Ομολογική Άλγεβρα και Κατηγορίες
1η Ομάδα Ασκήσεων

Νούλας Δημήτριος
1112201800377

5 Απριλίου 2020

1. $i) \implies ii)$ Έστω $f : A \to B$ ισομορφισμός, δηλαδή ο f έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, τον $f^{-1} : B \to A$. Έχουμε ότι $ff^{-1} = 1_B$ δηλαδή ο f είναι διασπώμενος επιμορφισμός. Για το μονομορφισμό θεωρούμε ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών $g, h : A' \to A$ με $fg = fh$ τότε:

$$f^{-1}(fg) = f^{-1}(fh) \implies (f^{-1}f)g = (f^{-1}f)h \implies$$

$$1_A g = 1_A h \implies g = h : A' \to A$$

$ii) \implies iii)$ Ο f είναι διασπώμενος επιμορφισμός, δηλαδή υπάρχει $g : B \to A : fg = 1_B$. Έστω ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών $a, b : B \to \Gamma$ με $af = bf$. Τότε:

$$(af)g = (bf)g \implies a(fg) = b(fg) \implies$$

$$a1_B = b1_B \implies a = b : B \to \Gamma$$

άρα ο f είναι επιμορφισμός. Επιπλέον $f(gf) = (fg)f = 1_B f = f = f1_A$ και επειδή ο f είναι αριστερά διαγράψιμος έχουμε ότι $gf = 1_A$, άρα ο f είναι διασπώμενος μονομορφισμός.

$iii) \implies i)$ Έστω f διασπώμενος μονομορφισμος, δηλαδή υπάρχει $g : B \to A$ με $gf = 1_A$. Τότε έχουμε $(fg)f = f(gf) = f1_A = f = 1_B f$ και f δεξιά διαγράψιμος, άρα $fg = 1_B$ και επειδή $gf = 1_A$ έχουμε ότι ο f είναι ισομορφισμός.

2. $i)$ Έστω $x \in A + (B \cap C) \implies x = a + y$ για κάποια $a \in A, y \in B \cap C$. Έχουμε:

$$x = a + y \quad a \in A, y \in B \implies x \in A + B$$

$$x = a + y \quad a \in A, y \in C \implies x \in A + C$$

από τα οποία έπεται ότι $x \in (A + B) \cap (A + C)$ δηλαδή $A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap (A + C)$.

$ii)$ Θεωρούμε ως διανυσματικό χώρο τον $\mathbb{R}^2$ και ως υποχώρους του τις ευθείες:

$$A = \{(x,y) : y = x, \quad x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(x,y) : y = -x, \quad x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

Τότε $A + (B \cap C) = A + \{(0,0)\} = A$. Επιπλέον, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $(x,0) = (\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) + (\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) \in A + B$, δηλαδή $C \subseteq A + B \implies A \cup B \cup C \subseteq A + B$. Ομοίως, $(x,-x) = (-x,-x) + (2x,0) \in A + C \implies A \cup B \cup C \subseteq A + C$. Έχουμε:

$$A + (B \cap C) = A \subsetneq A \cup B \cup C \subseteq (A + B) \cap (A + C)$$

δηλαδή ο εγκλεισμός του $i)$ είναι γνήσιος.

$iii)$ Εφόσον $A \subseteq C$ έχουμε ότι $A + C = C$ και το '$\subseteq$' έπεται από το $i)$. Για το '$\supseteq$':

Έστω $x \in (A + B) \cap C$. Δηλαδή $x \in C$ και $x = a + b \in A + B$ για κάποια $a \in A, b \in B$. Έχουμε $a \in A \implies a \in C$ και άρα $x - a = b \in C$. Δηλαδή $b \in B \cap C$ και $x = a + b \in A + (B \cap C)$.

