Sommaire

Primitives usuelles :

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = x^n \quad (n \neq -1) & \Rightarrow & F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \\
f(x) = \cos(x) & \Rightarrow & F(x) = \sin(x) \\
f(x) = \sin(x) & \Rightarrow & F(x) = -\cos(x) \\
f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \Rightarrow & F(x) = \tan(x) \\
f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} & \Rightarrow & F(x) = -\cot(x) \\
f(x) = u'(x) \cdot u(x)^n \quad (n \neq -1) & \Rightarrow & F(x) = \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} \\
f(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) & \Rightarrow & F(x) = u(x)v(x) \\
f(x) = u'.v'(u(x)) & \Rightarrow & F(x) = v(u(x)) \\
f(x) = \dfrac{1}{u'(u^{-1}(x))} & \Rightarrow & F(x) = u^{-1}(x)
\end{array}
$$

I Intégrale d'une fonction continue

I.1 Introduction et définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$.

On sait qu'une fonction continue admet des primitives sur un intervalle. Soit F une primitive de f, c'est-à-dire une fonction telle que :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Alors, pour tous réels a et b de I, on considère la différence :

$$F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas du choix de la primitive : si G est une autre primitive de f, alors $F(x) - G(x)$ est constant, donc :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

On peut donc définir une notion fondamentale :

Définition (intégrale d'une fonction continue) Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$, on définit le **nombre** :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.

Ce nombre est appelé **l'intégrale de f de a à b.** Intuitivement, il représente **l'aire algébrique** sous la courbe de f, entre les abscisses $x = a$ et $x = b$.

Notation :

La quantité $F(b) - F(a)$ se note :

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ainsi, la définition de l'intégrale devient :

$$\int_a^b f(x)\,dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = 2$ sur l'intervalle $[2, b]$ avec $b \geq 2$:

$$\int_2^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_2^b x\,dx - \int_2^b 2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^b - [2x]_2^b$$

$$= \left(\frac{b^2}{2} - \frac{4}{2}\right) - (2b - 4) = \frac{b^2}{2} - 2 - 2b + 4 = \frac{b^2}{2} - 2b + 2.$$

Remarque : en posant $h = b - 2$, on obtient :

$$\int_2^b (x - 2)\,dx = \frac{h^2}{2}$$

qui est l'aire d'un triangle rectangle de base et hauteur h.

Remarques sur la notation

Dans l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- a est la borne inférieure,
- b la borne supérieure,
- $f(x)$ est l'intégrande (la fonction à intégrer),
- dx indique la variable d'intégration (souvent x),
- x est une variable muette : on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

Mais il faut éviter les confusions :

$$\int_a^b f_\lambda(x)\,dx \neq \int_a^b f_\lambda(\lambda)\,d\lambda$$

Exemples de calculs d'intégrales

1. $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$
2. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \boxed{\frac{14}{3}}$
3. $\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = \boxed{2}$
4. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = \boxed{1}$
5. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} + 2\right) - 0 = \boxed{\frac{14}{3}}$

* * *

Exercice 1. Calculer les intégrales suivant en utilisant la définition (par primitive):

1. $\int_0^2 (x^2 - x + 3)\, dx$
2. $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x)\, dx$
3. $\int_1^2 \frac{1}{(3x-1)^2}\, dx$
4. $\int_4^5 \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}\, dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\, dx$
6. $\int_{-2}^0 \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx$
7. $\int_0^1 \frac{\cos(\arctan x)}{x^2+1}\, dx$
8. $\int_0^{\pi/6} (\sin 3x - \cos 2x) \left(\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)^3\, dx$

I.2 Propriétés de l'intégrale

Propriétés Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I, F une primitive de f, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On fixe $(a,b) \in I^2$.

- **Définition :**
$$\int_a^b f(x)\, dx := F(b) - F(a)$$

- **Linéarité :**
$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \lambda \int_a^b g(x)\, dx$$

- **Positivité :** Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$, alors :
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

- **Croissance :** Si $a \leq b$ et $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x)$, alors :
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

- **Relation de Chasles :**
$$\forall c \in I, \quad \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$
(car $F(b) - F(a) = [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)]$)

- **Inégalité triangulaire** Si $a \leq b$, alors:
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x) dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx}$$

- **Primitive définie par l'intégrale :** La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est une primitive de f qui s'annule en a.

Remarques :

- L'intégrale d'une fonction nulle est nulle : si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.
- Pour tout $a \in I$, on a :
$$\int_a^a f(x)\, dx = F(a) - F(a) = 0$$
- Attention à l'ordre des bornes : on ne peut pas les échanger librement. Plus précisément :
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = \boxed{-\int_b^a f(x)\, dx}$$
- Ne jamais oublier la mesure dx lors de l'écriture d'une intégrale : elle indique la variable d'intégration.
- Les propriétés de positivité et de croissance sont utiles pour encadrer des intégrales ou comparer deux fonctions via leurs intégrales.
- Le dernier point du théorème implique deux choses importantes :
  1. Toute fonction continue admet une primitive.

2. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et sa dérivée est f. Attention : x est en borne **supérieure**.

- Ne pas confondre :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}\left(\int_x^a f(t)\,dt\right) = -f(x)$$

- La relation de Chasles nécessite que la borne intermédiaire soit bien située entre les deux autres. Elle s'utilise uniquement pour additionner deux intégrales continues :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Cela fonctionne exactement comme les vecteurs :

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

- l'inégalité triangulaire signifie que :
  - La valeur absolue d'une intégrale est toujours plus petite que l'intégrale de la valeur absolue
  - On peut l'interpréter comme une généralisation de l'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a| + |b|$

I.3 Exemple de calcul et d'utilisation des propriétés d'intégrale

- En utilisant la définition, on a :

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x+8}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left((9)^{\frac{3}{2}} - (8)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(27 - 16\sqrt{2})$$

- Par linéarité de l'intégrale :

$$I = \int_0^\pi (2x^2 + 3\cos(x))\,dx = 2\int_0^\pi x^2\,dx + 3\int_0^\pi \cos(x)\,dx$$

Or,

$$\int_0^\pi x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \quad \int_0^\pi \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^\pi = 0$$

Donc :

$$I = 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^3}{3}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\forall t \in [0,x], \quad 1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 + t^2$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^x (1+t^2)\,dt$$

Or,

$$\int_0^x (1-t^2)\,dt = x - \frac{x^3}{3}, \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(x), \quad \int_0^x (1+t^2)\,dt = x + \frac{x^3}{3}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$$

- Comme la fonction arctan est impaire, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^-$:

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$$

- Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$$

- On en déduit les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x}{x^2}=0$$

- Soit $x\in\mathbb{R}$, $J(x)=\int_0^x te^{-t}$ Montrons que :

$$\frac{x^2}{2}e^{-\dfrac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq \frac{x^2}{2}e^{-\dfrac{x-|x|}{2}}$$

Analyse : L'existence de la valeur absolue, nous pousse naturellement, à discuter les cas $x\geq 0$ et $x\leq 0$.

