

# 1 Rappel et compléments:

Pour ce chapitre, on fixe  $I$  un intervalle non vide, et non réduit à un point.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction réelle. On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$  si :

- $F$  est dérivable sur  $I$ ,
- $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$ .

**Théorème :** Si  $f(x) = 0$ , alors toute primitive  $F$  de  $f$  est constante, c'est-à-dire  $F(x) = C$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  alors  $F - G = C$  avec  $C \in \mathbb{R}$

## 1.1 Primitives usuelles :

$$f(x) = x^n \quad (n \neq -1) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \tan(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cot(x)$$

$$f(x) = u'(x) \cdot u(x)^n \quad (n \neq -1) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = u(x)v(x)$$

$$f(x) = u' \cdot v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = v(u(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} \quad \Rightarrow \quad F(x) = u^{-1}(x)$$

**Exemples :**

$$\bullet \quad f(x) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \arcsin(x)$$

$$\bullet \quad f(x) = v'(ax+b) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a}v(ax+b)$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \arctan(x)$$

\* \* \*

## Calcul de primitives par reconnaissance de dérivées

### 1. Forme puissance

Si  $F(x) = \frac{(2x+3)^{n+1}}{2(n+1)} + C$ , alors par dérivation :

$$F'(x) = \frac{(n+1)(2x+3)^n \cdot 2}{2(n+1)} = (2x+3)^n \quad (\text{Primitive de } (2x+3)^n)$$

### 2. Exponentielle composée

Si  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{1}{3}e^{3x-2} \cdot 3 = e^{3x-2} \quad (\text{Primitive de } e^{3x-2})$$

### 3. Logarithme

Si  $F(x) = \ln|5x-1| + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{5}{5x-1} \quad \Rightarrow \quad \text{Primitive de } \frac{5}{5x-1}$$

### 4. Trigonométrie inverse

Si  $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (\text{Primitive de } (1-4x^2)^{-1/2})$$

### 5. Fraction rationnelle

Si  $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4+1| + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{x^4+1} = \frac{x^3}{x^4+1} \quad (\text{Primitive de } \frac{x^3}{x^4+1})$$

## 6. Hyperbolique

Si  $F(x) = \cosh(3x)/3 + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{\sinh(3x) \cdot 3}{3} = \sinh(3x) \quad (\text{Primitive de } \sinh(3x))$$

## 7. Racine carrée

Si  $F(x) = \frac{(x^2+9)^{3/2}}{3} + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{3}{2}(x^2+9)^{1/2} \cdot 2x/3 = x\sqrt{x^2+9} \quad (\text{Primitive de } x\sqrt{x^2+9})$$

## 8. Tangente

Si  $F(x) = \ln|\sec x| + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x \quad (\text{Primitive de } \tan x)$$

## 9. Forme exponentielle-polynôme

Si  $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ , alors par dérivation produit :

$$F'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x \quad (\text{Primitive de } x^2e^x)$$

## 10. Arctangente composée

Si  $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$ , alors :

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{1 + (x/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{x^2 + 2} \quad (\text{Primitive de } \frac{1}{x^2 + 2})$$

**Exercice 1.** Trouver les primitives des fonctions suivantes : **Groupe I:**

- |  |  |
|--|--|
| 1. $f : x \mapsto x^2 - x + 3$                                     | 7. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$   |
| 2. $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ | 8. $f : x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 3. $f : x \mapsto (x+1)^3$   | 9. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$   |
| 4. $f : x \mapsto (3x+1)^2$  | 10. $f : x \mapsto \frac{1}{1+(2x)^2}$   |
| 5. $f : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$                                   |  |
| 6. $f : x \mapsto 1 + \tan^2(3x)$                                  |  |

## Groupe II:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f : x \mapsto \frac{4}{x^2}$            | 6. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$          |
| 2. $f : x \mapsto \frac{1}{2x^5}$           | 7. $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$    |
| 3. $f : x \mapsto \frac{1}{(3x-1)^2}$       | 8. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$       |
| 4. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$ | 9. $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt[3]{2x^2-4x-6}}$ |
| 5. $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2-5)^2}$      |  |

## Groupe III:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f : x \mapsto x(x^2+3)^4$  | 6. $f : x \mapsto (1 + \tan^2 x) \tan^3 x$                  |
| 2. $f : x \mapsto \sin^3 x \cos x$   | 7. $f : x \mapsto \cos x \sin x (\sin^2 x + 1)^3$           |
| 3. $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin^2 x}$   | 8. $f : x \mapsto nx^{n-1} \sin(x^n)$                       |
| 4. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$  | 9. $f : x \mapsto nx^{n-1} \cos(x^n)$                       |
| 5. $f : x \mapsto \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$     | 10. $f : x \mapsto n \cos(x) \sin^{n-1}(x) \cos(\sin^n(x))$ |
| 11. $f : x \mapsto (3x-1) \left(\frac{3}{2}x^2 - x + 4\right)^5$                                 |   |
| 12. $f : x \mapsto (\sin 3x - \cos 2x) \left(\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 2x\right)^3$ |   |

## Groupe IV:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+1}$ | 5. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}$             |
| 2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2}$     | 6. $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}$    |
| 3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$   | 7. $f : x \mapsto \frac{\cos(\arctan(x))}{x^2+1}$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$  |   |



\* \* \*