Μεταθετική Άλγεβρα

Εργασία 4

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
ΑΜ: 1112201800377
email: dimitriosnoulas@gmail.com

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Άσκηση 4.2) Έστω R δακτύλιος, S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R και I, J ιδεώδη του R. Δείξτε τις εξής ισότητες.

(1) $S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J$.

(2) $S^{-1}(I \cdot J) = S^{-1}I \cdot S^{-1}J$.

(3) $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$.

(4) $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$.

(5) $S^{-1}(nil(R)) = nil(S^{-1}R)$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $x \in S^{-1}(I+J)$ δηλαδή $x = \frac{r}{s}$ για κάποια $r \in I+J$ και $s \in S$. Έχουμε $r = a+b$ με $a \in I, b \in J$ και

$$x = \frac{r}{s} = \frac{a+b}{s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s} \in S^{-1}I + S^{-1}J$$

Αντίστροφα, αν έχουμε $x \in S^{-1}I + S^{-1}J$, τότε για κάποια $a \in I, b \in J$ και $s_1, s_2 \in S$ θα ισχύει:

$$x = \frac{a}{s_1} + \frac{b}{s_2} = \frac{as_2 + bs_1}{s_1 s_2} \in S^{-1}(I+J)$$

αφού $s_2 a \in I, \quad s_1 b \in J$ εφόσον τα I, J είναι ιδεώδη και $s_1 s_2 \in S$ αφού το S είναι πολλαπλασιαστικό.

(2)

$$IJ = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \Big\}$$

Αν $x \in S^{-1}(IJ)$, τότε

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s} \frac{b_i}{1} \in S^{-1}I \cdot S^{-1}J$$

$$S^{-1}I \cdot S^{-1}J = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in S^{-1}I, b_i \in S^{-1}J \Big\} =$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \frac{b_i}{s'_i} : \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J, s_i, s'_i \in S \Big\}$$

Αν $x \in S^{-1}I \cdot S^{-1}J$, τότε

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \frac{b_i}{s'_i} = \frac{a_1 b_1}{s_1 s'_1} + \frac{a_2 b_2}{s_2 s'_2} + \ldots + \frac{a_n b_n}{s_n s'_n} =$$

$$\frac{(s_2 s'_2 s_3 s'_3 \cdots s_n s'_n) a_1 b_1 + (s_1 s'_1 s_3 s'_3 \cdots s_n s'_n) a_2 b_2 + \ldots + (s_1 s'_1 s_2 s'_2 \cdots s_{n-1} s'_{n-1}) a_n b_n}{s}$$

όπου $s = s_1 s'_1 s_2 s'_2 \cdots s_n s'_n$. Το s ανήκει στο πολλαπλασιαστικό σύνολο S. Ο ¨αριθμητής' είναι στοιχείο του IJ, καθώς μπορούμε να δούμε το γινόμενο μπροστά από κάθε a_i με το ίδιο το a_i ως ένα στοιχείο του I πολλαπλασιασμένο με το στοιχείο $b_i \in J$. Άρα $x \in S^{-1}(IJ)$.

(3) Αν $x \in S^{-1}(I \cap J)$ τότε υπάρχουν $a \in I \cap J$ και $s \in S$ με $x = \frac{a}{s}$. Τότε

$$a \in I, s \in S \implies x \in S^{-1}I$$

$$a \in J, s \in S \implies x \in S^{-1}J$$

άρα $x \in S^{-1}I \cap S^{-1}J$.

Αντίστροφα, αν $x \in S^{-1}I \cap S^{-1}J$ τότε υπάρχουν $a \in I, b \in J, s_1, s_2 \in S$ τέτοια ώστε

$$x = \frac{a}{s_1} = \frac{b}{s_2}$$

από όπου έχουμε ότι υπάρχει $u \in S$ τέτοιο ώστε $w = uas_2 = us_1b$. Έχουμε λόγω του στοιχείου a ότι $w \in I$ και λόγω του στοιχείου b ότι $w \in J$. Άρα $w \in I \cap J$ και ισχύει η σχέση

$$x = \frac{a}{s_1} = \frac{w}{s_1 s_2 u} \in S^{-1}(I \cap J)$$

αφού $s_1 s_2 u \in S$ καθώς το S είναι πολλαπλασιαστικό και $w \in I \cap J$.

