(العقدية)

نظرية كوشي

عندي ٣ حالات

1 الحالة الأولى: إذا كانت جميع النقاط الشاذة لا تنتمي للمجال المعطى في نص المسألة نطبق نظرية كوشي الأولى (كوشي - كورسات)

كلمة ثابتة للحفظ: نلاحظ ان النقطة أو النقاط خارج المجال ومنه التابع هو ~~~~ تحليلي على C وداخل C وبالتالي حسب نظرية كوشي الأولى تكون قيمة التكامل مساوية للصفر

N.B كيف استخرج النقاط الشاذة ؟!
نعدم المقام القيم التي تعدم المقام هي النقاط الشاذة نتحقق بعدها من انتمائها للمجال المعطى

مثال

$$I = \int_{C^+} \frac{e^z}{z-2}$$

احسب التكامل الآتي حيث C هي دائرة مثلثية

N.B طالما انو C هي دائرة مثلثية فإن المجال هو

~~[illegible]~~

$$|z| = 1$$

نوجد النقاط الشاذة ⟸ نعدم المقام

$$z-2=0$$

$$\boxed{z=2}$$

نلاحظ انه خارج الدائرة ومنه التابع المكامل تحليلي على وداخل

C وبالتالي حسب نظرية كوشي الأولى تكون نتيجة

التكامل مساوية للصفر

$$\boxed{I=0}$$

(2) الحالة الثانية: إذا كان البسط من الدرجة الأولى والنقطة

الشاذة تنتمي لـ C

خطوات الحل

(1) بطلع النقاط الشاذة (هون نقطة وحدة)

$\boxed{z_0=\square}$ تأكد من انتمائها للمجال

(2) بكتب القانون (عليه علامات)

$$\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

الهدف هو الوصول لـ $f(z)$ وإلى z_0 ← هي النقطة الشاذة

بطلع بطلع لما خلي التابع المعطى

من الشكل ~~...~~ $\frac{f(z)}{z-z_0}$

(3) نعوض z_0 في $f(z)$ و نطبق القانون

$$I = 2\pi i\, f(z_0)$$

N.B ◄ مامعنى تابع تحليلي وتابع غير تحليلي ؟!

ليكن التابع $f(z) = u + vi$

يكون التابع تحليلي عندما يتحقق

$\boxed{1}$ مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى موجودة و مستمرة

$\boxed{2}$ تحقق شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

مثال توضيحي برهن ان $f(z) = z^2$ تحليلي

$$f(z) = z^2 = (x+yi)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$= x^2 + 2ixy - y^2$$

$$\underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v}$$

نوجد مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

نلاحظ ان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تحقق الشرطين فإن $f(z)$ تحليلي

مثال احسب تكامل $I = \int_C \frac{z+1}{2z-1}$ حيث C هي دائرة مثلية

اعتماداً على كوشي التكاملية

(١) نحدد النقاط الشاذة ⟸ نعدم المقام

$$2z - 1 = 0$$

$$\boxed{z = \frac{1}{2} \in |z| = 1}$$ فالتابع غير تحليلي على C

نطبق كوشي ~~[illegible]~~

$$I = \int \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$I = \int \frac{z+1}{2z-1}$$

$$I = \int \frac{\frac{z+1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

f(z)

z_0

لازم خليه من شكل $\frac{f(z)}{z-z_0}$

نخرج امثال z عامل مشترك

$$f(z) = \frac{z+1}{2} \qquad z_0 = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$= 2\pi i\, f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3}{4}\right) \Longrightarrow I = \frac{3\pi i}{2}$$

3 الحالة الثالثة : إذا كان البسط من الدرجة الثانية نميز حالتين

★ إذا كانت نقطة واحدة تنتمي للمجال والثانية لا

N.B دوماً إذا نقطة بالداخل ومليون نقطة خارج يلي بالداخل نحسبها للمقام والباقي نرفعهم

