Contents

Ce chapitre explore les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à 3, offrant un cadre idéal pour appréhender les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Nous commençons par les opérations dans $\mathbb{R}^3$, en étudiant les produits scalaire et vectoriel, leurs propriétés (symétrie, antisymétrie, distributivité, inégalité de Cauchy-Schwarz) et leurs expressions dans une base orthonormée. La simplicité géométrique de ces espaces permet une visualisation intuitive, tandis que leur structure algébrique ouvre la voie à des concepts plus avancés tels que le *produit extérieur*, les *sous-espaces vectoriels* et les *morphismes linéaires*.

Nous définissons rigoureusement les espaces vectoriels sur un groupe additif muni d'un produit externe par un corps, en vérifiant leurs axiomes, puis introduisons les anneaux $\mathrm{M}_2(K)$ et $\mathrm{M}_3(K)$, en démontrant qu'ils sont à la fois des anneaux et des espaces vectoriels. Les puissances de matrices sont calculées à l'aide du *binôme de Newton* pour des matrices de la forme $\lambda I_2 + B$, tandis que l'inversion matricielle est abordée via la *comatrice*, avec des applications en géométrie et dans l'étude des suites récurrentes géométriques et croisées.

Ces objets, bien qu'élémentaires, révèlent des propriétés profondes et trouvent des applications en physique, en ingénierie et en informatique. Comme le soulignait le grand mathématicien DAVID HILBERT : *L'algèbre n'est rien d'autre qu'une géométrie écrite ; la géométrie n'est rien d'autre qu'une algèbre figurée.*

1 Opérations dans $\mathbb{R}^3$

L'espace $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets (x,y,z) avec $x,y,z \in \mathbb{R}$, représentant des vecteurs dans un espace tridimensionnel, souvent utilisé en géométrie, physique et ingénierie pour modéliser des positions, des forces ou des déplacements. Les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, notés avec des flèches (par exemple, $\vec{u}$), sont équipés de deux opérations fondamentales : l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire. Ces opérations permettent de combiner des vecteurs et de les redimensionner, formant la base de la structure d'espace vectoriel. De plus, $\mathbb{R}^3$ est muni de produits spécifiques, comme le produit scalaire et le produit vectoriel, qui ont des applications géométriques et physiques, notamment pour calculer des angles, des aires ou des moments.

1.1 Addition et multiplication par un scalaire

Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Les opérations de base sont définies comme suit :

- **Addition vectorielle** : $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$. Cette opération combine les composantes des vecteurs pour former un nouveau vecteur, représentant la somme géométrique (parallélogramme).
- **Multiplication par un scalaire** : $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$. Cette opération redimensionne le vecteur, en modifiant sa longueur ou son sens selon le signe de λ.

Ces opérations sont intuitives : l'addition correspond à une translation dans l'espace, tandis que la multiplication par un scalaire étire ou inverse le vecteur.

Exemple 1. *Soient $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (4,-1,0)$, et $\lambda = 2$. Calculons :*

- $\vec{u}+\vec{v} = (1+4, 2+(-1), 3+0) = (5,1,3)$.
- $2\vec{u} = (2\cdot 1, 2\cdot 2, 2\cdot 3) = (2,4,6)$.

Géométriquement, $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur obtenu en complétant le parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $2\vec{u}$ est un vecteur dans la même direction que $\vec{u}$ mais deux fois plus long.

1.2 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération bilinéaire qui associe à deux vecteurs un scalaire, mesurant leur "alignement" ou l'angle entre eux. Il est largement utilisé pour calculer des longueurs, des angles, et des projections dans des applications comme la mécanique ou l'analyse de données.

Définition 1.1. *Le produit scalaire de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Propriétés dans une base orthonormée (par exemple, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$) :

- **Symétrie** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, car la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative.
- **Bilinéarité** : $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{w}) + \mu(\vec{v}\cdot\vec{w})$ et $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \mu(\vec{u}\cdot\vec{w})$.
- **Positivité** : $\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2+u_2^2+u_3^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, où la norme est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.

