Sommaire

I Ensembles équipotents

Soit E un ensemble. Pour toute partie $A \subseteq E$, on définit **la fonction caractéristique de** A, notée χ_A, par :

$$\chi_A : E \to \{0,1\}$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'application :

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$$

$$A \mapsto \chi_A$$

L'application Φ est une bijection.
On dit que les ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont *equipotents*.

Définition: Ensembles équipotents

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection $f : E \to F$ entre eux.
On écrit $E \equiv F$

Exemple

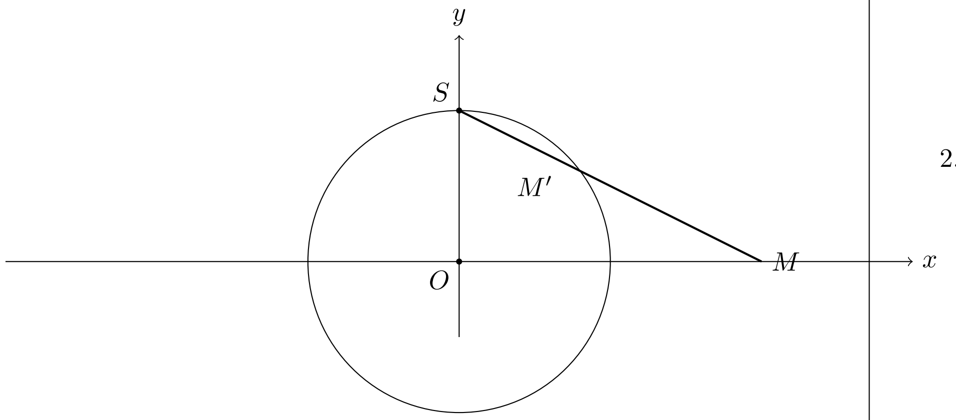
1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to [-1,1], x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$ est bijective
2. Soient a, b deux réels, Montrer que l'application $g : [0,1] \to [a,b], x \mapsto a(1-x)+bx$ est bijective

   En déduire que $\mathbb{R} \equiv [-1,1] \equiv [0,1] \equiv [a,b]$
3. Soient E et F deux ensembles non vides.

   Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathcal{P}(F))$ est équipotente à l'ensemble $\mathcal{P}(E \times F)$

Exercice 1. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}(O,1)$ de centre O et de rayon 1, et le point $S(0,1)$.

1. Déterminer les coordonnées de point M' d'intersection de la droite (SM) avec le cercle $\mathcal{C}(O,1)$.
2. Montrer que la relation qui relie M à $M' \in \mathcal{C}(O,1)\backslash\{S\}$ est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(O,1) \setminus \{S\}$.



Exercice 2. Dans le même plan, soit E l'ensemble de demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon 1 et de diamètre $[-1, 1]$ (voir figure).

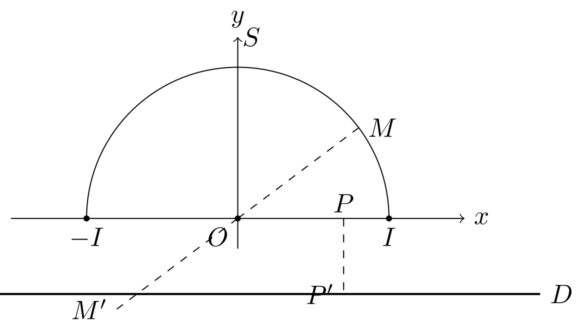
Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, et (D) la droite d'équation cartésienne $D : y = -\alpha$.

On définit le point M' ainsi:

- Si $M \in \{I, I'\}$, alors M' est la projection de M sur la droite (D)
- Si $M \in \mathcal{C} \setminus \{I, I'\}$, alors $M' = (D) \cap (MO)$

Montrer que l'application $f : M \mapsto M'$ est bijective.

En déduire que $\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}$



Exercice 3.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto 2^n(2m + 1)$ est bijective.

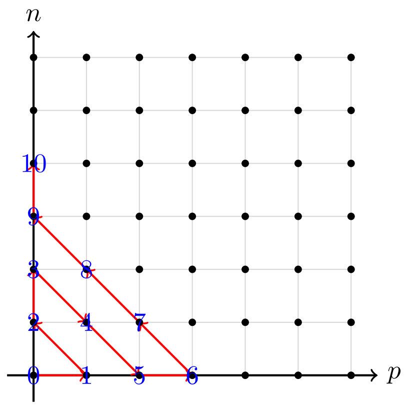
   En déduire que $\mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N}$

2. Dans la figure suivante nous avons :

   L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est pointé par les sommets des carrés de la grille.

   Et l'ensemble $\mathbb{N}$ est pointé par les sommets des carrés de la grille que traverse la ligne brisée(en rouge).

   En utilisant cette figure, montrez que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents et déterminez la bijection qui associe le point (p, n) de $\mathbb{N}^2$ à son image dans $\mathbb{N}$.



Exercice 4. Soient E, E', F et F' quatre ensembles disjoints tels que :

$$E \equiv E', F \equiv F'$$

1. On suppose que $E' \cap F' = \varnothing$, $E \cap F = \varnothing$. Montrer que :

$$E \cup F \equiv E' \cup F'.$$

2. (a) Montrer que $E \times F \equiv E' \times F'$.

   (b) En déduire que $\mathcal{P}(E) \equiv \mathcal{P}(E')$.

   (c) Conclure que $\mathcal{F}(E, F) \equiv \mathcal{F}(E', F')$.

Exercice 5. **Carnot (difficile)** Soit f une application injective de E dans F, et g une application injective de F dans E. Montrer que : $E \equiv E$.

II Ensembles finis

II.1 Généralité sur les ensembles finis

Définition: Cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il est équipotent à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, son **cardinal** est défini par :

$$\operatorname{card}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ n & \text{si } E \leftrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

On note le cardinal d'un ensemble parfois par $card(E) = |E|$.

Exemple

Montrer que les ensembles $E = \{a_p, a_{p+1}, \cdots, a_q\}$ et $F = [\![1, q-p+1]\!]$ sont équipotents.
Justufier pourquoi $card(E) = q - p + 1$

Proposition : Unicité du Cardinal

Soit E un ensemble fini. L'entier naturel n tel que E soit équipotent à $\{1, 2, \dots, n\}$ est unique.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers distincts n et m (avec $n < m$) tels que E soit équipotent à la fois à $\{1, 2, \dots, n\}$ et à $\{1, 2, \dots, m\}$. Alors, par transitivité, il existerait une bijection $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, m\}$.
Considérons la restriction de f à $\{1, 2, \dots, n\}$. C'est une injection d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal m. Cependant, l'image de cette injection est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, m\}$ ayant au plus n éléments. Puisque $n < m$, cette image ne peut pas être égale à tout $\{1, 2, \dots, m\}$. Ainsi, f ne peut pas être surjective, ce qui contredit le fait que c'est une bijection.
Notre hypothèse de départ est donc fausse. L'entier n est unique. □

Proposition: Cardinal de l'ensemble vide

$$E = \emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{card}(E) = 0$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Par définition, si $E = \emptyset$, alors $\operatorname{card}(E) = 0$.

($\Leftarrow$) Si $\operatorname{card}(E) = 0$, cela signifie par définition que E est équipotent à l'ensemble $\{\}$. Par convention, cet ensemble est vide ($n = 0$). Donc E est équipotent à l'ensemble vide. La seule fonction de l'ensemble vide vers lui-même est la fonction vide, qui est une bijection. Ainsi, E doit lui-même être vide.

□

La proposition suivante, donne le lien naturel entre l'équipotence et la cardinalité.

