Θέματα Άλγεβρας και Γεωμετρίας Ι

Άπειρη Θεωρία Galois.

Ονομ/νο: Νούλας Δημήτριος
AM:
email:

1 Κλασική θεωρία Galois

2 Γενική Τοπολογία

3 Άπειρη θεωρία Galois

Εδώ ξεκινάμε να χτίζουμε την θεωρία για τις άπειρες επεκτάσεις που θα μας απασχολήσουν. Για όλη την ενότητα θα βασιστούμε αρκέτα στους ακόλουθους συμβολισμούς.

Έστω K/F Galois επέκταση, τότε συμβολίζουμε:

$$G = Gal(K/F)$$
$$\mathcal{I} = \{E : K/E/F, \quad [E:F] < \infty, \quad E/F \quad \text{Galois } \}$$
$$\mathcal{N} = \{N \subseteq G : N = Gal(K/E) \quad \text{για κάποιο } E \in \mathcal{I}\}$$

υπενθύμιση: προποσιτιον 3.28! αν K/F κανονική και $N/K/L/F$ σώματα με $\tau : L \mapsto N$ ένας $F-$ ομομορφισμός, τότε $\tau(L) \subseteq K$ και υπάρχει $\sigma \in Gal(K/F)$ με $\sigma|_L = \tau$ (θα χρησιμοποείται αρκετά.)

Λήμμα 1. *Αν $a_1, \ldots a_n \in K$ τότε υπάρχει $E \in \mathcal{I}$ με $a_i \in E$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Απόδειξη.

Έστω $E \subseteq K$ το σώμα ριζών των ελαχίστων πολυωνύμων των a_i υπεράνω του F , δηλαδή το σώμα ριζών του γινομένου τους (!!!). Εφόσον κάθε a_i είναι διαχωρίσιμο (!!!) υπεράνω του F τότε το E είναι κανονική επέκταση του F και διαχωιρίσιμη, επομένως η επέκταση E/F είναι Γαλοις. Καθώς έχουμε πεπερασμένα a_i τότε $[E : F] < \infty$, επομένως $E \in \mathcal{I}$. $\square$

Λήμμα 2. *Αν $N \in \mathcal{N}$ με $N = Gal(K/E)$, $E \in \mathcal{I}$ τότε $E = F^N$ και $N \trianglelefteq G$. Επιπλέον $G/N \cong Gal(E/F)$. Επιπλέον $|G/N| = |Gal(E/F)| = [E : F] < \infty$.*

Απόδειξη.

K είναι κανονική και διαχωρίσιμη επέκταση υπεράνω του F το οποίο συνεπάγεται ότι είναι και υπεράνω του E . Δηλαδή K/E Γαλοις και συνεπώς $E = F^N$, όπως στην απόδειξη του θθθΓ, η απεικόνιση $\theta : G \mapsto Gal(E/F)$ με κανόνα $\sigma \mapsto \sigma|_E$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα $Gal(K/E) = N$ Προποσιτιον 3.28!!! λέει ότι θ επιμορφισμός. Τα υπόλοιπα έπονται από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων. $\square$

Λήμμα 3. *$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{1_G\} = \{id : K \mapsto K\}$. Επιπλέον, $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} \sigma N = \{\sigma\}$ για κάθε $\sigma \in G$.*

Απόδειξη.

Έστω $\tau \in \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$ και $a \in K$. Από το παραπάνω λήμμα (17.1) υπάρχει $E \in \mathcal{I}$ με $a \in E$. Έχουμε $N := Gal(K/E) \in \mathcal{N}$ εφόσον $E \in \mathcal{I}$. Ο αυτομορφισμός τ κρατάει σταθερό το E καθώς $\tau \in N$, επομένως $\tau(a) = a$ για το τυχόν $a \in K$. Συνεπώς $\tau = id_K$ και άρα αυτό είναι το μοναδικό στοιχείο της τομής. Για το δεύτερο επιχείρημα, αν $\tau \in \sigma N$ για κάθε N τότε $\sigma^{-1}\tau \in N$ για κάθε N, επομένως $\sigma^{-1}\tau = id_K$ και άρα $\tau = \sigma$ για το τυχόν $\tau \in \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \sigma N$. $\square$

Λήμμα 4. *Αν $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ τότε $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}$. (Κλειστότητα σε πεπ τομές)*

Απόδειξη.

Έστω $N_i = Gal(K/E_i)$ με $E_i \in \mathcal{I}$. Κάθε E_i είναι πεπερασμένη επέκταση Γαλοις του F , επομένως E_1E_2 είναι επιπλέον πεπερασμένη επέκταση Γαλοις του F , άρα $E_1E_2 \in \mathcal{I}$. Ωστόσο, έχουμε ότι $Gal(K/E_1E_2) = N_1 \cap N_2$ Πράγματι,

$$\sigma \in N_1 \cap N_2 \iff \sigma|_{E_1} = id \text{ και } \sigma|_{E_2} = id \iff E_1 \subseteq F^{(\sigma)} \text{ και } E_2 \subseteq F^{(\sigma)}$$

$$\iff E_1E_2 \subseteq F^{(\sigma)}$$

Επομένως $N_1 \cap N_2 = Gal(K/E_1E_2) \in \mathcal{N}$. □

Τώρα θα ορίσουμε την τοπολογία στην ομάδα Galois G.

