Exercice 1. 1. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Montrer que f réalise une bijection entre $[-1, +\infty[$ et son image, que l'on déterminera. Expliciter la bijection réciproque.

2. Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction

$$g(x) = \tan(x^3)$$

soit injective, et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Expliciter l'ensemble $g(I)$ et la fonction réciproque g^{-1}.

Exercice 2. **Questions préliminaires**

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux applications bijectives.

1. Montrer que la composée $g \circ f : I \to K$ est bijective.
2. Montrer que la bijection réciproque de $g \circ f$ est donnée par :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Partie I

On considère la fonction numérique h définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

1. Montrer que h est continue sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que h est dérivable sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que h est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. Montrer que h réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
5. Déterminer la bijection réciproque h^{-1} de h.

Partie II

On considère les fonctions numériques p et q définies par :

$$p(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{pour} \quad x \in]-1, +\infty[$$

$$q(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} \quad \text{pour} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

1. (a) Montrer que p est une bijection de $]-1, +\infty]$ vers un intervalle I à déterminer.

   (b) Déterminer la bijection réciproque p^{-1}.

2. Montrer que q est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers un intervalle J à déterminer.

3. (a) Déterminer la bijection réciproque q^{-1}.

   (b) Vérifier que pour $x \in]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}]$:

$$q^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\right)$$

Partie III

On considère la fonction numérique ϕ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \phi(x) < \frac{\pi}{2}$$

2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad 1 - \tan^2 \phi(x) = 2x \tan \phi(x)$$

3. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi(x)\right)$$

4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \phi(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(x)$$

Partie IV

On considère la fonction numérique ψ définie par :

$$\forall x \in]-1,1], \quad \psi(x) = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1], \quad 0 \leq \psi(x) < \pi$$

2. Soit $x \in]-1,1]$:

   (a) Montrer que :
$$1 - \tan^2\left(\frac{\psi(x)}{2}\right) = x(1 + \tan^2\left(\frac{\psi(x)}{2}\right))$$

   (b) En déduire que :
$$x = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi(x))$$

3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1]$:
$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

***Exercice 3*. Partie I:**

Soient m et n deux réels tels que $mn < 1$. On pose :

$$\mu = \arctan m \quad \text{et} \quad \nu = \arctan n$$

avec :

$$-\frac{\pi}{2} < \mu + \nu < \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que :
$$\arctan m + \arctan n = \arctan\left(\frac{m+n}{1-mn}\right)$$

2. Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\arctan(2x) + \arctan(3x) = \arctan(1)$$

Partie II

Soient s et t deux éléments de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $t \geq 0$, alors :
$$\arctan(s-t) \leq \arctan s + \arctan t$$

2. Montrer que si $t \leq 0$, alors :

$$\arctan s + \arctan t \leq \arctan(s-t)$$

3. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$|\arctan z| = \arctan |z|$$

   (b) En déduire que :

$$\arctan |s-t| \leq \arctan |s| + \arctan |t|$$

Partie III:

Soient a et b deux réels tels que :

$$a^2 + b^2 \leq 1$$

On pose :

$$\alpha = \arcsin a \quad \text{et} \quad \beta = \arcsin b$$

1. Montrer que :

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \geq 0$$

2. Montrer que :

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \geq 0$$

3. En déduire que :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

4. Montrer que :

$$\sin(\alpha+\beta) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$$

5. En déduire que :

$$\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right) = \arcsin a + \arcsin b$$

Partie IV

Soient u et v deux éléments de $[-1,1]$. On pose :

$$\theta = \arcsin(u) \quad \text{et} \quad \varphi = \arccos(v)$$

1. (a) Montrer que :

$$\cos(\theta+\varphi) = v\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-v^2}$$

   (b) En déduire que :

$$\cos(\theta+\varphi) = 0 \iff u = v$$

2. On suppose que $u \in]-1,1[$ et $v \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Montrer que :

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \iff u = v$$

3. Application : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \arccos y - \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$