Dans une base orthonormée, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui permet de mesurer l'orthogonalité ($\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si $\theta = 90°$).

Exemple 2. *Soient* $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (4,-1,0)$. *Calculons :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = 4 - 2 + 0 = 2.$$

Vérifions Cauchy-Schwarz :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{17}, \quad \sqrt{14}\cdot\sqrt{17} \approx 7.55 > |2|.$$

Vérifions les propriétés :

- *Symétrie :* $\vec{v}\cdot\vec{u} = 4\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 3 = 2.$
- *Bilinéarité : Pour* $\vec{w} = (0,1,1)$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, *vérifions* $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{w}) + \mu(\vec{v}\cdot\vec{w})$ *:*

$$\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = 2(1,2,3)+(4,-1,0) = (6,3,6), \quad (6,3,6)\cdot(0,1,1) = 3+6 = 9.$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 2+3 = 5, \quad \vec{v}\cdot\vec{w} = -1+0 = -1, \quad 2\cdot 5 + 1\cdot(-1) = 9.$$

- *Positivité :* $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1^2+2^2+3^2 = 14 > 0.$

Exemple 3. *Application : L'angle entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est donné par* $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}} \approx 0.13$, *soit* $\theta \approx 82.5°$.

1.3 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération spécifique à $\mathbb{R}^3$ qui associe à deux vecteurs un troisième vecteur, orthogonal aux deux premiers. Il est utilisé en physique pour calculer des moments, en géométrie pour déterminer des normales à des plans, ou en informatique graphique pour les calculs d'orientation.

Définition 1.2. *Le produit vectoriel de* $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ *et* $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *est :*

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Propriétés dans une base orthonormée :

- **Antisymétrie** : $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$, car les déterminants changent de signe en échangeant les lignes.
- **Bilinéarité** : $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\times\vec{w} = \lambda(\vec{u}\times\vec{w}) + \mu(\vec{v}\times\vec{w})$.
- **Orthogonalité** : $\vec{u}\times\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, i.e., $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$, $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$.
- **Norme** : $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin\theta|$, représentant l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple 4. *Soient* $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (4,-1,0)$. *Calculons :*

$$\vec{u}\times\vec{v} = (2\cdot 0 - 3\cdot(-1), 3\cdot 4 - 1\cdot 0, 1\cdot(-1) - 2\cdot 4) = (3,12,-9).$$

Vérifions les propriétés :

- *Antisymétrie :* $\vec{v}\times\vec{u} = ((-1)\cdot 3 - 0\cdot 2, 0\cdot 1 - 4\cdot 3, 4\cdot(-1) - (-1)\cdot 1) = (-3,-12,9) = -(\vec{u}\times\vec{v})$.
- *Orthogonalité :* $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = 3\cdot 1 + 12\cdot 2 + (-9)\cdot 3 = 3 + 24 - 27 = 0.$
- *Norme :* $\sin\theta = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{3^2+12^2+(-9)^2}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{234}}{\sqrt{238}} \approx 0.99.$

Exemple 5. *Application : L'aire du parallélogramme formé par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est* $\sqrt{234} \approx 15.3$. *En physique,* $\vec{u}\times\vec{v}$ *peut représenter le moment d'une force.*

2 Espaces vectoriels

Un espace vectoriel est une structure algébrique permettant de généraliser les opérations de $\mathbb{R}^n$ à des ensembles abstraits. Il est défini sur un groupe additif (pour l'addition des vecteurs) et un produit externe par un corps (pour la multiplication par des scalaires). Cette structure est fondamentale en algèbre linéaire, avec des applications en géométrie, analyse, et physique.