Ορισμός (Τοπολογία Krull)**.** *$(G, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος όπου $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία Krull που ορίζεται ως εξής: Ένα υποσύνολο X του G είναι ανοιχτό αν $X = \varnothing$ ή $X = \cup_i \sigma_i N_i$ για κάποια $\sigma_i \in G$ και $N_i \in \mathcal{N}$.*

Βέβαια πρέπει να δείξουμε ότι πράγματι έχουμε μια τοπολογία. Από τον ορισμό το $\varnothing$ είναι ανοιχτό και οι ενώσεις ανοιχτών είναι ανοιχτό. Έχουμε ότι $F \in \mathcal{I}$ και άρα $G \in \mathcal{N}$, δηλαδή το G μπορεί να γραφτέι ως ένωση εφόσον κάποιο $N_i = G$. Μένει να δείξουμε την κλειστότητα στις πεπερασμένες τομές.

Έχουμε ότι:

$$\left(\bigcup_i \sigma_i N_i\right) \cap \left(\bigcup_j \sigma_j N_j\right) = \bigcup_{i,j} (\sigma_i N_i \cap \sigma_j N_j)$$

και άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $\tau_1 N_1 \cap \tau_2 N_2$ είναι ανοιχτό για κάθε $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$. Πράγματι, έστω $\sigma \in \tau_1 N_1 \cap \tau_2 N_2$, τότε :

$$\tau_1 N_1 \cap \tau_2 N_2 = \sigma N_1 \cap \sigma N_2 = \sigma(N_1 \cap N_2)$$

και το $\sigma(N_1 \cap N_2)$ είναι ανοιχτό εφόσον $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}$ από το λήμμα 4.

3.1 Ιδιότητες της τοπολογίας Krull:

Εφόσον κάθε μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του G έχει οριστεί ως ένωση τότε το σύνολο:

$$\{\sigma N : \sigma \in G, N \in \mathcal{N}\}$$

είναι βάση της τοπολογίας.

Αν τώρα $N \in \mathcal{N}$ τότε $|G : N| < \infty$ οπότε $G - \sigma N$ είναι ένωση πεπερασμένων συμπλόκων του N . Επομένως, το σN είναι και ανοιχτό και κλειστό (ςλοπεν). Δηλαδή αυτή η τοπολογία έχει βάση από ανοιχτά κλειστά σύνολα.

Πρόταση 1. *Ο τοπολογικός χώρος $(G, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma, \tau \in G, \sigma \neq \tau$. Από προηγούμενο λήμμα (17.3) έχουμε ότι

$$\{\sigma\} = \bigcap_N \sigma N$$

δηλαδή υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε $\tau \notin N \implies \tau \in G - \sigma N$. Τα $\sigma N, G - \sigma N$ είναι ανοιχτά και διαχωρίζουν τα σ, τ . □

Πρόταση 2. *Ο τοπολογικός χώρος $(G, \mathcal{T})$ είναι τοταλλψ δισςοννεςτεδ.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq G$ που περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία σ, τ . Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, υπάρχει σN ανοιχτή περιοχή του σ που δεν περιέχει το τ . Συνεπώς:

$$X = (\sigma N \cap X) \bigcup ((G - \sigma N) \cap X)$$

δηλαδή το X γράφεται ως ένωση ξένων, μη κενών ανοιχτών (της $\mathcal{T}_X$) . Άρα τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του G είναι μονοσύνολα. □

Στην συνέχεια ακολουθεί και η πιο σημαντική ιδιότητα της τοπολογίας Krull, η οποία είναι και αρκετά πιο δύσκολη να αποδειχθεί.

Πρόταση 3. *Ο τοπολογικός χώρος $(G, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι το G μπορεί να κατασκευαστεί από πεπερασμένες Γαλοις ομάδες. Θεωρούμε τις ομάδες πηλίκο G/N οι οποίες είναι πεπερασμένες (από προηγούμενο λήμμα) και θέτουμε

$$P = \prod_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

το ευθύ γινόμενό τους (ευθύ γιν ορισμός;)

Αν Θεωρήσουμε τους τοπολογικούς χώρους $(G/N, \mathcal{T}_\delta)$, όπου $\mathcal{T}_\delta$ η διακριτή τοπολογία, μπορούμε να κάνουμε το P τοπολογικό χώρο δίνοντάς του την τοπολογία γινόμενο. Στην συνέχεια, τα G/N είναι πεπερασμένα και άρα συμπαγή. Άρα, από το θεώρημα Τψχηονοφφ το P είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Επιπλέον, κάθε G/N είναι Ηαυσδορφφ ως πεπερασμένο με διακριτή τοπολογία και η ιδιότητα Ηαυσδορφφ διατηρείται στο γινόμενο, άρα ο P είναι επίσης Ηαυσδορφφ.

