Sommaire

Objectifs selon le programme

1. Reconnaître une loi de composition interne et ses propriétés.
2. Reconnaître les structures algébriques figurant au programme (groupe, anneau, corps et espace vectoriel).
3. Maîtriser les techniques des opérations dans les ensembles usuels et dans les diverses structures algébriques figurant au programme.
4. Utiliser les structures algébriques des ensembles usuels dans l'étude des structures d'autres ensembles.
5. Transférer la structure algébrique d'un ensemble muni d'une loi de composition interne vers un autre ensemble muni d'une loi de composition interne en utilisant les concepts d'homomorphisme et d'isomorphisme.
6. Utiliser la propriété caractéristique d'un sous-espace vectoriel et celle d'un sous-groupe.
7. Reconnaître une famille libre, une famille génératrice et une base dans un espace vectoriel réel donné.
8. Déterminer les composantes d'un vecteur dans une base donnée d'un espace vectoriel.

Ce document présente les bases des structures algébriques, en mettant l'accent sur les lois de composition interne, les groupes, les anneaux et les corps.

I Lois de composition interne

I.1 Définition

Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** (LCI) sur E est une application :

$$* : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x * y$$

I.2 Propriétés fondamentales

Une LCI $*$ sur E peut vérifier les propriétés suivantes :

- **Associativité** : $\forall a, b, c \in E, (a * b) * c = a * (b * c)$
- **Commutativité** : $\forall a, b \in E, a * b = b * a$
- **Élément neutre** : $\exists e \in E, \forall a \in E, a * e = e * a = a$
- **Élément symétrique** : $\forall a \in E, \exists b \in E, a * b = b * a = e$ (nécessite un élément neutre)
- **Régularité** :
  - **Régulier à gauche** : $\forall a, b, c \in E, (a * b = a * c) \implies b = c$
  - **Régulier à droite** : $\forall a, b, c \in E, (b * a = c * a) \implies b = c$

I.3 Exemples fondamentaux

Lois classiques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

- **Addition** : Associative, commutative, neutre 0, symétrique $-x$.
- **Multiplication** : Associative, commutative, neutre 1, symétrique $1/x$ pour $x \neq 0$.

I.4 Exemples de lois et leurs propriétés

[Loi hyperbolique sur $]-1, 1[$] La loi est définie par :

$$x\,T\,y = \frac{x + y}{1 + xy}, \quad \text{pour } x, y \in]-1, 1[$$

Démonstration du caractère interne : Soit $x, y \in]-1, 1[$, donc $|x| < 1$, $|y| < 1$. On doit vérifier que $|xTy| < 1$.

$$xTy = \frac{x + y}{1 + xy}$$

Le dénominateur $1 + xy > 0$, car $|x| < 1$, $|y| < 1$, et $xy > -1$. Pour le numérateur, considérons la borne supérieure :

$$|x + y| \leq |x| + |y| < 1 + 1 = 2$$

Pour le dénominateur, $1 + xy \geq 1 - |x||y| > 1 - 1 = 0$, et typiquement $1 + xy \geq 0.5$ (par exemple, si $|x|, |y| \leq 0.5$). Ainsi :

$$|xTy| = \frac{|x + y|}{|1 + xy|} < \frac{2}{1} = 2$$

Plus précisément, pour $|x|, |y| < 1$, on a $|x + y| < 1 + |xy| \leq 1 + |x||y|$, et comme $1 + xy > 1 - |x||y|$, on obtient $|xTy| < 1$. Donc, $xTy \in]-1, 1[$.

Démonstration de l'associativité : Soit $x, y, z \in]-1, 1[$. On calcule :

$$(xTy)Tz = \left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) Tz = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x + y + z(1 + xy)}{1 + xy + z(x + y)}$$

Puis :

$$xT(yTz) = xT\left(\frac{y + z}{1 + yz}\right) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1 + yz) + (y + z)}{1 + yz + x(y + z)}$$

Les deux expressions ont le même numérateur $x + y + z + xyz$ et le même dénominateur $1 + xy + yz + xz$, donc $(xTy)Tz = xT(yTz)$.

Propriétés :

- **Interne** : Démontré ci-dessus.
- **Associative** : Démontré ci-dessus.
- **Commutative** : $xTy = yTx$.

- **Neutre** : 0, car $xT0 = \frac{x+0}{1+x\cdot 0} = x$.
- **Symétrique** : $-x$, car $xT(-x) = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$.
- **Régulière** : Oui, car tout élément est symétrisable.

Cette loi modélise la composition des vitesses en relativité restreinte.

[Loi relativiste des vitesses] La loi est définie par :

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad \text{sur }]-c, c[$$

Démonstration du caractère interne (avec $c = 1$ pour simplifier) : Soit $v_1, v_2 \in]-1, 1[$, donc $|v_1| < 1$, $|v_2| < 1$. On doit vérifier que $|v_1 \oplus v_2| < 1$.

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

Cette loi est identique à la loi hyperbolique (avec $c = 1$). Comme démontré précédemment, $|v_1 \oplus v_2| < 1$, donc $v_1 \oplus v_2 \in]-1, 1[$.

Démonstration de l'associativité : L'associativité découle directement de l'isomorphisme avec la loi hyperbolique. Pour $v_1, v_2, v_3 \in]-1, 1[$, on a :

$$(v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3)$$

par le même calcul que pour la loi hyperbolique.

Propriétés :

- **Interne** : Démontré ci-dessus.
- **Associative** : Démontré ci-dessus.
- **Commutative** : $v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$.
- **Neutre** : 0, car $v \oplus 0 = v$.
- **Symétrique** : $-v$, car $v \oplus (-v) = 0$.
- **Régulière** : Oui.

Cette loi est isomorphe à la loi hyperbolique.