II.2 Caractérisation des ensembles finis et ses conséquences

Cela permet donc de mesurer la taille d'un ensemble à partir d'un autre.

Proposition: caractérisation des ensembles équipotents

Soient E et F deux ensembles finis. Alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont équipotents} \iff \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons E et F équipotents. Par définition, il existe une bijection $f : E \to F$. Comme E est fini, il existe une bijection $g : E \to \{1, \dots, n\}$ où $n = \operatorname{card}(E)$. La composée $f \circ g^{-1}$ est alors une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers F. Ceci signifie exactement que $\operatorname{card}(F) = n = \operatorname{card}(E)$.

($\Leftarrow$) Supposons $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F) = n$. Alors par définition, il existe des bijections :

$$g : E \to \{1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad h : F \to \{1, \dots, n\}$$

L'application $h^{-1} \circ g$ est une bijection de E vers F (composée de deux bijections). Donc E et F sont équipotents.

□

Remarque 1. *Le théorème de caractérisation des ensembles finis, dit que pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit de construire une bijection avec un ensemble qu'on connaît son cardinal.*

Par exemple pour déterminer card $(\mathcal{P}(E))$, il suffit de déterminer card $(\{0,1\}^E)$.

On va maintenant étudier le cas où l'application f n'est pas bijective, on s'intéresse au cas de f surjective ou injective.

Proposition: Application Surjective et Inégalité de Cardinal

Soient E et F deux ensembles finis. S'il existe une application surjective $f : E \to F$, alors $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

Preuve. Soit $n = \text{card}(E)$. Il existe une bijection $g : E \to \{1, \dots, n\}$.
Puisque f est surjective, pour tout élément $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ (l'image réciproque de y) est une partie non vide de E. On peut donc définir une fonction de choix $c : F \to E$ qui à chaque $y \in F$ associe un antécédent $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$.
Considérons maintenant la composition $g \circ c : F \to \{1, \dots, n\}$. Montrons qu'elle est injective. Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(c(y_1)) = g(c(y_2))$. Puisque g est bijective (donc injective), on a $c(y_1) = c(y_2)$. En appliquant f, on obtient :

$$f(c(y_1)) = f(c(y_2)) \implies y_1 = y_2$$

car par définition de c, $f(c(y)) = y$ pour tout y. Ainsi, $g \circ c$ est injective.
On a donc construit une injection de F vers $\{1, \dots, n\}$, ce qui implique que le cardinal de F est au plus n, c'est-à-dire $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$. □

Corollaire : Inclusion et Cardinal

Soient F et E deux ensembles finis. Si $F \subset E$, alors $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

Preuve. L'application d'inclusion $i : F \hookrightarrow E$ définie par $i(x) = x$ pour tout $x \in F$ est injective. Toute application injective entre ensembles finis induit une bijection sur son image, qui est un sous-ensemble de E. Ainsi, F est équipotent à une partie de E, ce qui implique directement $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$. Plus constructivement : puisque i est injective, on peut choisir E lui-même comme ensemble de départ pour une surjection (en étendant l'identité), mais le résultat précédent sur les surjections donne directement la conclusion si on considère l'identité comme une surjection de E sur F (ce qui n'est vrai que si $F \subset E$). La construction directe par injection est plus immédiate. □

Le théorème suivant permet de faciliter l'étude de bijectivité dans les ensembles finis.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \to F$ une application. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective.
2. f est surjective.
3. f est injective.

Preuve. On démontre la propriété par l'équivalence des propriétés. On note $n = \text{card}(E) = \text{card}(F)$.

- **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** et **(1)** $\Rightarrow$ **(3)** : Évident par définition d'une bijection.

- **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** : Supposons f surjective. On a vu que cela implique $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$. Mais comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, l'inégalité est une égalité. Prouvons maintenant que f est injective. Supposons par l'absurde que f ne soit pas injective. Alors il existe $x_1 \neq x_2$ dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
L'application f étant surjective, chaque élément de F a au moins un antécédent. Mais puisque deux éléments distincts de E partagent la même image, le nombre total d'antécédents "distincts" est strictement inférieur à n. Plus formellement, l'ensemble E a n éléments, mais

l'application f crée une partition de E en classes d'équivalence (où $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$). S'il y a une classe avec au moins 2 éléments, alors le nombre de classes (qui est égal au cardinal de F puisque f est surjective) est strictement inférieur à n. Ceci contredit $\text{card}(F) = n$. Donc f doit être injective, et par conséquent bijective.

- **(3)** $\Rightarrow$ **(1)** : Supposons f injective. Une injection de E vers F est une bijection sur son image. Donc $\text{card}(\text{Im}(f)) = \text{card}(E) = n$. Mais $\text{Im}(f) \subset F$ et $\text{card}(F) = n$. Le seul sous-ensemble de F de cardinal n est F lui-même. Donc $\text{Im}(f) = F$, ce qui signifie que f est aussi surjective, et donc bijective.

$\square$

II.3 Cardinal de la réunion des ensembles finis

II.3.1 Cardinal de la réunion des ensembles finis disjoints

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
On note :

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$F = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$$

On considère l'application :

$$f : \{1, 2, \ldots, n+p\} \to E \cup F$$

définie par :

$$f(i) = x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$$f(i) = y_{i-n} \quad \text{pour } n+1 \leq i \leq n+p$$

Si les ensembles E et F sont disjoints, alors l'application f est une bijection de $\{1, 2, \ldots, n+p\}$ vers $E \cup F$.
Ainsi, le cardinal de l'union $E \cup F$ est $n + p$.

Théorème

Si E et F sont deux ensembles finis disjoints, alors :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}\, E + \text{card}\, F$$

On peut généraliser cette propriété à une réunion finie d'ensembles deux à deux disjoints :

Proposition

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints.
Alors :

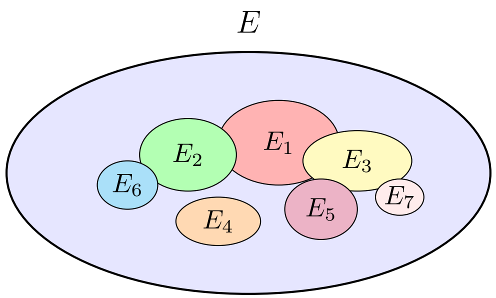
$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\, E_i$$

Remarque 2. *Cette propriété est valable sous l'hypothèse que les ensembles sont disjoints deux à deux.*

Définition: Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-ensembles non vides de E.
On dit que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ forme une **partition** de l'ensemble E si :

1. $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$
2. Les sous-ensembles sont **disjoints deux à deux** :
   $\forall i \neq j, \quad E_i \cap E_j = \emptyset$



Partition d'un ensemble E en $n = 7$ parties

Exemple :
Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Une partition possible est :

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_2 = \{4, 5\}, \quad E_3 = \{6, 7, 8, 9\}$$

Cette partition vérifie :

- $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
- $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_3 = \emptyset$, $E_2 \cap E_3 = \emptyset$

D'après la propriété précédente, si $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ forme une partition de l'ensemble E, alors :

$$\text{card } E = \text{card } \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card } E_i$$

Si A est une sous-ensemble non vide de E, alors $\{A, \complement_E A\}$ forme une partition de l'ensemble E, et donc :

$$\text{card } E = \text{card } A + \text{card } (\complement_E A)$$

De cela, nous déduisons la propriété suivante :

Proposition

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{card } A = \text{card } E - \text{card } (\complement_E A)$$

Exemple d'application

> ***Exercice 6.*** Déterminer le nombre de couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq 5$.