مثال

$$I=\int_{C^+}\frac{\sin h}{(z^2+1)(z+3)}\,dz$$

حيث C هو مستطيل $x=-1, x=2, y=0, y=2$

1- نحدد النقاط الشاذة

$z^2+1=0 \qquad z^2=-1$

$z^2=i^2 \qquad \boxed{z=\pm i}$

$z+3=0 \qquad \boxed{z=-3}$

كيف بدي اتأكد من انتماء النقاط

z من الشكل $x+yi$ انا عاطيني مجال الـ x ومجال y

يلي هو حدود المستقيمات تبع المستطيل يعني

$0<y<2$ و $-1<x<2$

$z=i$ قسم تخيلي ينتمي لمجال y

$z=-3$ قسم حقيقي هل ينتمي لمجال x لا

$z=-i$ قسم تخيلي لا ينتمي للمجال.

نكتب علاقة كوشي

$$\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

خلل البسط لجداء عوامل

$$(z+i)(z-i)(z+3)$$

فيصبح التابع

$$\int \frac{\sinh z}{(z+i)(z-i)(z+3)}\,dz$$

$$= \int \frac{\frac{\sinh z}{(z+i)(z+3)}}{z-i}\,dz$$

$f(z)$

z_0

يلي بالداخل اكبها بالمقام
وبلي بالخارج لفوم

$$f(z) = \frac{\sinh z}{(z+i)(z+3)}$$

$$z_0 = i$$

$$f(z_0) = f(i) = \frac{\sinh(i)}{(i+i)(i+3)} = \frac{\sin hi}{(2i)(i+3)}$$

$- \cancel{\sin h(i)}$

نعوض في القانون

$$I = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$= \cancel{2}\pi i \cdot \frac{\sinh i}{(\cancel{2}i)(i+3)}$$

$$= \frac{\pi\,(-i+3)}{(i+3)(-i+3)} \cdot \sinh(i) \longrightarrow \frac{e^{i} - e^{-i}}{2} = 1$$

$$\longrightarrow \sin iz = i\sin(z)$$

$$I = \frac{\pi}{10}(3-i)\, i\sin 1$$

$\boxed{**}$ إذا كانت النقطتين تنتمي للمجال المعطى

1) نوجد النقاط الشاذة

2) نكتب التابع بشكل

$$\frac{1}{(z-z_1)(z+z_2)} \leftarrow \text{بسط} \leftarrow f(z)$$

هي النقاط الشاذة

3) لما يكون عندي أكثر من نقطة تنتمي للمجال نفرق الكسر

$$\frac{1}{(z-z_1)(z+z_2)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z+z_2} \quad *$$

4) نوجد قيمة A و B

5) نعوض في العلاقة *

6) نوزع التكامل ونحسب كوشي مرتين

$$I = \int \frac{f(z)}{z-z_1}dz + \int \frac{f(z)}{z+z_2}dz$$

$$z-(-z_2)$$

نعوض في القانون

$$I = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$= \cancel{2}\pi i \cdot \frac{\sinh i}{(2\cancel{i})(i+3)}$$

$$= \frac{\pi\,(-i+3)}{(i+3)(-i+3)} \cdot \sinh(i) \longrightarrow \frac{e^{i} - e^{-i}}{2} = 1$$

$$\sin iz = i\sin(z)$$

$$I = \frac{\pi}{10}(3-i)\, i\sin 1$$

$\boxed{**}$ إذا كانت النقطتين تنتمي للمجال المُعطى

[1] نوجد النقاط الشاذة

[2] نكتب التابع بشكل

$$f(z) \leftarrow \text{بسط} \quad \frac{1}{(z-z_1)(z+z_2)}$$

هي النقاط الشاذة

[3] لما يكون عندي أكثر من نقطة تنتمي للمجال نفرق الكسر

$$\frac{1}{(z-z_1)(z+z_2)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z+z_2} \quad *$$