Définition 2.1. *Un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$ *(par exemple,* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est un ensemble* V *muni de :*

- *Une addition :* $V\times V \to V$, $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$, *formant un groupe abélien (axiomes de groupe) :*
  1. *Associativité :* $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
  2. *Commutativité :* $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.

3. *Élément neutre :* $\exists \vec{0} \in V$ *tel que* $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
4. *Inverse :* $\forall \vec{u} \in V$, $\exists (-\vec{u}) \in V$ *tel que* $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

- *Un produit externe :* $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \vec{u}$, *satisfaisant :*
  1. *Associativité :* $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda \mu)\vec{u}$.
  2. *Distributivité (scalaires) :* $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$.
  3. *Distributivité (vecteurs) :* $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.
  4. *Compatibilité :* $1_{\mathbb{K}} \vec{u} = \vec{u}$, *où* $1_{\mathbb{K}}$ *est l'élément neutre de* $\mathbb{K}$.

Exemple 6. *Vérifions que* $\mathbb{R}^2$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *:*

- ***Axiomes de groupe** :*
  - *Associativité :* $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$, *et similairement pour l'autre parenthèse.*
  - *Commutativité :* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$.
  - *Neutre :* $(0,0) + (x,y) = (x,y)$.
  - *Inverse : Pour* (x,y), $(-x,-y) + (x,y) = (0,0)$.
- ***Axiomes du produit externe** :*
  - *Associativité :* $\lambda(\mu(x,y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = (\lambda \mu x, \lambda \mu y) = (\lambda \mu)(x,y)$.
  - *Distributivité (scalaires) :* $(\lambda + \mu)(x,y) = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) = \lambda(x,y) + \mu(x,y)$.
  - *Distributivité (vecteurs) :* $\lambda((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \lambda(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \lambda(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)$.
  - *Compatibilité :* $1 \cdot (x,y) = (x,y)$.

Exemple 7. *L'ensemble des polynômes de degré* ≤ 2, $P_2(\mathbb{R})$, *est un espace vectoriel :*

- *Addition :* $(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f) = (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$.
- *Produit externe :* $\lambda(ax^2 + bx + c) = (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + (\lambda c)$.
- *Axiomes : Associativité, commutativité, neutre* $(0x^2 + 0x + 0)$, *inverses* $((-a)x^2 + (-b)x + (-c))$, *et les propriétés du produit externe sont vérifiées par les propriétés des scalaires dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 8. *Application :* $\mathbb{R}^2$ *modélise des déplacements dans un plan,* $P_2(\mathbb{R})$ *représente des trajectoires paraboliques en physique.*

3 Sous-espaces vectoriels et morphismes linéaires

Un sous-espace vectoriel est un sous-ensemble d'un espace vectoriel qui conserve la structure vectorielle, permettant d'étudier des parties spécifiques comme des droites ou des plans dans $\mathbb{R}^3$. Les morphismes linéaires, quant à eux, sont des applications préservant les opérations vectorielles, essentielles pour comprendre les transformations géométriques ou les systèmes dynamiques.

Définition 3.1. *Un sous-espace vectoriel de* V *est un sous-ensemble* $W \subseteq V$ *fermé pour l'addition et la multiplication par un scalaire :*

- *Si* $\vec{u}, \vec{v} \in W$, *alors* $\vec{u} + \vec{v} \in W$.
- *Si* $\vec{u} \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors* $\lambda \vec{u} \in W$.

Proposition 3.1. *Un sous-ensemble* $W \subseteq V$ *est un sous-espace vectoriel si et seulement si :*

1. $W \neq \emptyset$ *(en général,* $\vec{0} \in W$*).*
2. *Pour tout* $\vec{u}, \vec{v} \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$.

Exemple 9. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *vérifions que* $W = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$ *est un sous-espace :*

- *Non vide :* $\vec{0} = (0,0,0) \in W$.
- *Fermeture : Soient* $\vec{u} = (x_1, y_1, 0)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, 0)$. *Alors* $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, 0) \in W$.