Solution. *Soit E l'ensemble des couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq 5$. Définissons la partition suivante :*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(1, j) \mid 2 \leq j \leq 5\} \\
E_2 &= \{(2, j) \mid 3 \leq j \leq 5\} \\
E_3 &= \{(3, j) \mid 4 \leq j \leq 5\} \\
E_4 &= \{(4, j) \mid 5 \leq j \leq 5\} = \{(4, 5)\} \\
E_5 &= \{(5, j) \mid 6 \leq j \leq 5\} = \emptyset
\end{aligned}$$

Nous avons :

- $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$
- *Les E_i sont disjoints deux à deux*
- $E_5 = \emptyset$

Calculons les cardinaux :

$$\begin{aligned}
&card\ E_1 = 4 \quad (couples : (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)) \\
&card\ E_2 = 3 \quad (couples : (2, 3), (2, 4), (2, 5)) \\
&card\ E_3 = 2 \quad (couples : (3, 4), (3, 5)) \\
&card\ E_4 = 1 \quad (couple : (4, 5)) \\
&card\ E_5 = 0
\end{aligned}$$

Donc le nombre total de couples est :

$$card\ E = 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$$

Exercice 7. 1. Déterminer le nombre de couples (i, j) où i et j sont des entiers naturels et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq i \leq j \leq n$.

2. Soit A une partie d'un ensemble non vide et fini E.

   (a) Montrer que card $A \leq$ card E

   (b) Montrer que card $A =$ card E si et seulement si $A = E$

II.3.2 Cardinal de l'union de deux ensembles

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors :

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card } (E \cap F)$$

Preuve. On peut partitionner $E \cup F$ en trois parties disjointes :

- $E \setminus F$ (éléments de E qui ne sont pas dans F)
- $F \setminus E$ (éléments de F qui ne sont pas dans E)
- $E \cap F$ (éléments communs à E et F)

Ainsi :

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } (E \setminus F) + \text{card } (F \setminus E) + \text{card } (E \cap F)$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{card } E &= \text{card } (E \setminus F) + \text{card } (E \cap F) \\ \text{card } F &= \text{card } (F \setminus E) + \text{card } (E \cap F) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card } (E \cap F)$$

□

II.3.3 Généralisation à trois ensembles

Proposition

Soient E, F et G trois ensembles finis. Alors :

$$\begin{aligned} \text{card } (E \cup F \cup G) = {} & \text{card } E + \text{card } F + \text{card } G \\ & - \text{card } (E \cap F) - \text{card } (E \cap G) - \text{card } (F \cap G) \\ & + \text{card } (E \cap F \cap G) \end{aligned}$$

Exercice 8. Une classe contient 30 élèves. Une enquête sur leurs préférences donne les résultats suivants :

- 14 aiment les mathématiques
- 16 aiment la physique
- 10 aiment la chimie
- 7 aiment les mathématiques et la physique
- 5 aiment la physique et la chimie
- 8 aiment les mathématiques et la chimie
- 4 aiment les trois matières

Quel est le nombre d'élèves qui n'aiment aucune des trois matières ?

Solution : Notons :

$$\begin{aligned} M &= \text{ensemble des élèves aimant les mathématiques} \\ P &= \text{ensemble des élèves aimant la physique} \\ C &= \text{ensemble des élèves aimant la chimie} \end{aligned}$$

Données :

$$\begin{aligned}
\text{card } M &= 14\\
\text{card } P &= 16\\
\text{card } C &= 10\\
\text{card } (M \cap P) &= 7\\
\text{card } (P \cap C) &= 5\\
\text{card } (M \cap C) &= 8\\
\text{card } (M \cap P \cap C) &= 4
\end{aligned}$$

Appliquons la formule du cardinal de l'union de trois ensembles :

$$\begin{aligned}
\text{card } (M \cup P \cup C) &= 14 + 16 + 10 - 7 - 5 - 8 + 4\\
&= 40 - 20 + 4 = 24
\end{aligned}$$

Le nombre d'élèves qui n'aiment aucune matière est :

$$30 - \text{card } (M \cup P \cup C) = 30 - 24 = 6$$

Description	**Nombre d'élèves**
Total d'élèves dans la classe	30
Aiment au moins une matière	24
N'aiment aucune matière	**6**

Exercice 9. De combien de manières peut-on colorer six cases consécutives côte à côte en utilisant les trois couleurs : blanc, noir et vert, de sorte que deux cases adjacentes n'aient pas la même couleur ?

II.3.4 Généralisation à n ensembles

Théorème

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

II.4 Cardinal du produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
On pose $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \ldots, y_p\}$.

Les ensembles $\{x_i\} \times F$ forment une partition du produit cartésien $E \times F$ lorsque x_i varie dans E. En effet :

- $E \times F = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (\{x_i\} \times F)$
- Les ensembles $\{x_i\} \times F$ sont disjoints deux à deux
- card $(\{x_i\} \times F) = \text{card } F = p$ pour tout i

Donc :

$$\text{card } (E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card } (\{x_i\} \times F) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p = \text{card } E \cdot \text{card } F$$

Proposition

Pour tous ensembles finis E et F, on a :

$$\text{card } (E \times F) = \text{card } E \cdot \text{card } F$$

De façon générale, on peut démontrer (par récurrence, par exemple) la propriété générale suivante :

Proposition

Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\text{card } (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \text{card } E_i$$

Dans le cas où $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on obtient la propriété :

$$\text{card } (E^n) = (\text{card } E)^n$$

Exercice 10. Un sac A contient deux boules numérotées 1 et 2 respectivement.
Un sac B contient trois boules portant les lettres b, n et r respectivement.
On tire une boule de chaque sac. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Solution :

Il y a deux possibilités lors du tirage d'une boule du sac A.
Quel que soit le résultat du tirage du sac A, il y a trois possibilités lors du tirage d'une boule du sac B.

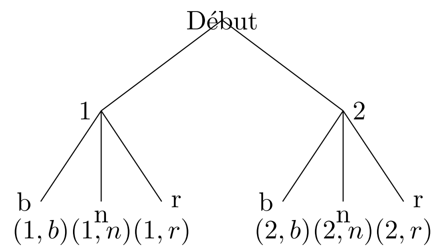
On représente ces résultats par des couples tels que : $(1, b)$, $(1, n)$, $(1, r)$, $(2, b)$, $(2, n)$, $(2, r)$.

Le nombre de résultats possibles est le nombre d'éléments du produit cartésien :

$$\{1, 2\} \times \{b, n, r\}$$

Calcul du cardinal :

$$\text{card } (\{1, 2\} \times \{b, n, r\}) = \text{card } \{1, 2\} \times \text{card } \{b, n, r\} = 2 \times 3 = 6$$



Remarque : On peut représenter les résultats possibles par :

- Un arbre des possibilités (comme ci-dessus)
- Un tableau à double entrée
- La liste exhaustive des couples
- Le diagramme sagittal
- Le diagramme cartésien

Exercice 11.

1. Une urne contient p boules numérotées de 1 à p.
   (a) On tire une boule de l'urne, on note son numéro puis on la remet dans l'urne, et on tire à nouveau. Quel est le nombre de résultats possibles ?
   (b) On répète cette expérience n fois ($n \geq 2$). Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Pour aller de la ville A à la ville B, on traverse trois rivières.

   Sur la première rivière, il y a quatre ponts ; sur la deuxième rivière, trois ponts ; et sur la troisième rivière, deux ponts.

   Quel est le nombre de chemins possibles ?
3. On lance un dé cinq fois de suite et à chaque fois on note le numéro obtenu. Quel est le nombre de résultats possibles ?