Υπάρχει τώρα ένας φυσικός ομομορφισμός ομάδων:

$$f : G \longrightarrow P$$

$$\sigma \longmapsto \{\sigma N\} = \prod_{N \in \mathcal{N}} \sigma N$$

Είναι πράγματι ομομορφισμός ομάδων εφόσον:

$$\sigma \circ \tau \longmapsto \prod_{N \in \mathcal{N}} (\sigma \circ \tau) N$$

και

$$f(\sigma)f(\tau) = \left(\prod_{N \in \mathcal{N}} \sigma N \right) \left(\prod_{N \in \mathcal{N}} \tau N \right) = \prod_{N \in \mathcal{N}} (\sigma N)(\tau N) = \prod_{N \in \mathcal{N}} (\sigma \circ \tau) N$$

όπου στην δεύτερη ισότητα ή πράξη γίνεται στο ευθύ γινόμενο ομάδων ¨κατά συντεταγμένη' και στην επόμενη ισότητα είναι η πράξη εξ ορισμού της ομάδας πηλίκο G/N .

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν θεωρήσουμε ως σύνολο άφιξης την εικόνα της και ότι η εικόνα της είναι κλειστό υποσύνολο του P . Από εκεί θα έπεται ότι η εικόνα θα είναι συμπαγής, συνεπώς μέσω του ομοιομορφισμού f θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Έστω $f : G \to imf$ όπως παραπάνω και $\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\{\sigma N\} = \{N\}$.

$$\sigma \in ker(f) \iff \{\sigma N\} = \{N\} \iff \sigma \in \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{id\}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από το λήμμα (17.3). Συνεπώς, η f είναι 1-1 και εξόρισμού επί.

Έστω $\pi_N : P \to G/N$ η προβολή στον N -παράγοντα . Τότε $\pi_N(f(\sigma)) = \sigma N$ για κάθε $\sigma \in G$. Στη διακριτή τοπολογία στα G/N η βάση αποτελείται από μονοσύνολα, δηλαδή στοιχεία της μορφής τN . Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του P είναι ένωση βασικών και από τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο, κάθε βασικό στοιχείο είναι πεπερασμένη τομή συνόλων της μορφής $\pi_N^{-1}(\tau N)$ για διάφορα $\tau \in G$ και $N \in \mathcal{N}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι η f^{-1} είναι συνεχής, αρκεί η f να είναι ανοιχτή, δηλαδή να στέλνει ανοιχτά σε ανοιχτά. Έστω σH ενα βασικό ανοιχτό, $\sigma \in G, H \in N$ άρα υπάρχει $E \in \mathcal{I}$ τέτοιο ώστε $H = Gal(K/E)$. Τότε:

$$f(\sigma H) = \{((\sigma h)\, N)_{N\in\mathcal{N}} \mid \quad h \in H, h|_E = 1_E\} = \{((\sigma h)\, N)_{N\in\mathcal{N}} \mid \quad h \in H, \sigma h|_E = \sigma|_E\}$$

$$= \{(\tau N)_{N\in\mathcal{N}} \mid \quad \tau|_E = \sigma|_E\} = \pi_H^{-1}(\sigma H)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει εφόσον: Αν $(\tau N)_{N\in\mathcal{N}}$ με $\tau|_E = \sigma|_E$ τότε έστω $x \in E$, έχουμε: $\sigma^{-1}\tau(x) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x$ δηλαδή $\sigma^{-1}\tau$ κρατάει σταθερό το E αν και μόνο αν $\sigma^{-1}\tau \in H \iff \sigma^{-1}\tau H = H \iff \sigma H = \tau H$. Άρα αν πάρουμε την προβολή $\pi_H\left((\tau N)_{N\in\mathcal{N}}\right) = \tau H = \sigma H$. Έχουμε συνεπώς την μια σχέση του περιέχεσθαι.

Αντίστροφα, αν $(\tau N)_{N\in\mathcal{N}}$ τέτοιο ώστε:

$$\tau H = \pi_H\left((\tau N)_{N\in\mathcal{N}}\right) = \sigma H$$

$$\tau H = \sigma H$$

και $x \in E$ τότε $\sigma h_1(x) = \tau h_2(x) \implies \sigma(x) = \tau(x)$ και άρα $\sigma|_E = \tau|_E$. Έχουμε από ορισμό της τοπολογίας γινόμενο ότι $\pi_H^{-1}(\sigma H)$ ανοιχτό (στο P) και $f(\sigma H) \subseteq imf$ άρα $f(\sigma H) = \pi_H^{-1}(\sigma H) \cap imf$ ανοιχτό στο imf .

Με βάση τα προηγούμενα, για να δείξουμε ότι η f αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά αρκεί να ισχύει ότι το $f^{-1}(\pi_N^{-1}(\sigma H))$ είναι ανοιχτό στο G για κάθε σH .

Πράγματι:

$$f^{-1}(\pi_H^{-1}(\sigma N)) = f^{-1}(\{(\tau N)_{N\in\mathcal{N}} \mid \quad \tau|_E = \sigma|_E\}) = \sigma H$$

το οποίο είναι ανοιχτό.