[Lois sur $\mathcal{P}(E)$] Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. On définit :

- **Union** : $A \cup B$
  - Associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - Commutative : $A \cup B = B \cup A$
  - Neutre : $\emptyset$, car $A \cup \emptyset = A$
  - Non symétrisable (sauf si $E = \emptyset$)
- **Intersection** : $A \cap B$
  - Associative : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - Commutative : $A \cap B = B \cap A$
  - Neutre : E, car $A \cap E = A$
  - Non symétrisable (sauf si $|E| = 1$)
- **Différence symétrique** : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  - Associative : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
  - Commutative : $A \Delta B = B \Delta A$
  - Neutre : $\emptyset$, car $A \Delta \emptyset = A$
  - Symétrique : A, car $A \Delta A = \emptyset$

I.5 Partie stable

Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une LCI. Une partie $A \subseteq E$ est dite **stable** pour $*$ si :

$$\forall x, y \in A, \quad x * y \in A$$

Exemples de parties stables :

- $\mathbb{N}$ est stable dans $(\mathbb{Z}, +)$.
- $[-1, 1]$ est stable pour la loi hyperbolique T.
- Les sous-ensembles finis sont stables dans $(\mathcal{P}(E), \Delta)$.
- $[-0.5, 0.5]$ est stable pour la loi relativiste.

II Groupes et sous-groupes

II.1 Définition d'un groupe

Un **groupe** est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ vérifiant :

1. **Associativité** : $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
2. **Élément neutre** : $\exists e \in G, \forall a \in G, a * e = e * a = a$
3. **Élément symétrique** : $\forall a \in G, \exists b \in G, a * b = b * a = e$

Si de plus $\forall a, b \in G, a * b = b * a$, le groupe est dit **abélien**.

II.2 Exemples fondamentaux

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien :
  - Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - Neutre : 0
  - Symétrique : $-a$
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe abélien :
  - Associativité : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
  - Neutre : 1
  - Symétrique : $1/a$
- $(]-1, 1[, T)$, où $xTy = \frac{x+y}{1+xy}$, est un groupe abélien.
- $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien :
  - Associativité de Δ
  - Neutre : $\emptyset$
  - Symétrique : A, car $A \Delta A = \emptyset$

II.3 Propriété caractéristique des sous-groupes

Un sous-ensemble non vide $H \subseteq G$ d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe si et seulement si :

$$\forall x, y \in H, \quad x * y^{-1} \in H$$

II.4 Sous-groupes

Sous-groupes remarquables et vérification par la propriété caractéristique :

- $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$:
  - Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, l'inverse de y est $-y \in \mathbb{Z}$, et $x + (-y) = x - y \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe.
- $(\mathbb{Q}^*, \times) \subset (\mathbb{R}^*, \times)$:
  - Pour $x, y \in \mathbb{Q}^*$, l'inverse de y est $1/y \in \mathbb{Q}^*$, et $x \times (1/y) = x/y \in \mathbb{Q}^*$. Ainsi, $\mathbb{Q}^*$ est un sous-groupe.
- $(\{0, \pi\}, +) \subset (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$:
  - Dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'inverse de 0 est 0, et de π est π, car $\pi + \pi = 2\pi \equiv 0$. Pour $x, y \in \{0, \pi\}$, on a $x + (-y) \in \{0+0, 0+\pi, \pi+0, \pi+\pi\} = \{0, \pi\}$. Ainsi, $\{0, \pi\}$ est un sous-groupe.

II.5 Morphismes de groupes

Une application $f : G \to H$ est un **morphisme de groupes** si :

$$f(x * y) = f(x) \star f(y)$$

- $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$
- $\det : (GL_n(\mathbb{R}), \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$

II.6 Exercice résolu

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a * b = ab - a - b + 2$$

1. Déterminer l'élément neutre de la loi $*$.
2. Montrer que 1 est un élément symétrisable par rapport à la loi $*$.
3. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que E est stable par rapport à la loi $*$.
4. Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Solution de l'exercice

1. **Détermination de l'élément neutre** :
   Soit e l'élément neutre pour la loi $*$. Par définition, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
   $$a * e = a \quad \text{et} \quad e * a = a$$
   Calculons $a * e = a$:
   $$a * e = ae - a - e + 2 = a$$
   Simplifions :
   $$ae - a - e + 2 = a \implies ae - e = 2a - 2 \implies e(a-1) = 2(a-1)$$
   Cette égalité doit être vraie pour tout $a \neq 1$, donc $e = 2$.
   Vérification :
   $$a * 2 = a \cdot 2 - a - 2 + 2 = 2a - a = a$$
   De même, $2 * a = a$.
   $$\boxed{\text{L'élément neutre est 2.}}$$
2. **Symétrique de 1** :
   On cherche x tel que $1 * x = 2$ (élément neutre) :
   $$1 * x = 1 \cdot x - 1 - x + 2 = x - x + 1 = 1$$
   Ce qui donne $1 = 2$, ce qui est impossible.
   $$\boxed{\text{1 n'est pas symétrisable pour la loi } * .}$$
3. **Ensemble E** :
   On pose :
   $$E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
4. **Stabilité de E** :
   Montrons que $\forall a, b \in E$, $a * b \in E$.
   Supposons par l'absurde que $a * b = 1$:
   $$a * b = ab - a - b + 2 = 1 \implies ab - a - b + 1 = 0 \implies (a-1)(b-1) = 0$$
   Ce qui implique $a = 1$ ou $b = 1$, ce qui est impossible car $a, b \in E$.
   $$\boxed{E \text{ est stable par } * .}$$
5. **$(E, *)$ est un groupe** :
   - **Associativité** : Vérifions pour $a, b, c \in E$:
     $$(a*b)*c = (ab-a-b+2)*c = (ab-a-b+2)c-(ab-a-b+2)-c+2 = abc-ac-bc+2c-a$$
     $$a*(b*c) = a*(bc-b-c+2) = a(bc-b-c+2)-a-(bc-b-c+2)+2 = abc-ab-ac+2a-a$$
     Les deux expressions sont égales, donc la loi est associative.
   - **Élément neutre** : $2 \in E$ (car $2 \neq 1$) et $a * 2 = a$ pour tout $a \in E$.
   - **Symétrique** : Pour tout $a \in E$, son symétrique a' vérifie :
     $$a*a' = 2 \implies aa'-a-a'+2 = 2 \implies aa'-a' = a \implies a'(a-1) = a \implies a' = \frac{a}{a-}$$
     Puisque $a \neq 1$, $a' \in E$.
   $$\boxed{(E, *) \text{ forme un groupe.}}$$

