par Patrice Perny

L'optimisation équitable

Les décisions prises au sein des organisations ont souvent un impact sur plusieurs individus, qu'il convient de considérer de manière équitable. L'optimisation équitable permet de trouver des solutions efficaces tout en contrôlant l'équilibre des satisfactions.

Arthur Cecil Pigou (1877 – 1959).

Vilfredo Pareto (1848-1923).

La recherche d'une solution équilibrée entre différentes parties en présence peut être délicate, notamment quand le problème ne porte pas sur des quantités divisibles. Imaginons que trois individus A, B, C doivent se partager un lot de six objets, de valeurs respectives 325, 225, 210, 115, 75 et 50 euros. La valeur totale du lot est donc de 1 000 euros, mais la solution qui consiste à diviser en trois parties égales n'est pas réalisable. Que faire ?

+ Réduire les inégalités

Dans les problèmes d'optimisation équitable, il n'est pas toujours possible de recourir à un système de paiements compensatoires et il faut alors se concentrer sur la réduction des inégalités. Ici, pour tenter d'équilibrer les parts, on pourrait (solution 1) attribuer les objets 1 et 6 à A, 2 et 5 à B, et 3 et 4 à C, ce qui correspondrait, en équivalent monétaire, au vecteur de dotations (375, 300, 325) pour A, B, C. Est-ce satisfaisant du point de vue de l'équité ? Probablement pas, car on peut lui opposer (solution 2) les dotations (340, 335, 325), plus équitable, dans le sens où elle permet un rééquilibrage du vecteur initial : on a réduit l'écart de dotation entre A et B de 75 à 5 euros. Un tel transfert réduisant une inégalité tout en préservant la moyenne des dotations est un *transfert de Pigou – Dalton*, du nom de deux économistes britanniques ayant introduit et développé cette idée pour la mesure des inégalités. Ce transfert est réalisable non pas en déplaçant un objet de 35 euros de A vers B (il n'y en a pas), mais en considérant la réallocation plus élaborée qui consiste à attribuer 2 et 4 à A, 3, 5 et 6 à B et 1 à C.

Existe-t-il encore un autre transfert réalisable permettant d'améliorer la solution 2 ? Eh bien non ! On va s'en assurer sans recourir à l'énumération explicite des allocations possibles.

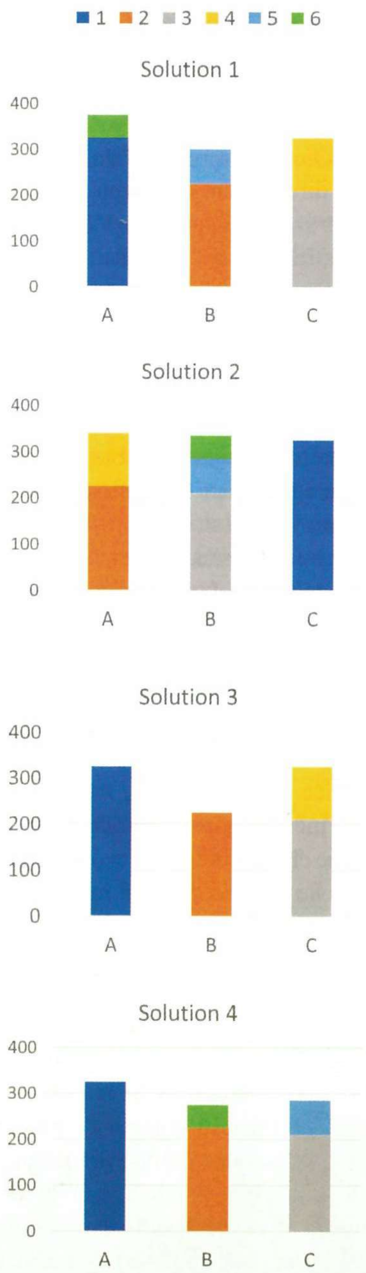
© Howard Coster, 1940

Edward Hugh John Neale Dalton, baron Dalton (1887 – 1962).