III Principe fondamental du dénombrement

Soient E et F deux ensembles finis tels que :

$$\text{card } F = q$$

Soit f une application surjective de E vers F telle que pour tout $y \in F$:

$$\text{card } f^{-1}(y) = p$$

Les ensembles $f^{-1}(y)$, lorsque y varie dans F, forment une partition de l'ensemble E.

$$\text{card } E = \sum_{y \in F} \text{card } f^{-1}(y) = q \cdot p$$

Proposition

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F.
Si f est surjective et si pour tout élément y de F on a :

$$\text{card } f^{-1}(y) = p$$

alors :

$$\text{card } E = p \cdot \text{card } F = p \cdot q$$

Cette propriété s'appelle le **principe des bergers** ou **principe fondamental du dénombrement**.

On formule ce principe de la manière suivante :

Méthode

Soit x un élément variant dans un ensemble E et y un élément variant dans un ensemble F.
Si :

- Il y a q façons de choisir l'élément y (c'est-à-dire card $F = q$)
- Chaque élément y détermine p éléments x
- Chaque élément x détermine un seul élément y

Alors il y a $p{\cdot}q$ façons de choisir l'élément x (c'est-à-dire card $E = p{\cdot}q$).

Exercice 12. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4.
On tire successivement deux boules de l'urne. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Solution :

1. **Avec remise** (on replace la première boule avant de tirer la seconde) :

$$\text{Nombre de résultats} = 4 \times 4 = 16$$

2. **Sans remise** (on ne replace pas la première boule) :

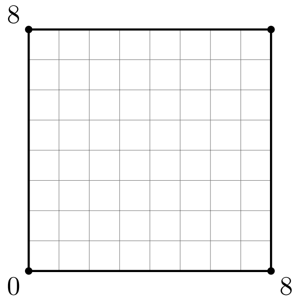
$$\text{Nombre de résultats} = 4 \times 3 = 12$$

3. **Liste des résultats possibles sans remise** :

$$\begin{gathered}(1,2),(1,3),(1,4),\\(2,1),(2,3),(2,4),\\(3,1),(3,2),(3,4),\\(4,1),(4,2),(4,3)\end{gathered}$$

Type de tirage	Principe	Nombre de résultats
Avec remise	4×4	16
Sans remise	4×3	12

Exercice 13. On divise un carré en 8×8 cases formant des carrés identiques.



Déterminer le nombre de rectangles que l'on peut obtenir à l'intérieur de ce carré.

Exercice 14. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Déterminer le nombre de parties de E qui contiennent exactement deux éléments.

Exercice 15. Soit E_n un ensemble fini de cardinal n.

On considère l'ensemble :

$$Q_n = \{(A, B) \in \mathcal{P}^2(E_n) \mid A \cup B = E_n\}$$

Montrer par récurrence que :

$$\text{card } Q_n = 3^n$$

Exercice 16. On dispose de n pièces de pierre en forme de cube et on souhaite construire un mur tel que : chaque cube se trouve soit directement sur le sol, soit sur un autre cube.

Montrer par récurrence que le nombre de murs différents est :2^{n-1}

IV Arrangements - Permutations - Combinaisons

IV.1 Arrangements avec répétition

Définition: Arrangements avec répétition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul.
On considère les éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ du produit cartésien E^p où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des éléments de E.
Puisque card $E = n$, alors card $E^p = n^p$. Donc le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, où $x_i \in E$, est n^p.

Proposition

Le nombre d'arrangements avec répétition de degré p des éléments d'un ensemble fini de cardinal n est n^p.

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors (a, b, a), (a, c, b), (d, a, c) sont des arrangements de degré 3.

- **Remarque 1 :** L'ordre des éléments dans un arrangement a de l'importance : les arrangements (a, b, a) et (a, a, b) sont différents.
- **Remarque 2 :** Soit $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ un ensemble de cardinal p.
Toute application $f : I \to E$ détermine un unique élément $(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_p))$ de E^p, c'est-à-dire un unique arrangement de degré p.
Réciproquement, tout arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ de degré p détermine une unique application $f : I \to E$ définie par :
$$f(\alpha_i) = x_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Proposition

Le nombre d'applications d'un ensemble fini de cardinal p vers un ensemble fini de cardinal n est n^p.

Exercice 17. Combien de nombres à trois chiffres peut-on former à partir des chiffres $\{6, 7, 8, 9\}$?

Solution :

Il s'agit de compter le nombre d'arrangements avec répétition de degré 3 d'un ensemble à 4 éléments.

$$\text{Nombre} = 4^3 = 64$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{4 choix} & & \text{4 choix} & & \text{4 choix} \\ \text{Centaines} & \longrightarrow & \text{Dizaines} & \longrightarrow & \text{Unités} \end{array}$$

6,7,8,9 6,7,8,9 6,7,8,9

On peut donc former $4 \times 4 \times 4 = 64$ nombres à trois chiffres.

Exercice 18. Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$.

Solution :

- À chaque partie $A \in \mathcal{P}(E)$, on associe l'application $\varphi_A : E \to \{0, 1\}$ définie par :
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$
- Réciproquement, à toute application $\varphi : E \to \{0, 1\}$, on associe la partie :
$$A_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 1\}$$

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{P}(E) \cong \mathcal{F}(E; \{0, 1\})$$

Donc $\mathcal{P}(E)$ Et $\mathcal{F}(E; \{0, 1\})$ sont équipotent.

Puisque card $\{0, 1\} = 2$ et card $E = n$, on a :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = \text{card } \mathcal{F}(E; \{0, 1\}) = 2^n$$

Proposition

Le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini de cardinal n est 2^n.

Exercice 19. De combien de façons peut-on ranger n fichiers numérotés de 1 à n dans p tiroirs numérotés de 1 à p, sachant que chaque tiroir peut contenir plus d'un fichier et peut même contenir tous les fichiers ?

Exercice 20. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
On tire une boule de l'urne, on note son numéro puis on la remet dans l'urne. On répète cette opération cinq fois et on obtient cinq numéros. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Exercice 21. Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On considère l'ensemble :

$$S = \{(A, B) \in \mathcal{P}^2(E) \mid A \cup B = E\}$$

Déterminer le cardinal de l'ensemble S (on pourra utiliser la même méthode que dans l'exercice résolu 12?).

Indication : Pour chaque élément $y \in E$, considérer les possibilités :

- $y \in A$ et $y \in B$
- $y \in A$ et $y \notin B$
- $y \notin A$ et $y \in B$

IV.2 Arrangements sans répétition

Définition: Arrangements sans répétition

Soit E un ensemble de cardinal n,
Un arrangement sans répétition est un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E^p où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des éléments de E distincts deux à deux.

C'est donc un p-uplet d'éléments distincts.

On remarque d'abord qu'il est nécessaire que le nombre p soit inférieur ou égal au nombre n, cardinal de l'ensemble E.
Soit A_n^p le nombre de ces p-uplets d'éléments distincts.
Notons $\mathcal{A}_n^p$ l'ensemble de ces p-uplets.