Comme on a ici une intégrale on a envie à commencer par $0\leq t\ \leq x$. Mais x n'est pas forcément positive !! car on peut aussi avoir $x\leq t\ \leq 0$ si $x\leq 0$.
Alors t est entre $\min(x,0)$ et $\max(x,0)$

$$\min(x,0)\leq t\leq \max(x,0)$$

sachant que

$$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}\ \textbf{et}\ \max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$$

on trouve

$$\min(x,0)=\frac{x-|x|}{2}\ \textbf{et}\ \max(x,0)=\frac{x+|x|}{2}$$

Maintenant on a tout ce qu'il faut pour encadrer.

$$\begin{aligned}\min(x,0)\leq t\leq\max(x,0)&\implies -\max(x,0)\leq -t\leq -\min(x,0)\\&\implies e^{-\max(x,0)}\leq e^{-t}\leq e^{-\min(x,0)}\end{aligned}$$

- Si $x\geq 0$;

$$\begin{aligned}x\geq 0; t\in[0,x]&\implies te^{-\max(x,0)}\leq te^{-t}\leq te^{-\min(x,0)}\\&\implies \int_0^x te^{-\max(x,0)}dt\leq\int_0^x te^{-t}dt\leq\int_0^x te^{-\min(x,0)}dt\\&\implies e^{-\max(x,0)}\int_0^x tdt\leq\int_0^x te^{-t}dt\leq e^{-\min(x,0)}\int_0^x tdt\\&\implies \frac{x^2}{2}e^{-\max(x,0)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\min(x,0)}\end{aligned}$$

- Si $x\leq 0$;

$$\begin{aligned}x\leq 0; t\in[x,0]&\implies te^{-\min(x,0)}\leq te^{-t}\leq te^{-\max(x,0)}\\&\implies \int_x^0 te^{-\min(x,0)}dt\leq\int_x^0 te^{-t}dt\leq\int_x^0 te^{-\max(x,0)}dt\\&\implies -\int_0^x te^{-\min(x,0)}dt\leq-\int_0^x te^{-t}dt\leq-\int_0^x te^{-\max(x,0)}dt\\&\implies \int_0^x te^{-\max(x,0)}dt\leq\int_0^x te^{-t}dt\leq\int_0^x te^{-\min(x,0)}dt\\&\implies e^{-\max(x,0)}\int_0^x tdt\leq\int_0^x te^{-t}dt\leq e^{-\min(x,0)}\int_0^x tdt\\&\implies \frac{x^2}{2}e^{-\max(x,0)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\min(x,0)}\end{aligned}$$

- J'ai choisi d'utiliser cette méthode afin d'attirer votre attention sur l'importance de toujours vérifier l'ordre des bornes d'intégration lors de l'application de la propriété de croissance des intégrales.
- Il existe une seconde méthode, qui consiste à calculer l'intégrale $J(x)$ dans un premier temps, puis à démontrer les deux inégalités. Cependant, pour calculer $J(x)$, une nouvelle technique est nécessaire : l'intégration par parties, qui fera l'objet du paragraphe suivant.

- Pour l'inégalité triangulaire
  - Majoration simple :
    Majorer $\left|\int_0^\pi \sin(x^5)dx\right|$

Solution. Par le théorème :

$$\left|\int_0^\pi \sin(x^5)dx\right|\leq\int_0^\pi|\sin(x^5)|dx\leq\int_0^\pi dx=\pi$$

□

– L'inégalité triangulaire pour l'intégrale se généralise facilement à

$$\left|\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx$$

En effet. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Puis, par l'inégalité triangulaire classique sur les nombres, donne :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$$

On applique l'inégalité de théorème, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|\,dx$$

Ce qui donne le résultat souhaité □

– Application physique: En physique, pour calculer la distance parcourue par un mobile dont la vitesse $v(t)$ change de sens, on utilise :

$$\text{Distance} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt \quad \text{alors que} \quad \text{Déplacement} = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\right|$$

L'inégalité montre que la distance parcourue est toujours supérieure ou égale au déplacement.

Exercice 2. Calculer les intégrales :

1. $I = \int_1^2 \frac{x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5}{x^2}\,dx.$
2. $I = \int_1^4 (x-3)(5-2x)\,dx.$
3. $I = \int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2}\,dx.$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes avant de calculer les intégrales:

1. $I = \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos x\,dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos x\,dx.$
2. $J = \int_1^2 \ln(1+t^2)\,dt + \int_2^1 \ln(1+t^2)\,dt.$
3. $K = \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^2 e^{2x}\,dx + \int_2^3 e^{2x}\,dx + \int_3^4 e^{2x}\,dx.$
4. $L = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_i^{i+1} e^{-x}\,dx\right).$
5. $M = \int_e^{e^2} \left(x+2-\frac{5}{x}\right)\,dx - \int_e^{e^2} (x+2)\,dx.$
6. $N = \int_1^2 \ln t\,dt - \int_1^2 \left(\ln t - \frac{1}{t}\right)\,dt.$
7. $O = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$

Exercice 4.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vérifier que f est bien continue. Puis Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t < -1 \\ -2-\cos(\pi t) & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{-3}{t+2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt$

Idée: quand la fonction définit par morceau on découpe l'intégrale par Chasles en utilisant les points de jonctions(-1 et 1 pour g)

***Exercice 5*.** **Partie I:** Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x-1}{|x^2-2x|+1}$$

et m un réel supérieur à 2.

1. Donner le tableau des signe de trinôme : $x \mapsto x^2 - 2x$
2. Calculer
$$\int_1^2 f(x)\,dx, \text{ puis } \int_1^m f(x)\,dx.$$
3. Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; m]$
4. Calculer les intégrales suivantes :

   (a)
$$\int_{-2}^{4} \frac{|x-2|}{x^2+4}\,dx$$

   (b)
$$\int_{-4}^{5} \frac{|x^2-2x-3|}{x+2}\,dx$$

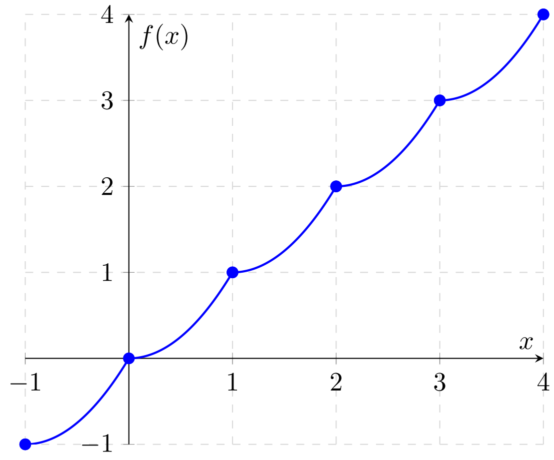
Idée: quand la fonction contient une valeur absolue, On découpe l'intégrale pour enlever la valeur absolue

Partie II:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

Où $E(x)$ est la partie entière de x

Ci-après l'allure de son graphe:



1. Justifier pourquoi f est continue.
2. Calculer : $\forall k \in \mathbb{N};\ \int_k^{k+1} f(x)dx$
3. En déduire la valeur de $\int_0^2 f(x)dx$ et $\int_0^n f(x)dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

II Techniques de calcul d'intégrale

Jusqu'à présent, nous n'avons vu qu'une seule méthode de calcul intégral, fondée sur l'utilisation d'une primitive.

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I.

Fixons $(a, b) \in I^2$:

II.1 Intégration par partie:

- On sait que $(fg)' = f'g + fg'$
  C'est-à-dire $f'g = (fg)' - fg'$
  En intégrant terme à terme les deux membres on trouve:

$$\int_a^b f'(x)g(x) = \int_a^b (f(x)g(x))' - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Donc,

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x) = [f(x)g(x))]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

– Exemple:

* Soit $I = \int_0^\pi x\cos x\,dx$.
  Comme on ne connaît pas de primitive immédiate de la fonction $x \mapsto x\cos x$, on utilise l'intégration par parties pour se débarrasser du facteur x devant $\cos x$.