Μένει να δείξουμε ότι η εικόνα imf είναι κλειστή στο P . Εδώ αντί για G/N θα χρησιμοποιούμε το ισόμορφό του $Gal(E_N/F)$ με $E_N = F^N$ με βάση το λήμμα (17.2). Έτσι, θα αναγνωρίζουμε το σύμπλοκο τN ως $\tau|_{E_N}$. Με αυτή τη σύμβαση, αν $p \in P$ δηλαδή $p = (\tau_N N)_N$ τότε $\pi_N(p) = \tau_N N = \tau_N|_{E_N}$ είναι ένας αυτομορφισμός του E_N . Θέτουμε:

$$C = \{p \in P : \forall N, M \in \mathcal{N}, \quad \pi_N(p)|_{E_N\cap E_M} = \pi_M(p)|_{E_N\cap E_M}\}$$

Θα δείξουμε ότι $C = imf$. Για την κατεύθυνση $imf \subseteq C$ έχουμε ότι: $\pi_N(f(\tau))|_{E_N} = \pi_N[(\tau N)_{N\in\mathcal{N}}]|_{E_N} = (\tau N)|_{E_N} = (\tau|_{E_N})|_{E_N} = \tau|_{E_N}$ για κάθε $\tau \in G$. Άρα:

$$\pi_N(f(\tau))|_{E_N\cap E_M} = (\tau|_{E_N})|_{E_N\cap E_M} = \tau|_{E_N\cap E_M} = (\tau|_{E_M})|_{E_N\cap E_M} = \pi_M(f(\tau))|_{E_N\cap E_M}$$

δηλαδή για κάθε $\tau \in G$ ισχύει ότι $f(\tau) \in C$.

Αντίστροφα, έστω $p \in C$. Ορίζουμε $\tau : K \to K$ τέτοια ώστε αν $a \in K$ διαλέγουμε ένα $E_N \in \mathcal{I}$ με $a \in E_N$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοιο από το λήμμα (17.1) , έτσι ώστε $a \mapsto \pi_N(p)(a)$. Για να είναι καλά ορισμένη απεικόνιση πρέπει να μην εξαρτάται από την επιλογή του E_N και αυτό ακριβώς μας παρέχει η συνθήκη του $p \in C$. Δηλαδή, διαλέγουμε E_N, E_M τέτοια ώστε $a \in E_N, E_M \implies a \in E_N \cap E_M$ και άρα εφόσον $p \in C$ ισχύει ότι:

$$\pi_N(p)(a) = \pi_M(p)(a)$$

Το τ είναι και ομομορφισμός δακτυλίων, πράγματι αν $a, b \in K$ και έστω $E_N \in I$ με $a, b \in E_N$ τότε το τ δρα κατάλληλα στα a, b μέσω του ομομορφισμού $\tau|_{E_N} = \pi_N(p)$.

Επιπλέον είναι 1-1 και επί εφόσον μπορούμε μέσω του p^-1 να κατασκευάσουμε το τ^{-1} δηλαδή:

$$\pi_N(p^{-1})(a) = (\pi_N(p))^{-1}(a) = \tau^{-1}(a)$$

Στην συνέχεια, αν $x \in F$ στο αρχικό υπόσωμα που έχουμε θεωρήσει στην αρχή του κεφαλάιου, διαλέγουμε $E_N \in \mathcal{I}$ με $x \in E_N$ όμοια με πριν και άρα το $\pi_N(p)$ είναι εξ ορισμού στοιχείο του G δηλαδή K -ισομορφισμός που κρατάει σταθερό το F και σε αυτή την περίπτωση περιορισμένος στο E_N . Άρα έχουμε ότι $\pi_N(p) \in Gal(E_N/F)$ και συνεπώς $\tau \in G$.

Έτσι καθώς έχουμε $\tau|_{E_N} = \pi_N(p)$ ισχύει ότι:

$$f(\tau) = (\tau N)_{N \in \mathcal{N}} = (\tau|_{E_N})_{N \in \mathcal{N}} = (\pi_N(p))_{N \in \mathcal{N}} = p$$

δηλαδή $p \in imf \implies C = imf$.

Για την κλειστότητα, έστω $p \in P \backslash C$ δηλαδή υπάρχουν $N, M \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε $\pi_N(p)|_{E_N \cap E_M} \neq \pi_M(p)|_{E_N \cap E_M}$. Για το σύνολο

$$X = \pi_N^{-1}(\pi_N(p)) \bigcap \pi_M^{-1}(\pi_M(p))$$

έχουμε ότι περιέχει το p και ότι είναι ανοιχτό υποσύνολο του P ως πεπερασμένη τομή ανοιχτών, από ορισμό προβολών στην τοπολογία γινόμενο. Αν $x \in X$ τότε παίρνουμε τις προβολές $\pi_N(x) = \pi_N(p)$ και $\pi_M(x) = \pi_M(p)$ τα οποία δεν είναι ίσα καθώς παραπάνω φαίνεται ότι δεν ταυτίζονται στον περιορισμό στο $E_N \cap E_M$. Δηλαδή το X περιέχεται εξόλοκλήρου στο P και συνεπώς είναι ανοιχτή περιοχή του τυχαίου $p \in P \setminus C$. Καταλήξαμε στο ότι $P \setminus C$ ανοιχτό, ισοδύναμα C κλειστό. □

Το επόμενο θεώρημα είναι το τελευταίο βήμα που χρειαζόμαστε για να επεκτείνουμε το θεμελιώδης θεώρημα σε άπειρες επεκτάσεις Galois. Εδώ θα φανεί πως χρησιμοποιείται η τοπολογία στο G και έρχεται σε αναλογία με την πρόταση ότι αν G είναι μια πεπερασμένη ομάδα αυτομορφισμών του K τότε $G = Gal(K/F^G)$.