On a donc : $Card(\mathcal{A}_n^p) = A_n^p$

Proposition

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$A_n^1 = n$$

Méthode de calcul

On considère l'application :

$$\varphi : \mathcal{A}_n^p \to E$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto x_p$$

- **D'une part**, l'application φ est surjective. et

  $$\forall x \in E \quad \varphi^{-1}(x) = (x_1, \cdots, x_{p-1}, x) \quad \text{Où } (x_1, \cdots, x_{p-1}) \in \mathcal{A}_{n-1}^{p-1}$$

  On déduit que :

  $$\forall x \in E \quad Card(\varphi^{-1}(x)) = Card(\mathcal{A}_{p-1}^{n-1}) = A_{p-1}^{n-1}$$

- **D'autre part**, pour tout élément $x \in E$, on pose $E_x = E \setminus \{x\}$, donc :

  $$\text{card } E_x = n - 1$$

Donc par le principe de bergère on déduit la propriété suivant:

Propriété Formule de récurrence

Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a la relation :

$$A_n^p = n \cdot A_{n-1}^{p-1}$$

Preuve. Pour former un arrangement sans répétition de p éléments, on peut :

1. Choisir le dernier élément x_p : n possibilités
2. Choisir les $p-1$ premiers éléments parmi les $n-1$ éléments restants : A_{n-1}^{p-1} possibilités

D'où la formule : $A_n^p = n \cdot A_{n-1}^{p-1}$ □

Propriété : Formule explicite

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Exemple :
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments.
Les arrangements sans répétition de degré 2 sont :

$$(a,b), (a,c), (a,d),$$
$$(b,a), (b,c), (b,d),$$
$$(c,a), (c,b), (c,d),$$
$$(d,a), (d,b), (d,c)$$

$$A_4^2 = 4 \times 3 = 12$$

Exercice :
Combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?
Solution :

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Remarques importantes

- L'ordre des éléments dans un arrangement a de l'importance : les arrangements (b, a, c) et (a, b, c) sont différents.
- On convient que $A_n^p = 0$ si $p > n$.
- Soit $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ un ensemble de cardinal p.

- Toute application injective $f : I \to E$ détermine un unique arrangement sans répétition $(f(a_1), \ldots, f(a_p))$.

- Réciproquement, tout arrangement sans répétition $(x_1, \ldots, x_p)$ détermine une unique application injective $f : I \to E$ définie par :

$$f(a_i) = x_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Proposition

Le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n (avec $p \leq n$) est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Exercice 22. Combien de mots de 3 lettres différentes peut-on former avec l'alphabet $\{a, b, c, d, e\}$?

Solution :

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Exercice 23. De combien de façons peut-on distribuer cinq boules numérotées de 1 à 5 dans dix boîtes numérotées de 1 à 10, sachant que chaque boîte ne peut contenir au plus qu'une seule boule ?

Solution :
Chaque distribution possible peut être représentée par un 5-uplet $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, où b_i est le numéro de la boîte contenant la boule numéro i. Les nombres b_i appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ et sont distincts deux à deux.

Ainsi, chaque distribution possible est un arrangement sans répétition de degré 5 de l'ensemble des numéros de boîtes.

Donc le nombre de distributions différentes possibles est :

$$A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

Proposition

Dans un problème de distribution où :

- On dispose de n boîtes distinctes
- On veut distribuer p objets distincts $(p \leq n)$
- Chaque boîte contient au plus un objet

Le nombre de distributions possibles est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Exercice 24. Combien de nombres de 4 chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

Solution :

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

Exercice 25. De combien de façons peut-on attribuer 3 prix différents (1er, 2ème, 3ème) à 10 candidats ?

Solution :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Exercice 26. Une association compte 27 membres.
Quel est le nombre de façons possibles d'élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier, sachant que chaque membre de l'association a le droit d'être élu et ne peut occuper plus d'une fonction dans le bureau ?

Solution :
Soit E l'ensemble des membres de l'association, on a card $E = 27$.
Soit F l'ensemble des postes (ou fonctions) du bureau, on a card $F = 3$.

Chaque bureau peut être représenté par une application injective de F vers E.

Ainsi, le nombre de bureaux possibles est le nombre d'applications injectives de F vers E, c'est-à-dire :

$$A_{27}^3 = 27 \times 26 \times 25 = 17550$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Président} & \text{Secrétaire} & \text{Trésorier} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 27 \text{ choix} & 26 \text{ choix} & 25 \text{ choix} \end{array}$$

> ***Exercice 27.*** Combien de nombres de quatre chiffres peut-on écrire en utilisant les chiffres impairs, sachant que chaque chiffre ne peut être utilisé plus d'une fois ?

Solution :
Les chiffres impairs sont $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (5 éléments).
Il s'agit d'arrangements sans répétition de 4 chiffres parmi 5 :

$$A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

Exercice 28. On dispose de n cases alignées côte à côte.
On colore trois cases parmi ces n cases en utilisant trois couleurs différentes, sachant que chaque couleur est utilisée pour colorer une seule case. Quel est le nombre de cas possibles ?

IV.3 Permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une application injective de E vers E est bijective. Donc le nombre d'applications bijectives de E vers E est égal au nombre d'applications injectives de E vers E.

Définition: Permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Toute bijection de E vers E est appelée permutation de l'ensemble E.

Proposition

Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n est :

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

$n!$ se lit "n factorielle "

Preuve. Une permutation correspond à un arrangement sans répétition de tous les éléments de E (cas où $p = n$). □

> **Exemple :**
> Pour $E = \{a, b, c\}$ de cardinal 3, les permutations sont :
>
> $$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c),$$
> $$(b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$$
>
> $$3! = 6 \text{ permutations}$$

Note : Soient E et F deux ensembles équipotents de cardinal n. Alors il existe une bijection φ de E vers F.

Si σ est une permutation de l'ensemble E, alors $\sigma \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de F vers E.

Et réciproquement, chaque bijection f de F vers E détermine une unique permutation de l'ensemble E qui est la bijection : $f \circ \varphi$.

Ainsi, le nombre d'applications bijectives de F vers E est égal au nombre de permutations de E.

Proposition

Le nombre de bijections entre deux ensembles équipotents de cardinal n est $n!$

Exercice 29. On dispose de 4 livres de mathématiques, 5 livres de physique et 6 livres de sciences naturelles.

1. De combien de façons peut-on ranger ces livres sur une étagère de la bibliothèque ?
2. De combien de façons peut-on ranger ces livres regroupés par

   matière ?

Solution:

1. Le nombre total de livres est de 15 livres. Chaque façon de ranger ces livres (sans tenir compte de la matière) est une permutation de cet ensemble de livres, donc le nombre de ces arrangements est : 15!
2.
   - Il y a 4! façons de ranger les livres de mathématiques entre eux.
   - Il y a 5! façons de ranger les livres de physique entre eux.
   - Il y a 6! façons de ranger les livres de sciences naturelles entre eux.
   - De plus, il y a 3! façons de ranger les trois matières entre elles.

   D'après le principe fondamental du dénombrement, il y a $3! \times 5! \times 4! \times 6!$ façons de ranger tous les livres regroupés par matière.

Exercice 30. Une boîte contient 10 boules indiscernables sauf par la couleur.

Trois sont blanches et sept sont noires.

On tire successivement trois boules de la boîte. Quel est le nombre de cas possibles ?

Solution

Chaque arrangement sans répétition de degré 3 des boules détermine un cas possible. Et chaque cas possible détermine $3! \times 7!$ arrangements de degré 3, c'est-à-dire le nombre de permutations des boules blanches entre elles et des boules noires entre elles.

Ainsi, le nombre de cas possibles selon le principe fondamental du dénombrement est :

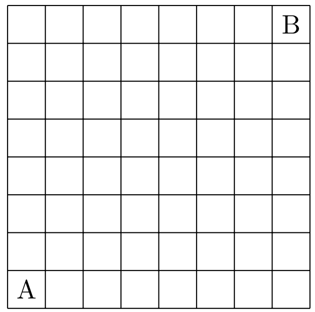
$$\frac{A_{10}^{3}}{7! \times 3!}$$

Exercice 31.
1. Quel est le nombre de mots (avec ou sans signification) de trois lettres que l'on peut former à partir des lettres du mot *BONHEUR*?
2. De combien de façons différentes peut-on asseoir dix personnes sur dix chaises? Généraliser à n
3. De combien de façons différentes peut-on colorier dix cases consécutives côte à côte, avec trois couleurs : rouge, vert et noir
4. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. Nous avons une grille de 8×8 carrés. On se déplace d'un carré à un autre à l'intérieur de la grille soit horizontalement vers la droite, soit verticalement vers le haut, soit en diagonale parallèlement à la diagonale de la grille.