  On pose :

$$\begin{cases} g(x) = x & \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow \quad f(x) = \sin x \end{cases}$$

  Alors :

$$I = \int_0^\pi x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\sin x\,dx$$

$$I = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = (\pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0) - [-\cos x]_0^\pi$$

$$I = 0 - (-\cos\pi + \cos 0) = -(-(-1)+1) = -2$$

  Donc, $\boxed{I = -2}$.

* Calculons $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \quad & \Rightarrow \quad g(x) = e^x \end{aligned}$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (e-0) - (e-1) = 1$$

* Calculons $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x \quad & \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \quad & \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{2}$$

* On définit (f_n) par: $f_n : t \mapsto \displaystyle\int_1^t x^n \ln x\,dx$

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x \quad & \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^n \quad & \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\int_1^t x^n\ln x\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{1}{(n+1)^2}(t^{n+1}-1)$$

* On définit (g_n) par: $g_n : t \mapsto \displaystyle\int_0^t x^n e^x\,dx$

$$g_0(t) = [e^x]_0^t = e^t - e^0 = e^t - 1$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^t - n\int_0^t x^{n-1} e^x dx$$

D'où :

$$g_n(t) = t^n e^t - n g_{n-1}(t)$$

Et en substituant $g_{n-1}(t)$, on obtient :

$$g_n(t) = t^n e^t - nt^{n-1}e^t + n(n-1)t^{n-2}e^t - \cdots + (-1)^n n!\, g_0(t)$$

Ce qui se factorise en :

$$g_n(t) = e^t \left(t^n - nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\right) - (-1)^n n!$$

Ce qu'on peut réecrire en :

$$g_n(t) = e^t \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}\right] - (-1)^n n!$$

∗ Soit h_λ définit par : $h_\lambda(t) = \displaystyle\int_0^t x e^{-\lambda x}\, dx$

$$f(x) = x \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{-\lambda x} \qquad \Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^t x e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx = -\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t})$$

∗ Un dernier exemple considérons la fonction y_λ **avec un paramètre** $\lambda > 0$: $y_\lambda = \displaystyle\int_1^t \ln x \cdot e^{-\lambda x}\, dx$

$$f(x) = \ln x \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = e^{-\lambda x} \qquad \Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$\int_1^t \ln x \cdot e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} \ln x \cdot e^{-\lambda x}\right]_1^t + \frac{1}{\lambda}\int_1^t \frac{1}{x} e^{-\lambda x} dx$$

La dernière intégrale n'admet pas de primitive élémentaire mais peut être étudiée comme fonction spéciale.

∗ Reprenons l'exemple de paragraphe précédente, Soit $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \int_0^x te^{-t}$: On pose :

$$\begin{cases} f(t) = t & \Rightarrow \quad f'(t) = 1 \\ g'(t) = e^{-t} & \Rightarrow \quad g(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

D'après la formule de l'intégration par parties :

$$J(x) = \int_0^x te^{-t}\, dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\, dt$$

Calculons chaque terme :

$$\left[-te^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} + 0 = -xe^{-x}$$

$$\int_0^x e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$$

Donc :

$$J(x) = -xe^{-x} + 1 - e^{-x} = (1 - e^{-x}) - xe^{-x}$$

Donc:

$$\boxed{J(x) = 1 - (x+1)e^{-x}}$$

∗ À présent, on peut démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

· **Si** $x \geq 0$, alors $|x| = x$, donc l'inégalité devient :

$$\frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right) e^{-x} \geq 0 \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} - (x+1)e^{-x} \leq 0 \end{cases}$$

- **Si** $x \leq 0$, alors $|x| = -x$, donc l'inégalité devient :

$$\frac{x^2}{2} \leq J(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{cases} u(x) = 1 - \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right) e^{-x} \leq 0 \\ v(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - (x+1)e^{-x} \geq 0 \end{cases}$$

- On doit donc étudier les deux fonctions qu'on a obtenu pour u et v.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$
$v'(x)$	$-$
$v(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

Détails :

- **Fonction** $u(x) = 1 - \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right) e^{-x}$ **:**

Dérivée : $u'(x) = \left(\dfrac{x^2}{2}\right) e^{-x}$.
$u'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
$u(0) = 0$.
Limites : $\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

- **Fonction** $v(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - (x+1)e^{-x}$ **:**

Dérivée : $v'(x) = -x + xe^{-x}$. $v'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
$v(0) = 2$.
Limites : $\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$.

$*$ **Bilan :** La première méthode reste plus fiable que la deuxième.

En effet, la première repose sur la propriété de croissance de l'intégrale et une manipulation astucieuse des bornes d'intégration, ce qui permet d'obtenir directement le résultat souhaité.

En revanche, la deuxième méthode nécessite :
- un calcul d'intégrale par intégration par parties (IPP),
- l'étude de deux fonctions sur $\mathbb{R}$,
- et, au final, la démonstration de **quatre** inégalités au lieu de deux.

$*$ $*$ $*$

II.2 Intégration par changement de variable

- L'intégration par changement de variable provient de la dérivation d'une fonction composée.
Si F est une primitive de f, alors

$$(F \circ u)'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

En intégrant entre $x = a$ et $x = b$, on obtient :

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_a^b F'(u(x))dx = [F(u(x))]_a^b$$

Mais

$$[F(u(x))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt,$$

On obtient donc:

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt,}$$

– **Calculer :**

$$\int_0^1 e^{3x+2}\,dx$$

Rédaction :

1. **Changement de variable :**
   Posons $u = 3x+2$, alors $du = 3\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$.
2. **Changement des bornes :**
   * Quand $x = 0$, $u = 3(0)+2 = 2$.
   * Quand $x = 1$, $u = 3(1)+2 = 5$.
3. **Réécriture de l'intégrale :**

$$\int_0^1 e^{3x+2}\,dx = \int_2^5 e^u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_2^5 e^u\,du$$

4. **Calcul :**

$$\frac{1}{3}\left[e^u\right]_2^5 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2).$$

– Exemple 2 : Intégrale avec fonction trigonométrique **Calculer :**

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx$$

Rédaction :

1. **Changement de variable :**
   Posons $u = \cos(x)$, alors $du = -\sin(x)\,dx \Rightarrow \sin(x)\,dx = -du$.
2. **Changement des bornes :**
   * Quand $x = 0$, $u = \cos(0) = 1$.
   * Quand $x = \frac{\pi}{2}$, $u = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. **Réécriture de l'intégrale :**

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \int_1^0 u^2(-du) = \int_0^1 u^2\,du$$

4. **Calcul :**

$$\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

– Exemple 3 : Intégrale avec racine carrée **Calculer :**

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$$

Rédaction :

1. **Changement de variable :**
   Posons $u = 1+\sqrt{x}$, alors $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,du$.
2. **Changement des bornes :**
   * Quand $x = 1$, $u = 1+\sqrt{1} = 2$.
   * Quand $x = 4$, $u = 1+\sqrt{4} = 3$.
3. **Réécriture de l'intégrale :**

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx = \int_2^3 \frac{2}{u^2}\,du = 2\int_2^3 u^{-2}\,du$$

4. **Calcul :**

$$2\left[-\frac{1}{u}\right]_2^3 = 2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