+ Équité et principe de Pareto

L'exemple précédent était relativement élémentaire : il s'agissait de partager la totalité des objets entre les trois individus. Les dotations (a, b, c) de A, B, C vérifient nécessairement la propriété $a + b + c = 1\,000$ (somme constante).
Supposons qu'il soit désormais obligatoire de laisser au moins 10 % de la valeur globale du lot à l'État ; la somme des dotations des individus ne peut alors excéder 900, mais elle peut varier d'une solution à l'autre. L'équité doit alors être analysée sans la propriété de somme constante ! Une solution parfaitement équilibrée serait de n'attribuer aucun objet : $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Mais adopter cette solution violerait un autre principe, cher à nos trois héritiers : le *principe de Pareto*. Si un vecteur x *domine, au sens de Pareto,* un vecteur y (c'est-à-dire que les composantes de x sont toutes supérieures à celles de y, l'une des inégalités au moins étant stricte), alors on doit préférer x à y. Ainsi, (340, 335, 325) domine (0, 0, 0) et sera préféré.

En l'absence de la propriété de somme constante, le principe de Pareto se combine utilement avec celui de réduction des inégalités. Comparons la solution 3, (325, 225, 325), de somme 875 (qui attribue 1 à A, 2 à B, 3 et 4 à C) avec la solution 4, (325, 275, 285), de somme 885 (qui attribue 1 à A, 2 et 6 à B 3 et 5 à C).



Le théorème de Chong

Soient $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ et $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$ deux vecteurs. Il existe une séquence améliorante de x vers y, composée de transferts de Pigou – Dalton ou d'améliorations au sens de Pareto, si, et seulement si, le vecteur $\mathrm{L}(x)$ est dominé au sens de Pareto (composante par composante) par le vecteur $\mathrm{L}(y)$, la transformation L étant définie de la manière suivante :

$$\mathrm{L}(x_1, x_2 \dots x_n) = (x_{(1)}, x_{(1)} + x_{(2)}, \dots, x_{(1)} + x_{(2)} + \dots + x_{(n)}),$$

où $x_{(i)}$ est la $i^{\text{ème}}$ plus petite composante du vecteur x.

Ainsi, pour calculer $\mathrm{L}(x)$, on trie les composantes de x par ordre croissant puis on calcule les sommes partielles des premières composantes du vecteur trié. On obtient alors $\mathrm{L}(x)$, le *vecteur de Lorenz* associé à x.

Si l'on considère la solution 3, de vecteur $x = (325, 225, 325)$, et la solution 4, de vecteur $y = (325, 275, 285)$, on a $\mathrm{L}(x) = (225, 550, 875)$ et $\mathrm{L}(y) = (275, 560, 885)$. Comme $\mathrm{L}(y)$ domine $\mathrm{L}(x)$ au sens de Pareto, il existe une séquence d'améliorations permettant de passer de x à y.

Entre ces deux solutions, il n'y a ni transfert de Pigou – Dalton, ni dominance de Pareto. Laquelle faut-il préférer ? La réponse est donnée en combinant le principe de Pareto et les transferts de Pigou – Dalton pour engendrer une séquence d'améliorations liant une solution à l'autre. La solution 3 est moins équitable que (325, 265, 285), qui résulte d'un transfert de Pigou – Dalton de taille 40 entre C et B. Cette nouvelle solution est elle-même dominée, au sens de Pareto, par la solution 4, qui est donc préférable. Par transitivité, la solution 4 est préférée. Mais, pour une paire de vecteurs (x, y), comment s'assurer de l'existence d'une telle séquence d'arguments (quand elle existe) ou montrer qu'il n'en existe pas ? La réponse est élégante et nous est donnée par un théorème dû à Kong-Ming Chong (voir encadré) qui s'appuie sur les travaux de Godfrey Hardy, John Littlewood et George Polya sur les mesures d'inégalités. Ce résultat indique qu'il suffit de comparer deux vecteurs $\mathrm{L}(x)$ et $\mathrm{L}(y)$, composante par composante, pour tester si une préférence entre x et y peut être établie sur la seule base des deux principes vus plus haut. Ces comparaisons permettent de définir un *préordre partiel* sur les solutions (*préordre de Lorenz*), mais ne suffisent généralement pas pour ordonner toutes les solutions ni déterminer un choix optimal.