   Quel est le nombre de chemins possibles pour aller du carré A au carré B ?



Généraliser au cas $n \times n$

IV.4 Les Combinaisons

Exercice 32. Une boîte contient cinq boules portant respectivement les lettres a, b, c, d et e.

On tire simultanément trois boules de la boîte. Quel est le nombre de cas possibles ?

Solution:

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$

Chaque cas possible peut être représenté par le sous-ensemble $\{a, b, c\}$ ou $\{a, c, d\}$, etc., c'est donc un sous-ensemble de E de cardinal 3.

(Note : l'ordre des boules tirées n'a pas d'importance)

- Chaque arrangement de degré 3 d'éléments de E détermine un cas possible (x, y, z).

- Et réciproquement, chaque cas possible (x, y, z) détermine $3! = 6$ arrangements de degré 3.

Donc par le principe fondamental de dénombrement, le nombre de cas possibles est:

$$\frac{A_5^3}{3!}$$

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel $(p \leq n)$.
Tout sous-ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ composé de p éléments de E (distincts deux à deux) s'appelle une **combinaison** (sans répétition) de degré p des éléments de E.

Note:

1. Chaque arrangement sans répétition de degré p détermine une combinaison de degré p.

2. Réciproquement, chaque combinaison de degré p détermine $p!$ arrangements de degré p, qui est le nombre de permutations de cette combinaison.

3. Si on note C_n^p le nombre de combinaisons de degré p d'un ensemble de cardinal n, alors selon le principe fondamental du dénombrement :

Proposition

Le nombre de combinaisons (sans répétition) de degré p des éléments d'un ensemble de cardinal n (où $p \leq n$) est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
En particulier, $C_n^p = 0$ si $p > n$.

Exercice 33. Chaque lycée doit fournir une équipe pour représenter l'établissement dans différentes compétitions ou olympiades de mathématiques. L'équipe est composée de 7 élèves dont 4 élèves de niveau Deuxième BAC Sciences Mathématiques et 3 élèves de niveau Première BAC Sciences Mathématiques.

Quel est le nombre d'équipes qui peuvent être formées dans un lycée qui dispose de 40 élèves en Deuxième BAC Sciences Mathématiques et 35 élèves en Première BAC Sciences Mathématiques?

Remarque : Chaque équipe de 7 élèves est constituée de deux sous-groupes :

- 4 élèves choisis parmi les 40 de Deuxième BAC,

- 3 élèves choisis parmi les 35 de Première BAC.

Solution

- Chaque équipe de 7 élèves est constituée de deux sous-groupes :

  - Un groupe d'élèves de Deuxième BAC Sciences Mathématiques : le nombre de tels groupes est C_{40}^4

  - Un groupe d'élèves de Première Sciences Mathématiques : le nombre de tels groupes est C_{35}^3

- Réciproquement, à partir d'un groupe de 4 élèves de Deuxième BAC Sciences Mathématiques, on peut former C_{35}^3 équipes représentant l'établissement, qui est le nombre de façons de choisir 3 élèves parmi ceux de Première Sciences Mathématiques.

- Puisqu'il y a C_{40}^4 façons de choisir un groupe de 4 élèves de Deuxième BAC Sciences Mathématiques, alors selon le principe fondamental du dénombrement, il y a $C_{40}^4 \times C_{35}^3$ façons de choisir l'équipe qui représente l'établissement.

Exercice 34. Soient p et q des entiers naturels.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_p^k \cdot C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

(avec la convention $C_m^k = 0$ si $k > m$)

Solution

1. *Première méthode :*

   Soit E un ensemble fini de cardinal $p+q$, et soit $\{A, B\}$ une partition de l'ensemble E telle que card $A = p$ et card $B = q$.

   - Si $n \leq p+q$, alors le nombre de sous-ensembles de E de cardinal n est C_{p+q}^n.
   - Si l'un de ces sous-ensembles contient k éléments dans A, alors il contient $n-k$ éléments restants dans B.
   - Puisqu'il existe C_p^k sous-ensembles de A à k éléments, et qu'il existe C_q^{n-k} sous-ensembles de B à $n-k$ éléments, alors selon le principe fondamental du dénombrement, il y a $C_p^k \cdot C_q^{n-k}$ sous-ensembles de E contenant exactement k éléments dans A et $n-k$ éléments dans B.
   - En faisant varier k de 0 à n, on obtient tous les sous-ensembles de E de cardinal n, d'où :

   $$\sum_{k=0}^{n} C_p^k \cdot C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

2. *Deuxième méthode:* Utilisez la formule du binôme de Newton $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ en déterminant le coefficient de degré n.

Exercice 35. Soit n un entier supérieur à 1.

On considère un carré divisé en $n \times n$ cases sous forme de carrés identiques.

De combien de façons peut-on colorier les cases du carré en utilisant la couleur noire, de telle sorte que chaque ligne horizontale et chaque colonne verticale ne puisse contenir plus d'une case coloriée en noir ?

	B		
		B	
			B
B			

Solution

Chaque case du carré est repérée par le couple (i, j) où i est le numéro de la ligne horizontale à laquelle appartient la case et j est le numéro de la colonne verticale à laquelle appartient la case.

Supposons qu'on choisit k colonnes verticales (avec $1 \leq k \leq n$), parmi les n disponibles, dans lesquelles on coloriera une case dans chaque colonne.

Notons ces colonnes par les symboles $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Considérons l'application :

$$f : \{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

où $f(c_i)$ est le numéro de la case qui sera coloriée parmi les cases de la colonne verticale c_i.

- L'application f est injective car chaque colonne verticale et chaque ligne horizontale ne peut contenir plus d'une case coloriée.

  Ainsi, le nombre de façons de choisir les cases à colorier parmi les colonnes verticales $c_1, c_2, \ldots, c_k$ est le nombre d'applications injectives f, c'est-à-dire A_n^k.

- Puisqu'il y a C_n^k façons de choisir k colonnes verticales parmi l'ensemble des n colonnes verticales, alors selon le principe fondamental du dénombrement, il y a :$C_n^k \times A_n^k$ façons de colorier les cases du carré selon ces contraintes.

- En particulier si $k = n$ alors on a $n!$ façon de colorier les cases.

Exercice 36. 1. Soit l'ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où p est un entier naturel inférieur ou égal à n.

Montrer que le nombre d'applications $f : E \to \{0,1\}$ qui satisfont

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = p$$

est C_n^p.

2. Quel est le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\{0,1\}$?

3. Montrer que le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1,2,\ldots,p\}$ vers $\{1,2,\ldots,n\}$ est : C_n^p

Exercice 37. On considère un carré divisé en n^2 cases sous forme de carrés identiques et on dispose de p billes identiques (indiscernables).

1. De combien de façons peut-on distribuer les billes dans les cases du carré de telle sorte que :
   - Chaque case contient au plus une bille
   - Chaque colonne verticale et chaque ligne horizontale de cases ne contient pas plus d'une bille ?
2. Combien y a-t-il de façons si les billes sont numérotées de 1 à p ?