[4] نوجد قيمة A و B

[5] نعوض في العلاقة *

[6] نوزع التكامل ونحسب كوشي مرتين

$$I = \int \frac{f(z)}{z-z_1}dz + \int \frac{f(z)}{\underset{z-(-z_2)}{z+z_2}}\, dz$$

نعوض في *

$$\frac{1}{(z-i\sqrt{a})(z+i\sqrt{a})} = \frac{-i}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{(z-i\sqrt{a})} + \frac{i}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{z+i\sqrt{a}}$$

$$I = \int \frac{e^{z}\,dz}{(z-i\sqrt{a})(z+i\sqrt{a})}$$

$$= \frac{-i}{2\sqrt{a}} \underbrace{\int \frac{e^{z}\,dz}{z-i\sqrt{a}}}_{\text{كوشي}} + \frac{i}{2\sqrt{a}} \underbrace{\int \frac{e^{z}\,dz}{z+i\sqrt{a}}}_{\text{كوشي}}$$

$$I = \frac{-i}{2\sqrt{a}} \cdot 2\pi i f(i\sqrt{a}) + \frac{i}{2\sqrt{a}} \cdot 2\pi i f(-i\sqrt{a})$$

حيث $f(z) = e^{z}$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}} e^{i\sqrt{a}} - \frac{\pi}{\sqrt{a}} \cdot e^{-i\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}} \left[e^{i\sqrt{a}} - e^{-i\sqrt{a}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}} \cdot 2i \sin\sqrt{a}$$

4 الحالة الرابعة : إذا كان المقام أكبر من الدرجة الثانية نطبق علاقة كوشي للمشتق وهي

$$I = \int \frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

الاختلاف الوحيد في هذه الحالة اننا نقوم باشتقاق $f(z)$ n مرة ثم نعوض النقاط الشاذة

مثال

$$I = \int \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3} . dz$$

c منحنى يحوي $z=1$ ~~$|z|=4$~~

نوجد النقاط الشاذة

$z-1=0$ $(z-1)^3=0$

$\Rightarrow \boxed{z=1}$

$f(z) = z^3+2z+1$

$$I = \int \frac{f(z_0)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} . f^{(2)}(z_0)$$

نشتق $f(z)$ مرتين

$f'(z) = 3z^2+2$

$f''(z) = 6z$

نعوض $z_0=1$

$f''(z_0) = 6$

$I = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}} . 6$ $\quad I = 6\pi i$

(الرواسب)

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), a_i)$$

حيث $\sum (\mathrm{Res}(f(z), a_i))$ مجموعة رواسب التابع $f(z)$ عند النقاط الشاذة داخل المنحني اما التي تكون بالخارج تكون رواسبها مهملة

★ كيف نحسب الراسب

نعوض النقطة الشاذة في $\dfrac{\text{البسط}}{\text{مشتق المقام}}$

★ نعني خطوات الحل

1) ايجاد النقاط الشاذة

2) نتأكد انها تنتمي للمجال

3) حسب راسب كل نقطة شاذة

4) اجمع الرواسب ونضربها ب $2\pi i$

مثال برهن ان

$$I = \oint \frac{e^z}{\sinh z}\,dz = 6\pi i$$

حيث $C: |z| = 4$

١- احسب النقاط الشاذة :

$$\sinh(z) = 0$$

$$z = \pi i k$$

تنعدم $\sinh$ عند كل πi

لذلك z عقدي

$$\longrightarrow z = \pi i k \quad ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

نستخرج علاقة الراسب

وهي $\dfrac{\text{البسط}}{\text{مشتق المقام}}$

$$Res = \frac{e^{z}}{\cosh(z)}$$

نعوض النقاط

$$Res(f(z), 0) = \frac{e^{0}}{\cosh(0)} = 1$$

$$Res(f(z), \pi i) = \frac{e^{\pi i}}{\cosh(\pi i)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$Res(f(z), -\pi i) = \frac{e^{-\pi i}}{\cosh(-\pi i)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

تبلع إشارة