– Exemple 4 : Intégrale avec logarithme **Calculer :**

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

Rédaction :

1. **Changement de variable :**
   Posons $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x}\,dx$.
2. **Changement des bornes :**
   * Quand $x = 1$, $u = \ln(1) = 0$.
   * Quand $x = e$, $u = \ln(e) = 1$.
3. **Réécriture de l'intégrale :**

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du$$

4. **Calcul :**

$$\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

– Exemple 5 : Intégrale avec fraction rationnelle **Calculer :**

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Rédaction :

1. **Changement de variable :**
   Posons $u = 1+x^2$, alors $du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{2}$.
2. **Changement des bornes :**
   * Quand $x = 0$, $u = 1+0 = 1$.
   * Quand $x = 1$, $u = 1+1 = 2$.
3. **Réécriture de l'intégrale :**

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u}$$

4. **Calcul :**

$$\frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2)-\ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

– Calculer $\displaystyle\int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx$

On pose $u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$
Quand $x = 0$, alors $u = 0$;
Quand $x = 1$, alors $u = 1$
Donc :

$$\int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx = \int_0^1 \cos(u)\,du = [\sin(u)]_0^1 = \sin(1)$$

– Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Premier changement :
Posons $u(x) = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$
Quand $x = 0$, alors $u = 1$;
Quand $x = \frac{\pi}{2}$, alors $u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_1^0 \frac{-1}{1+u^2}\,du = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$

On peut conclure que $K = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
Ou bien procédé encore au:
Deuxième changement :
Posons $u(x) = \tan\theta \Rightarrow du = 1+\tan^2\theta\,d\theta$
Quand $u = 1 = \tan\theta$, alors $\theta = \frac{\pi}{4}$;
Quand $u = 0 = \tan\theta$, alors $\theta = 0$
Alors $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$,
donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot(1+\tan^2\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc le résultat final est :

$$\boxed{K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4}}$$

* * *

L'objectif de l'activité suivante est de proposer deux interprétations possibles d'une intégrale :

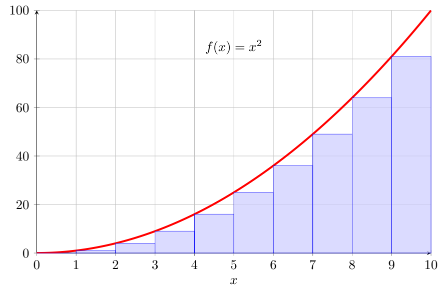
1. La première interprétation repose sur les aires : l'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe et les axes, sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégration.
2. La deuxième interprétation consiste à relier l'intégrale aux suites : elle devient alors la limite d'une suite de sommes approchant cette aire par des rectangles accolés à la courbe de la fonction. Ces sommes sont appelées *sommes de Riemann.*

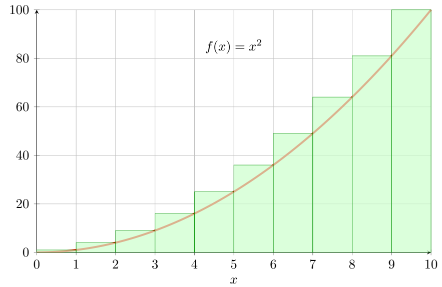
Exercice 6. Dans un repère orthonormal, on considère la courbe représentative C_f de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Pour $t \geq 0$, on désire encadrer l'aire $\mathcal{S}$ du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a = 0$ et $x = b = t$.

1. On prend $t = 10$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en 10 intervalles de même longueur.

   On construit 10 rectangles $R_0, R_1, \dots, R_9$ inférieurs à la courbe C_f et 10 rectangles $R'_0, R'_1, \dots, R'_9$ supérieurs à la courbe C_f comme indiqué sur les deux figures.





   (a) Pour $t = b = 10$, calculer l'aire de chacun des rectangles

   $$R_i \quad (0 \leq i \leq 9) \quad \text{et} \quad R'_i \quad (0 \leq i \leq 9).$$

   (b) Calculer l'aire totale $\mathcal{D}_{10}$ de la réunion des dix rectangles $R_0, R_1, \dots, R_9$.

   (c) Calculer l'aire totale $\mathcal{D}'_{10}$ de la réunion des dix rectangles $R'_0, R'_1, \dots, R'_9$.

   (d) En déduire un encadrement de l'aire S, et donner la précision de cet encadrement.

2. Toujours pour $t = b = 10$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur.

   Où $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\},\ x_k = \frac{b-a}{n}k + a$.

   On construit, de la même manière qu'à la question 1, les rectangles $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ et $R'_0, R'_1, \dots, R'_{n-1}$.

   (a) Calculer l'aire de chacun des rectangles

   $$R_i \quad \text{et} \quad R'_i \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

   (b) Calculer l'aire totale $\mathcal{B}_n$ de la réunion des n rectangles $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$. On rappelle que

   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   (c) Calculer l'aire totale $\mathcal{B}'_n$ de la réunion des n rectangles $R'_0, R'_1, \dots, R'_{n-1}$.

   (d) Calculer

   $$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{B}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathcal{B}'_n.$$

   (e) Donner la signification géométrique de la limite trouvée.

3. Cas général : t est un réel positif quelconque. On divise l'intervalle $[0, t]$ en n intervalles de même longueur $\frac{t}{n}$.

   (a) Reprendre l'étude faite à la question 2. et montrer que

      i. Aire de R_k: $\frac{t}{n}.f(x_k) = \frac{t}{n} \cdot \left(\frac{tk}{n}\right)^2 = \frac{t^3k^2}{n^3}$.
      Aire de R'_k: $\frac{t}{n}.f(x_{k+1}) = \frac{t}{n} \cdot \left(\frac{t(k+1)}{n}\right)^2 = \frac{t^3(k+1)^2}{n^3}$.

ii. $\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^3k^2}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \to \frac{t^3}{3}$.

iii. $\mathcal{B}'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^3(k+1)^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^3k^2}{n^3} = \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{t^3}{3}$.

iv. Montrer que $\Delta_{rectangle} = |\mathcal{S} - \mathcal{B}_n| = \frac{t^3}{3} - \mathcal{B}_n = \frac{t^3(3n-1)}{6n^2}$

v. $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{B}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{B}'_n = \frac{t^3}{3}$.

vi. La limite $\frac{t^3}{3}$ est l'aire sous $f(x) = x^2$ de 0 à t, soit $\int_0^t x^2\,dx$.

(b) On note $\varphi(t)$ la limite commune à $(\mathcal{B}_n)$ et $(\mathcal{B}'_n)$. Que retrouve-t-on en dérivant $\varphi(t)$?

II.3 Sommes de Riemann :

D'après l'activité précédente on a trouvé :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}'_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

où

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{b-a}{n} \cdot k + a\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{b-a}{n} \cdot k + a\right)$$

Cela montre que l'intégrale est la limite de sommes approchant des aires sous la courbe, et qu'elle représente une **mesure algébrique de surface** : elle peut être positive ou négative selon la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, et ces surfaces s'additionnent algébriquement.