(4) Έστω $x \in S^{-1}\sqrt{I}$, τότε υπάρχουν $s \in S, a \in \sqrt{I}$ τέτοια ώστε $x = \frac{a}{s}$ και $a^n \in I$. Έχουμε ότι $s^n \in S$ αφού το S είναι πολλαπλασιαστικό άρα

$$\left(\frac{a}{s}\right)^n = \frac{a^n}{s^n} \in S^{-1}I$$

και άρα εφόσον $x^n \in S^{-1}I$ παίρνουμε ότι $x \in \sqrt{S^{-1}I}$.

Αντίστροφα, έχουμε ότι το $\sqrt{S^{-1}I}$ είναι ιδεώδες του δακτυλίου $S^{-1}R$

$$\sqrt{S^{-1}I} = \{y \in S^{-1}R : \quad \text{υπάρχει } n \text{ ώστε } y^n = \left(\frac{x}{s}\right)^n \in S^{-1}I\}$$

Άρα το στοιχείο που θα θεωρήσουμε είναι της μορφής $\frac{x}{s}$ με $x \in R, s \in S$.

$$\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I} \implies \left(\frac{x}{s}\right)^n = \frac{x^n}{s^n} \in S^{-1}I$$

Εδώ δεν είναι σωστό να πούμε ότι $x^n \in I$, αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι εφόσον το $\frac{x^n}{s^n}$ ανήκει στο $S^{-1}I$ τότε θα υπάρχουν $a \in I, t \in S$ τέτοια ώστε

$$\frac{x^n}{s^n} = \frac{a}{t}$$

και από αυτήν την σχέση έπεται ότι υπάρχει $u \in S$ έτσι ώστε $ux^nt = us^na \in I$. Αυτό ισχύει καθώς $a \in I$ και το I είναι ιδεώδες.

$$I \ni (u^{n-1}t^{n-1})ux^nt = (uxt)^n \implies uxt \in \sqrt{I}$$

και επιπλέον $ust \in S$, καθώς το S είναι πολλαπλασιαστικό. Άρα

$$\frac{x}{s} = \frac{uxt}{ust} \in S^{-1}\sqrt{I}$$

όπου αυτή ισότητα ισχύει καθώς για κάθε $s' \in S$ έχουμε $s'x(ust) = s's(uxt)$.

(5) Έστω $x \in S^{-1}nil(R)$, δηλαδή υπάρχουν $a \in nil(R), s \in S$ με $x = \frac{a}{s}$ και $a^n = 0$. Τότε

$$\left(\frac{a}{s}\right)^n = \frac{a^n}{s^n} = \frac{0}{s^n} = \frac{0}{1} = 0$$

άρα το x είναι μηδενοδύναμο στοιχείο του $S^{-1}R$.

Αντίστροφα, το $nil(S^{-1}R)$ είναι ιδεώδες του $S^{-1}R$ και έτσι παίρνουμε ένα $\frac{x}{s}$ ως στοιχείο του με $x \in R, s \in S$ για το οποίο ισχύει

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n = \frac{0}{1} \implies \frac{x^n}{s^n} = \frac{0}{1}$$

και άρα υπάρχει $u \in S$ τέτοιο ώστε $ux^n = 0$. Άρα και $u^{n-1}(ux^n) = (ux)^n = 0$, δηλαδή το ux είναι μηδενοδύναμο στοιχείο του R. Επιπλέον $us \in S$, αφού το S είναι πολλαπλασιαστικό. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{s} = \frac{ux}{us} \in S^{-1}nil(R)$$

□

Άσκηση 4.5) Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος τέτοιος ώστε κάθε τοπικοποίηση $R_{\mathfrak{p}}$, όπου $\mathfrak{p} \in SpecR$, δεν έχει μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο. Δείξτε ότι και ο R δεν έχει μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχει $x \in R$ μηδενοδύναμο, μη μηδενικό στοιχείο με $x^n = 0$. Ορίζουμε τον μηδενιστή του x:

$$Ann(x) = \{r \in R : \quad rx = 0\}$$

το οποίο είναι μη τετριμμένο γνήσιο ιδεώδες του R, αφού $x^{n-1} \in Ann(x)$, $x \neq 0$ και

$$(r_1 - r_2)x = r_1 x - r_2 x = 0$$

$$(r'r)x = r'(rx) = r'0 = 0$$

Έχουμε από την θεωρία ότι υπάρχει μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{q}$, άρα και πρώτο, που περιέχει το ιδεώδες $Ann(x)$. Έτσι αν ορίσουμε $S = R - \mathfrak{q}$, τότε $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing \implies Ann(x) \cap S = \varnothing$.

