Exercice 1. Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions ci-dessous :
$\sum_{k=1}^{5} k^2 \quad \sum_{j=3}^{5} \frac{j}{3^j} \quad \sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \sum_{i=n}^{2n} i \quad \sum_{i=1}^{n} i$
$\sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p$

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1. $2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5$
2. $1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n$
3. $\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{2n}}{2n}$
4. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
5. $\ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (5k+2) \quad B_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{3^{j+1}} \quad C_n = \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^p \quad D_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n + 3^{2n}$$

Exercice 4. Soient $S_n = \sum_{j=1}^{n} j^2$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2$ et $A_n = \sum_{j=1}^{n} j$

1. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.
2. A l'aide d'un changement de variable adéquat, exprimer T_n en fonction de S_{n+1}.
3. En développant $(j+1)^2$, exprimer T_n en fonction de S_n, de A_n et de n.
4. En déduire la valeur de A_n.

Exercice 5.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. (Principe des dominos: somme téléscopique).
   Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. A quoi est égale la somme $\sum_{p=0}^{n-1} (a_{p+1} - a_p)$?

Exercice 6. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$

1. A l'aide du principe des dominos, calculer T_n.
2. Développer $(k+1)^3 - k^3$. En déduire l'expression de T_n en fonction de S_n et de n.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Calculer, pour tout entier n, les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k - 1) \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k+3).$$

Exercice 7. **Principe de récurrence**

Montrer par récurrence les égalités suivantes :

1. $\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = n^2$
3. $\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
4. $\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^{n} 4k(k-1)(k-2) = n(n+1)(n-1)(n-2)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}; \quad m < n \Longrightarrow (1 + \frac{n}{m})^n < (1 + \frac{m}{n})^m$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \exists!(p, m) \in \mathbb{N}^2 : n = 2^p(2m+1)$.