***Exercice 1*. Questions indépendantes**

1. Calculer $I+J$ et $I-J$ puis en déduire la valeur de I et J .

$$I=\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\,dt \quad \text{et} \quad J=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,dt$$

2. **Formule de la moyenne** Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall x\in[a;b],\ f(a+b-x)=f(x)$$

Au moyen d'un changement de variable, montrer que

$$\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

.

(C'est la formule de la moyenne)

En déduire la valeur de $\int_0^\pi \dfrac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Exemples d'intégrales calculées par la formule de la moyenne

- $\int_0^\pi x\cos x\,dx$
- $\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$

3. **Propriété du Roi** : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

Applications:

- Calculer :

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

- Évaluer :

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\pi}(t)}\,dt$$

- Calculer pour $a>0$:

$$I_3=\int_{-a}^{a}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

4. **Lemme de Riemann-Lebesgue** Soient $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et

$$I_n=\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$$

.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n\to 0$.

***Exercice 2*.** On considère la fonction numérique : $x\mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0;1;\dots;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\dfrac{k}{n};\ e^{\frac{k}{n}}\right)$.

1. Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\dots;(n-1)\}\ \exists c_k\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=-\dfrac{1}{n}e^{c_k}$

2. Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\dots;(n-1)\}$; $M_kM_{k+1}=\dfrac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$ (M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

3. En déduire que : $\forall k\in\{0;1;\dots;(n-1)\}$; $\dfrac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\le M_kM_{k+1}\le \dfrac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

4. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$
5. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Exercice 3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}, \quad \text{pour } x > 1.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [n, n+1]$,
$$f(t) \leq f(n).$$
2. En déduire que
$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n).$$
3. Application. On pose
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$,
$$S_n \geq \int_2^n f(t)\,dt.$$

b) Calculer
$$\int_2^n f(t)\,dt.$$

c) En déduire que
$$S_n \to +\infty.$$

Cette idée d'encadrement des sommes par une intégrale reste valable pour toute fonction positive et décroissante.

Vous pouvez refaire l'exercice en remplaçant la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

par les fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{1}{x}$: on montre que S_n diverge.
- $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha < 1$: S_n diverge également.
- Pour le cas $\alpha > 1$, on peut montrer que S_n converge en utilisant la même technique d'encadrement par une intégrale.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Donner le sens de variation de la fonction F.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $g : t \to \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ (directement sans faire de calcul de la dérivé).
4. Trouver un encadrement de la fonction g lorsque $t \in [x, x+\sqrt{x}]$ avec $x > 0$.
5. Trouver la limite de de F en plus l'infinie.
6. Tracer sommairement la courbe de la fonction F.

Exercice 5. **Partie I:**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x$$

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit G la primitive de g qui s'annule en 0, c'est-à-dire:

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

   Montrer que :

$$G(x) = \frac{3(g(x))^4}{4} + \frac{(g(x))^2}{2}$$

Indications

- Pour la question 1), étudier la bijectivité de f.
- Pour la question 2), utiliser une intégration par parties.

Partie II:

Énoncé

Soit f une fonction continue et strictement croissante de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$. On note g la fonction réciproque de f. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = b\beta - a\alpha$$

Interprétation géométrique

Cette égalité exprime que la somme des aires :

- Sous la courbe de f entre a et b (première intégrale)
- Sous la courbe de g entre α et β (deuxième intégrale)

est égale à l'aire du rectangle $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ moins le rectangle $[a, 0] \times [\alpha, 0]$.

Indications Par intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)dx$$

En utilisant le changement de variable $y = f(x)$ dans la seconde intégrale et la relation $g(f(x)) = x$, on obtient le résultat.

Exercice 6. Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

1. Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0; 1]$

2. En déduire que F est une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; \beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$

   On note F^{-1} la bijection réciproque de F. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\cdot\beta\right)$

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \dfrac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,dt$

4. Montrer que $\ell = \dfrac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}\,du$ (On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)

5. En déduire que : $\ell = \dfrac{e^{-1} - 1}{2\beta}$

Exercice 7. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p\,dx$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$$

2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n,p} = \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1}$$

3. En déduire que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$I_{n,p} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$$

4. En utilisant le développement de $(1-x)^p$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{n+k+1} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$$

Indications

- Pour la question 2, utiliser une intégration par parties.
- Pour la question 3, raisonner par récurrence sur p.
- Pour la question 4, exprimer $I_{n,p}$ de deux façons différentes.

***Exercice 8*.** Soient f une fonction n-fois dérivable sur $I = [a,b]$ avec $f^{(n)}$ continue, et $x \in I$

1. Montrer que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f''(t)dt$$

(on rappelle que $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$)

2. Montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-t)^n dt$$

***Exercice 9*. Exercice de synthèse :** On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+e}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie I : Étude général de f

1. Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(1-x) = f(x)$
2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
4. Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.
5. Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = f(x)\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$
6. Donner les variations de f puis en déduire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

7. Représenter graphiquement la courbe (Γ).
8. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\,\text{cm}$, $\|\vec{j}\| = 2\,\text{cm}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0.30$ et $\dfrac{1}{1+e} \simeq 0.27$)
9. Montrer que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$

10. En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

11. En effectuant le changement de variables : $t = e^x$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$$

12. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan\left(\sqrt{e}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

13. En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Partie II : Suite récurrente approximant l'intersection avec le premier bissectrice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f(u_n)$

14. montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ |f'(x)| \leq f(x)$$

15. Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$; $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

16. Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

17. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

18. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{2}$

19. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

20. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

21. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

22. Donner une valeur approchée à α à la précision 10^{-4}

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

23. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k}{n}\right)$

24. Montrer que : $\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$
(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)

25. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.