Μέσω του φυσικού ομομορφισμού σε αυτήν την τοπικοποίηση $S^{-1}R$ έχουμε

$$\left(\frac{x}{1}\right)^n = \frac{x^n}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

δηλαδή το $x/1$ είναι μηδενοδύναμο στην τοπικοποίηση, άρα είναι το μηδενικό στοιχείο.

Από την σχέση $\frac{x}{1} = 0$ έπεται ότι υπάρχει $u \in S$ τέτοιο ώστε $ux = 0$. Αυτό είναι άτοπο καθώς τότε θα ίσχυε $u \in S \cap Ann(x) = \varnothing$.

$\square$

Άσκηση 4.6) Έστω k σώμα. Θεωρούμε το δακτύλιο $k[x, x^{-1}]$ των πολυωνύμων Laurent. Είδαμε στο μάθημα ότι

$$k[x, x^{-1}] = S^{-1}(k[x]),$$

όπου $S = \{1, x, x^2, ...\}$. Δείξτε ότι ο $k[x, x^{-1}]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών χρησιμοποιώντας το προηγούμενο γεγονός.

Απόδειξη.

Έστω J ένα ιδεώδες του $k[x, x^{-1}] = S^{-1}(k[x])$. Το J θα έχει την μορφή $S^{-1}I$ για I ιδεώδες του $k[x]$, εφόσον δείξαμε στο μάθημα ότι οι επεκτάσεις και οι συστολές είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία για τον φυσικό ομομορφισμό $\phi : R \to S^{-1}R, x \mapsto \frac{x}{1}$. Δηλαδή $J = \phi(I) = I^e$.

Το $k[x]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών άρα $I = (f(x))$ με $f(x) \in k[x]$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$J = \left(\frac{f(x)}{1}\right)$$

όπου το $\frac{f(x)}{1}$ είναι πολυώνυμο του $k[x, x^{-1}]$ και άρα το ιδεώδες που παράγεται είναι του $S^{-1}R$.

$$\text{Αν } y \in \left(\frac{f(x)}{1}\right) \text{ τότε } y = \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{x^n} = \frac{(f(x)g(x))}{x^n} \in S^{-1}I = J$$

εφόσον τα στοιχεία του δακτυλίου $k[x, x^{-1}] = S^{-1}k[x]$, στον οποίο ζει το ιδεώδες, είναι της μορφής $\frac{g(x)}{x^n}$ με $g(x) \in k[x]$ και επιπλέον $f(x)g(x) \in I$.

Αντίστροφα, αν $y \in J = S^{-1}(f(x))$ τότε υπάρχει $x^n \in S$ και $g(x) \in k[x]$ τέτοια ώστε

$$y = \frac{f(x)g(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{1}\frac{g(x)}{x^n} \in \left(\frac{f(x)}{1}\right)$$

Άρα δείξαμε ότι το τυχόν ιδεώδες J του $k[x, x^{-1}]$ είναι κύριο. Έχουμε ότι ο δακτύλιος $k[x, x^{-1}]$ είναι και περιοχή εφόσον είναι τοπικοποίηση περιοχής, άρα είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

□

Άσκηση 5.1) Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Στη συνέχεια δείξτε ότι για κάθε σώμα k το σώμα των ρητών συναρτήσεων $k(x)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $k[x]$-πρότυπο.

Απόδειξη.

Έστω ότι είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, δηλαδή υπάρχουν $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \mathbb{Q}$$

και θεωρούμε $q_i = \frac{m_i}{n_i}$ με μκδ$(m_i, n_i) = 1$. Διαλέγουμε έναν πρώτο p που δεν διαιρεί κανένα από τα n_i. Έτσι από την παραπάνω ισότητα, το $\frac{1}{p}$ είναι $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός των $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Δηλαδή υπάρχουν $x_i \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{p} = x_1 \frac{m_1}{n_1} + x_2 \frac{m_2}{n_2} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n_k}$$

Το δεύτερο μέρος είναι ένα κλάσμα με παρονομαστή $n_1 n_2 \cdots n_k$ αν κάνουμε τις προσθέσεις. Έτσι, από ισότητα κλασμάτων έχουμε ότι

$$p | n_1 n_2 \cdots n_k \implies p | n_i \quad \text{για κάποιο } i$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση που κάναμε.