II.7 Exercices supplémentaires

Exercice 2 On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ telle que pour tout $(a,b),(c,d) \in G$, on a :

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$$

1. Montrer que $(G,*)$ est un groupe.
2. On considère l'ensemble $H = \mathbb{R} \times \{0\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $(G,*)$.

Exercice 3 Soit A l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \neq (0,0), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

1. On considère l'application :

$$f : A \to \mathbb{C}^*, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

   a) Montrer que f est une bijection.

   b) Montrer que pour tout $M, N \in A$, $f(MN) = f(M)f(N)$. En déduire que $(A, \times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4 Soit $(G, \times)$ un groupe. À tout élément $x \in G$, on associe :

$$H_x = \{z \in G \mid xz = zx\}$$

1. Soit $x \in G$.

   a) Montrer que si $y, z \in H_x$, alors $yz \in H_x$.

   b) Montrer que si $z \in H_x$, alors $z^{-1} \in H_x$.

   c) En déduire que H_x est un sous-groupe de G.

2. On suppose que pour tout $x, y, z \in G$, $(x \in H_z$ et $z \in H_y) \implies x \in H_y$. Montrer que la loi $\times$ est commutative.

Exercice 5 Soit n un entier naturel impair différent de 1. Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = \begin{cases} \sqrt[n]{y^n + x^n} & \text{si } y^n + x^n \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-(x^n + y^n)} & \text{si } x^n + y^n \leq 0 \end{cases}$$

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) * f(y)$.

2. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

III Anneaux et sous-anneaux

III.1 Définition

Un **anneau** est un triplet $(A, +, \times)$ où :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien.
2. $(A, \times)$ est un monoïde (associatif avec élément neutre).
3. $\times$ est distributive sur $+$.

III.2 Propriété caractéristique des sous-anneaux

Un sous-ensemble non vide $B \subseteq A$ d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-anneau si :

- $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
- $1_A \in B$.
- $\forall x, y \in B, x \times y \in B$.

III.3 Exemples

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$
- $(\mathbb{R}, +, \times)$, l'anneau des réels.
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$, l'anneau des matrices carrées.

III.4 Sous-anneaux

Exemples de sous-anneaux :

- $(\mathbb{Z}, +, \times) \subset (\mathbb{Q}, +, \times)$:
  - $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$, car pour $x, y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$.
  - $1 \in \mathbb{Z}$.
  - Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \times y \in \mathbb{Z}$.
  - Ainsi, $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

III.5 Morphismes d'anneaux

Une application $f : A \to B$ est un **morphisme d'anneaux** si :

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$
3. $f(1_A) = 1_B$

Énoncés des exercices sur les anneaux

Exercice 1 : Anneau produit

Soit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ définies par :

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$$

$$(a, a') \times (b, b') = (ab, ab')$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.
2. On pose $J = (0, 1)$ et $I = (1, 0)$.
3. Montrer que pour tout $(a, a') \in \mathbb{Z}^2$, (a, a') peut s'écrire comme combinaison de I et J.
4. Calculer J^2 et I^2.
5. Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

Exercice 2 : Anneau et torsion

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \{x \in A \mid nx = 0\}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \neq \emptyset$.
2. Montrer que A_n est stable pour les lois $+$ et $\times$.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in A$ et tout $x \in A_n$, on a $\alpha x \in A_n$.
4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) Si $n \mid m$, montrer que $A_n \subseteq A_m$.
   (b) Pour $d = n \wedge m$, montrer que $A_n \cap A_m = A_d$.
5. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_n = A_p$ ou $A_n = \{0\}$, alors $A_n \subseteq A_p$.

Exercice 3 : Anneau transporté

Sur $\mathbb{Z}$, on définit :

$$x \perp y = x + y - 1, \quad x \top y = xy - x - y + 2$$

1. Montrer que $f(x) = x + 1$ est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}, \perp)$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ est un anneau.

Exercice 4 : Anneau quadratique

Soit $E = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que E est stable pour les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau.
3. Sur $\mathbb{Z}^2$, définir les lois :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \times (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

4. Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est isomorphe à $(E, +, \times)$.
5. En déduire que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau.

IV Corps et sous-corps

IV.1 Définition

Un **corps** est un anneau commutatif où tout élément non nul est inversible pour la multiplication.

IV.2 Exemples

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$
- $(\mathbb{R}, +, \times)$
- $(\mathbb{C}, +, \times)$

IV.3 Propriété caractéristique des sous-corps

Un sous-ensemble non vide $L \subseteq K$ d'un corps $(K, +, \times)$ est un sous-corps si :

- $(L, +)$ est un sous-groupe de $(K, +)$.
- $1_K \in L$.
- $\forall x, y \in L, x \times y \in L$.
- $\forall x \in L, x \neq 0 \implies x^{-1} \in L$.

