$\xi \longmapsto ([s]_x, [t]_x)$$

όπου $\xi = [(s, t)]_x$.

(1) Η Φ_x είναι καλά ορισμένη: Έστω $\mathcal{P}_x \ni [(s, t)]_x = [(s', t')]_x$. πρέπει να δείξουμε ότι $[s]_x = [s']_x, [t]_x = [t']_x$.

$$[(s, t)]_x = [(s', t')]_x \iff (s, t) \sim_x (s', t')$$

Έστω ότι $(s, t) \in S(U) \times T(U), (s', t') \in S(V) \times T(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_x^0$ με $W \subseteq U \cap V$ και

$$\begin{aligned} (\rho_W^U \times \lambda_W^U)(s, t) &= (\rho_W^V \times \lambda_W^V)(s', t') \iff \\ \rho_W^U(s) &= \rho_W^V(s') \quad \text{και} \quad \lambda_W^U(t) = \lambda_W^V(t') \iff \\ s \sim_x s' \quad \text{και} \quad t \sim_x t' &\iff \\ [s]_x &= [s']_x \quad \text{και} \quad [t]_x = [t']_x \end{aligned}$$

(2) Η Φ_x είναι 1-1: Έστω $\xi_1 = [(s_1, t_1)]_x, \xi_2 = [(s_2, t_2)]_x, (s_i, t_i) \in S(U_i) \times T(U_i)$ με $U_i \in \mathcal{N}_x^0$ για $i = 1, 2$. Αν έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\xi_1) &= \Phi_x(\xi_2) \implies \\ ([s_1]_x, [t_1]_x) &= ([s_2]_x, [t_2]_x) \implies \\ s_1 \sim_x s_2 \quad \text{και} \quad t_1 \sim_x t_2 &\implies \\ \exists V_1 \subseteq U_1 \cap U_2 : \quad \rho_{V_1}^{U_1}(s_1) &= \rho_{V_2}^{U_2}(s_2) \quad \text{και} \\ \exists V_2 \subseteq U_1 \cap U_2 : \quad \lambda_{V_1}^{U_1}(t_1) &= \lambda_{V_2}^{U_2}(t_2) \end{aligned}$$

και άρα για $V = V_1 \cap V_2$ έχουμε:

$$\rho_{V_1}^{U_1}(\rho_{V_1}^{U_1}(s_1)) = \rho_{V_1}^{U_1}(\rho_{V_1}^{U_2}(s_2)) \implies \rho_{V_1}^{U_1}(s_1) = \rho_{V_1}^{U_2}(s_2)$$

$$\lambda_{V_2}^{U_2}(\rho_{V_2}^{U_1}(t_1)) = \lambda_{V_2}^{U_2}(\lambda_{V_2}^{U_2}(t_2)) \implies \lambda_{V_2}^{U_1}(t_1) = \lambda_{V_2}^{U_2}(t_2)$$

$$(\rho_V^{U_1} \times \lambda_V^{U_1})(s_1, t_1) = (\rho_V^{U_2} \times \lambda_V^{U_2})(s_2, t_2) \implies (s_1, t_1) \sim_x (s_2, t_2) \implies \xi_1 = \xi_2$$

(3) Η Φ είναι επί: Αν $([s]_x, [t]_x) \in \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$ τότε $s \in S(U), t \in T(V)$ με $U, V \in \mathcal{N}_x^0$. Για $W = U \cap V$ έχουμε:

$$(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t)) \in S(W) \times T(W)$$

$$[(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t))]_x \in \mathcal{P}_x$$

και

$$\Phi_x([(\rho_W^U(s), \lambda_W^V(t))]) = ([\rho_W^U(s)]_x, [\lambda_W^V(t)]_x) = ([s]_x, [t]_x)$$

Έστω $\Phi = \cup \Phi_x : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός δρασμάτων. Για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός αρκεί να δείξουμε ότι μεταφέρει τις εικόνες των τομών του \mathcal{P} στις εικόνες των τομών του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$.

Βάση τοπολογίας του \mathcal{P} : τα $\widetilde{(s, t)}(U)$ για κάθε $U \in \tau_X$ και για κάθε $(s, t) \in S(U) \times T(U)$ όπου:

$$\widetilde{(s, t)}(U) = \{ \widetilde{(s, t)}(x) \mid x \in U \} = \{ [(s, t)]_x \mid x \in U \}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\widetilde{(s, t)}(U)) &= \{ \Phi([s, t]_x) \mid x \in U \} = \{ ([s]_x, [t]_x) \mid x \in U \} = \\ &= \{ (\tilde{s}(x), \tilde{t}(x)) \mid x \in U \} \end{aligned}$$

Το οποίο είναι εικόνα τομής του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$.

□