Les sommes $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}'_n$ s'appellent sommes de Riemann (respectivement inférieure (ou à gauche) et supérieure (ou à droite))

Exemples d'utilisation

- Calculons $\lim S_n$ où$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

S_n est donc une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

- Deuxième somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$$

S_n est une somme de Riemann à pas $\frac{1}{n}$ pour la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

- Troisième somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$$

On a ici une somme de Riemann du type :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{avec } f(x) = \frac{1}{1+x}$$

- Dernier exemple: Considérons le produit suivant :

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Alors,

$$\ln Q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$$

Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Donc, la limite du produit est :

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \exp(2\ln 2 - 1) = \frac{4}{e}.$$

Application: Calculer ces sommes:

i. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

ii. $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

iii. $w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 7. Pour chaque intégrale, suivre les étapes :

1. Simplifier l'expression (si possible).
2. Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.
3. Calculer l'intégrale.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt$
   Indication : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt \quad (a \neq b, \alpha > 0)$
   Indication : Décomposer $\frac{1}{(t+a)(t+b)}$ en $\frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+b}$ où A et B à trouver.
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^3 \frac{t}{1+t}\,dt$
   Indication : Écrire $t = (t+1) - 1$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+1}\,dt$
   Indication : Utiliser $t^2 = (t+1)(t-1) + 1$
5. $I_5 = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{t^2+2}{2t+1}\,dt \quad (a > 0)$
   Indication : Diviser t^2+2 par $2t+1$
6. $I_7 = \displaystyle\int_\beta^{2\beta} \frac{1}{t^2+5t+6}\,dt \quad (\beta > -2)$
   Indication : Factoriser en $(t+2)(t+3)$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)}\,dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t+1)(t+2)}\,dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^3+1}\,dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln t)}\,dt$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{(t+1)(t+2)(t+3)}\,dt$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t+1)^2}\,dt$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+2t+1}{(t^2+1)(t+1)}\,dt$

Exercice 9. À l'aide d'une intégration par parties, calculez :

1. $A = \int_0^\pi (x-1)\sin 3x\,dx.$
2. $B = \int_1^2 x^2 \ln x\,dx.$
3. $C(\alpha) = \int_1^\alpha \ln x\,dx.$ avec $\alpha > 0$
4. $D = \int_1^2 x\sqrt{x-3}\,dx.$

Plus rapidement ?

1. $E = \int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^x \, dx$.
2. $F = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \cos 2x \, dx$.
3. $G = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$.
4. $H = \int_e^{2e} x \ln x^3 \, dx$.
5. $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} (-2x+1)e^{-x} \, dx$.

II.4 Intégration par parties itérées et méthode de rédaction:

Soient f et g deux applications de classe n-fois dérivables sur le segment $[a, b]$ avec $f^{(n)}$ $g^{(n)}$ continues.
Rappel : On sait que $(fg)' = f'g + fg'$, d'où :

$$f'g = (fg)' - fg'$$

Par intégration sur un intervalle $[a, b]$, on obtient la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx}$$

Cela peut se schématiser par un tableau, avec D pour la fonction que l'on dérive, et I pour celle que l'on intègre :

	D	I
$+$	g	f'
$-$	g'	f

D'où la règle d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx}$$

—

Application à : $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

On dérive $\ln x$ *car il est difficile à intégrer, tandis que* x^2 *est simple à intégrer.*

	D	I
$+$	$\ln x$	x^2
$-$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

On applique alors la formule :

$$\boxed{\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx}$$

Calcul détaillé :

$$\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1 = \frac{8}{3} \ln 2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Résultat final} = \boxed{\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}}$$

On vient d'appliquer l'IIP, deux fois.

—

D'une façon générale, on peut l'appliquer autant de fois que l'on souhaite.

On peut montrer par récurrence que :

$$\int_a^b fg^{(n)} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)} g$$

.

on peut retenir ces deux cas particuliers :

- Si $n = 2$: $\displaystyle\int_a^b fg'' = [fg' - f'g]_a^b + \int_a^b f''g$.
- Si $n = 3$: $\displaystyle\int_a^b fg''' = [fg'' - f'g' + f''g]_a^b - \int_a^b f'''g$.

Cherchons une primitive de $x \mapsto x^2 \sin(3x+1)$

Ici, on dérive le polynôme x^2 car il disparaît rapidement par dérivations successives. On applique donc l'intégration par parties itérée (IIP).

	D	I
$+$	x^2	$\sin(3x+1)$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{3}\cos(3x+1)$
$+$	2	$-\frac{1}{9}\sin(3x+1)$
$-$	0	$\frac{1}{27}\cos(3x+1)$

D'où :

$$\boxed{\int x^2\sin(3x+1)\,dx = -\frac{x^2}{3}\cos(3x+1) + \frac{2x}{9}\sin(3x+1) + \frac{2}{27}\cos(3x+1) + C}$$

Application au calcul de : $\int \cos(2x)\, e^{\sqrt{3}x}\,dx$

- Ici, on ne peut pas vraiment privilégier l'une des deux fonctions : elles sont toutes deux *stables par dérivation.*
- En effet, la fonction exponentielle reste proportionnelle à elle-même, et le cosinus engendre le sinus, puis revient à lui-même après deux dérivations.
- Ainsi, peu importe celle que l'on dérive ou intègre dans la méthode d'intégration par parties : l'intégrale finira par se reproduire, et il faudra résoudre une équation contenant l'intégrale elle-même.

Signe	D	I
$+$	$\cos(2x)$	$e^{\sqrt{3}x}$
$-$	$-2\sin(2x)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x}$
$+$	$-4\cos(2x)$	$\frac{1}{3}e^{\sqrt{3}x}$

Critère d'arrêt : La ligne 3 reproduit la fonction initiale $\cos(2x)$ à un coefficient près (-4), indiquant que le cycle recommence. On peut donc arrêter ici.

Équation obtenue :

$$\int \cos(2x)e^{\sqrt{3}x}\,dx = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} + \frac{2\sin(2x)}{3}e^{\sqrt{3}x} - \frac{4}{3}\int \cos(2x)e^{\sqrt{3}x}\,dx$$

Résolution :

$$\left(1+\frac{4}{3}\right)\int \cos(2x)e^{\sqrt{3}x}\,dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{3}\sin(2x)\right)e^{\sqrt{3}x}$$

$$\int \cos(2x)e^{\sqrt{3}x}\,dx = \frac{3}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{3}\sin(2x)\right)e^{\sqrt{3}x} + C$$

$$= \boxed{\frac{e^{\sqrt{3}x}}{7}\left(\sqrt{3}\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) + C}$$

Application aux bornes $[0, x]$:

$$\frac{e^{\sqrt{3}t}}{7}\left(\sqrt{3}\cos(2t) + 2\sin(2t)\right)\Big|_0^x = \boxed{\frac{e^{\sqrt{3}x}}{7}\left(\sqrt{3}\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) - \frac{\sqrt{3}}{7}}$$

—

Un dernier exemple : $\int x^3\sqrt{2-x}\,dx$

Signe	D	I
$+$	x^3	$\sqrt{2-x}$
$-$	$3x^2$	$-\frac{2}{3}(2-x)^{3/2}$
$+$	$6x$	$\frac{4}{15}(2-x)^{5/2}$
$-$	6	$-\frac{8}{105}(2-x)^{7/2}$
$+$	0	$\frac{16}{945}(2-x)^{9/2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\int x^3\sqrt{2-x}\,dx = \; & -\frac{2}{3}x^3(2-x)^{3/2}-\frac{4}{5}x^2(2-x)^{5/2}\\ & -\frac{16}{35}x(2-x)^{7/2}-\frac{32}{315}(2-x)^{9/2}+C\end{aligned}}$$

Pratiquer sur les intégrales suivants:

1. $F(x)=\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$
2. $F(x)=\displaystyle\int_1^x \arctan t\,dt$ $=(\int_1^x 1.\arctan t\,dt)$
3. $F(x)=\displaystyle\int_1^x (t^2+3)\cos t\,dt$
4. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin 2t\,dt$

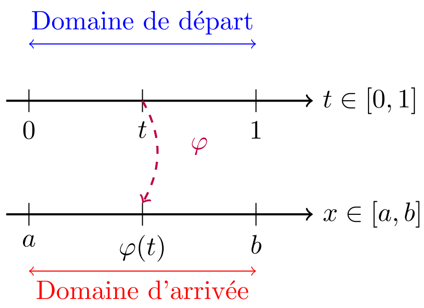
Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx.$$

1. Calculer I_n à l'aide de deux intégrations par parties successives.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 11. Soit φ la fonction affine définie par :

$$\varphi:[0,1]\to[a,b],\quad t\mapsto\varphi(t)=(1-t)a+tb$$



1. Montrer que φ est une bijection de $[0,1]$ sur $[a,b]$.
   Donner l'expression de sa bijection réciproque φ^{-1}.
2. **Rappel :** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
   On souhaite calculer l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ à l'aide d'un changement de variable $x=g(t)$, comme dans certaines méthodes de calcul de limites.

   On commence par définir l'ancienne variable x en fonction de la nouvelle variable t, c'est-à-dire :

   <u>On pose</u> $x=g(t)$

   Avant de procéder au changement dans l'intégrale, on détermine deux réels c et d tels que :

   $$g(c)=\alpha\quad\text{et}\quad g(d)=\beta.$$

   Si de tels c et d n'existent pas, alors le changement de variable $x=g(t)$ n'est pas valide.

   L'intégrale devient :

   $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

   Or $g(t)=x$, on déduit que :

   $$g'(t)=\frac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\quad dx=g'(t)\,dt$$

   Ainsi, on effectue les substitutions suivantes :

- $\alpha \to g(c)$
- $\beta \to g(d)$
- $x \to g(t)$ dans l'expression $f(x)$
- $dx \to g'(t)\,dt$

Ce qui donne :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_{c}^{d} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

3. Appliquer la méthode précédente au changement de variable $x = \varphi(t)$ pour démontrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,dt$$

où

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb \quad \text{pour } t \in [0,1].$$

4. En utilisant un changement de variable judicieux, montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

Application directe :
Évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\pi}(t)}\,dt$$

Remarque: Le changement de variable est particulièrement utile lorsque l'intégrande est de la forme :

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt,$$

c'est-à-dire une fonction composée $f(g(t))$ multipliée par la dérivée $g'(t)$. Dans ce cas, en posant $x = g(t)$, on obtient :

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx.$$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable adapté.

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,dt \qquad J = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt \qquad K = \int_0^1 \frac{3t^2}{(t^3+1)^2}\,dt$$

Exercice 13. Calculer les intégrales suivants avec le changement de variable indiqué:

$$I_0 = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad \text{(avec } x = \sqrt{t}\text{)},$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \qquad \text{(avec } x = \sin t\text{)},$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t} \qquad \text{(avec } x = \ln t\text{)},$$

$$I_3 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln t} \qquad \text{(avec } x = \ln t\text{)},$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt \qquad \text{(avec } x = \sin t\text{)},$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} \qquad \text{(voir remarque ci-dessous)},$$

$$I_6 = \int_0^7 \frac{dt}{(t+1)^{1/2}+(t+1)^{1/3}} \qquad \text{(avec } x = (1+t)^{1/6}\text{)},$$

$$I_7 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \qquad \text{(avec } t = \sin x\text{)},$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} \qquad \text{(avec } x = \sqrt{1+e^t}\text{)},$$

$$I_9 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(2t)}{\sin t}\,dt \qquad \text{(avec } t = \cos x\text{)}.$$

Pour I_5 :multipliée le haut et le bas de la fonction à intégrer par $\cos t$

Exercice 14. On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\, dt, \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt, \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}.$$

a)
- Montrer que $I = J$.
- Calculer $I + J$.
- En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$.

b) À l'aide d'un changement de variable approprié, calculer l'intégrale K.

II.5 Primitives de $\sin^p x \cos^q x$

Si on veut calculer $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, tout dépend de la parité de p et q.

- Si p est impair, on peut poser $t = \cos x$ (donc $dt = -\sin x\, dx$).
  - Exemple :
  $$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \int (t^2-1)t^4\, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \lambda = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + \lambda.$$
- Si q est impair, on peut poser $t = \sin x$ (donc $dt = \cos x\, dx$).
  - Exemple :
  $$\int \cos^5 x\, dx = \int (1-t^2)^2\, dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \lambda = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + \lambda.$$
- Si p et q sont pairs, on linéarise.
  - Exemple :
  $$\cos^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\, dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + \lambda.$$

II.6 Règles de Bioche

On rappelle les identités trigonométriques de base :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}}$$

Pour intégrer une fonction *rationnelle* en *cos* , *sin* et *tan* de la forme $R(\sin x, \cos x, \tan x)$, on peut choisir une substitution adaptée en étudiant la symétrie de l'expression $R(\sin x, \cos x, \tan x)\, dx$.
Choix du changement de variable:

1. **Si l'expression ne change pas par $x \mapsto \pi - x$, on pose :**
$$\boxed{t = \sin x}$$
2. **Si l'expression ne change pas par $x \mapsto -x$, on pose :**
$$\boxed{t = \cos x}$$
3. **Si l'expression ne change pas par $x \mapsto \pi + x$, on pose :**
$$\boxed{t = \tan x}$$
4. **Si aucune des symétries précédentes ne fonctionne, on utilise :**
$$\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{(changement universel)}$$

Exercice 15. 1. Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$.

2. Exprimer les fonctions suivantes uniquement en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

   (a) $f_1(x) = \sin x$,

   (b) $f_2(x) = \cos x$,

   (c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ pour $x \in]0, \pi[$,

   (d) $f_4(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ pour $x \in]0, \pi[$,

   (e) $f_5(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{1} \frac{1}{t}\, dt$,

   (b) $\displaystyle\int_{-(\sqrt{2}-1)}^{\sqrt{2}-1} \frac{4t}{(1+2t)(1+t^2)}\, dt$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-t^2}\, dt$,

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+2t}\, dt$.

4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$,

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$,

   (c) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$,

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+5\cos x}$,

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

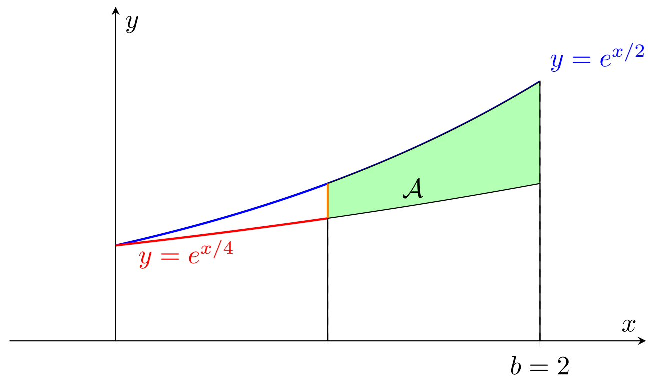
III Interprétation d'intégrale

III.1 Aire délimitée par deux courbes :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. L'aire de la région délimitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.$$

Cette intégrale représente la somme des distances verticales entre les deux courbes, multipliée par une largeur infinitésimale dx, ce qui correspond géométriquement à la surface comprise entre elles.



