Θεωρία Δραγμάτων

Εαρινό 2021-2022

Διδάσκουσα: Μ. Παπατριανταφύλλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μάθημα 1 - Τρίτη 22/02/2022.

Sheaf Theory:

Ορισμός. *Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ) \equiv \mathcal{C}$, όπου*

(1) *$\mathcal{C}$ κλάση από <u>αντικείμενα</u>.*

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ από <u>μορφισμούς</u> από το A στο B και*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A,B \in \mathcal{C}} Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(3) *Για κάθε A, B, C αντικείμενα υπάρχει απεικόνιση:*

$$\circ : Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto \circ(f, g) \equiv g \circ f$$

όπου λέγεται <u>σύνθεση</u>, που ικανοποιούν τα αξιώματα:

(1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \implies Mor_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \varnothing$.

(2) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ και για κάθε $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ και για κάθε $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ μπορούμε:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

δηλαδή προσεταιριστική

(3) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$:*

$$1_A \circ f = f, \quad \forall f : B \to A, \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

$$g \circ 1_A = g, \quad \forall g : A \to C, \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(1) $\mathcal{S} =$ κατηγορία συνόλων με απεικονίσεις και συνήθη σύνθεση.

(2) $\mathcal{T} =$ κατηγορία τοπολογικών χώρων με συνεχείς απεικονίσεις (και συνήθη σύνθεση, θα εννοείται στο εξής εκτός αν πούμε διαφορετικά).

(3) $\mathcal{G} =$ ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(4) $\mathcal{A}b =$ αβελιανές ομάδες με μορφισμούς ομάδων.

(5) $\mathcal{S}_0 =$ κατηγορία σημειωμένων συνόλων, δηλαδή τα αντικείμενα είναι ζεύγη (X, x) με X σύνολο και $x \in X$ και μορφισμοί να είναι απεικονίσεις:

$$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

με $f(x) = y$.

(6) $\mathcal{T}_0 =$ σημειωμένοι τοπολογικοί χώροι.

(7) $\mathcal{V}_{\mathcal{F}} =$ διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα F με γραμμικές απεικονίσεις.

(8) $\mathcal{R} =$ δακτύλιοι με ομομορφισμούς δακτυλίων.

(9) $\mathcal{R}_1$ = μοναδιαίοι δακτύλιοι με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.

(10) $\mathcal{M}_R^L$ = αριστερά R-πρότυπα με R-γραμμικές απεικονίσεις.

(11) $\mathcal{T}g$ = τοπολογικές ομάδες με συνεχείς μορφισμούς ομάδων.

(12) $\mathcal{E}q$ = αντικείμενα: (X, R) με X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί απεικονίσεις:

$$(X, R) \longrightarrow (Y, S)$$

είναι απεικόνιση:

$$f : X \to Y$$

με

$$x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2)$$

(13) $\mathcal{O}rd$ = αντικείμενα είναι $(X, \leq)$ όπου X σύνολο και $\leq$ σχέση διάταξης στο X και μορφισμοί:

$$(X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$$

με απεικόνιση:

$$f : X \to Y$$

όπου ισχύει $a \leq_1 b \implies f(a) \leq_2 f(b)$.

Ορισμός. *Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή αν $\mathcal{C}$ είναι σύνολο.*

Παραδείγματα:

(14) $(G, *)$ ομάδα ($\mathcal{C} = \{G\}$, $\mathcal{M} = G, \circ = *$)

(15) $(X, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο με:

$$\left(\mathcal{C} = X, \quad M = \bigcup_{x,y \in X} Mor(x, y), \quad \circ\right)$$

όπου:

$$Mor(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{αν } x \leq y \\ \varnothing, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και η σύνθεση του $\{(x, y)\}$ με το $\{(y, z)\}$ δίνει το $\{(x, z)\}$, ενώ η σύνθεση με $\varnothing$ δίνει $\varnothing$.

(16) Ομοίως για (X, R) σύνολο με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. *$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ και $\mathcal{C}_0 \equiv (\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_0, *)$ κατηγορίες, θα λέμε $\mathcal{C}_0$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ $\iff$ $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ και για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ να ισχύει:*

$$Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

και $*$ είναι ο περιορισμός της $\circ$.

Αν για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_0$ ισχύει ότι $Mor_{\mathcal{C}_0}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ τότε λέγεται πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

π.χ.

(1) $\mathcal{A}b$ πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{R}_1$ υποκατηγορία της $\mathcal{R}$, όχι πλήρης.

Ορισμός. *$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες. Ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (όχι απεικόνιση) είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) :*

$$F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F_2 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$$

με

(1) *Για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ και $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$:*

$$F_2(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_1(B))$$

(2) *Για κάθε $A \in \mathcal{C}$:*

$$F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$$

(3) *Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{C}$ και $f : A \to B, \quad g : B \to C$ ισχύει ότι:*

$$F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$$

π.χ.

(1) Ο ελεύθερος συναρτητής $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$ με

$$S \longrightarrow \langle S \rangle = \text{ διανυσματικός χώρος}$$

των τυπικών γραμμικών συνδυασμών με βάση S και πάει μια $f : S \to T$ σε γραμμική επέκτασή της.