IV.4 Sous-corps

Exemples de sous-corps :

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:
  - $(\mathbb{Q}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, car pour $x, y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$.
  - $1 \in \mathbb{Q}$.
  - Pour $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \times y \in \mathbb{Q}$.
  - Pour $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.
  - Ainsi, $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{C}$:
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
  - Pour $x = a+b\sqrt{2}, y = c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $x-y = (a-c)+(b-d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
  - $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
  - $x \times y = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
  - Pour $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$, l'inverse est $x^{-1} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$, où $a^2 - 2b^2 \neq 0$, et $x^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
  - Ainsi, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

IV.5 Morphismes de corps

Un **morphisme de corps** est un morphisme d'anneaux entre deux corps.

- Inclusion : $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$
- Conjugaison complexe : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$
- Automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

IV.6 Exercices

Exercice 1 Soient T et L deux lois de composition interne définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\,T\,y = x + y - 1$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\,L\,y = x + y - xy$$

Montrer que $(\mathbb{R}, T, L)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On définit une loi de composition interne $*$ sur A par :

$$x * y = x + y - xy$$

On suppose que $\{0\}$ est l'élément neutre pour la loi $+$.

1. Montrer que la loi $*$ est associative.
2. Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$.
3. Soit x un élément de A différent de 1. Montrer que x a un inverse pour $*$.
4. Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau si $*$ est distributive sur $+$.

5. Supposons que $(A,+,\times)$ est un corps. Montrer que $(A,+,*)$ est isomorphe à $(A,+,\times)$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. On pose :

$$E = \left\{a + b\sqrt{n} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

1. Montrer que E est stable pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps.
3. On définit sur $\mathbb{Q}^2$ les lois $+$ et $\times$ par :

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' + nbb', ab' + a'b)$$

4. Montrer que $(E,+,\times)$ et $(\mathbb{Q}^2,+,\times)$ sont isomorphes.
5. En déduire que $(\mathbb{Q}^2,+,\times)$ est un corps.

Solutions détaillées

Solutions :

IV.7 Groupes : Solutions des exercices

IV.8 Solution Exercice 1

1. **Vérification des axiomes de groupe** :

- **Associativité** : Pour $(a,b),(c,d),(e,f) \in G$:

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, bc+d)*(e,f) = (ace, (bc+d)e+f)$$

$$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce, de+f) = (ace, b(ce)+(de+f))$$

Les deux expressions sont égales, donc $*$ est associative.

- **Élément neutre** : Soit $(1,0)$. Pour tout $(a,b) \in G$:

$$(1,0)*(a,b) = (1\cdot a, 0\cdot a + b) = (a,b)$$

$$(a,b)*(1,0) = (a\cdot 1, b\cdot 1 + 0) = (a,b)$$

Donc $(1,0)$ est l'élément neutre.

- **Inverse** : Pour $(a,b) \in G$, cherchons (a',b') tel que :

$$(a,b)*(a',b') = (1,0) \implies (aa', ba'+b') = (1,0)$$

Cela donne $aa' = 1 \implies a' = \frac{1}{a}$ et $ba' + b' = 0 \implies b' = -\frac{b}{a}$. Vérifions :

$$(a,b)*\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a\cdot\frac{1}{a}, b\cdot\frac{1}{a} + \left(-\frac{b}{a}\right)\right) = (1,0)$$

$$\boxed{(G,*) \text{ est un groupe.}}$$

2. **Vérification que H est un sous-groupe** :

- H est non vide car $(1,0) \in H$.
- **Stabilité par** $*$: Pour $(a,0),(c,0) \in H$:

$$(a,0)*(c,0) = (ac, 0\cdot c + 0) = (ac,0) \in H$$

- **Stabilité par inverse** : Pour $(a,0) \in H$, l'inverse est :

$$(a,0)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{0}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}, 0\right) \in H$$

$$\boxed{H \text{ est un sous-groupe de } (G,*).}$$

IV.9 Solution Exercice 2

1. a) Si $y, z \in H_x$, alors $xy = yx$ et $xz = zx$. Vérifions pour yz :

$$x(yz) = (xy)z = (yx)z = y(xz) = y(zx) = (yz)x$$

Donc $yz \in H_x$.

b) Si $z \in H_x$, alors $xz = zx$. Multiplions par z^{-1} à gauche et à droite :

$$z^{-1}(xz)z^{-1} = z^{-1}(zx)z^{-1} \implies z^{-1}x = xz^{-1}$$

Donc $z^{-1} \in H_x$.

c) H_x contient l'élément neutre (car $xe = ex$) et est stable par produit et inverse, donc c'est un sous-groupe.

$$\boxed{H_x \text{ est un sous-groupe de } G.}$$

2. **Commutativité** : Supposons que pour tout $x, y, z \in G$, $x \in H_z$ et $z \in H_y \implies x \in H_y$. Prenons $z = x$. Alors :

$$x \in H_x \text{ (vrai, car } x \text{ commute avec lui-même) et } x \in H_y \implies xy = yx$$

Comme cela vaut pour tout $x, y \in G$, la loi $\times$ est commutative.

$$\boxed{\text{La loi } \times \text{ est commutative.}}$$

IV.10 Solution Exercice 3

1. a) f **est bijective** :

- **Injectivité** : Soient $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$. Si $f(M) = f(N)$, alors $a + ib = a' + ib' \implies a = a', b = b' \implies M = N$.
- **Surjectivité** : Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, la matrice $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ vérifie $f(M) = x + iy = z$.

$$\boxed{f \text{ est une bijection.}}$$

b) **Morphisme** : Soient $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$. Calculons :

$$MN = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$f(MN) = (ac - bd) + i(ad + bc) = (a + ib)(c + id) = f(M)f(N)$$

Puisque f est une bijection et $f(MN) = f(M)f(N)$, f est un isomorphisme de $(A, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif, $(A, \times)$ l'est aussi.

$$\boxed{(A, \times) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

IV.11 Solution Exercice 4

1. a) **Stabilité par produit** : Si $y, z \in H_x$, alors $xy = yx$ et $xz = zx$. Vérifions pour yz :

$$x(yz) = (xy)z = (yx)z = y(xz) = y(zx) = (yz)x$$

Donc $yz \in H_x$.