Contre-exemple : $W = \{(x,y,z) \mid x + y = 1\}$ *n'est pas un sous-espace, car* $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$ *a* $x + y = 2 \neq 1$.

Exemple 10. *Application : Le plan* $z = 0$ *représente l'espace des vecteurs dans le plan xy, utile en géométrie pour définir des surfaces.*

Définition 3.2. *Un morphisme linéaire de V à W (espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$) est une application $f : V \to W$ telle que :*

$$f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v}), \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in V, \lambda,\mu \in \mathbb{K}.$$

Exemple 11. *La rotation dans $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, est linéaire :*

$$f(\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)) = f(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2) = \lambda f(x_1,y_1)+\mu f(x_2,y_2).$$

4 Combinaisons linéaires, familles libres, liées, génératrices et bases

4.1 Combinaisons linéaires

Définition 4.1 (Combinaison linéaire)**.** *Dans un espace vectoriel E sur un corps commutatif K (par exemple, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), une* ***combinaison linéaire*** *d'une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E^n$ est une expression de la forme*

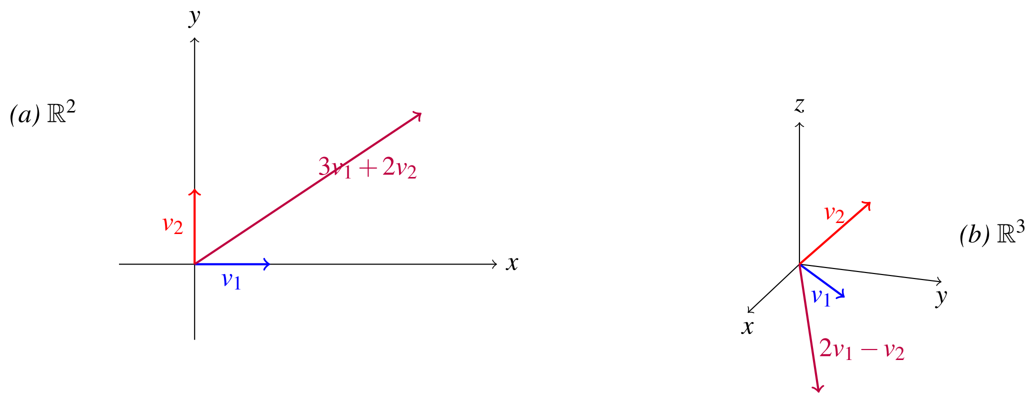
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

où les $\lambda_i \in K$ sont des scalaires appelés ***coefficients*** *de la combinaison linéaire. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille $(v_i)_{i\in I}$ est appelé le* ***sous-espace engendré*** *par cette famille, noté $((v_i)_{i\in I})$.*

Exemple 12. *Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les vecteurs $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$. La combinaison linéaire $3v_1+2v_2 = 3(1,0)+2(0,1) = (3,2)$ donne le vecteur $(3,2)$.*

Exemple 13. *Dans $\mathbb{R}^3$, avec $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, la combinaison linéaire $2v_1 - v_2 = 2(1,1,0)-(0,1,1) = (2,1,-1)$ engendre le vecteur $(2,1,-1)$.*

Exemple 14. *Dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}_2[X]$, considérons $v_1 = 1$, $v_2 = X$, $v_3 = X^2$. La combinaison linéaire $1\cdot v_1+2\cdot v_2-1\cdot v_3 = 1+2X-X^2$ est le polynôme $1+2X-X^2$.*



figureVisualisation d'une combinaison linéaire : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $3v_1+2v_2 = (3,2)$. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $2v_1 - v_2 = (2,1,-1)$.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1)$. Trouver les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(3,4,2) = \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$, si possible.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, soient $p_1 = 1+X$, $p_2 = X-X^2$. Montrer que le polynôme $2+3X-X^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de p_1 et p_2.