Θεώρημα 1. *Έστω H υποομάδα της G και έστω $H' = Gal(K/F^H)$. Τότε $H' = \overline{H}$, η κλειστή θήκη του H στην τοπολογία του G .*

Απόδειξη.

Από τον ορισμό του σταθερού σώματος έχουμε ότι $H \subseteq H'$. Αρκεί να δείξουμε ότι το H' είναι κλειστό και ότι $H' \subseteq \overline{H}$.

Έστω $\sigma \in G - H'$. Τότε υπάρχει $a \in F^H$ τέτοιο ώστε $\sigma(a) \neq a$. Παίρνουμε $E \in \mathcal{I}$ με $a \in E$ και θεωρούμε την ομάδα $N = Gal(K/E) \in \mathcal{N}$. Για κάθε $\tau \in N$ έχουμε $\tau(a) = a$ εφόσον κρατάνε οι ισομορφισμοί σταθερό το E και έτσι $\sigma\tau(a) = \sigma(a) \neq a$. Δηλαδή , το σN είναι ανοιχτή περιοχή του σ ξένη με το H' . Συνεπώς το $G - H'$ είναι ανοιχτό και άρα το H' κλειστό.

Για να δείξουμε ότι $H' \subseteq \overline{H}$, έστω $\sigma \in H'$ με $N \in \mathcal{N}$ και $E = F^N \in \mathcal{I}$. Ορίζουμε:

$$H_0 = \{p|_E : p \in H\} \leq Gal(E/F)$$

όπου είναι πράγματι υποομάδα της πεπερασμένης $Gal(E/F)$ εφόσον οι αυτομορφισμοί της είναι αυτομορφισμοί της $H \subseteq G$ που κρατάνε σταθερό το F και είναι περιορισμένοι στο E . Έχουμε:

$$F^{H_0} = \{a \in K : p|_E(a) = a \quad \forall p|_E \in H_0\} = E \cap \{a \in K : p(a) = a \quad \forall p \in H\} = E \cap F^H$$

από αντιστοιχία Γαλοις για την πεπερασμένη $Gal(E/F)$ έχουμε $H_0 = Gal(E/(E \cap F^H))$. (αντιστοιχία σχήμα 1-H_0 - $Gal(E/F)$ μέσω της $Gal(E, \_)$ στον πύργο E - $F^{H_0} - F$)

Αν $\sigma \in Gal(K/F^H)$ τότε $\sigma|_{F^H} = id$ δηλαδή το σ κρατάει σταθερό το $E \cap F^H \subseteq F^H$ και άρα αν το περιορίσουμε στο E έχουμε :

$$\sigma|_E \in Gal(E/(E \cap F^H)) = H_0$$

Από ορισμό H_0 υπάρχει $p \in H$ με $p|_E = \sigma|_E$. Δηλαδή $\sigma^{-1}p|_E = 1_E$. άρα έχουμε:

$$\sigma^{-1}p \in Gal(K/E) = N \implies p \in \sigma N \cap H$$

Δηλαδή, αφού το N ήταν τυχόν, κάθε βασική ανοιχτή περιοχή σN του $\sigma \in H'$ τέμνει το H , το οποίο είναι ισοδύναμο από χαρακτηρισμό κλειστής θήκης ότι $\sigma \in \overline{H}$.

□

3.2 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άπειρης Θεωρίας Galois

Θεώρημα 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άπειρης Θεωρίας Galois). *Έστω K/F Γαλοις επέκταση και $G = Gal(K/F)$. Με την Κρυλλ τοπολογία στο G οι απεικονίσεις $L \mapsto Gal(K/L)$ και $H \mapsto F^H$ είναι 1-1 και εμφυτεύουν τα σύνολα:*

$$\{L : K/L/F\} \longleftrightarrow \{H \leq G : H = \overline{H}\}$$

το ένα στο άλλο με την ανάποδη αντιστοιχία. Δηλαδή αν H κλειστό και $K/L/F$ (αντιστοχία σχήμα, προσοχή, να δώ μαλιάκα σημ για να μην μπερδευτώ) (γραφή όπως στο μεμορια)

Επιπλέον, αν $L \longleftrightarrow H$ τότε $|G : H| < \infty \iff [L : F] < \infty$, αν και μόνο αν το H είναι ανοιχτό στην τοπολογία. Όταν αυτό συμβαίνει, ισχύει $|G : H| = [L : F]$. Ακόμα, $H \trianglelefteq G$ αν και μόνο αν η επέκταση L/F είναι Γαλοις. Όταν αυτό συμβαίνει έχουμε τον ισομορφισμό ομάδων $Gal(L/F) \cong G/N$. Αν εμπλουτίσουμε την ομάδα πηλίκο Γ/N με την τοπολογία πηλίκο, τότε αυτός ο ισομορφισμός έινατ και ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. (να κάνω ενυμερατιον)

Έστω L υπόσωμα του K που περιέχει το F , τότε εφόσον το K είναι κανονική και διαχωρίσιμη επέκταση του F θα ισχύουν και τα ίδια υπεράνω του L . Έτσι έχουμε ότι η επέκταση K/L είναι Γαλοις και άρα $L = F^{Gal(K/L)}$. Αν $H \leq G$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $H = Gal(K/F^H)$ αν και μόνο αν το H είναι κλειστό. Άρα έχουμε την ζητούμενη αντιστοιχία.