© 123RF/ Hyejin Kang

Un critère fondamental

La maximisation de la somme des satisfactions individuelles ne procure aucun contrôle sur l'équilibre de la solution. Il faut utiliser un autre critère, cohérent avec le préordre de Lorenz et qui permette de le raffiner. Pour ce faire, on peut associer un score $f(x)$ à toute solution x, défini comme une combinaison linéaire à coefficients positifs des composantes de $L(x)$. On définit alors $f(x)$ par le produit scalaire $v.\ L(x)$, la composante v_i de v représentant l'importance que l'on accorde à la fraction des i individus les moins bien dotés. La positivité des v_i assure que le rangement induit par f sur les solutions prolonge et enrichit le préordre de Lorenz. Pour mieux comprendre le rôle de f, réécrivons $f(x)$ en fonction des composantes triées $x_{(i)}$, en utilisant $L(x)$. On obtient alors :

$$(1)\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_{(i)} \text{ avec } w_i = \sum_{k=i}^{n} v_k.$$

Les poids w_i représentent l'importance attachée au $i^{\text{ème}}$ individu le moins bien doté dans la solution x. Ils ne sont donc pas attachés aux composantes du vecteur x, comme dans une somme pondérée, mais aux rangs de ses composantes. Par exemple, $f(325, 275, 285) = 275\, w_1 + 285\, w_2 + 325\, w_3$. La fonction f est une *moyenne pondérée ordonnée* (ou OWA pour *ordered weighted average*). C'est une fonction symétrique de ses arguments (une permutation des individus n'aura aucun effet). Si les v_k sont tous positifs, alors les coefficients w_i décroissent lorsque i augmente (et inversement) : on accorde moins d'importance aux individus les mieux dotés. C'est une autre manière de comprendre que la maximisation de f capture une idée d'équité, en visant à accroître les dotations de chacun.

Compte tenu de l'interprétation du vecteur w, on peut vouloir directement choisir w ; v s'en déduit en posant $v_i = w_i - w_{i+1}$ si $i < n$ et $v_n = w_n$. Si l'on choisit $w_i = \varepsilon^{i-1}$ où ε est une quantité positive et « petite » devant 1, alors l'optimisation de f traduit une attitude *égalitariste*, qui vise à maximiser la dotation de l'individu le moins bien servi, tout en garantissant de produire une solution qui n'est pas dominée, au sens de Pareto. Au fur et à mesure que le paramètre ε augmente et se rapproche de 1, l'exigence égalitariste diminue au profit de la satisfaction moyenne (attitude *utilitariste*). Ainsi, en modifiant w (ou, de manière équivalente, v), on peut refléter un continuum d'attitudes vis-à-vis de l'équité, allant de l'égalitarisme pur à l'utilitarisme, et offrant des compromis divers entre satisfaction individuelle et efficacité collective.

En outre, pour tout vecteur x, on a $f(x) \leq m(x)$, où $m(x)$ est la moyenne des composantes de x. De ce fait, l'indice $g(x) = 1 - f(x) / m(x)$ s'interprète comme une mesure normalisée de l'inégalité. Il vaut 0 lorsque chaque individu reçoit la même part et se rapproche de 1 au fur et à mesure que l'on concentre les dotations sur un seul individu. On retrouve l'*indice de Gini* lorsque les poids w_i sont également espacés et normalisés pour sommer à 1 (voir *Mathématiques et Économie*, Bibliothèque Tangente 62, 2018). L'indice de Gini est largement utilisé pour mesurer les inégalités dans une population. Se fixer ici l'objectif de minimiser g ne conviendrait pas car on ne garantirait pas de respecter le principe de Pareto ; on évite cet écueil en maximisant f, et c'est équivalent à minimiser g dans le cas particulier où $m(x)$ est constant (cas de somme constante).

Sélection équitable sous contrainte budgétaire

Le responsable d'une organisation cherche à sélectionner des projets (parmi une liste de p projets soumis), sans dépasser une enveloppe budgétaire b. En notant c_k le coût du projet k et x_k la variable qui vaut 1 si l'on sélectionne ce projet et 0 sinon, la contrainte budgétaire s'écrit $\sum_{k=1}^{p} c_k\, x_k \leq b$. Différents chefs de service se sont exprimés quant à l'utilité de chaque projet pour leur domaine d'activité ; on dispose donc de l'utilité $u_{i,j}$ de chaque projet j pour l'individu i. Alors, si $z_i = \sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\, x_j$ représente la satisfaction du chef de service i vis-à-vis de la sélection x, une solution qui traite équitablement les points de vue en présence pourra être trouvée en maximisant $f(z_1 \ldots z_n)$ sous la contrainte budgétaire, où f est la fonction définie par l'équation (1).

