Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Donner le domaine de définition de g ainsi que ses variations.
3. La fonction g est-elle dérivable en 0? en $\dfrac{1}{3}$? en $-\dfrac{2}{3}$? en $\dfrac{3}{13}$? en -1? Si oui, calculer les dérivées correspondantes.
4. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g.
5. Tracer dans un même repère C_f et C_g (on admettra que f admet un et un seul point d'inflexion qui vaut -0.35 ± 10^{-2} et on supposera l'équation de la tangente en ce point est $y = 1,5x$, qu'avant ce point, la fonction est convexe, et qu'ensuite, elle est concave).

Exercice 2. Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

1. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[3, +\infty]$ sur un intervalle G à expliciter. On note g sa réciproque.
2. Quel est le domaine de définition de g? En quels points g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0), g'(3)$ et $g'(8)$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-\infty, 3]$ sur un intervalle H à expliciter. On note h sa réciproque.
4. Quel est le domaine de définition de h? En quels points h est-elle dérivable ? Calculer $h'(0), h'(3)$ et $h'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormé C_f, C_g et C_h.

Exercice 3. Soit $f(x) = 6x^3 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note g sa réciproque. Quel est le sens de variations de g?
3. La fonction g est-elle dérivable sur J tout entier ?
4. Représenter dans un même repère orthonormé C_f et C_g.

Exercice 4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Montrer que f possède une réciproque f^{-1} et donner $D_{f^{-1}}$.
2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.
3. Quelle est l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$? Quelle est l'équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{10}$?
4. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f (limites incluses) et tracer dans un repère orthonormé C_f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
4. En quel points sa réciproque est-elle dérivable ?
5. Calculer $(f^{-1})'(0), (f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.
6. Déterminer $(f^{-1})'(x)$ lorsque f^{-1} est dérivable en x.
7. Soit $x \in f(\mathbb{R})$. Déterminer son antécédent par f. En déduire f^{-1}.
8. Retrouver directement les résultats de la question 4.
9. Tracer dans le même repère que la question 4 $C_{f^{-1}}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie $\forall x \in [0,+\infty], f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. En quel point f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.