Έστω L ενδιάμεσο σώμα της K/F και έστω $H = Gal(K/L)$, δηλαδή H κλειστό από το προηγούμενο θεώρημα. Αν υποθέσουμε ότι $|G : H| < \infty$ έχουμε την ξένη ένωση:

$$G = H \cup a_1 \cup \ldots \cup a_n H$$

Αυτό σημαίνει ότι το $G - H$ είναι πεπερασμένη ένωση συμπλόκων του H . Ωστόσο, επειδή το H είναι κλειστό θα είναι και κάθε σύμπλοκο του κλειστό, δηλαδή θα είναι το $G - H$ κλειστό και συνεπώς το H ανοιχτό. Πράγματι, έστω $x \in \overline{aH}$. Τότε:

$$\begin{gathered} xN \cap aH \neq \varnothing \quad \forall N \in \mathcal{N} \\ \iff a^{-1}xN \cap H \neq \varnothing \quad \forall N \in \mathcal{N} \\ \iff a^{-1}x \in \overline{H} = H \implies x \in aH \end{gathered}$$

Αντίστροφα, αν το H είναι ανοιχτό τότε περιέχει μια βασική περιοχή του id . Δηλαδή υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε:

$$idN = N \subseteq H \implies F^N \supseteq F^N$$

δηλαδή $L \subseteq E$ αν θεωρήσουμε $E = F^N$. Επειδή $N \in \mathcal{N}$ έχουμε ότι $E \in \mathcal{I}$ και άρα $[E : F] < \infty$. Από κανόνα πύργων έχουμε:

$$[E : F] = [E : L][L : F]$$

και άρα $[L : F] < \infty$.

Για την τελευταία κατεύθυνση, αν $[L:F]<\infty$ τότε $L=F(a_1,\dots a_n)$ με $a_i\in K$ και για αυτά τα a_i το λήμμα (17.1) μας λέει ότι υπάρχει $E\in\mathcal{I}$ με $a_i\in E$ για κάθε i και συνεπώς $L\subseteq E$. Έστω τώρα $N=Gal(K/E)$ τότε:

$$L\subseteq H \implies Gal(K/L)\geq Gal(K/H)$$

δηλαδή $N\leq H$ και $|G:H|\leq|G:N|<\infty$.

Από το λήμμα (17.2) έχουμε ότι $G/N\cong Gal(E/F)$ μέσω της απεικόνισης $\sigma N\mapsto\sigma|_E$. Επομένως, η ομάδα πηλίκο H/N απεικονίζεται στο $\{p|_E : p\in H\}=H_0$, το οποίο είναι υποομάδα της $Gal(E/F)$ και έχουμε δείξει προηγουμένως ότι αυτό έχει σταθερό σώμα $L\cap E=L$. Από το θεμελιώδης θεώρημα για πεπερασμένες επεκτάσεις έχουμε ότι $|H_0|=[E:L]$. Από αυτό έπεται ότι:

$$|G:H|=|G/N:H/N|=\frac{|G/N|}{|H/N|}=\frac{[E:F]}{[E:L]}=[L:F]$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η $H=Gal(K/L)$ είναι κανονική υποομάδα της G . Έστω $a\in L$ και $f(x)=Irr(a,F)$. Αν $b\in K$ είναι ρίζα του $f(x)$ τότε από το θεώρημα επέκτασης ισομορφισμών υπάρχει $\sigma\in G$ με $\sigma(a)=b$. Θα δείξουμε ότι $b\in L$. Έστω $\tau\in H$, τότε :

$$\tau(b)=\sigma^{-1}(\sigma\tau\sigma^{-1}(a))=\sigma^{-1}(a)=b$$

εφόσον $H\trianglelefteq G$ και άρα $\sigma\tau\sigma^{-1}\in H$. Συνεπώς το b ανήκει στο σταθερό σώμα της H , δηλαδή στο L . Δείξαμε ότι το $f(x)$ διασπάται πλήρως στο L . Αυτό αποδεικνύει την κανονικότητα της επέκτασης L/F και η διαχωρισιμότητα της επέκτασης έπεται από την διαχωρισιμότητα της K/F (απόδειξη;). Άρα L/F Γαλοις επέκταση.

Αντίστροφα, αν L/F Γαλοις επέκταση τότε από υπενθύμιση (!!) έχουμε ότι

$$\theta: G\longrightarrow Gal(L/F)$$

$$\sigma\longmapsto\sigma|_L$$

Είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα το $H=Gal(K/L)$ αφού αν

$$\theta(\sigma)=1_L \implies \sigma|_L=1_L \implies \sigma\in Gal(K/L)$$

συνεπώς έχουμε $H\trianglelefteq G$ ως πυρήνα ομομορφισμού. Επιπλέον ο θ είναι επί αφού αν έχουμε ένα τυχόν $\tau\in Gal(L/F)$ τότε το επεκτείνουμε μέσω του θεωρήματος επέκτασης ισομορφισμών σε $\tau'\in G$ και έτσι $\tau'|_L=\tau$. Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων έχουμε ότι $G/H\cong Gal(L/F)$.

