Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες

2η Ομάδα Ασκήσεων

1. Έστω $F, G : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ δύο προσθετικοί συναρτητές και $\eta : F \longrightarrow G$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Υποθέτουμε ότι η συνιστώσα $\eta_M : FM \longrightarrow GM$ είναι ένας ισομορφισμός S-προτύπων για κάθε R-πρότυπο M. Να δείξετε ότι ο F είναι ακριβής (αντίστ. αριστερά ακριβής) αν και μόνο αν ο G είναι ακριβής (αντίστ. αριστερά ακριβής).

2. Έστω X ένα R-πρότυπο και $x_0 \in X$. Για κάθε R-πρότυπο M θεωρούμε την απεικόνιση $\eta_M : \mathrm{Hom}_R(X, M) \longrightarrow M$ με $f \mapsto f(x_0) \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_R(X, M)$. Να δείξετε ότι η οικογένεια $(\eta_M)_M$ ορίζει ένα φυσικό μετασχηματισμό $\eta : \mathrm{Hom}(X, \_) \longrightarrow U$. Εδώ, $U : R\text{-Mod} \longrightarrow Ab$ είναι ο επιλήσμων συναρτητής, που ορίζεται θέτοντας $U(M) = M$ για κάθε R-πρότυπο M και $Uf = f$ για κάθε R-γραμμική απεικόνιση f.

3. Έστω $M = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ και $M_0, A, B \subseteq M$ οι υποομάδες που ορίζονται θέτοντας $M_0 = \mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$, $A = \{(a_n)_n \in M : 2^n \,|\, a_n \text{ για κάθε } n\}$ και $B = \{(a_n)_n \in M : 3^n \,|\, a_n \text{ για κάθε } n\}$.
(α) Να δείξετε ότι $M = A + B$.
Υπόδειξη: Είναι μκδ$(2^n, 3^n) = 1$ για κάθε $n \geq 0$.
(β) Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$ είναι $A \subseteq M_0 + 2^n M$ και $B \subseteq M_0 + 3^n M$.
(γ) Έστω $f : M \longrightarrow \mathbf{Z}$ μια προσθετική απεικόνιση, που είναι τέτοια ώστε ο περιορισμός $f|_{M_0} : M_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$ είναι η μηδενική απεικόνιση. Να δείξετε ότι $f = 0$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τα (α) και (β).
(δ) Να συμπεράνετε ότι η ομάδα $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M/M_0, \mathbf{Z})$ είναι τετριμμένη.

4. (α) Έστω I ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, $M = \mathbf{Z}^{(I)}$ και $M_0 \subseteq M$ μια αριθμήσιμη υποομάδα. Να δείξετε ότι υπάρχει μη-μηδενική προσθετική απεικόνιση $f : M \longrightarrow \mathbf{Z}$, τέτοια ώστε ο περιορισμός $f|_{M_0} : M_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$ είναι η μηδενική απεικόνιση.
(β) Να δείξετε ότι η ομάδα $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ δεν είναι προβολική ως $\mathbf{Z}$-πρότυπο.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση και το (α) παραπάνω.

5. Για κάθε ακέραιο αριθμό n θεωρούμε την πολλαπλότητα $v(n)$ του 2 στην παραγοντοποίηση του $|\,n\,|$ σε γινόμενο πρώτων αριθμών. (Για παράδειγμα, είναι $v(40) = 3$ και $v(45) = 0$.) Επίσης θέτουμε $v(0) = \infty$. Έστω $M = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ και $M_0, N \subseteq M$ οι υποομάδες που ορίζονται θέτοντας $M_0 = \mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ και $N = \{(a_n)_n \in M : \lim_n v(a_n) = \infty\}$.
(α) Να δείξετε ότι η ομάδα N είναι υπεραριθμήσιμη.
Υπόδειξη: Βρείτε ένα μονομορφισμό $M \longrightarrow N$.
(β) Να δείξετε ότι $N = M_0 + 2N$.
(γ) Να δείξετε ότι η ομάδα πηλίκο $N/2N$ είναι αριθμήσιμη.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (β) και το 2ο θεώρημα των ισομορφισμών.