4.2 Familles libres

Définition 4.2 (Famille libre)**.** *Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est dite* ***libre*** *(ou* ***linéairement indépendante****) si l'unique combinaison linéaire égale au vecteur nul est la combinaison triviale, c'est-à-dire si*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

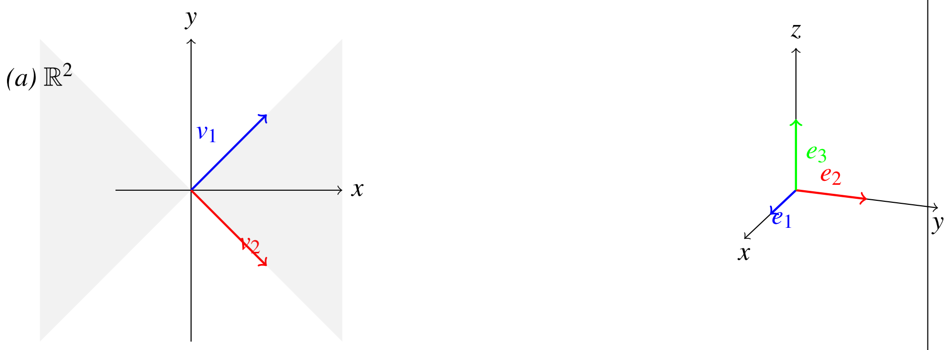
Exemple 15. *Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ est libre. L'équation $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3 = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.*

Exemple 16. *Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ forment une famille libre. L'équation $\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1) = (0,0)$ donne le système*

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1-\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

dont la solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Exemple 17. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{1, X, X^2\}$ est libre. Si $a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2 = 0$, alors en comparant les coefficients, $a = b = c = 0$.*



figureVisualisation de familles libres : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(1,-1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer si la famille $\{(1,2,3),(2,4,1),(0,1,1)\}$ est libre.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, vérifier si la famille $\{1+X, X-X^2, 1+X^2\}$ est libre.

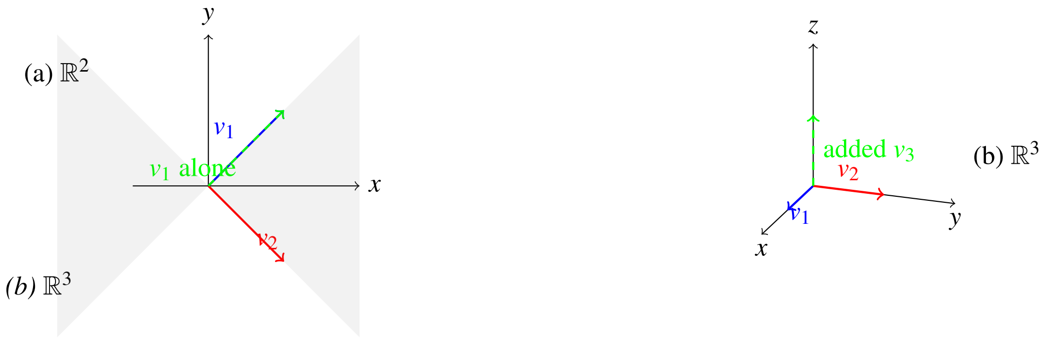
Proposition 4.1 (Propriétés des familles libres)**.**

1. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
2. *Une famille libre peut être étendue en une base de l'espace vectoriel.*
3. *Si une famille libre de n vecteurs est incluse dans un espace de dimension m, alors $n \leq m$.*

Proof.

1. Supposons que $(v_1, \ldots, v_k)$ soit une sous-famille de la famille libre $(v_1, \ldots, v_n)$. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$, alors en posant $\lambda_i = 0$ pour $i > k$, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, ce qui implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \leq k$.
2. Par le théorème de la base incomplète, une famille libre peut être complétée en une base en ajoutant des vecteurs jusqu'à engendrer l'espace entier.
3. Dans un espace de dimension m, une famille libre de plus de m vecteurs serait liée, car le rang d'une matrice de plus de m colonnes est au plus m.