Exemple:

L'aire $\mathcal{A}$ entre les deux courbes est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_1^2 \left(e^{x/2} - e^{x/4}\right) dx$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left[2e^{x/2} - 4e^{x/4}\right]_1^2 \\
&= \left(2e^{2/2} - 4e^{2/4}\right) - \left(2e^{1/2} - 4e^{1/4}\right) \\
&= 2e - 4\sqrt{e} - 2\sqrt{e} + 4\sqrt[4]{e} \\
&= 2e - 6\sqrt{e} + 4e^{1/4}\text{u.a}
\end{aligned}$$

Où u.a : unité d'aire.

Exercice 16. Soit h un réel positif, et n un entier naturel.
On note a_n l'aire du domaine délimité par :

- la droite d'équation $y = 0$
- les droites verticales d'équations $x = nh$ et $x = (n+1)h$
- la courbe d'équation $y = e^x$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

III.2 Intégrales de fonctions paires, impaires et périodiques

Soit f une fonction continue sur un intervalle symétrique $[-a, a]$, avec $a > 0$.

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

On le découpe en deux par Chasles :

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

En effectuant le changement de variable $t = -x$, $dx = -dt$
Le premier intégral devient :

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

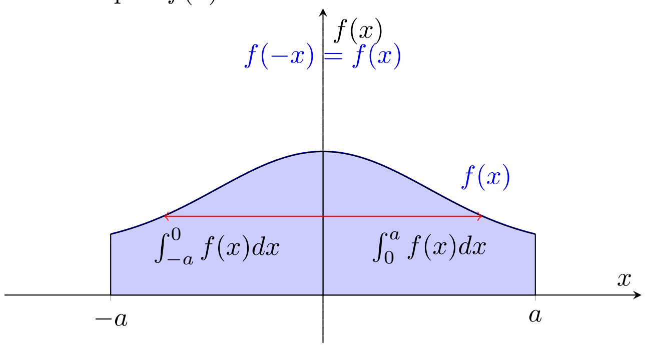
En remplaçant dans l'intégrale I:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))dx \end{aligned}$$

- Si f est **paire**, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

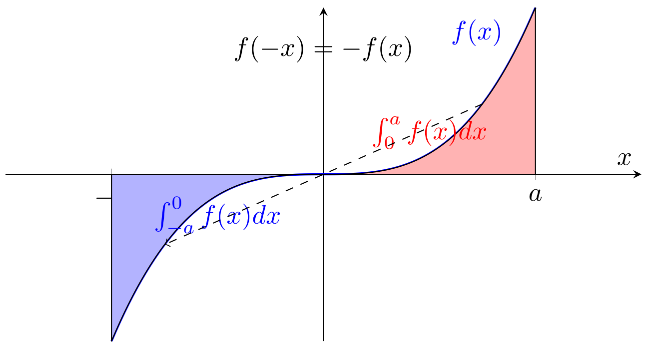
Cela signifié que les aires à gauche et à droite de l'origine sont égales.
Par exemple: $f(x) = e^{-x^2}$



- Si f est **impaire**, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

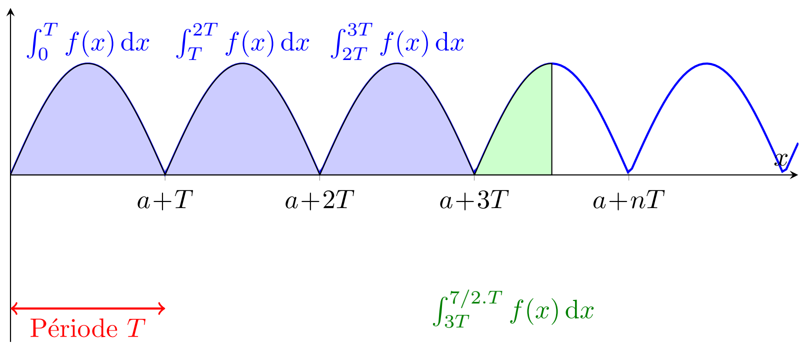
En effet, les aires symétriques à gauche et à droite de l'origine s'annulent.
Par exemple :



- Si f est **périodique** de période $T > 0$, alors pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx.$$

Cette propriété permet de réduire l'intégrale sur plusieurs périodes à la somme d'intégrales sur une seule période.



Démonstration : f est T-périodique, signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Pour $n = 1$ c'est équivalent à :

$$\forall a \in \mathbb{R} \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Démontrons ce cas particulier:
On définit la fonction suivante :

$$g : s \mapsto \int_s^{s+T} f(x)\,dx - \int_0^T f(x)\,dx.$$

Soit $s \in \mathbb{R}$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_s^{s+T} f(x)\,dx - \int_0^T f(x)\,dx \\ &= \left(\int_s^0 f(x)\,dx + \int_0^{s+T} f(x)\,dx\right) - \int_0^T f(x)\,dx \\ &= -\int_0^s f(x)\,dx + \int_0^{s+T} f(x)\,dx - \int_0^T f(x)\,dx. \end{aligned}$$

La fonction g est dérivable, car f est continue

$$g'(s) = -f(s) + f(s+T).$$

Mais comme f est T-périodique, on a $f(s+T) = f(s)$, donc :

$$g'(s) = -f(s) + f(s) = 0.$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$. En particulier :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad g(a) = g(0).$$

Or :

$$g(0) = \int_0^T f(x)\,dx - \int_0^T f(x)\,dx = 0,$$

donc :

$$g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.}$$

On peut démontrer le résultat par récurrence simple sur n, à traiter en exercice.

Traitons ici une démonstration directe.
On découpe l'intervalle $[a, a+nT]$ en n sous-intervalles de longueur T :

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx.$$

Pour chaque terme de la somme, effectuons le changement de variable suivant :

$$u = x - kT \quad \text{donc} \quad du = dx.$$

Lorsque $x = a + kT$, on a $u = a$;
Lorsque $x = a + (k+1)T$, on a $u = a + T$.
Ainsi :

$$\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(u+kT)\,du.$$

Or, comme f est T-périodique, on a :

$$f(u+kT) = f(u),$$

ce qui donne :

$$\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(u)\,du.$$

Cette valeur est indépendante de k.
Or, d'après le cas particulier démontré précédemment, on a :

$$\int_a^{a+T} f(u)\,du = \int_0^T f(u)\,du.$$

On conclut alors :

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(u)\,du = n\int_0^T f(u)\,du.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx}$$

III.3 Intégrale d'une fonction avec un axe de symétrie quelconque

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit $c \in [a, b]$ tel que f admette un axe de symétrie vertical en $x = c$, c'est-à-dire

$$\forall x \in [a, b], \quad f(2c - x) = f(x).$$

Alors, l'intégrale de f sur $[a, b]$ peut se décomposer en

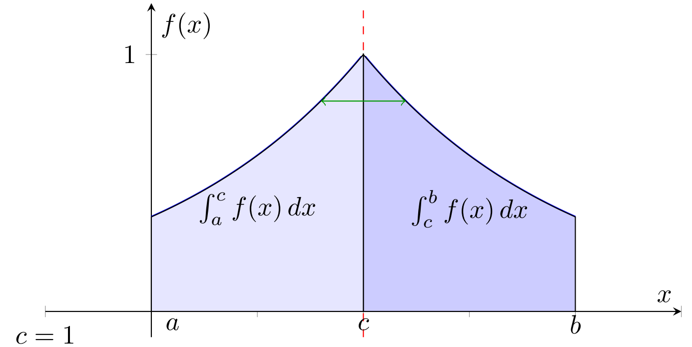
$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_c^b f(x)\,dx,$$

à condition que c soit le milieu de $[a, b]$, c'est-à-dire $c = \frac{a+b}{2}$.