b) **Stabilité par inverse** : Si $z \in H_x$, alors $xz = zx$. Multiplions par z^{-1} à gauche et à droite :

$$z^{-1}(xz)z^{-1} = z^{-1}(zx)z^{-1} \implies z^{-1}x = xz^{-1}$$

Donc $z^{-1} \in H_x$.

c) **Sous-groupe** : H_x contient l'élément neutre e (car $xe = ex$) et est stable par produit et inverse, donc H_x est un sous-groupe.

$$\boxed{H_x \text{ est un sous-groupe de } G.}$$

2. **Commutativité** : Supposons que pour tout $x, y, z \in G$, $x \in H_z$ et $z \in H_y \implies x \in H_y$. Prenons $z = x$. Alors :

$$x \in H_x \text{ (vrai, car } x \text{ commute avec lui-même) et } x \in H_y \implies xy = yx$$

Comme cela vaut pour tout $x, y \in G$, la loi $\times$ est commutative.

$$\boxed{\text{La loi } \times \text{ est commutative.}}$$

IV.12 Solution Exercice 5

1. a) f **est bijective** :
Injectivité : Supposons $f(x) = f(y)$. Si $x, y \geq 0$, alors $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \implies x = y$. Si $x, y < 0$, alors $-\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{-y} \implies -x = -y \implies x = y$. Si $x \geq 0$, $y < 0$, alors $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-y}$, mais le côté gauche est non négatif et le côté droit est négatif, ce qui est une contradiction. Donc, $x = y$.
Surjectivité : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $y \geq 0$, posons $x = y^n \geq 0$, alors $f(x) = \sqrt[n]{y^n} = y$. Si $y < 0$, posons $x = -(-y)^n \leq 0$, alors $f(x) = -\sqrt[n]{-(-(-y)^n)} = -\sqrt[n]{(-y)^n} = -(-y) = y$. Ainsi, f est surjective.

$$\boxed{f \text{ est une bijection.}}$$

b) **Morphisme** : Montrons que $f(x+y) = f(x) * f(y)$.
Calculons $f(x) * f(y)$:

$$f(x) * f(y) = \begin{cases} \sqrt[n]{f(y)^n + f(x)^n} & \text{si } f(y)^n + f(x)^n \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-(f(x)^n + f(y)^n)} & \text{si } f(x)^n + f(y)^n \leq 0 \end{cases}$$

Considérons les cas pour $f(x)$ et $f(y)$:

- Si $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$; si $x < 0$, $f(x) = -\sqrt[n]{-x}$.
- Si $y \geq 0$, $f(y) = \sqrt[n]{y}$; si $y < 0$, $f(y) = -\sqrt[n]{-y}$.

Calculons $f(x)^n + f(y)^n$:

- Si $x, y \geq 0$, $f(x)^n = x$, $f(y)^n = y$, donc $f(x)^n + f(y)^n = x + y$.
- Si $x < 0$, $y \geq 0$, $f(x)^n = (-\sqrt[n]{-x})^n = -(-x) = x$, $f(y)^n = y$, donc $f(x)^n + f(y)^n = x + y$.
- Si $x, y < 0$, $f(x)^n = x$, $f(y)^n = y$, donc $f(x)^n + f(y)^n = x + y$.

Dans tous les cas, $f(x)^n + f(y)^n = x + y$. Ainsi :

$$f(x) * f(y) = \begin{cases} \sqrt[n]{x+y} & \text{si } x+y \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-(x+y)} & \text{si } x+y < 0 \end{cases} = f(x+y)$$

$$\boxed{f(x+y) = f(x) * f(y).}$$

2. **Structure de groupe** : Puisque f est une bijection et $f(x+y) = f(x) * f(y)$, f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}, *)$. Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{R}, *)$ l'est aussi.

$$\boxed{(\mathbb{R}, *) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

IV.13 Les anneaux : Solutions des exercices

Solution Exercice 1

1. **Groupe abélien** :
   - *Associativité* : Pour tous $(a, a'), (b, b'), (c, c') \in \mathbb{Z}^2$:
$$((a, a') + (b, b')) + (c, c') = (a+b, a'+b') + (c, c') = (a+b+c, a'+b'+c')$$
$$(a, a') + ((b, b') + (c, c')) = (a, a') + (b+c, b'+c') = (a+b+c, a'+b'+c')$$
   - *Élément neutre* : $(0, 0)$ car $(a, a') + (0, 0) = (a, a')$.
   - *Symétrique* : Pour tout (a, a'), $-(a, a') = (-a, -a')$.
   - *Commutativité* : $(a, a') + (b, b') = (b, b') + (a, a')$.

$$\boxed{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \text{ est un groupe abélien.}}$$

2. $J = (0, 1)$, $I = (1, 0)$.
3. **Combinaison** : Tout élément $(a, a') = aI + a'J = a(1, 0) + a'(0, 1)$.

$$\boxed{(a, a') = aI + a'J.}$$

4. **Calculs** :
$$J^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0 \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0, 0)$$
$$I^2 = (1, 0) \times (1, 0) = (1 \cdot 1, 1 \cdot 0) = (1, 0)$$
$$\boxed{J^2 = (0, 0), \quad I^2 = (1, 0).}$$

5. **Anneau commutatif unitaire** :
   - *Distributivité* :
$$(a, a') \times ((b, b') + (c, c')) = (a, a') \times (b+c, b'+c') = (a(b+c), a(b'+c'))$$
$$= (ab, ab') + (ac, ac') = (a, a') \times (b, b') + (a, a') \times (c, c')$$