Exercice 38. De combien de façons peut-on répartir m voyageurs dans n compartiments d'un train de voyageurs de telle sorte que :
- **Le compartiment numéro 1** contienne m_1 voyageurs
- **Le compartiment numéro 2** contienne m_2 voyageurs
- **Le compartiment numéro 3** contienne m_3 voyageurs
....
- **Le compartiment numéro** n contienne m_n voyageurs
avec

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

Exercice 39. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \leq n, \quad C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$$

Exercice 40.
Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$.

1. Dénombrer le nombre des listes $(l_1, l_2, \ldots, l_k\ )$ où $l_i \in \{1,2,\ldots,n\}$ avec $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$.
2. Montrer que :

$$\sum_{p=k-3}^{n-3} C_p^{k-3} C_{n-p-1}^2 = C_n^k$$

(On pourra considérer A_q comme l'ensemble des listes $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ tel que $l_{k-2} = q$)

IV.5 Propriétés des nombres C_n^k

Proposition

Pour tous entiers naturels p et $n \geq 2$ tels que $p \leq n$

On a : (*) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
(**) $C_n^p = C_n^{n-p}$

- On peut prouver directement (**) par le calcul :

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

  Intuitivement : choisir une famille de p éléments d'un ensemble E de n éléments, est la même chose de choisir $n-p$ éléments restants.

- Pour la preuve de l'égalité (*), on considère E un ensemble de cardinal n et a un élément de E.

- Le nombre de combinaisons de degré p qui **ne contiennent pas** l'élément a est : C_{n-1}^{p}
- Le nombre de combinaisons de degré p qui **contiennent** l'élément a est : C_{n-1}^{p-1}
- Toute combinaison de degré p soit contient a, soit ne contient pas a

On en déduit le nombre total de combinaisons de degré p :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Applications des propriétés des coefficients binomiaux

1. Calcul à l'aide du triangle de Pascal

La formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ permet de calculer les nombres C_n^p d'une façon récursive à partir de deux nombres C_{n-1}^p et C_{n-1}^{p-1}.

On peut représenter ce calcul récursive dans un triangle appelé Triangle de Pascal.

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Méthode :

- La première colonne ($p = 0$) et la diagonale ($n = p$) valent toujours 1
- Chaque coefficient est la somme du coefficient au-dessus et de celui au-dessus à gauche
- Exemple : $C_4^2 = C_3^2 + C_3^1 = 3 + 3 = 6$

Le triangle de Pascal permet donc de calculer les coefficients binomiaux C_n^p de manière récursive en utilisant la relation fondamentale :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

2. Lien avec la formule du binôme et démonstration par dénombrement

On sait que :

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1 + x\\ (1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2\\ (1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3\end{aligned}$$

En comparant avec le triangle de Pascal, on trouve que :

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= 1 + x = C_1^0 + C_1^1 x\\ (1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 = C_2^0 + C_2^1 x + C_2^2 x^2\\ (1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = C_3^0 + C_3^1 x + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3\end{aligned}$$

On observe que les coefficients correspondent exactement aux lignes du triangle de Pascal.

Ce qu'on peut généraliser à :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

Démonstration de la formule du binôme par dénombrement

Soit $(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdots(1+x)$ (n facteurs).

Le coefficient de x^p dans le développement représente le nombre de façons de choisir p fois le terme x parmi les n facteurs.

Plus précisément :

- Chaque facteur $(1+x)$ contribue soit par 1, soit par x
- Pour obtenir x^p, il faut choisir exactement p facteurs qui contribuent par x
(Les $n-p$ facteurs restants contribuent par 1)
- Le nombre de telles sélections est exactement $a_p = C_n^p$

Ainsi, on a la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p$$

Remarque 3. *1. Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$.*
En faisant le changement de variable $x = \frac{a}{b}$ dans la formule du binôme dernier, on trouve:

$$(1+\frac{a}{b})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\frac{a}{b})^p$$

$$(\frac{b+a}{b})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{a^p}{b^p}$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

2. Cette démonstration combinatoire montre pourquoi les coefficients binomiaux apparaissent naturellement dans le développement de $(a+b)^n$ et justifie leur nom.

3. La formule dernière peut se réécrire en :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} a^p b^{n-p} = \sum_{i_1+i_2=n} \frac{n!}{i_1! i_2!} a^{i_1} b^{i_2}$$

Cet écriture permet de généraliser la formule de binôme.

4. Soient k nombres réels ou complexes $a_1, a_2, \dots, a_k$, et soit n un entier naturel.

La formule du multinôme de Newton s'écrit :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n \\ n_i \geq 0}} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

où la somme est étendue à tous les k-uplets d'entiers naturels $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ tels que :

$$n_1+n_2+\cdots+n_k = n$$

Le coefficient multinomial est défini par :

$$C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Ainsi, la formule peut également s'écrire :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n \\ n_i \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

Exercice 41. Soit E un ensemble de cardinal n. Calculez le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Solution : *Deuxième méthode de résolution*
On observe que $\mathcal{P}(E)$ est aussi l'ensemble des combinaisons de E de degré 0 à n.

- Le nombre de combinaisons de degré 0 est C_n^0
- Le nombre de combinaisons de degré 1 est C_n^1
- Le nombre de combinaisons de degré 2 est C_n^2

  $\vdots$
- Le nombre de combinaisons de degré n est C_n^n

Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, on a C_n^k combinaisons de degré k.
Donc :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

En utilisant la formule du binôme avec $a = 1$ et $b = 1$, on obtient :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = (1+1)^n = 2^n$$

Exercice 42. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminez le cardinal de l'ensemble $S = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid A \cup B = E\}$.

Solution: *Deuxième méthode de résolution*

- Soit A une partie de E de cardinal p. Le nombre de parties B de E telles que $A \cup B = E$.

  On a que B est solution de l'équation $A \cup B = E \iff B = \complement_E A \cup X$ avec $X \in \mathcal{P}(A)$.

  Ainsi, le nombre de parties B est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire 2^p.

- Puisque le nombre de parties de E qui ont p éléments est C_n^p, alors le nombre de couples (A, B) dans S tels que A ait p éléments est $C_n^p \cdot 2^p$.

- Si on fait varier p dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, on obtient le cardinal de l'ensemble S.

  Ainsi :

$$\text{card } S = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \cdot 2^p = (1 + 2)^n = 3^n$$

Exercice 43. Soient m et n deux entiers naturels.
On a $C_m^k = 0$ si $k > m$.
Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_m^k C_n^k = C_{m+n}^n$$

Solution: *Deuxième méthode de résolution*
Considérons l'identité :

$$(1 + x)^m (1 + x)^n = (1 + x)^{m+n}$$

où x est un nombre réel.
Le coefficient du terme x^n dans le membre gauche de l'égalité est :

$$\sum_{k=0}^{n} C_m^k C_n^k$$

Et le coefficient du terme x^n dans le membre droit de l'égalité est :

$$C_{m+n}^n$$

En identifiant les coefficients des termes en x^n dans l'égalité, on obtient le résultat :

$$\sum_{k=0}^{n} C_m^k C_n^k = C_{m+n}^n$$

Exercice 44. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

Indication
Vous pouvez utiliser l'identité :

$$(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$$

et considérer le coefficient du terme x^n de chaque côté de l'égalité.

Exercice 45.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)^2 = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

   On pourra considérer l'identité $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$ où x est un réel,

   Et considérer les coefficients de x^n et x^{n-1} de chaque coté de l'égalité.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad p \leq n, \quad \sum_{k=0}^{p} C_n^p C_{n-k}^{p-k} = 2^n C_n^p$$

V Compléments :

V.1 Principe de Dirichlet

Le principe de Dirichlet s'appelle aussi le principe des tiroirs est:

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels positifs. Considérons n billes indistinctes distribuées dans p casiers distincts.
Si $n \geq p+1$, alors il existe au moins un casier qui contient au moins deux billes.