Autrement dit :

$$\forall u \in \mathbb{R}; \int_{2c-u}^{u} f(x)\,dx = 2\int_c^u f(x)\,dx = 2\int_{2c-u}^{c} f(x)\,dx.$$

Cette propriété permet de réduire l'intégrale sur un intervalle symétrique par rapport à un axe vertical quelconque, en une intégrale sur une moitié de cet intervalle.



Exemple : Considérons la fonction

$$f(x) = e^{-|x-1|},$$

définie sur l'intervalle $[0, 2]$.

On remarque que f est symétrique par rapport à la droite $x = 1$ car :

$$f(2 - x) = e^{-|2-x-1|} = e^{-|1-x|} = f(x).$$

Ainsi, on a

$$\int_0^2 e^{-|x-1|}\, dx = 2 \int_1^2 e^{-|x-1|}\, dx.$$

Calculons l'intégrale sur $[1, 2]$: Sur $[1, 2]$, on a $|x - 1| = x - 1$, donc

$$\int_1^2 e^{-|x-1|} dx = \int_1^2 e^{-(x-1)} dx = \left[-e^{-(x-1)}\right]_1^2 = \left(-e^{-1}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - \frac{1}{e}.$$

Enfin,

$$\int_0^2 e^{-|x-1|} dx = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{2}{e}.$$

III.4 Effet d'un centre de symétrie décalé sur l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit $c \in [a, b]$ un point tel que f possède un centre de symétrie en c, c'est-à-dire

$$\forall h \text{ tel que } c - h, c + h \in [a, b], \quad f(c - h) = -f(c + h).$$

Autrement dit, la fonction est impaire par rapport au point c.

Dans ce cas, l'intégrale de f sur l'intervalle symétrique autour de c

$$[c - r, c + r] \subset [a, b]$$

vérifie la propriété :

$$\int_{c-r}^{c+r} f(x)\, dx = 0.$$

En effet, les contributions de la fonction de part et d'autre du point c se compensent.

Exemple : Considérons la fonction

$$f(x) = (x - 2)^3$$

définie sur $[0, 4]$. Ici, f est impair par rapport à $c = 2$ car

$$f(2 - h) = (2 - h - 2)^3 = (-h)^3 = -h^3 = -(h^3) = -f(2 + h).$$

Calculons l'intégrale sur $[0, 4]$:

$$\int_0^4 (x - 2)^3\, dx = \int_{2-2}^{2+2} (x - 2)^3\, dx = 0.$$

Car la fonction est symétrique de signe opposé autour de $x = 2$.

Cette propriété facilite le calcul d'intégrales lorsque la fonction présente une symétrie centrale décalée.

III.5 Longueur d'un arc (HP)

Soit f une fonction dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

On dit dans ce cas que la fonction f est " **de classe C^1 sur $[a\ ;\ b]$** " ou que $f \in C^1([a\ ;\ b])$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Soient $A(a\ ;\ f(a))$ et $B(b\ ;\ f(b))$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$.

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est donnée par la formule :

$$\boxed{\widehat{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt}$$

Exemple:

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ définie sur l'intervalle $[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}]$.

Cette courbe représente un demi-cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré à l'origine. Nous allons calculer la longueur de l'arc entre les points $A(-\sqrt{2}, 0)$ et $B(\sqrt{2}, 0)$.

Formule de la longueur d'arc :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Dérivée :

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

Longueur de l'arc :

$$\ell = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2}}\, dx$$

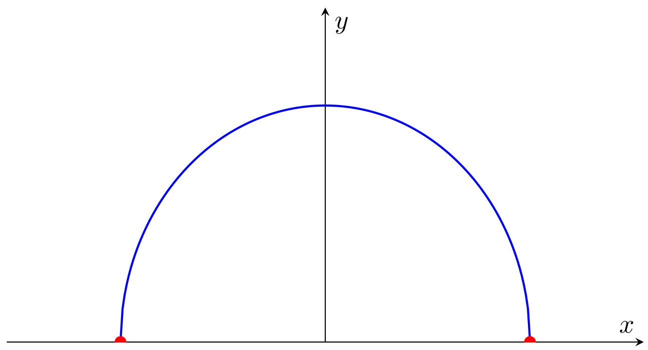
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}}\, dx = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx$$

Or on reconnaît une intégrale classique :

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx = \pi$$

Donc :

$$\ell = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$



Représentation de la courbe $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ *: un demi-cercle de rayon* $\sqrt{2}$.

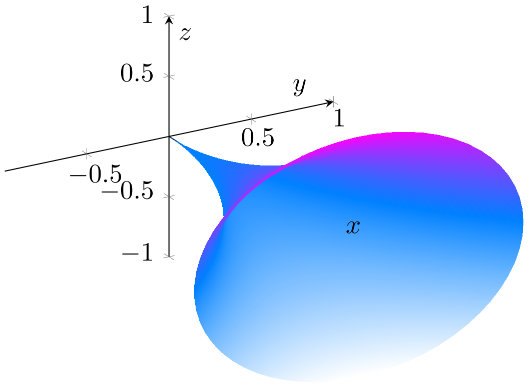
III.6 Volume d'un solide de révolution

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{S}$ le solide obtenu par rotation de la courbe $\mathcal{C}_f$ autour de l'axe des abscisses.

Le volume de $\mathcal{S}$ est donné par la formule :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(t)^2\, dt}$$



Aire sous $f(x) = x^2$ entre 0 et 1, engendrant un volume par rotation autour de l'axe x.

Application à $f(x) = x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx = \pi \int_0^1 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}(u.V)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}628}$$

Exercice 17. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

1. Justifier que F est dérivable et donner F'. En déduire que F est de deux fois dérivable.
2. Montrer que F est impaire.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2) - F(x)$.
4. En déduire que G est deux fois dérivable et Montrer que .

$$\forall x \in \mathbb{R};\ G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

Exercice 18. **Exercice à connaître** Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ une application continue sur J, et $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux applications telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$.

Soit $a \in J$, On note F la primitive de f sur J qui s'annule en a:

$$\forall x \in J;\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Pour $x \in I$, on pose :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

1. Justifier pourquoi :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

2. Montrer que si u et v sont continues sur I alors G est continue sur I.
3. Montrer que si u et v sont dérivables sur I, alors G est dérivable sur I et que:

$$\forall x \in I;\ G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

4. À quelle condition sur f, u et v a-t-on : G est deux fois (ou $n-$fois) dérivable sur I ?

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales suivantes :

$$K_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{5+4\cos t}\, dt, \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{5+4\cos t}\, dt, \quad J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{5+4\cos t}\, dt$$

1. Montrer que $J_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et interpréter géométriquement ce résultat.
2. En déduire $K_n = I_n$.
3. Établir la relation de récurrence :

$$K_{n+2} + \frac{5}{2}K_{n+1} + K_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

4. Calculer I_0, I_1, et Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ I_n = \frac{2\pi}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$