□



figurePropriétés des familles libres : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, la sous-famille $\{(1,1)\}$ de $\{(1,1),(1,-1)\}$ est libre. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, la famille libre $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est étendue par $(0,0,1)$ pour former une base.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la sous-famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ de la famille libre $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est libre.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^2$, vérifier que la famille libre $\{(1,1)\}$ peut être étendue en une base en proposant une base contenant ce vecteur.

4.3 Familles liées

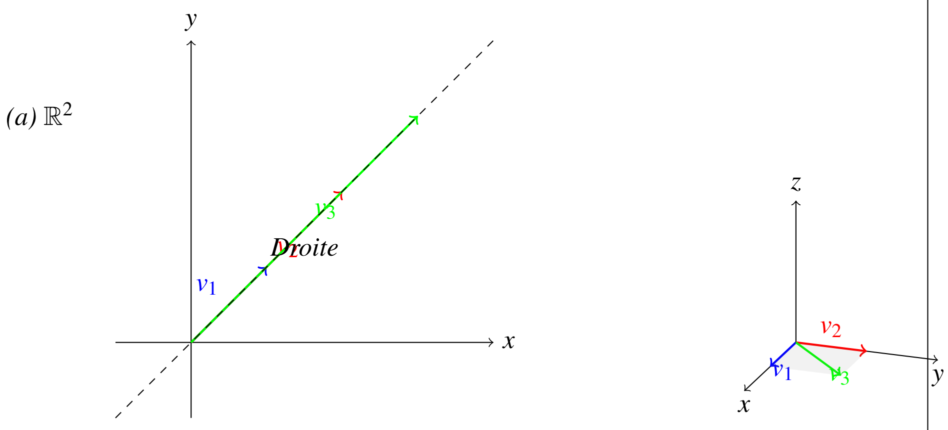
Définition 4.3 (Famille liée)**.** *Une famille est **liée** (ou **linéairement dépendante**) si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire non triviale égale au vecteur nul :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{avec au moins un } \lambda_i \neq 0.$$

Exemple 18. *Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,2)$, $v_3 = (3,3)$ est liée, car $v_2 = 2v_1$, et donc $2v_1 - v_2 + 0v_3 = (0,0)$.*

Exemple 19. *Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,0)$ est liée, car $v_3 = v_1 + v_2$, soit $v_1 + v_2 - v_3 = (0,0,0)$.*

Exemple 20. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{1, X, X^2, X+1\}$ est liée, car $(X+1) - X - 1 = 0$.*



figureVisualisation de familles liées : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ sont alignés. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ engendrent un plan.

***Exercice 7*.** Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier si la famille $\{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,0)\}$ est liée.

***Exercice 8*.** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que la famille $\{1,2X,1+2X\}$ est liée.

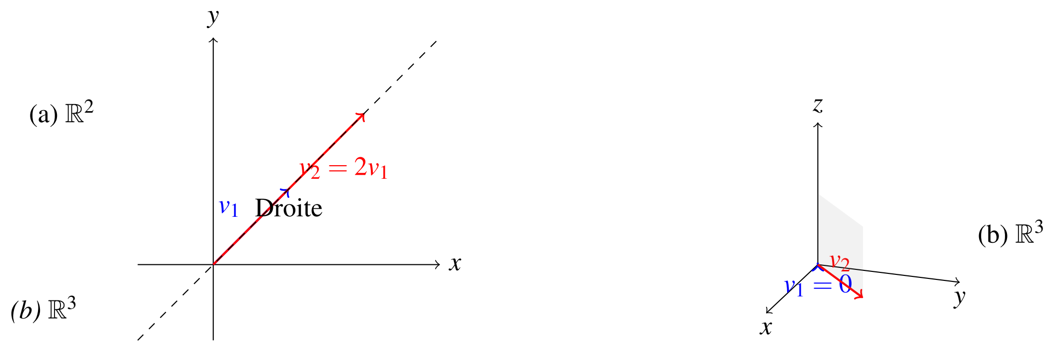
Proposition 4.2 (Propriétés des familles liées)**.**

1. *Dans une famille liée, au moins un vecteur s'exprime comme combinaison linéaire des autres.*
2. *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
3. *Si une famille est liée, toute famille la contenant est liée.*
4. *Une famille liée ne peut pas être une base.*

Proof.