- *Associativité de* $\times$:

$$((a,a')\times(b,b'))\times(c,c') = (ab,ab')\times(c,c') = (abc,abc')$$

$$(a,a')\times((b,b')\times(c,c')) = (a,a')\times(bc,bc') = (abc,abc')$$

- *Élément unité* : $(1,1)$ car $(a,a')\times(1,1) = (a\cdot 1, a\cdot 1) = (a,a')$.
- *Commutativité* : $(a,a')\times(b,b') = (ab,ab') = (ba,ba') = (b,b')\times(a,a')$.

$$\boxed{(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\times) \text{ est un anneau commutatif et unitaire.}}$$

Solution Exercice 2

1. **Non-vacuité** : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\in A_n$ car $n\cdot 0 = 0$.

$$\boxed{A_n \neq \emptyset.}$$

2. **Stabilité** :

- Pour $+$: Si $x,y\in A_n$, alors $n(x+y) = nx+ny = 0+0 = 0$, donc $x+y\in A_n$.
- Pour $\times$: Si $x,y\in A_n$, $n(xy) = (nx)y = 0\cdot y = 0$, donc $xy\in A_n$.

$$\boxed{A_n \text{ est stable pour } + \text{ et } \times.}$$

3. **Idéal** : Pour $\alpha\in A$ et $x\in A_n$, $n(\alpha x) = \alpha(nx) = \alpha\cdot 0 = 0$, donc $\alpha x\in A_n$.

$$\boxed{\alpha x\in A_n.}$$

4. (a) **Inclusion** : Si $n \mid m$, alors $m = kn$. Pour $x\in A_n$, $mx = k(nx) = k\cdot 0 = 0$, donc $x\in A_m$.

$$\boxed{A_n\subseteq A_m.}$$

(b) **Intersection** : Pour $d = n\wedge m$:

- $A_d\subseteq A_n\cap A_m$ car $d\mid n$ et $d\mid m$.
- Si $x\in A_n\cap A_m$, alors $nx = mx = 0$. Puisque $d = un+vm$, $dx = u(nx)+v(mx) = 0$, donc $x\in A_d$.

$$\boxed{A_n\cap A_m = A_d.}$$

5. **Cas premier** : Si $A_n = \{0\}$, l'inclusion est triviale. Si $A_n = A_p$, alors pour $x\in A_n$, $px = 0$, donc $x\in A_p$.

$$\boxed{A_n\subseteq A_p.}$$

Solution Exercice 3

1. **Homomorphisme** :

$$f(x+y) = x+y+1 = (x+1)+(y+1)-1 = f(x)\perp f(y)$$

De plus, f est bijective d'inverse $f^{-1}(z) = z-1$.

$$\boxed{f \text{ est un homomorphisme.}}$$

2. **Structure d'anneau** :

- $(\mathbb{Z},\perp)$ est un groupe abélien (isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$ via f).
- *Associativité de* $\top$:

$$x\top(y\top z) = x\top(yz-y-z+2) = x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2 = xyz-xy-xz+$$

$$(x\top y)\top z = (xy-x-y+2)\top z = (xy-x-y+2)z-(xy-x-y+2)-z+2 = xyz-xy-xz-$$

- *Distributivité* :

$$x\top(y\perp z) = x\top(y+z-1) = x(y+z-1)-x-(y+z-1)+2 = xy+xz-x-y-z+3$$

$$(x\top y)\perp(x\top z) = (xy-x-y+2)\perp(xz-x-z+2) = (xy-x-y+2)+(xz-x-z+2)-1$$

- *Élément neutre* : 1 car $x\top 1 = x\cdot 1 - x - 1 + 2 = x$.

$$\boxed{(\mathbb{Z},\perp,\top) \text{ est un anneau.}}$$

Solution Exercice 4

1. **Stabilité pour + et ×** :

   - *Addition* : Pour $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2} \in E$, on a :

   $$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in E$$

   - *Multiplication* :

   $$x \times y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in E$$

   Puisque $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, les coefficients restent dans $\mathbb{Z}$.

   $$\boxed{E \text{ est stable pour } + \text{ et } \times.}$$

2. **Structure d'anneau** :

   - $(E, +)$ est un groupe abélien :
     - *Associativité* : Héritée de $(\mathbb{R}, +)$.
     - *Élément neutre* : $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in E$.
     - *Symétrique* : Pour $x = a + b\sqrt{2}$, $-x = -a - b\sqrt{2} \in E$.
     - *Commutativité* : Héritée de $(\mathbb{R}, +)$.
   - $(E, \times)$ est un monoïde :
     - *Associativité* : Héritée de $(\mathbb{R}, \times)$.
     - *Élément neutre* : $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$.
   - *Distributivité* : Héritée de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

   $$\boxed{(E, +, \times) \text{ est un anneau.}}$$

3. Les lois sur $\mathbb{Z}^2$ sont définies comme demandé.

4. **Isomorphisme** : Définissons $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to E$ par $\varphi(a, b) = a + b\sqrt{2}$.

   - *Morphisme additif* :

   $$\varphi((a,b)+(c,d)) = \varphi(a+c, b+d) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = \varphi(a,b)+\varphi(c,d)$$

   - *Morphisme multiplicatif* :

   $$\varphi((a, b) \times (c, d)) = \varphi(ac + 2bd, ad + bc) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

   $$\varphi(a, b) \cdot \varphi(c, d) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

   Les deux expressions sont égales, donc φ préserve la multiplication.

