Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες

3η Ομάδα Ασκήσεων

1. Έστω A, B δύο διαιρετές αβελιανές ομάδες και $f : A \longrightarrow B$ μια προσθετική απεικόνιση. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση πηλίκο $p : B \longrightarrow \operatorname{coker} f$ είναι ένας διασπώμενος επιμορφισμός της κατηγορίας Ab των αβελιανών ομάδων.

2. Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο, τέτοιο ώστε $\operatorname{Ext}^1_R(M, N) = 0$ για κάθε R-πρότυπο N. Να αποδείξετε ότι το πρότυπο M είναι προβολικό.

3. Αν οι n, m είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι η αβελιανή ομάδα $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m)$ είναι κυκλική τάξης d, όπου $d = \text{μκδ}(n, m)$.

4. Έστω A, B δύο αβελιανές ομάδες. Αν η ομάδα A είναι διαιρετή και η B είναι ελεύθερη στρέψεως, να αποδείξετε ότι η ομάδα $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(A, B)$ είναι ελεύθερη στρέψεως.

5. Θεωρούμε τις προσθετικές απεικονίσεις
$$i : \mathbf{Z}_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_9 \quad \text{και} \quad p : \mathbf{Z}_9 \longrightarrow \mathbf{Z}_3,$$
όπου $i[n]_3 = [3n]_9 \in \mathbf{Z}_9$ για κάθε $[n]_3 \in \mathbf{Z}_3$ και $p[n]_9 = [n]_3 \in \mathbf{Z}_3$ για κάθε $[n]_9 \in \mathbf{Z}_9$.[1]
Να αποδείξετε ότι:
(α) Οι επεκτάσεις
$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_3 \xrightarrow{i} \mathbf{Z}_9 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_3 \longrightarrow 0 \quad \text{και} \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Z}_3 \xrightarrow{-i} \mathbf{Z}_9 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_3 \longrightarrow 0$$
δεν είναι ισοδύναμες.
(β) Κάθε επέκταση $0 \longrightarrow \mathbf{Z}_3 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_3 \longrightarrow 0$ που δεν είναι τετριμμένη (διασπώμενη) είναι ισοδύναμη με μία και μόνο μία από τις δύο επεκτάσεις του (α).

6. Έστω R ένας δακτύλιος, M', M, N τρία R-πρότυπα και $f : M' \longrightarrow M$ μια γραμμική απεικόνιση.
(α) Για κάθε επέκταση
$$(e) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$
του M μέσω του N θεωρούμε την επέκταση
$$(e') \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow L' \xrightarrow{p'} M' \longrightarrow 0$$
του M' μέσω του N, όπου $L' = \{(m', l) \in M' \oplus L : f(m') = p(l) \in M\}$ είναι το pullback των f, p και $p'(m', l) = m' \in M'$ για κάθε $(m', l) \in L'$. Να αποδείξετε ότι η αντιστοιχία $(e) \mapsto (e')$ επάγει μια απεικόνιση $\widetilde{f} : ext(M, N) \longrightarrow ext(M', N)$.
(β) Να αποδείξετε ότι το διάγραμμα
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ext}^1_R(M, N) & \stackrel{\lambda_{M,N}}{\longrightarrow} & ext(M, N) \\ f^* \downarrow & & \downarrow \widetilde{f} \\ \operatorname{Ext}^1_R(M', N) & \stackrel{\lambda_{M',N}}{\longrightarrow} & ext(M', N) \end{array}$$
είναι μεταθετικό. Εδώ, συμβολίζουμε με $\lambda_{M,N}$ και $\lambda_{M',N}$ τις 1-1 και επί απεικονίσεις που ορίσαμε στις παραδόσεις, ενώ f^* είναι η προσθετική απεικόνιση που επάγεται από την f εφαρμόζοντας τον ανταλλοίωτο συναρτητή $\operatorname{Ext}^1_R(\_, N)$.

[1] Εδώ συμβολίζουμε με $[n]_m$ την κλάση του ακεραίου n modulo m.