Exercice 1. Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3x+1}$.

(a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\forall x \geq \frac{1}{3},\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$, ainsi que ses points fixes.

(c) Montrer que $[0, 1/3[$ et $[1/3, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.

(2) On suppose dans cette question $u_0 \in [0, 1/3[$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1/3$ puis étudier la monotonie de la suite u.
- (b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.

(3) On suppose dans cette question $u_0 \in [1/3, +\infty[$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1/3$ puis étudier la monotonie de la suite u.
- (b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.
- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 1/3| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1/3|$.
- (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1/3| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 1/3|$.
- (e) On suppose $u_0 = 5$. Comment choisir n pour être sûr que $|u_n - \frac{1}{3}| < 10^{-4}$?

Exercice 2. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

(1) (a) Montrer que $[0, 2]$ est stable par f et que $\forall x \in [0, 2],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- (b) Déterminer les points fixes de f. On note r l'unique point fixe tel que $r \in [0, 2]$.

(2) (a) Montrer que $\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq 2$.

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leq \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
- (c) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ainsi que un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.
- (d) À l'aide d'un tableau, donner une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 3. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3 + u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{5}(3 + x^2)$.

(1) (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 1]$ et montrer que $[0, 1]$ est un intervalle stable par f.

- (b) Déterminer l'unique point fixe $r \in [0, 1]$ de f.
- (c) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leq \frac{2}{5}$.

(2) (a) Montrer que $\forall n \geq 0,\ u_n \in [0, 1]$.

- (b) Démontrer que $\forall n \geq 0,\ |u_{n+1} - r| \leq \frac{2}{5}|u_n - r|$ puis $|u_n - r| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
- (c) Expliquer un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |u_n - r| \leq 10^{-10}$.
- (d) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de r.

Exercice 4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

(1) (a) Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.

- (b) Montrer que $\forall x \in [1, 2],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

(2) (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et conclure.
- (d) À partir de quel rang n a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?
- (e) À l'aide d'un tableau, donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.

Exercice 5. Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ et la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, déterminer le signe de $f(x) - x$, les points fixes de f puis montrer que $f([\sqrt{3}, +\infty[) = [\sqrt{3}, +\infty[$.

(2) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{3}$ puis déterminer la monotonie de la suite u. En déduire sa convergence ainsi que sa limite.

(3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{3}|$ puis que $|u_n - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

(4) Retrouver ainsi la convergence de la suite u et donner sa limite.

(5) Comment choisir n pour que $|u_n - \sqrt{3}| \leq 10^{-9}$?

En déduire, à l'aide d'un tableau, une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{3}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(\sin(x))$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $U_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que u_n appartient à l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite l vérifie $-\dfrac{\pi}{2} \leq l \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $f(l) = l$.
3. On suppose qu'il existe l_1 et l_2 tels que $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$.
   En utilisant la fonction $x \mapsto g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe α tel que $\cos(\alpha) > 1$. En déduire que $l = 0$.

Exercice 7. Soit la suite u définie par $u_0 \in [3, 4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \ln x$. On pose $f(x) = 4 - \ln x$. Données numériques : $f(4) \simeq 3.65 \neq 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \cdot 10^{-2}$.

(a) Étudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3, 4]$ est stable par f.

(b) Montrer que f possède un unique point fixe L sur l'intervalle $[3, 4]$.

(c) Montrer que : $\forall x \in [3, 4]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{10}$.

(a) Vérifier que $\forall n \geq 0$, $|u_{n+1} - L| \leq \dfrac{1}{10}|u_n - L|$ puis que $|u_n - L| \leq \dfrac{1}{10^n}$.

(b) Que peut-on dire de la convergence de la suite u ?

(c) En choisissant $u_0 = 3$, déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - L| \leq 10^{-9}$.

(d) À l'aide d'un tableau, donner une valeur approchée de L à 10^{-9} près (avec $u_0 = 3$).

Exercice 8. (1) Montrer que l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ admet une unique solution $r > 0$. Vérifier que $1 \leq r \leq 2$.

(2) On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$. On introduit également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2e^{-x}$.

(a) Justifier que $[1, r]$ est stable par f et déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, r]$ et donner la monotonie de u.

(c) Justifier que la suite u converge vers r.

(3) (a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r| \leq \dfrac{2}{e}|u_n - r|$ puis que $|u_n - r| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.

(b) Comment choisir n pour que $|u_n - r| \leq 10^{-9}$?

À l'aide d'un tableau, donner une valeur approchée à 10^{-9} près de r.

Exercice 9. On souhaite déterminer le nombre de solutions à l'équation (E) : $x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

(1) Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

(2) Obtenir d'approximation de β.

(a) Justifier que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et montrer que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3+1}{3} = x$.

(b) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x^3+1}{3}$. Montrer que l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par g et que $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
On considère alors la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.

(e) Pour quelles valeurs de n, est-on certain que $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$? En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de β.

Exercice 10. On considère l'application $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

(1) (a) Calculer $f'(x)$

(b) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[,\ f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$

(c) Étudier les variations de la fonction $g : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$

En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[,\ f''(x) > 0$.

(d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \to -\frac{1}{2}$ lorsque $x \to 0^+$). On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

(3) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[,\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$

(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

(d) Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 11. Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par la relation : $f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$.

(1) (a) Étudier les variations de f.

(On n'hésitera pas à écrire $f'(t)$ sous la forme $\frac{A(t)}{(1+t)(1+t^2)^2}$)

(b) Déterminer la limite du rapport $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Tracer la courbe représentative de f.

(2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation : $(E_n) : f(t) = \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution α_n et une seule.

(b) Déterminer le sens de variation puis expliciter la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) Déterminer la limite du rapport $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}$ puis la limite de la suite $(n\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 12. Soit k un réel tel que $k \geq 1$. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = k + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

On définit les sous-suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = u_{2n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = u_{2n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad k \leq u_n < k+1 \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad k \leq u_n \leq k+1.$$

2. Montrer que :
$$\begin{cases} x_{n+1} = k + \dfrac{x_n}{kx_n + 1} \\ \\ y_{n+1} = k + \dfrac{y_n}{ky_n + 1} \end{cases}$$

3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n < y_n$$

4. (a) Montrer que la suite (x_n) est croissante.
   (b) En déduire que la suite (y_n) est décroissante.
   (c) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

5. Déterminer la limite α de la suite (x_n).
   (a) Montrer que :
$$|u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$$
   (b) En déduire que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Conclusion et extension: On appelle une fraction continue généralisée toute expression de la forme
$$\alpha = k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \ddots}}$$
Dans l'exercice précédent on a montré que si $k \geq 1$ cette expression converge vers $\alpha = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$.'
Cas particuliers et propriétées :

- Pour $k = 1$: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or), liée aux **réduites successives** $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ (suite de Fibonacci)
- Pour $k = 2$: $1 + \sqrt{2} = [2; \overline{2}]$ (périodicité simple)
- Les fractions continues des racines carrées sont **périodiques**, par exemple $\sqrt{m} = [a_0; \overline{a_1, ..., a_k}]$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ non carré.
- **Meilleure approximation** : Pour tout $k \geq 1$, les réduites $\dfrac{p_n}{q_n}$ minimisent $|q\alpha - p|$ parmi $q \leq q_n$
- **Convergence quadratique** : L'erreur $|\alpha - p_n/q_n| = \mathcal{O}(1/q_n^2)$
- **Relation de récurrence** : $p_n = kp_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = kq_{n-1} + q_{n-2}$