Έχουμε

$$k(x) = \Big\{ \frac{f(x)}{g(x)} : \quad f(x), g(x) \in k[x], g(x) \neq 0 \Big\}$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι πεπερασμένα παραγόμενο $k[x]$-πρότυπο, δηλαδή

$$k(x) = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \ldots, \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \right)$$

με μκδ$(f_1(x), g_1(x)) = 1$. Με την ίδια λογική με πριν, διαλέγουμε ένα ανάγωγο $p(x) \in k[x]$ το οποίο δεν διαιρεί κανένα από τα $g_i(x)$. Έτσι, έχουμε ότι υπάρχουν $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{p(x)} = h_1(x) \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + h_2(x) \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots + h_n(x) \frac{f_n(x)}{g_n(x)}$$

Ομοίως, το δεύτερο μέλος θα είναι κλάσμα με παρονομαστή το $g_1(x) g_2(x) \cdots g_n(x)$. Από ισότητα κλασμάτων παίρνουμε ότι

$$p(x) | g_1(x) g_2(x) \cdots g_n(x) \implies p(x) | g_i(x) \quad \text{για κάποιο } i$$

το οποίο είναι πάλι άτοπο. $\square$

Άσκηση 5.3) Έστω L, N υποπρότυπα του R- προτύπου M. Δείξτε ότι αν τα $L+N,\ L\cap N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε και τα L, N είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Απόδειξη.

Έστω ότι τα σύνολα

$$\{\ell_i + n_i, \quad i = 1, \ldots, m\}, \{x_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

είναι βάσεις των $L+N, L\cap N$ αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι τα στοιχεία $\{\ell_i\}\cup\{x_i\}$ παράγουν το L και συμμετρικά τα $\{n_i\}\cup\{x_i\}$ παράγουν το N.

Έστω $\ell \in L$, τότε $\ell + 0_N \in L+N$ και άρα υπάρχουν $r_1, r_2, \ldots r_m \in R$ τέτοια ώστε

$$\ell = \sum_{i=1}^{m} r_i(\ell_i + n_i)$$

και από αυτό έπεται ότι

$$L \ni \ell - \sum_{i=1}^{m} r_i \ell_i = \sum_{i=1}^{m} r_i n_i \in N$$

εφόσον τα $r_i\ell_i \in L$ και $r_i n_i \in N$, καθώς τα L, N είναι R-υποπρότυπα. Συνεπώς

$$\ell - \sum_{i=1}^{m} r_i\ell_i \in L\cap N \implies \ell - \sum_{i=1}^{m} r_i\ell_i = \sum_{i=1}^{k} r_i' x_i$$

$$\ell = \sum_{i=1}^{m} r_i\ell_i + \sum_{i=1}^{k} r_i' x_i$$

άρα πράγματι τα ℓ_i με τα x_i παράγουν το L και εργαζόμαστε όμοια για το N. □

Άσκηση 5.10) Έστω I, J ιδεώδη του R. Ορίζοντας κατάλληλους ομομορφισμούς, δείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία R-προτύπων της μορφής

$$0 \to I \cap J \to R \to (R/I) \times (R/J) \to R/(I+J) \to 0.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $i : I \cap J \hookrightarrow R$ την εμφύτευση $x \mapsto x$ που είναι ομομορφισμός προτύπων (και δακτυλίων) και έτσι $keri = \{0\}$, από όπου έχουμε την ακρίβεια στην πρώτη θέση. Επιπλέον, $Imi = I \cap J$.

