Exercice 1. Justifier que chacune des fonctions suivantes possède, sur l'intervalle considéré, une primitive puis expliciter l'unique primitive F satisfaisant à la condition donnée :

1. $a(x) = (x^2+1)(3-x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
2. $b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = \ln 2$.
3. $c(x) = 3(x^2-2x)\exp(x^3-3x^2)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 4$.
4. $d(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$ sur $\mathbb{R}$ avec $d(-1) = 1$.
5. $e(x) = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(2) = 1$.
6. $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2}\exp\left(\frac{2}{3x-1}\right)$ sur $[1, +\infty]$ avec $F(1) = e$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)^2\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{x}(x-2\sqrt{x})\,dx, \quad I_3 = \int_0^1 x^2\,dx,$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx, \quad I_5 = \int_0^1 (2x-1)\exp(x^2-x+1)\,dx, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\,dt,$$

$$I_7 = \int_1^2 \frac{(\ln t)^5}{t}\,dt, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{2+3x\sqrt{x}}\,dx, \quad I_9 = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$I = \int_{-1}^{1} xe^{x^2}\,dx, \quad J = \int_0^1 (x^2+x)e^{x^2}\,dx, \quad K_n = \int_1^2 t^n \ln t\,dt, \quad L = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\ln t}{t}\,dt,$$

$$M = \int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx, \quad N = \int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3}\,dt, \quad O = \int_1^{\sqrt[3]{2}} (x^3+1)\ln(x)\,dx.$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$, Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

1. Par intégration par parties,
2. Par le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$ $(u = 3x+1)$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ $(u = x^3+1)$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(u = e^x)$
4. $\int_1^{e^2} \frac{\ln t}{t}\,dt$ $(u = \ln t)$
5. $\int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln t)^2\,dt$ $(u = \ln t)$

Exercice 6. On définit la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire que: $\forall \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$.
4. Montrer l'encadrement : $\forall \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
5. Montrer que (I_n) est convergente et donner $\lim_{n\to+\infty} I_n$
6. Montrer que :
$$\forall x \in [0,1]; \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2;\ n \leq m \implies x^m \leq x^n.$$
En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

Exercice 7. On pose
$$I_n = \int_1^n \frac{x}{1+x^3}\,dx$$
.

1. Montrer que :
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$$
.
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\};\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq I_n \leq 1 - \frac{1}{n}$$
Puis que (I_n) est bornée.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\};\ I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^3}, dx$$
En déduire que (I_n) est croissante.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est convergente
Et que $\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq 1$.

Exercice 8. On définit la fonction $f : [2, +\infty] \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Démontrer que: $\forall x \geq 2$; $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ par l'intégrale :
$$I_n = \int_2^n f(x)\,dx$$
.
   (a) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.
   (b) On définit la fonction $F : [2, +\infty] \to \mathbb{R},\ x \to \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9.
$$\forall n \geq 1,\ \text{on note } I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \text{ et } J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,dt.$$

1. Calculer I_1 et J_1 et donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geq 0}$ et $(J_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,
$$J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}.$$
4. En déduire que :
   (a) (J_n) converge.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln 2$