1. Si $\sum \lambda_i v_i = 0$ avec $\lambda_k \neq 0$, alors $v_k = -\frac{1}{\lambda_k}\sum_{i\neq k}\lambda_i v_i$.
2. Si $v_1 = 0$, alors $1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \cdots = 0$, combinaison non triviale.
3. Une relation de dépendance dans la famille peut être étendue avec des coefficients nuls pour les vecteurs supplémentaires.
4. Une base est libre par définition, donc une famille liée ne peut être une base.

□



figurePropriétés des familles liées : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, v_2 est combinaison de v_1. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, la présence de 0 rend la famille liée.

***Exercice 9*.** Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que pour la famille liée $\{(1,0,0),(2,0,0),(0,1,0)\}$, un vecteur s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

***Exercice 10*.** Dans $\mathbb{R}^2$, vérifier que la famille $\{(0,0),(1,2)\}$ est liée en utilisant la propriété du vecteur nul.

4.4 Familles génératrices

Définition 4.4 (Famille génératrice)**.** *Une famille $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est **génératrice** (ou **engendrante**) si le sous-espace qu'elle engendre est l'espace entier E, c'est-à-dire si*

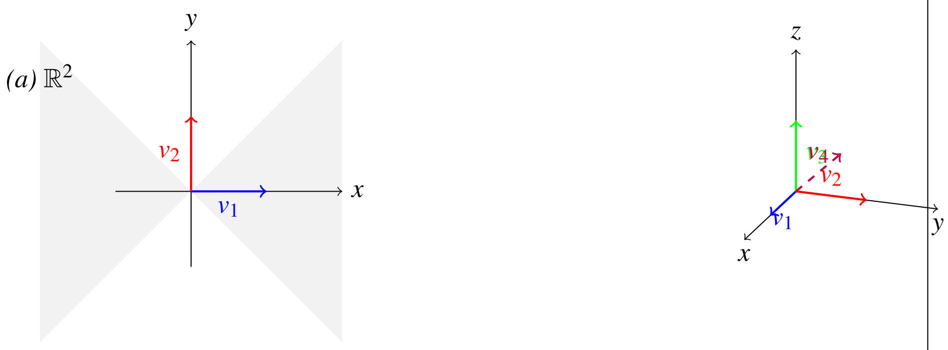
$$((v_1,\ldots,v_n)) = E,$$

ou équivalemment, si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des v_i.

Exemple 21. *Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est génératrice, car tout vecteur $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ s'écrit comme $a(1,0)+b(0,1)$.*

Exemple 22. *Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice, car les trois premiers vecteurs engendrent $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 23. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{1,X,X^2,X+1\}$ est génératrice, car tout polynôme $p(X) = a_0+a_1X+a_2X^2$ s'écrit comme $a_0\cdot 1+a_1\cdot X+a_2\cdot X^2+0\cdot(X+1)$.*



figureVisualisation de familles génératrices : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0),(0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$, vérifier si la famille $\{(1,1),(1,-1),(2,0)\}$ est génératrice.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer si la famille $\{1+X, X-X^2, 1+X^2\}$ est génératrice.