Το τελευταίο βήμα της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι ο ισομορφισμός αυτός είναι και ομοιομορφισμός, ωστόσο, (!!!!!) η συνέχεια και η κλειστότητα διατηρούνται στην τοπολογία πηλίκο άρα αρκεί να δείξουμε ότι η θ είναι συνεχής και κλειστή και τότε η επαγόμενη απεικόνιση:

$$\sqsubseteq: G/H\longrightarrow Gal(L/F)$$

θα είναι ομοιμορφισμός.

Όμοια με την Γαλοις επέκταση K/F , στην Γαλοις επέκταση L/F τα βασικά ανοιχτά υποσύνολα της $Gal(L/F)$ είναι της μορφής $\rho Gal(L/E)$ για πεπερασμένες Γαλοις επεκτάσεις E/F όπου $E\subseteq L$. Έστω $N=Gal(K/E)\in\mathcal{N}$. Το σύνολο $\theta^{-1}(Gal(L/E))$ περιέχει όλους τους ισομορφισμούς $\sigma\in G$ που αφού τους περιορίσουμε στο L μέσω της θ κρατάνε σταθερό το E , δηλαδή:

$$\theta^{-1}(Gal(L/E))=N$$

όμοια:

$$\theta^{-1}(\rho Gal(L/E))=\tau N$$

Για κάθε $\tau\in G$ τέτοιο ώστε $\theta(\tau)=\tau|_L=\rho$. Τα τN είναι βασικά ανοιχτά υποσύνολα του G συνεπώς δείξαμε ότι η θ είναι συνεχής. Επιπλέον, η εικόνα μέσω συνεχούς απεικόνισης ενός συμπαγούς συνόλου παραμένει συμπαγές(;) σύνολο. Η G είναι συμπαγής και άρα είναι και η $Gal(L/F)$. Αντίστοιχα με την απόδειξη για την G , η $Gal(L/F)$ είναι Hausdorff και κάθε συμπαγές υποσύνολο χώρου Hausdorff είναι κλειστό. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε ένα κλειστό υποσύνολο της G αυτό θα είναι συμπαγές και μέσω της θ θα απεικονίζεται σε κλειστό υποσύνολο της $Gal(L/F)$. Έτσι δείξαμε ότι και η θ^{-1} είναι συνεχής και άρα ο ισομορφισμός που επάγεται από την θ είναι και αμφισυνεχής όταν δωθεί η τοπολογία πηλίκο στο G/H, δηλαδή είναι και ομοιμορφισμός. $\square$

Παράδειγμα 1. *έστω K/F πεπερασμένη Galois επέκταση. Τότε η Krull τοπολογία στο $Gal(K/F)$ είναι η διακριτή. Πράγματι αν $\sigma \in G$, έχουμε $K \in \mathcal{I}$ αφού $[K : F] < \infty$ και άρα το $\sigma N = \sigma Gal(K/K) = \sigma\{1_K\} = \{\sigma\}$ είναι ανοιχτή περιοχή του σ . Ετσι, κάθε υποομάδα $H \leq G$ είναι κλειστή και βρισκόμαστε ξανά στο αρχικό θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois.*

Παράδειγμα 2.

4 Περαιτέρω Μελέτη

Στην προσπάθεια να γενικεύσει κανείς τα προηγούμενα επιχειρήματα μπορεί να φτάσει στους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός. *Τοπολογική ομάδα G είναι ένας τοπολογικός χώρος $(G, \mathcal{T})$ όπου η G είναι ομάδα με τις ιδιότητες ότι η απεικόνιση πολλαπλασιασμού $(a, b) \mapsto ab$ και η αντιστροφή $a \mapsto a^{-1}$ είναι συνεχείς . Αντίστοιχα ζητάμε οι ομομορφισμοί μεταξύ των ομάδων να είναι και συνεχείς για να τους λέμε ομομορφισμούς τοπολογικών ομάδων.*

Όπως κάναμε και πριν δηλαδή που απαιτούσαμε ο ισομορφισμός ομάδων που προέκυπτε να είναι και ομοιομορφισμός.

Ορισμός. *Αν $\Lambda \neq \varnothing$ ένα σύνολο και $\leq$ είναι μια διμελής σχέση στο $\Lambda \times \Lambda$ τότε το $(\Lambda, \leq)$ λέγεται κατευθυνόμενο σύνολο αν ικανοποιούνται οι δύο σχέσεις της προδιάταξης:*
ι) Αυτοπαθής $\lambda \leq \lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$ ιι) Μεταβατική $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\lambda_2 \leq \lambda_3 \implies \lambda_1$
μαζί με την :
Για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda_3$.

Για παράδειγμα, αν σκεφτόμαστε υποσύνολα A, B ενός μη κενού συνόλου X τότε η σχέση $A \leq B \iff A \supseteq B$ καθιστά το X κατευθυνόμενο εφόσον $A, B \leq A \cap B$.