(2) Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor):

$$F : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$$

$$F : \mathcal{T}g \to \mathcal{G}$$

ξεχνάει μέρος της δομής.

(3) $\mathcal{C}$ έχει αντικείμενα τα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $n \in \mathbb{N}$, σημειωμένα (U, x) με $x \in U$ και μορφισμοί

$$f : (U, x) \to (V, y)$$

διαφορίσιμη με $f(x) = y$.

Θεωρούμε την $\mathcal{D} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε:

$$F_1(U, x) = \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f : (U, x) \longrightarrow (Y, y)$$

$$F_2(f) = Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Μάθημα 2 - Πέμπτη 24/02/2022.

Ορισμός. *Ένα <u>δράγμα</u> (πάνω από τον X) είναι μια τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$ όπου $\mathcal{S}, X$ είναι τοπολογικοί χώροι και*

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

είναι τοπικός ομοιμορφισμός. Δηλαδή, για κάθε $s \in \mathcal{S}$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \in \mathcal{N}_s$ με το $\pi(V)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$$

να είναι ομοιομορφισμός.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στο X ως <u>βάση</u>, στο π ως <u>προβολή</u> και στο $\mathcal{S}$ ως <u>ολικό χώρο</u>.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε η προβολή είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $V \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό $\implies$ $\pi(V) \subseteq X$ ανοιχτό. Έστω ένα τέτοιο $V \subseteq \mathcal{S}$ και έστω $x \in \pi(V)$, τότε υπάρχει $z \in V$ με $\pi(z) = x$. Από τον ορισμό του δράγματος, για το $z \in \mathcal{S}$ υπάρχει V_0 ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με $z \in V_0$ και $\pi(V_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, καθώς και $\pi|_{V_0} : V_0 \to \pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Έχουμε ότι $z \in V \cap V_0$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του V_0 (στην τοπολογία που επάγεται από τον X, όταν όλα είναι ανοιχτά στην μεγάλη τοπολογία δεν έχουμε πρόβλημα και μπορούμε να περιορίζουμε και άλλο την π), τότε $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi(V)$ και $x = \pi(z) \in \pi(V \cap V_0)$, δηλαδή το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στο $\pi(V)$. Αυτό είναι ανοιχτό στον X, άρα το $\pi(V \cap V_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x στον X. □

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, τότε το*

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathcal{S} \text{ ανοιχτό: } \pi(V) \text{ ανοιχτό, } \pi|_V : V \to \pi(V) \text{ ομοιομορφισμός}\}$$

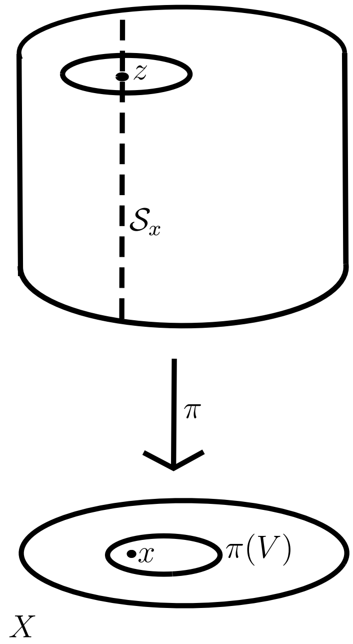
είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό και $x \in A$, τότε υπάρχει από τον ορισμό του δράγματος V ανοιχτή περιοχή του x με $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ομοιομορφισμό. Το $V \cap A \subseteq A$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και περιέχεται στο $\mathcal{B}$ αφού περιορίζοντας την $\pi|_V$ στο $V \cap A$ δεν χαλάει η ιδιότητα του ομοιομορφισμού. □

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ θα λέγεται νήμα πάνω από το x.*

Φυσικά, $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in X}$ η οποία ένωση είναι ξένη, αν $x \neq y$ τότε $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y = \varnothing$, δηλαδή τα νήματα διαμερίζουν τον ολικό χώρο.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $x \in X$, τότε το νήμα $\mathcal{S}_x$ σαν τοπολογικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ είναι διακριτός.*



Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}_x$. Θα δείξουμε ότι το $\{x\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Παίρνουμε $V \in \mathcal{N}_z$ από ορισμό δράγματος και το $U = V \cap \mathcal{S}_x$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. Έχουμε ότι η $\pi|_U : U \to \pi(U)$ είναι ομοιομορφισμός αφού $U \subseteq V$, δηλαδή 1-1 στο U με $z \in U$. Αν υπάρχει και άλλο στοιχείο στο U, αφού θα ανήκει στο νήμα θα προβάλλεται και αυτό στο x το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U = \{z\}$ και $\pi(U) = \{x\}$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{S}_x$. □

Δηλαδή, με την ανοιχτή περιοχή είναι σαν να κόβουμε μια φέτα στο παραπάνω σχήμα και έτσι να κρατάμε ένα σημείο του νήματος.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα. Ένα υποδράγμα είναι μια τριάδα (A, π_A, X) όπου $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό (πάντα διατηρούμε τα ανοιχτά).*