Ορίζουμε

$$\phi : R \to (R/I) \times (R/J)$$
$$r \mapsto (r+I, r+J)$$

και είναι πράγματι ομομορφισμός προτύπων εφόσον:

$$\phi(r_1+r_2) = (r_1+r_2+I, r_1+r_2+J) = (r_1+I, r_1+J) + (r_2+I, r_2+J) = \phi(r_1) + \phi(r_2)$$

$$\phi(r'r) = (r'r+I, r'r+J) = r'(r+I, r+J) = r'\phi(r)$$

Επιπλέον,

$$r \in ker\phi \iff (r+I, r+J) = (I, J) \iff r \in I \text{ και } r \in J \iff r \in I \cap J$$

δηλαδή $Imi = ker\phi = I \cap J$ και έτσι έχουμε ακρίβεια και στην δεύτερη θέση. Έχουμε επίσης ότι $Im\phi = \{(r+I, r+J) : \quad r \in R\}$, η οποία δεν είναι απαραίτητα επί.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : (R/I) \times (R/J) \to R/(I+J)$$
$$(r_1+I, r_2+J) \mapsto (r_1-r_2) + (I+J)$$

και πρέπει να δειχτεί ότι είναι καλά ορισμένη εφόσον θεωρούμε αντιπροσώπους στο πεδίο εκκίνησης. Αν $(r_1+I, r_2+J) = (x_1+I, x_2+J)$ τότε:

$$r_1 + I = x_1 + I \iff r_1 - x_1 \in I$$

$$r_2 + J = x_2 + J \iff r_2 - x_2 \in J$$

δηλαδή

$$(r_1-x_1) - (r_2-x_2) \in I+J \iff (r_1-r_2) + I + J = (x_1-x_2) + I + J$$

Επιπλέον, είναι πράγματι ομομορφισμός προτύπων εφόσον:

$$\pi\left((r_1+I, r_2+J) + (x_1+I, x_2+J)\right) = \pi(r_1+x_1+I, r_2+x_2+J) =$$

$$= r_1+x_1-(r_2+x_2)+(I+J) = (r_1-r_2)+(x_1-x_2)+(I+J) = \pi(r_1+I, r_2+J)+\pi(x_1+I, x_2+J)$$

$$\pi(r(r_1+I, r_2+J)) = \pi(rr1+I, rr_2+J) = rr_1 - rr_2 + (I+J) = r(r_1-r_2) + (I+J) =$$

$$= r\left(r_1 - r_2 + (I+J)\right) = r\pi(r_1+I, r_2+J)$$

Η π είναι επί και έτσι έχουμε την ακρίβεια στην τέταρτη θέση, εφόσον για μια τυχαία κλάση $r+(I+J)$ έχουμε $(r+I,J) \mapsto r+(I+J)$. Θα δείξουμε την ακρίβεια στην τρίτη θέση, δηλαδή $Im\phi = ker\pi$ με διπλό εγκλεισμό.

Άρχικά $\pi(r+I, r+J) = (r-r)+I+J = I+J$ άρα έχουμε $Im\phi \subseteq ker\pi$. Αν τώρα $(r_1+I, r_2+J) \in ker\pi$ τότε

$$(r_1 - r_2) + I + J = I + J \iff r_1 - r_2 \in I + J$$

δηλαδή υπάρχουν $i \in I, j \in J$ τέτοια ώστε

$$r_1 - r_2 = i + j \implies r_1 - i = r_2 + j$$

Έτσι

$$(r_1 + I, r_2 + J) = (r_1 - i + I, r_2 + j + J) = (r_1 - i + I, r_1 - i + J) \in Im\phi$$

και δείξαμε την ακρίβεια της ακολουθίας.

Αν $I + J = R$, τότε $R/(I+J) \simeq 0$. Δηλαδή έχουμε την ακριβή ακολουθία R-προτύπων:

$$0 \to I \cap J \to R \to (R/I) \times (R/J) \to 0$$

Βρισκόμαστε δηλαδή στην περίπτωση που η ϕ είναι επί. Θέλουμε να είναι και ακριβής ακολουθία δακτυλίων, δηλαδή η απεικόνιση ϕ να είναι και ομομορφισμός δακτυλίων. Αυτό ισχύει εφόσον:

$$\phi(1) = (1+I, 1+J)$$
$$\phi(r'r) = (r'r+I, r'r+J) = (r'+I, r'+J) \cdot (r+I, r+J) = \phi(r')\phi(r)$$

και οι δύο ¨πολλαπλασιασμοί' ταυτίζονται με

$$r'\phi(r) = (r'r+I, r'r+J) = \phi(r')\phi(r)$$

Έτσι από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων για την ϕ επάγεται ο ισομορφισμός δακτυλίων

$$R/(I \cap J) \simeq R/I \times R/J$$

.