Στην συνέχεια, τα επόμενα είναι συνήθως ορισμένα στην θεωρία των κατηγοριών αλλά εδώ θα τα ορίσουμε περιορισμένοι στις ομάδες.

Ορισμός (Inverse System)**.** *Ένα αντίστροφο σύστημα αποτελείται από ένα κατευθυνόμενο σύνολο $(J, \leq)$ και μια συλλογή πεπερασμένων ομάδων $\mathcal{G} = \{G_i : i \in J\}$ οι οποίες είναι τοπολογικές ομάδες εφοδιασμένες με την διακριτή τοπολογία. Επιπλέον απαιτούμε και μια συλλογή ομομορφισμών $\{f_i^j : G_j \to G_i | i, j \in J \quad \forall i \leq j\}$ οι οποίοι ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:*

$$f_i^i = id(G_i)$$
$$f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$$

Ορισμός (Inverse Limit)**.** *Αντίστροφο όριο ενός συστήματος όπως παραπάνω θα λέμε μια ομάδα G μαζί με τους ομομορφισμούς $f_i : G \to G_i$ που ικανοποιούν $f_i^j \circ f_j = f_i$ για κάθε ζεύγος $i \leq j$, εφόσον η ομάδα G ικανοποιεί την παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

Αν H είναι μια ομάδα μαζί με ομομορφισμούς $\tau_i : H \to G_i$ που ικανοποιούν $f_i^j \circ \tau_j = \tau_i$ για κάθε ζεύγος $i \leq j$ τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\tau : H \to G$ με $\tau_i = f_i \circ \tau$ για κάθε i . Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται: (διαγραμμα τικζσδ, τι ιμπορτ κανω;)

Έτσι μπορεί να δειχθεί ότι το αντίστροφο όριο ενός συστήματος υπάρχει, είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό και είναι το

$$\varprojlim G_i = \{(g_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} G_i : \quad f_i^j(g_j) = g_i \quad \forall i \leq j\}$$

Σαν ομάδα, το αντίστροφο όριο είναι υποομάδα της $\prod G_i$ και είναι τοπολογική ομάδα που παίρνει την επαγόμενη τοπολογία περιορισμό, εφόσον στην $\prod G_i$ δίνεται η τοπολογία γινόμενο.

Στην συνέχεια θα δώσουμε έναν τελευταίο ορισμό που θα δέσει με το προηγούμενο κεφάλαιο:

Ορισμός (Profinite)**.** *Μια τοπολογική ομάδα λέγεται profinite (projective + finite) αν είναι ισόμορφη με το αντίστροφο όριο ενός αντιστρόφου συστήματος πεπερασμένων ομάδων.*

Τα αποτελέσματα του προηγούμενο κεφαλαίου θα μπορούσαν να παραπέμψουν κάποιον ότι ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ακριβώς η τοπολογική ομάδα να έχει τις ιδιότητες: συμπάγεια, Hausdorff και τοταλλψ δισςοννεςτεδ.

Έτσι, ένα παράδειγμα χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα μαζί με την διακριτή τοπολογία είναι profinite.

Το παράδειγμα που μας ενδιαφέρει είναι ότι για κάθε άπειρη επέκταση Γαλοις, η ομάδα γαλοις που προκύπτει είναι προφινιτε. Αν ακολουθήσουμε τους ορισμούς του προηγούμενο κεφαλαίου και θεωρήσουμε την συλλογή πεπερασμένων ομάδων με την διακριτή τοπολογία:

$$\{G/N : \quad N \in \mathcal{N}\}$$

και ως ομομορφισμούς:

$$f_i^j : G/N_i \longrightarrow G/N_j$$

τις κανονικές προβολές, όπου $N_i \geq N_j \iff N_i \subseteq N_j$ δηλαδή τις απεικονίσεις:

$$G/Gal(K/E_i) \cong Gal(E_i/F) \longrightarrow Gal(E_j/F) \cong G/Gal(K/E_j)$$

$$\sigma \longmapsto \sigma|_{E_j}$$

τότε τα παραπάνω αποτελούν αντίστροφο σύστημα και μάλιστα έχουμε τον ομοιομορφισμό:

$$G \cong \varprojlim G/N$$

δηλαδή, η τοπολογία που προκύπτει στο αντίστροφο όριο ως τοπολογία περιορισμός δεν είναι άλλη από την τοπολογία Κρυλλ.

Ένα άλλο παράδειγμα άξιο μελέτης είναι ο ορισμός της προσθετικής ομάδας των π-αδις ακεραίων. Είναι η προφινιτε ομάδα $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ όπου το n διατρέχει τους φυσικούς μαζί με τις φυσικές απεικονίσεις $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ για όλα τα $n \geq m$. Αναμενόμενο είναι και η τοπολογία που προκύπτει στο αντίστροφο όριονα ταυτίζεται με την τοπολογία που έχουν οι π-αδις ακέραιοι μέσω του συνήθους ορισμού τους από την ανάλυση.

Αναφορές

[1] Patrick Morandi. *Fields and Galois Theory.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] James S. Milne. *Fields and Galois Theory.* Available at www.jmilne.org/math/, 2020