Prenons deux chefs de services ($n = 2$) et quatre projets ($p = 4$). Supposons que les utilités des deux individus soient telles que $z_1 = 19\, x_1 + 6\, x_2 + 17\, x_3 + 2\, x_4$ et $z_2 = 2\, x_1 + 11\, x_2 + 4\, x_3 + 18\, x_4$ et que les coûts des projets soient respectivement 40, 50, 60 et 50 k€ pour une enveloppe globale b de 100 k€. Alors, si $w = (2, 1)$, la solution qui maximise $f(z_1, z_2)$ est $x = (1, 0, 0, 1)$. Elle consiste à financer les projets 1 et 4 et conduit à un vecteur d'utilité $(z_1, z_2) = (21, 20)$, qui est bien équilibré. Si, au lieu de cela, on avait naïvement maximisé la satisfaction moyenne $(z_1 + z_2)/2$, on aurait obtenu la solution $x = (1, 0, 1, 0)$, conduisant à $(z_1, z_2) = (36, 6)$, avec une répartition très inéquitable des satisfactions !

Linéariser le problème

Comment trouver la solution x qui maximise $f(x)$ lorsque le domaine des solutions admissibles pour x est défini implicitement et inclut un ensemble combinatoire d'éléments, voire une infinité ? Les solveurs de programmation linéaire permettent de résoudre efficacement des problèmes d'optimisation linéaire de grande taille en variables continues (et aussi, au prix de calculs plus coûteux, des problèmes difficiles en variables entières). Mais la fonction f n'est pas linéaire ! Généralement, $f(x+y)$ est différent de $f(x)+f(y)$ à cause de la permutation qui intervient pour réordonner les composantes des vecteurs. Heureusement, tirant parti du fait que les poids w_i sont décroissants, plusieurs techniques ont été trouvées pour linéariser f, c'est-à-dire reformuler le problème de maximisation de f comme un problème d'optimisation linéaire moyennant l'ajout d'un nombre raisonnable de variables continues et de contraintes. On peut donc utiliser les solveurs standard. Dans les encadrés se trouvent deux exemples d'utilisation de la fonction f pour l'optimisation équitable.

Ils illustrent l'apport potentiel de la fonction f de type OWA dans l'optimisation équitable. L'approche peut être étendue à d'autres problèmes d'optimisation, comme l'ordonnancement de tâches. On peut aussi généraliser la méthode au cas où les individus n'ont pas tous la même importance, ou la transposer en *optimisation robuste* (recherche d'une solution qui reste « bonne » dans divers scénarios envisagés). La démarche de résolution employée ici est caractéristique des travaux menés en théorie de la décision algorithmique : elle résulte de l'intégration et de la coopération entre les modèles de la théorie de la décision pour la représentation des préférences et l'algorithmique de l'optimisation pour le calcul efficace de solutions adaptées.

P.P.

L'affectation équitable

On souhaite répartir p objets sur n individus de manière équitable. Selon les contextes, les objets peuvent être des biens, des ressources, des tâches… On note $u_{i,j}$ la valeur ou l'utilité (supposée connue) de l'objet j pour l'individu i. Une solution x du problème d'affectation est caractérisée par les variables $x_{i,j}$, qui valent 1 si l'on affecte j à l'individu i et 0 sinon. On impose $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq 1$, pour tout objet j, afin qu'on ne puisse pas affecter j à plus d'un individu.

Si $z_i = \sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\, x_{i,j}$ représente la satisfaction de l'individu i vis-à-vis de la solution x, la recherche d'une affectation équitable se fera alors en maximisant la fonction $f(z_1 \ldots z_n)$ définie par l'équation (1) sous les contraintes décrites plus haut. Ainsi, dans le problème de partage d'héritage de l'article, on a $n = 3$ et $p = 6$; les utilités $u_{i,j}$ ne dépendent pas de i et sont les valeurs objectives des objets. Dans ce cas, la maximisation de la fonction f avec le vecteur poids $w = (3, 2, 1)$ conduit à la solution 2, qui répartit plutôt équitablement les 1 000 € de valeur sur les trois bénéficiaires. Si l'on ajoute maintenant la contrainte $z_1 + z_2 + z_3 \leq 900$, alors la solution qui maximise f est maintenant la solution 4, qui répartit au mieux l'équivalent de 885 € sur les trois individus.

L'affectation équitable peut prendre place également dans un contexte de minimisation de coûts, par exemple si les objets sont des tâches qu'il faut confier à des individus et que l'on souhaite équilibrer les charges de chacun. Les composantes $x(i)$ du vecteur x doivent alors être triées dans l'ordre décroissant (et non plus croissant) et la fonction f doit être minimisée au lieu d'être maximisée.

© 123RF / rawpixel