3. $i)$ Έστω $c \in C$ και $f : M \to N$ γραμμική απεικόνιση. Έστω $x, y \in M, r \in R$, τότε:

$$(cf)(x+y) = cf(x+y) = c\big[f(x) + f(y)\big] = (cf)(x) + (cf)(y)$$

$$(cf)(rx) = c\big[f(rx)\big] = crf(x) = rcf(x) = r(cf)(x)$$

άρα πράγματι η $cf : M \to N$ είναι γραμμική. Ορίζουμε:

$$K : C \to End(Hom_R(M,N), +)$$

$$K(c)(f) = cf \in Hom_R(M,N)$$

η οποία απεικόνιση είναι ομομορφισμός δακτυλίων και εφοδιάζει την αβελιανή ομάδα $Hom_R(M,N)$ με δομή C-προτύπου. Πράγματι, έστω $x \in M$:

$$\big[c(f+g)\big](x) = c\big[(f+g)(x)\big] = c\big[f(x) + g(x)\big] = cf(x) + cg(x)$$

$$\big[(c+c')f\big](x) = (c+c')f(x) = cf(x) + c'f(x)$$

$$\big[(cc')f\big](x) = (cc')f(x) = c(c'f(x))$$

$$\big[1_C f\big](x) = 1_C f(x) = f(x)$$

όπου οι παραπάνω ισότητες προκύπτουν επειδή το N είναι R-πρότυπο και $c, c' \in R, f(x), g(x) \in N$.

$ii)$ Έστω $c \in C, f : M \to N, g : N \to L$ γραμμικές απεικονίσεις. Αν $x \in M$ τότε $(cf)(x) = cf(x)$ και:

$$\big[g(cf)\big](x) = g\big[(cf)(x)\big] = g\big[cf(x)\big] = cg\big[f(x)\big] = c(gf)(x)$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $cf(x) \in N$ και g γραμμική. Επιπλέον, με το ίδιο επιχείρημα:

$$\big[(cg)f\big](x) = (cg)\big[f(x)\big] = g[cf(x)] = \ldots = c(gf)(x)$$

άρα πράγματι $g(cf) = c(gf) = (cg)f : M \to L$.

4. $i)$ Έστω M, N δύο R-πρότυπα. Αρκεί να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{K}}M = M \arrow[r, "\eta(c)_M = c1_M"] \arrow[d, "1_{\mathcal{K}}f = f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
1_{\mathcal{K}}N = N \arrow[r, "\eta(c)_N = c1_N"] & N
\end{tikzcd}$$

Έστω $x \in M$. Ακολουθώντας το διάγραμμα δεξιά και κάτω έχουμε $f(cx)$ ενώ κάτω και αριστερά έχουμε $cf(x)$ τα οποία είναι ίσα λόγω της γραμμικότητας της f και επειδή $c \in R$.

$ii)$ Ισχυρισμός: Κάθε ομομορφισμός $f : R \to R$ R-προτύπων είναι της μορφής $f(x) = xb$ για κάποιο μοναδικό $b \in R$. Πράγματι, έχουμε $f(rx) = rf(x)$ για κάθε $r \in R$. Επομένως:

$$f(r) = rf(1_R) = rb$$

όπου $b = f(1_R)$, το οποίο b από αυτήν την επιλογή για το που θα στείλουμε το 1_R μέσω της f είναι μοναδικό.

Για την συνιστώσα $\eta_R : R \to R$ η οποία είναι γραμμική έχουμε επομένως ότι $\eta_R = xc$ για το μοναδικό $c = \eta_R(1_R)$. Επιπλέον για κάθε $r \in R$ ορίζουμε τις γραμμικές $f_r : R \to R$ με $f_r(x) = xr$. Τότε επειδή ο η είναι φυσικός μετασχηματισμός έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\eta_R"] \arrow[d, "f_r"'] & R \arrow[d, "f_r"] \\
R \arrow[r, "\eta_R"] & R
\end{tikzcd}$$

από το οποίο προκύπτει $xrc = xcr \implies rc = cr$ για κάθε $r \in R$, συνεπώς $c \in C$ και $\eta_R(x) = cx$. Αρκεί να δειχτεί ότι οι υπόλοιπες συνιστώσες του η έχουν την ίδια μορφή.