   - *Bijectivité* : φ est injective, car si $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$, alors $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, et comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, $a = c$, $b = d$. Pour la surjectivité, tout élément $x = a + b\sqrt{2} \in E$ est l'image de $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

   $$\boxed{(\mathbb{Z}^2, +, \times) \text{ est isomorphe à } (E, +, \times).}$$

5. **Conclusion** : Puisque $(E, +, \times)$ est un anneau et φ est un isomorphisme, $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau.

   $$\boxed{(\mathbb{Z}^2, +, \times) \text{ est un anneau.}}$$

IV.14 Les corps : Solutions des exercices

Solution Exercice 1

Solution :
Pour montrer que $(\mathbb{R}, T, L)$ est un corps commutatif, vérifions les propriétés suivantes :

1. **Loi T (Addition)** :

- *Associativité* :

$$(x \, T \, y) \, T \, z = (x + y - 1) + z - 1 = x + y + z - 2$$

$$x \, T \, (y \, T \, z) = x + (y + z - 1) - 1 = x + y + z - 2$$

Donc T est associative.

- *Élément neutre* : Soit e tel que $x \, T \, e = x$. Alors :

$$x + e - 1 = x \implies e = 1$$

Vérification : $x \, T \, 1 = x + 1 - 1 = x$.

- *Élément symétrique* : Pour tout x, il existe x' tel que $x \, T \, x' = 1$. Alors :

$$x + x' - 1 = 1 \implies x' = 2 - x$$

Vérification : $x \, T \, (2 - x) = x + (2 - x) - 1 = 1$.

- *Commutativité* :

$$x\,T\,y = x + y - 1 = y + x - 1 = y\,T\,x$$

Ainsi, $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe abélien.

2. **Loi L (Multiplication)** :

- *Associativité* :

$$(x\,L\,y)\,L\,z = (x{+}y{-}xy){+}z{-}(x{+}y{-}xy)z = x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{-}yz{+}xyz$$

$$x\,L\,(y\,L\,z) = x{+}(y{+}z{-}yz){-}x(y{+}z{-}yz) = x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{-}yz{+}xyz$$

Donc L est associative.

- *Élément neutre* : Soit e tel que $x\,L\,e = x$. Alors :

$$x + e - xe = x \implies e(1-x) = 0$$

Pour tout $x \neq 1$, $e = 0$. Vérification :

$$x\,L\,0 = x + 0 - x \cdot 0 = x$$

- *Élément symétrique* : Pour tout $x \neq 1$, il existe x' tel que $x\,L\,x' = 0$. Alors :

$$x + x' - xx' = 0 \implies x' = \frac{x}{x-1}$$

Vérification :

$$x\,L\,\frac{x}{x-1} = x{+}\frac{x}{x-1}{-}x{\cdot}\frac{x}{x-1} = x{+}\frac{x}{x-1}{-}\frac{x^2}{x-1} = \frac{x(x-1)+x-x^2}{x-1} = 0$$

Puisque $x \neq 1$, x' est bien défini. Pour $x = 1$, $1\,L\,y = 1 + y - 1 \cdot y = 1$, donc 1 n'a pas d'inverse.

- *Commutativité* :

$$x\,L\,y = x + y - xy = y + x - yx = y\,L\,x$$

Ainsi, $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, L)$ est un groupe abélien.

3. **Distributivité** :

$$x\,L\,(y\,T\,z) = x\,L\,(y{+}z{-}1) = x{+}(y{+}z{-}1){-}x(y{+}z{-}1) = x{+}y{+}z{-}1{-}xy{-}xz{+}x$$

$$(x\,L\,y)\,T\,(x\,L\,z) = (x{+}y{-}xy){+}(x{+}z{-}xz){-}1 = x{+}y{-}xy{+}x{+}z{-}xz{-}1 = 2x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{-}1$$

Corrigeons l'erreur : recalculons la distributivité correctement :

$$(x\,L\,y)\,T\,(x\,L\,z) = (x{+}y{-}xy)\,T\,(x{+}z{-}xz) = (x{+}y{-}xy){+}(x{+}z{-}xz){-}1 = x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{+}x{-}$$

Les deux expressions sont égales, donc la distributivité est vérifiée.

4. **Structure de corps** : $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe abélien, $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, L)$ est un groupe abélien, et L est distributive sur T. Cependant, pour que $(\mathbb{R}, T, L)$ soit un corps, tout élément non nul (par rapport à T, i.e., $\neq 1$) doit avoir un inverse pour L, ce qui est vrai. L'élément 1 est le neutre pour T, et bien que 1 n'ait pas d'inverse pour L, cela correspond à l'élément nul dans la structure du corps.

Conclusion : $(\mathbb{R}, T, L)$ est un corps commutatif.

$$\boxed{(\mathbb{R}, T, L) \text{ est un corps commutatif.}}$$

Solution Exercice 2

1. **Associativité de $*$** :

$$(x{*}y){*}z = (x{+}y{-}xy){*}z = (x{+}y{-}xy){+}z{-}(x{+}y{-}xy)z = x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{-}yz{+}xyz$$

$$x{*}(y{*}z) = x{*}(y{+}z{-}yz) = x{+}(y{+}z{-}yz){-}x(y{+}z{-}yz) = x{+}y{+}z{-}xy{-}xz{-}yz{+}xyz$$

Les deux expressions sont égales, donc $*$ est associative.

$$\boxed{\text{La loi } * \text{ est associative.}}$$

2. **Élément neutre pour $*$** : Cherchons e tel que $x * e = x$. Alors :

$$x * e = x + e - xe = x \implies e(1-x) = 0$$

Pour tout $x \neq 1$, $e = 0$. Vérifions :

$$x * 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x$$

$$0 * x = 0 + x - 0 \cdot x = x$$

Donc 0 est l'élément neutre pour $*$.

$$\boxed{0 \text{ est l'élément neutre pour } *.}$$

3. **Inverse pour** $*$: Soit $x \neq 1$. Cherchons z tel que $x * z = 0$. Alors :

$$x * z = x + z - xz = 0 \implies z(1-x) = -x \implies z = \frac{x}{x-1}$$

Vérifions :

$$x * \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} - x \cdot \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x(x-1)+x-x^2}{x-1} = \frac{0}{x-1} = 0$$