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα. Ένας μορφισμός δραγμάτων $(\mathcal{S}, \pi, X) \to (\mathcal{T}, \rho, X)$ είναι μια απεικόνιση $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ συνεχής, με την ιδιότητα $\rho \circ f = \pi$, δηλαδή να κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "\rho"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση.

$$\begin{aligned}
\rho \circ f = \pi &\iff \rho(f(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \\
&\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad \rho(f(z)) = \pi(z) \\
&\iff \forall z \in \mathcal{S}_x \quad f(z) \in \mathcal{T}_x \\
&\iff f(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x
\end{aligned}$$

δηλαδή στην ουσία οι μορφισμοί δραγμάτων απαιτούμε να βάζουν τα νήματα μέσα σε νήματα. Θα λέμε έτσι ότι η f διατηρεί τα νήματα και ότι ο μορφισμός δραγμάτων είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των ολικών χώρων η οποία διατηρεί τα νήματα.

Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X), (\mathcal{T}, \rho, X)$ δράγματα και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων. Τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός, δηλαδή το $(\mathcal{S}, f, \mathcal{T})$ είναι δράγμα.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{S}$, τότε $f(z) \in \mathcal{T}$ και άρα υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{N}_z, W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ με ομοιομορφισμούς

$$\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

$$\rho|_W : W \longrightarrow \rho(W) \subseteq X \text{ ανοιχτό}$$

Και f συνεχής, άρα για το $W \in \mathcal{N}_{f(z)}$ μπορούμε να θεωρήσουμε (μικραίνοντας το V) ότι $f(V) \subseteq W$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\rho \circ f = \pi$ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \supseteq V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi|_V"'] & & f(V) \arrow[dl, "p"'] & \subseteq W \arrow[dl, "p|_W"] \\
& \pi(V) \arrow[ur, dashed, bend right] & \subseteq p(W) &
\end{tikzcd}$$

και άρα $f(V)$ ανοιχτό και $f|_V = \left(\rho|_{f(V)}\right)^{-1} \circ \pi|_V$, είναι ομοιμορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. $\square$

Θα ορίσουμε την κατηγορία $\mathcal{S}h_X$ των δραγμάτων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Ως αντικείμενα θα έχουμε τα δράγματα πάνω από τον χώρο X και ως μορφισμούς τους μορφισμούς δραγμάτων που ορίσαμε παραπάνω.

Παρατήρηση. *Η σύνθεση στην $\mathcal{S}h_X$ είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{P} \arrow[dl, "\mathfrak{p}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Έχουμε $g \circ f : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Θέλουμε να ισχύει $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = \pi$. Πράγματι $\mathfrak{p} \circ (g \circ f) = (\rho \circ g) \circ f = \rho \circ f = \pi$. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι $id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ είναι μορφισμός δραγμάτων και $id_{\mathcal{S}} \circ f = f, g \circ id_{\mathcal{S}} = g$ κλπ.

Ορισμός. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ένας μορφισμός $f : A \to B$ λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει $g : B \to A$ έτσι ώστε:*

$$f \circ g = 1_B$$

$$g \circ f = 1_A$$

Πρόταση. *Έστω ο μορφισμός στην $\mathcal{S}h_X$:*

$$f : (\mathcal{S}, \pi, X) \longrightarrow (\mathcal{T}, \rho, X)$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *f ισομορφισμός.*

(2) *f ισομορφισμός στα νήματα.*

(3) *f 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Το ότι η f είναι ισομορφισμός είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέφεται και η f^{-1} να είναι μορφισμός δραγμάτων. Έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, άρα 1-1 και επί στα νήματα. Το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι το (3) $\implies$ (1). Αφού f 1-1 και επί, τότε υπάρχει $f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ και είναι μορφισμός αφού $\rho \circ f = \pi \implies \rho = \pi \circ f^{-1}$. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής αφού η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός. $\square$

<u>Παραδείγματα:</u>

(1) Τετριμμένο δράγμα (θα προκύπτει αρκετά στην συνέχεια). Έστω X τοπολογικός χώρος και M ένα σύνολο το οποίο κάνουμε τοπολογικό χώρο με την διακριτή τοπολογία. Τότε έχουμε το δράγμα:

$$\pi_X : M \times X \longrightarrow X$$

που θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο και άρα η προβολή π_X είναι συνεχής και για κάθε $m \in M$ το $V = \{m\} \times X$ είναι ανοιχτό με

$$\pi_X|_V : V \longrightarrow X$$

ομοιομορφισμό.

(2) Έλικα $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : \quad t \in \mathbb{R}\}$ και $X = S^1$ με

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

$$(\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

(3) Οι χώροι επικάλυψης είναι δράγματα.

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $U \subseteq X$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό). Μια <u>τομή</u> του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής απεικόνιση $s : U \to \mathcal{S}$ έτσι ώστε να ισχύει $\pi(s(x)) = x$ για κάθε $x \in U$.*

Ισοδύναμα: Για κάθε $x \in U$ να ισχύει $s(x) \in \mathcal{S}_x$. Δηλαδή, να έχουμε $\pi \circ s = id_U$ ή αλλιώς το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$