Θεωρία Iwasawa

Νούλας Δημήτριος
dnoulas@math.uoa.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενα

2.1 Άλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Έστω L/K μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων αριθμών με δακτύλιους ακεραίων $\mathcal{O}_L$ και $\mathcal{O}_K$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 1. *Κάθε γνήσιο μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ έχει μοναδική παραγοντοποίηση:*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

με $e_i > 0$ και τα $\mathfrak{p}_i$ είναι πρώτα ιδεώδη.

Δοθέντος ενός πρώτου ιδεωδούς $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$, μπορούμε να θεωρήσουμε το ιδεώδες $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ στον δακτύλιο $\mathcal{O}_L$. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών:

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r} \tag{2.1}$$

με τα $\mathfrak{p}_i$ να είναι πρώτα ιδεώδη του $\mathcal{O}_L$.

Ορισμός 1. *Σε μια παραγοντοποίηση όπως στην 2.1, λεμε το $e_i = e(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})$ δείκτη διακλάδωσης του $\mathfrak{p}$ στο $\mathfrak{p}_i$. Θα λέμε ότι το πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ διακλαδίζεται στο L αν ισχύει $e_i > 1$ για κάποιο i. Ο βαθμός αδράνειας $f_i = f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})$ είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_i$ πάνω από το πεπερασμένο σώμα $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$.*

Πρόταση 1. *Ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ στο $\mathcal{O}_K$ διακλαδίζεται στο $\mathcal{O}_L$ αν και μόνο αν $\mathfrak{p} \mid \mathrm{disc}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)$.*

!Τι σημαίνει $disc(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)$· η διακρίνουσα ορίζεται για σώματα αριθμών. Λογικά:

$$disc_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L) = \det(T_{L/K}(a_i a_j))$$

όπου a_i βάση του $\mathcal{O}_L$ ως $\mathcal{O}_K$-πρότυπο, που σημαίνει τα a_i είναι βάση του L υπεράνω του K (σωστό με βάση Milne)

Θεώρημα 2. *Με βάση τα παραπάνω έχουμε:*

$$\sum_{i=1}^{r} e(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^{r} e_i f_i = [L : K] \tag{2.2}$$

Στο εξής θα θεωρούμε ότι η επέκταση L/K είναι Galois. Έτσι μπορούμε να απλοιποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα αρκετά. Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. *Η ομάδα $\mathrm{Gal}(L/K)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των πρώτων ιδεωδών $\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$ του $\mathcal{O}_L$ που βρίσκονται υπεράνω του $\mathfrak{p}$.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, έστω ότι $\sigma(\mathfrak{p}_i) \neq \mathfrak{p}_j$ για κάθε $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Υπενθυμίζουμε ότι το $\sigma(\mathfrak{p}_i)$ θα είναι και αυτό πρώτο ιδεώδες που θα στέκεται πάνω από το $\mathfrak{p}$. Καθώς είμαστε σε περιοχές Dedekind τα $\mathfrak{p}_i$ και $\sigma(p_i)$ θα είναι μεγιστικά. Άρα $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \sigma(\mathfrak{p}_i)$. Από το αντιθετοαντίστροφο του λήμματος αποφυγής πρώτων παίρνουμε ότι

$$\mathfrak{p}_i \not\subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(\mathfrak{p}_i)$$

δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathfrak{p}_i$ που αποφεύγει όλα τα $\sigma(\mathfrak{p}_i)$. Για την νόρμα, παρατηρούμε ότι:

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

βρίσκεται μέσα στο $\mathfrak{p} = \mathcal{O}_K \cap \mathfrak{p}_i$, διότι η νόρμα θα βρίσκεται μέσα στο $\mathcal{O}_K$ καθώς και στο παραπάνω γινόμενο εμφανίζεται το x που ανήκει στο ιδεώδες $\mathfrak{p}_i$. Έχουμε ότι $x \notin \sigma(p_i)$ και άρα $\sigma^{-1}(x) \notin \mathfrak{p}_i$ για κάθε $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Άρα $\prod \sigma^{-1}(x) = \prod \sigma(x) \notin \mathfrak{p}_i \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}$, το οποίο είναι άτοπο. □

2.2 Κυκλοτομικά Σώματα

2.3 Άπειρη Θεωρία Galois

2.4 Θεωρία Κλάσεων Σωμάτων