Puisque $x \neq 1$, z est bien défini.

$$\boxed{\text{Tout } x \neq 1 \text{ a un inverse } \frac{x}{x-1} \text{ pour } *.}$$

4. $(A,+,*)$ **est un anneau** : Pour que $(A,+,*)$ soit un anneau, vérifions :

- $(A,+)$ est un groupe abélien (propriété d'anneau).
- $(A,*)$ est un monoïde : associatif (vérifié) avec neutre 0 (vérifié).
- *Distributivité* :

$$x * (y+z) = x + (y+z) - x(y+z) = x + y + z - xy - xz$$

$$x*y + x*z = (x+y-xy) + (x+z-xz) = x+y-xy+x+z-xz = 2x+y+z-xy-xz$$

Les deux expressions ne sont pas égales, donc $*$ n'est pas distributive sur $+$. Par conséquent, $(A,+,*)$ n'est pas un anneau sauf si des conditions supplémentaires sur A s'appliquent.

$$\boxed{\text{(A, +, *) n'est pas un anneau en général car } * \text{ n'est pas distributive sur } +.}$$

5. **Isomorphisme** : Supposons que $(A,+,\times)$ est un corps. Définissons $f : (A,+,\times) \to (A,+,*)$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ pour $x \neq 1$, et $f(1) = 0$. Vérifions si f est un isomorphisme :

- *Addition* :

$$f(x+y) = \frac{x+y}{x+y-1}$$

$$f(x)+f(y) = \frac{x}{x-1} + \frac{y}{y-1} = \frac{x(y-1)+y(x-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{xy-x+yx-y}{(x-1)(y-1)} = \frac{2xy-x-y}{(x-1)(y-1)}$$

Les expressions ne sont pas égales, donc f n'est pas un morphisme pour $+$.

- *Multiplication* : Pour $*$, vérifions :

$$f(x)*f(y) = \frac{x}{x-1} * \frac{y}{y-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{y}{y-1} - \frac{x}{x-1} \cdot \frac{y}{y-1} = \frac{xy-x-y+1}{(x-1)(y-1)}$$

$$f(x \times y) = \frac{xy}{xy-1}$$

Cela nécessite une analyse plus poussée, mais $*$ n'étant pas distributive, l'isomorphisme est improbable. Une hypothèse plus cohérente serait que $(A,+,*)$ est isomorphe à un autre corps, mais l'énoncé est ambigu.

$$\boxed{\text{L'énoncé est ambigu, mais } (A,+,*) \text{ n'est pas isomorphe à } (A,+,\times) \text{ en général.}}$$

Solution Exercice 3

1. **Stabilité** :

- *Addition* :

$$(a+b\sqrt{n}) + (a'+b'\sqrt{n}) = (a+a') + (b+b')\sqrt{n} \in E$$

- *Multiplication* :

$$(a+b\sqrt{n})(a'+b'\sqrt{n}) = (aa'+nbb') + (ab'+a'b)\sqrt{n} \in E$$

$$\boxed{E \text{ est stable pour } + \text{ et } \times.}$$

2. **Structure de corps** :

- $(E,+)$ est un groupe abélien :
  - *Associativité* : Héritée de $(\mathbb{R},+)$.
  - *Élément neutre* : $0 = 0 + 0\sqrt{n} \in E$.
  - *Symétrique* : Pour $x = a+b\sqrt{n}$, $-x = -a-b\sqrt{n} \in E$.
  - *Commutativité* : Héritée de $(\mathbb{R},+)$.
- $(E \setminus \{0\},\times)$ est un groupe :
  - *Associativité* : Héritée de $(\mathbb{R},\times)$.

- *Élément neutre* : $1 = 1 + 0\sqrt{n} \in E$.
- *Commutativité* : $(a+b\sqrt{n})(a'+b'\sqrt{n}) = (a'+b'\sqrt{n})(a+b\sqrt{n})$.
- *Inverse* : Pour $x = a + b\sqrt{n} \neq 0$, soit $N = a^2 - nb^2 \neq 0$ (car $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$). L'inverse est :

$$x^{-1} = \frac{a - b\sqrt{n}}{a^2 - nb^2} \in E$$

- *Distributivité* : Héritée de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

$$\boxed{(E, +, \times) \text{ est un corps.}}$$

3. Les lois sur $\mathbb{Q}^2$ sont définies comme demandé.

4. **Isomorphisme** : Définissons $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to E$ par $\varphi(a, b) = a + b\sqrt{n}$.

   - *Morphisme additif* :

   $$\varphi((a, b)+(a', b')) = \varphi(a+a', b+b') = (a+a')+(b+b')\sqrt{n} = \varphi(a, b)+\varphi(a', b')$$

   - *Morphisme multiplicatif* :

   $$\varphi((a, b)\times(a', b')) = \varphi(aa'+nbb', ab'+a'b) = (aa'+nbb')+(ab'+a'b)\sqrt{n}$$

   $$\varphi(a, b)\cdot\varphi(a', b') = (a+b\sqrt{n})(a'+b'\sqrt{n}) = (aa'+nbb')+(ab'+a'b)\sqrt{n}$$

   Les deux expressions sont égales.

   - *Bijectivité* : φ est injective, car si $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$, alors $a+b\sqrt{n} = a' + b'\sqrt{n}$, et comme $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, $a = a'$, $b = b'$. Pour la surjectivité, tout élément $x = a + b\sqrt{n} \in E$ est l'image de $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

   $$\boxed{(E, +, \times) \text{ et } (\mathbb{Q}^2, +, \times) \text{ sont isomorphes.}}$$

5. **Conclusion** : Puisque $(E, +, \times)$ est un corps et φ est un isomorphisme, $(\mathbb{Q}^2, +, \times)$ est un corps.

$$\boxed{(\mathbb{Q}^2, +, \times) \text{ est un corps.}}$$