$\square$

Άσκηση 5.13) Έστω R τοπικός δακτύλιος της Noether με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$. Δείξτε ότι αν $SpecR \neq \{\mathfrak{m}\}$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε $\mathfrak{m}^{n+1} \neq \mathfrak{m}^n$. Τί συμβαίνει με τις δυνάμεις του $\mathfrak{m}$ αν $SpecR = \{\mathfrak{m}\}$;

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\mathfrak{m} = Jac(R)$ και ότι το $\mathfrak{m}^n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο για κάθε n εφόσον ο δακτύλιος R είναι της Noether, άρα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το λήμμα Nakayama.

Αν $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ για κάποιο n τότε

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n \implies \mathfrak{m}^n = 0$$

Εφόσον $SpecR \neq \{\mathfrak{m}\}$ έχουμε ότι υπάρχει πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ που δεν είναι το $\mathfrak{m}$ και μάλιστα περιέχεται στο $\mathfrak{m}$ εφόσον κάθε ιδεώδες περιέχεται σε ένα μέγιστο. Έχουμε ότι

$$\mathfrak{p} \supseteq (0) = \mathfrak{m}^n \implies \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

Αν $SpecR = \{\mathfrak{m}\}$ τότε $nil(R) = Jac(R) = \mathfrak{m}$ και το m είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έστω $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_k)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο N για το οποίο $\mathfrak{m}^N = 0$ και έτσι η ακολουθία

$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{m}^N \supseteq \mathfrak{m}^{N+1} \supseteq \ldots$$

θα είναι τελικά σταθερή. Έχουμε ότι τα m_i είναι μηδενοδύναμα, δηλαδή υπάρχουν n_i τέτοια ώστε $m_i^{n_i} = 0$. Θέτουμε $N = k \cdot \max\{n_1, \ldots, n_k\}$.

Από τον πολλαπλασιασμό ιδεωδών, οι γεννήτορες του $\mathfrak{m}^N$ θα είναι τα στοιχεία της μορφής $m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots m_k^{a_k}$ με $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = N$. Αν για όλα τα i ισχύει ότι $a_i < \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε αθροίζοντάς για κάθε i παίρνουμε $N < N$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχει i με $a_i > max > n_i$ δηλαδή ο όρος $m_i^{a_i}$ είναι 0 στον τυχαίο γεννήτορα του $\mathfrak{m}^N$. Συνεπώς $\mathfrak{m}^N = 0$. $\square$

Άσκηση 5.17) Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος. Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο αν και μόνο αν ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

Απόδειξη.

Αν ο δακτύλιος R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, τότε κάθε μη τετριμμένο ιδεώδες του έχει την μορφή $I = (x), x \neq 0$. Αυτό έχει βάση ως R-πρότυπο το μονοσύνολο $\{x\}$, εφόσον κάθε στοιχείο του γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή rx, με $r \in R$. Επιπλέον, το x είναι γραμμικά ανεξάρτητο εφόσον

$$rx = 0, x \neq 0 \implies r = 0$$

αφού βρισκόμαστε σε περιοχή. Άρα κάθε ιδεώδες είναι ελεύθερο R-πρότυπο.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο. Τότε για $x \in R, x \neq 0$ το ιδεώδες (x) είναι ελεύθερο και κάθε στοιχείο του γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $rx, r \in R$. Από τον ορισμό της βάσης, έπεται ότι το $\{x\}$ είναι βάση του (x). Άρα το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως βάση, συνεπώς αν

$$rx = 0, x \neq 0 \implies r = 0$$

δηλαδή το τυχόν x δεν είναι μηδενοδιαιρέτης. Άρα βρισκόμαστε σε περιοχή.

Έστω τώρα ένα τυχόν ιδεώδες $I \neq (0)$. Ως ελεύθερο πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα αντιγράφων του R. Αν τα αντίγραφα είναι παραπάνω από δύο, δηλαδή υπάρχουν παραπάνω από δύο στοιχεία x, y σε μια βάση του I τότε

$$(y)x + (-x)y = 0$$

δηλαδή δεν γίνεται να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα αναγκαστικά το $I \neq (0)$ έχει βάση ως R-πρότυπο κάποιο μονοσύνολο $\{x\}$, δηλαδή $I = (x)$.

□