Πράγματι, έστω M ένα R-πρότυπο. Για κάθε $m \in M$ ορίζουμε τις γραμμικές $f_m : R \to M$ τέτοιες ώστε $f_m(1_R) = m$ και έστω $r \in R$, από την μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος έχουμε ότι:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta_R} & R \\ {\scriptstyle f_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_m} \\ M & \xrightarrow{\eta_M} & M \end{array}$$

$$r\eta_M(m) = crm = rcm \implies \eta_M(m) = cm \quad \forall m \in M$$

άρα πράγματι $\eta = \eta(c)$.

5. $i)$ Έστω $n \in N$. Έχουμε $fs(n) = n$ και επιπλέον $s, ig \in Hom_R(N, M)$ όπου ορίζεται το κατά σημείο άθροισμα τους, επομένως $(s+ig)(n) = s(n) + ig(n)$. Άρα ισχύει:

$$(fs')(n) = f\big[s'(n)\big] = f\big[(s+ig)(n)\big] = f\big[s(n) + ig(n)\big] = \\ f\big[s(n)\big] + f\big[i(g(n))\big] = n + 0_N = n$$

όπου $n \in N \implies g(n) \in kerf$ και άρα $f\big[i(g(n))\big] = f(g(n)) = 0_N$. Δηλαδή $fs' = 1_N$.

$ii)$ Για την γραμμική $f : M \to N$ και το R-πρότυπο N από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα γνωρίζουμε ότι υπάρχει απεικόνιση:

$$i_* : Hom_R(N, kerf) \to Hom_R(N, M)$$

η οποία είναι 1-1 και έχει εικόνα την υποομάδα $K \subseteq Hom_R(N, M)$ που περιέχει τις γραμμικές απεικονίσεις $h : N \to M$ τέτοιες ώστε $fh = 0_N : N \to N$. Επιπέον $s, s' \in Hom_R(N, M) \implies s - s' \in Hom_R(N, M)$ και:

$$\big[f(s-s')\big](n) = f\big[(s-s')(n)\big] = f\big[s(n)-s'(n)\big] = fs(n)-fs'(n) = n-n = 0_N$$

για κάθε $n \in N$, άρα $s - s' \in K$. Συνεπώς, λόγω του ότι η i_* είναι 1-1 υπάρχει μοναδική $g \in Hom_R(N, kerf)$ τέτοια ώστε $i_*(g) = i(g) = s - s' \implies s = s' + ig$.

6. $i)$ Έστω $n \in N$. Έχουμε $rf(n) = n$ και για $m \in M$ έχουμε όμοια με την προηγούμενη άσκηση ότι $(r + g\pi)(m) = r(m) + g\pi(m)$. Άρα:

$$(r'f)(n) = \big[(r + g\pi)f\big](n) = r\big[f(n)\big] + g\big[\pi(f(n))\big] = n$$

διότι $f(n) \in imf \implies \pi(f(n)) \in imf/imf \implies \pi(f(n)) = 0_{cokerf}$ και $g(0_{cokerf}) = 0_N$. Άρα πράγματι $r'f = 1_N$.

$ii)$ Για την γραμμική $f : N \to M$ και το R-πρότυπο N από την καθολική ιδιότητα του συνπυρήνα γνωρίζουμε ότι υπάρχει απεικόνιση:

$$\pi^* : Hom_R(coker f, N) \to Hom_R(M, N)$$

η οποία είναι 1-1 και έχει εικόνα την υποομάδα $C \subseteq Hom_R(M, N)$ που περιέχει τις γραμμικές απεικονίσεις $h : M \to N$ τέτοιες ώστε $hf = 0_N : N \to N$. Επιπλέον $r, r' \in Hom_R(M, N) \implies r - r' \in Hom_R(M, N)$ και:

$$\big[(r - r')f\big](n) = (r - r')f(n) = rf(n) - r'f(n) = n - n = 0_N$$

επομένως $r - r' \in C$ και λόγω του ότι η π^* είναι 1-1, υπάρχει μοναδική $g \in Hom_R(coker f, N)$ τέτοια ώστε $\pi^*(g) = g\pi = r - r' \implies r = r' + g\pi$.