6. (α) Έστω I ένα σύνολο και $N = \mathbf{Z}^{(I)}$. Αν η ομάδα πηλίκο $N/2N$ είναι αριθμήσιμη, να δείξετε ότι η ομάδα N είναι επίσης αριθμήσιμη.
Υπόδειξη: Από το 1ο θεώρημα των ισομορφισμών, έπεται ότι $N/2N = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(I)}$.
(β) Να δείξετε ότι η ομάδα $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ δεν είναι προβολική ως $\mathbf{Z}$-πρότυπο.
Υπόδειξη: Θεωρήστε την υποομάδα $N \subseteq \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ που ορίστηκε στην προηγούμενη άσκηση και εφαρμόστε το (α) παραπάνω.

7. Έστω $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Ο πυρήνας k_F του F ορίζεται ως η κλάση που αποτελείται από τα R-πρότυπα M που είναι τέτοια ώστε $FM = 0$ (ως S-πρότυπα).
(α) Να δείξετε ότι ο πυρήνας k_F περιέχει το μηδενικό R-πρότυπο και είναι κλειστός ως προς πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και ευθείς παράγοντες (δηλαδή ότι, για κάθε δύο R-πρότυπα M, N είναι $M, N \in k_F$ αν και μόνο αν $M \oplus N \in k_F$).
(β) Αν ο F είναι αριστερά ακριβής, να δείξετε ότι ο πυρήνας k_F είναι κλειστός ως προς πυρήνες ομομορφισμών (δηλαδή ότι, για κάθε $M, N \in k_F$ και κάθε R-γραμμική απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ είναι $\ker f \in k_F$).
(γ) Αν ο F είναι ακριβής, να δείξετε ότι ο πυρήνας k_F είναι κλειστός και ως προς συν-πυρήνες ομομορφισμών (δηλαδή ότι, για κάθε $M, N \in k_F$ και κάθε R-γραμμική απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ είναι $\operatorname{coker} f \in k_F$). Να δείξετε επίσης ότι ο πυρήνας k_F είναι κλειστός ως προς επεκτάσεις, δηλαδή ότι για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία R-προτύπων $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ με $A, C \in k_F$, είναι $B \in k_F$.

8. Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα R-πρότυπο και $r_0 \in R$. Για κάθε αβελιανή ομάδα A θεωρούμε την απεικόνιση $\zeta_A : \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, A)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(UM, A)$, η οποία ορίζεται θέτοντας $\zeta_A(f)(x) = [f(x)](r_0) \in A$ για κάθε $f \in \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, A))$ και $x \in M$. Εδώ, θεωρούμε την ομάδα $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, A)$ των προσθετικών απεικονίσεων $(R, +) \longrightarrow A$ ως R-πρότυπο, όπου ορίζουμε για κάθε $r \in R$ και $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, A)$ την απεικόνιση $r \cdot f$ ως την απεικόνιση $r' \mapsto f(r'r) \in A$, $r' \in R$, ενώ UM είναι η προσθετική ομάδα $(M, +)$. Να δείξετε ότι η οικογένεια $(\zeta_A)_A$ ορίζει ένα φυσικό μετασχηματισμό προσθετικών συναρτητών $\zeta : \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \_)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(UM, \_)$.

9. Έστω F ένα σώμα και $R = \mathbf{M}_2(F)$ ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων με εγγραφές από το F. Καθώς ο υποδακτύλιος $\{aI_2 : a \in F\} \subseteq R$ είναι ισόμορφος με το F, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο F είναι ένας υποδακτύλιος του R (και άρα ότι ο R είναι ένας F-διανυσματικός χώρος).
(α) Να εξηγήσετε γιατί ο επιλήσμων συναρτητής $U : R\text{-Mod} \longrightarrow F\text{-Mod}$, ο οποίος ορίζεται θέτοντας $UM = M$ για κάθε R-πρότυπο M και $Uf = f$ για κάθε R-γραμμική απεικόνιση f, είναι ακριβής.
(β) Για κάθε F-διανυσματικό χώρο V ορίζουμε στην αβελιανή ομάδα $\operatorname{Hom}_F(R, V)$ τη δομή ενός R-προτύπου, ως εξής: Αν $r \in R$ και $f \in \operatorname{Hom}_F(R, V)$, τότε η απεικόνιση $r \cdot f \in \operatorname{Hom}_F(R, V)$ είναι η απεικόνιση $r' \mapsto f(r'r) \in V$, $r' \in R$. Να δείξετε ότι το R-πρότυπο $\operatorname{Hom}_F(R, V)$ είναι εμφυτευτικό.
Υπόδειξη: Συγκρίνετε τους συναρτητές $\operatorname{Hom}_R(\_, \operatorname{Hom}_F(R, V))$ και $\operatorname{Hom}_F(U\_, V)$.