Exercice 46. On considère un ensemble E composé de cinquante-cinq nombres entiers naturels ne dépassant pas 100.

Montrez qu'il existe dans l'ensemble E deux nombres dont la différence est 9.

Solution

On considère les ensembles :

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_{55}\}$$

et

$$E' = \{x_1+9, x_2+9, \dots, x_{55}+9\}$$

où $x_i \in E$ pour $i \in \{1, 2, \dots, 55\}$.

L'ensemble $E \cup E'$ contient 110 nombres entiers naturels.

Puisque les nombres x_i ne dépassent pas 100, tous les éléments de $E \cup E'$ sont des nombres entiers naturels ne dépassant pas 109.

Selon le principe des tiroirs (principe de Dirichlet), il existe deux indices i et j tels que $x_i + 9 = x_j$, c'est-à-dire que $x'_i = x_j$.

Ainsi, il existe deux nombres x_i et x_j dans E dont la différence est 9.

Exercice 47. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$. Montrer qu'il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ tel que :

$$m \leq k \quad \text{et} \quad |mr - n| \leq \frac{1}{k}$$

Solution

Posons $h = \lfloor k \rfloor + 1$ et divisons l'intervalle $[0, 1]$ en h sous-intervalles de même longueur :

$$\left[0, \frac{1}{h}\right], \left[\frac{1}{h}, \frac{2}{h}\right], \dots, \left[\frac{h-1}{h}, 1\right]$$

Considérons les $h+1$ nombres :

$$\{0\}, \{r\}, \{2r\}, \dots, \{hr\} \in [0, 1]$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire de x.

D'après le principe des tiroirs (principe de Dirichlet), puisque nous avons $h+1$ nombres et h intervalles, il existe au moins deux nombres qui se trouvent dans le même sous-intervalle. Soient p et j avec $0 \leq p < j \leq h$ tels que $\{pr\}$ et $\{jr\}$ appartiennent au même intervalle.

Alors :

$$|\{jr\} - \{pr\}| \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{k}$$

Posons $m = j - p$ et $n = \lfloor jr \rfloor - \lfloor pr \rfloor$. On a :

$$|mr - n| = |(j-p)r - (\lfloor jr \rfloor - \lfloor pr \rfloor)| = |\{jr\} - \{pr\}| \leq \frac{1}{k}$$

De plus, $m = j - p \leq h \leq k$.

Ainsi, (m, n) vérifie les conditions requises.

Exercice 48.

1. Montrer que tout polyèdre possède au moins deux faces ayant le même nombre d'arêtes.
2. Une grille est composée de 3×7 carrés (voir figure).

R	R	R	R	R	R	V
R	V	V	V	V	V	R
R	V	V	V	V	V	V

R	V	R	R	V	V	R
R	R	R	R	R	R	V
R	V	V	R	V	V	R

Chaque carré de cette grille est colorié en rouge ou en vert. Montrer qu'il existe toujours un rectangle dont les quatre coins sont de la même couleur.

3. Soient 13 nombres réels distincts deux à deux.

   Montrer qu'il existe parmi ces nombres deux nombres réels a et b vérifiant :

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}$$

V.2 Combinaisons avec répétition

> ***Exercice 49.*** De combien de façons peut-on distribuer p boules dans n boîtes, sachant que les boules sont indiscernables et que chaque boîte peut contenir plus d'une boule ?

Solution

Il s'agit de compter le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n, car les boules sont identiques et l'ordre n'a pas d'importance.

Le nombre de façons de distribuer p boules indiscernables dans n boîtes est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{n-1}$$

Ce résultat provient du fait que chaque distribution correspond à une manière de placer p boules identiques dans n boîtes, ce qui équivaut à choisir p éléments parmi n avec répétition autorisée.

Plus en détail:

On note les boîtes par les symboles $B_1, B_2, \ldots, B_n$ respectivement.

Supposons que la boîte B_1 contient p_1 boules, la boîte B_2 contient p_2 boules, ..., la boîte B_n contient p_n boules.

On a donc $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Cette distribution peut être représentée par une séquence de cases alignées côte à côte telle que :

- p_1 cases portant le chiffre 0 suivies d'une case portant le chiffre 1
- p_2 cases portant le chiffre 0 suivies d'une case portant le chiffre 1

  $\vdots$
- p_{n-1} cases portant le chiffre 0 suivies d'une case portant le chiffre 1
- p_n cases portant le chiffre 0

$$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\cdots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\cdots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\cdots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\cdots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$$

On peut représenter cette distribution symboliquement comme suit :

$$(\underbrace{0,0,0,\ldots,0,1}_{p_1 \text{ fois}},\ \underbrace{0,1,0,0,\ldots,0,1}_{p_2 \text{ fois}},\ \cdots\ ,\underbrace{0,1,0,\ldots,0,1}_{p_{n-1} \text{ fois}},\ \underbrace{0,1,0,0,\ldots,0)}_{p_n \text{ fois}}$$

Chaque groupe représente une boîte B_i contenant p_i boules représentées par des 0, suivies (sauf pour la dernière) d'un séparateur 1.

Dans le cas général, ce codage contient p chiffres 0 et $(n-1)$ chiffres 1, ce qui donne un total de $n+p-1$ cases.

Puisque $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$, le nombre de façons possibles est donné par :

$$C_{n+p-1}^{p} = C_{n+p-1}^{n-1} \quad (\text{Remarque : } C_n^k = C_n^{n-k})$$

Exercice 50.

1. Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et p un entier naturel strictement positif.

   Montrer que le nombre d'applications $f : E \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = p$$

   est : C_{p+n-1}^{p}

2. Montrer que le nombre de solutions de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

   où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des entiers naturels, est : C_{p+n-1}^{p}

3. Montrer que le nombre d'applications croissantes de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers $\{1, 2, \ldots, p\}$ est : C_{p+n-1}^{p}

***Exercice 51*.** Parmi n boîtes disposées côte à côte, on choisit p boîtes ($p \leq n$) de telle manière qu'entre deux boîtes choisies il y ait au moins q boîtes non choisies ($q \geq 0$).

Montrer que le nombre de façons possibles est donné par : $C^p_{n-(p-1)q}$.

Solution. *Nous numérotant les boîtes de* 1 *à* n*. Soient* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *les indices des boîtes choisies, avec :*

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n.$$

Pour tout $2 \leq k \leq p$*, posons :*

$$j_1 = i_1 \quad , \quad j_k = i_k - i_{k-1} - 1 \text{ et } j_{p+1} = n - i_p.$$

Ainsi, on a la condition :

$$j_1 + j_2 + j_3 + \cdots + j_p + j_{p+1} = n - p.$$

et

$$j_k \geq q \quad \text{pour tout } 2 \leq k \leq p.$$

On pose alors :

$$x_k = j_k - q \quad (2 \leq k \leq p), \quad x_1 = i_1 = j_1, \quad x_{p+1} = j_{p+1} = n - i_p.$$

On obtient :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} = n - (p-1)q - p.$$

Le problème est donc réduit à compter le nombre de solutions entières non négatives $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ *de cette équation. Le nombre de solutions est donné par la formule des combinaisons avec répétitions (voir exercices 44) :* $C^p_{n-(p-1)q}$.

En conclusion, le nombre de façons de choisir p *boîtes parmi* n*, avec au moins* q *boîtes non choisies entre deux boîtes retenues, est :* $C^p_{n-(p-1)q}$.