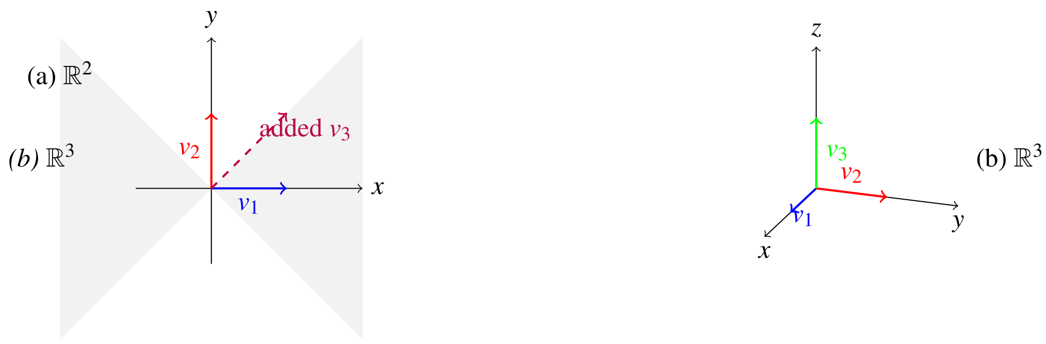
Proposition 4.3 (Propriétés des familles génératrices)**.**

1. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*
2. *Une famille génératrice minimale (sans vecteurs superflus) est une base.*
3. *Si une famille génératrice de n vecteurs est dans un espace de dimension m, alors $n \geq m$.*

Proof.

1. Si une famille engendre E, ajouter des vecteurs (qui sont dans E) ne change pas l'engendré.
2. Une famille génératrice minimale est libre, car si elle était liée, un vecteur serait combinaison des autres, donc supprimable, contredisant la minimalité.
3. Une famille génératrice de moins de m vecteurs engendrerait un sous-espace de dimension au plus $n < m$, ne pouvant égaler E.

□



figurePropriétés des familles génératrices : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, ajouter v_3 à une famille génératrice conserve la génération. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, une famille minimale est une base.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice en utilisant la propriété des sur-familles.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^2$, vérifier si la famille $\{(1,1),(1,-1)\}$ est une famille génératrice minimale, et donc une base.

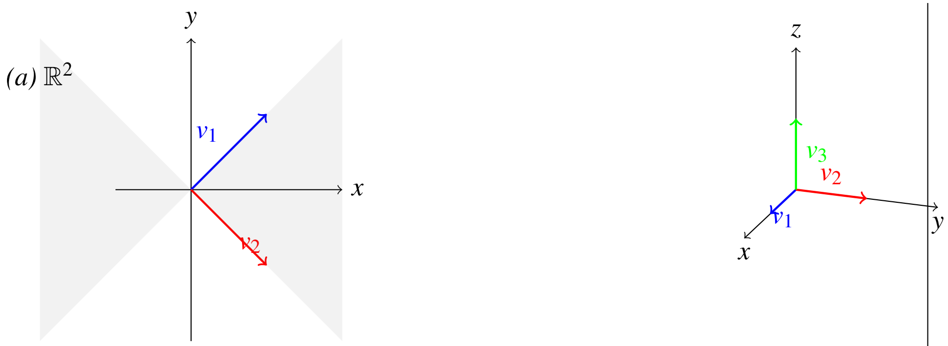
4.5 Bases d'un espace vectoriel

Définition 4.5 (Base)**.** *Une **base** d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui est à la fois **libre** et **génératrice**. Autrement dit, c'est un système minimal de générateurs ou un système maximal d'éléments indépendants.*

Exemple 24. *Dans $\mathbb{R}^3$, la famille standard $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base, car elle est libre et génératrice.*

Exemple 25. *Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,1),(1,-1)\}$ est une base, car elle est libre et génératrice (vu ci-dessus).*

Exemple 26. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{1,X,X^2\}$ est une base : libre et génératrice.*



figureVisualisation de bases : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(1,-1)\}$. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier si $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ est une base.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que $\{1+X, X-X^2, 1+X^2\}$ n'est pas une base.

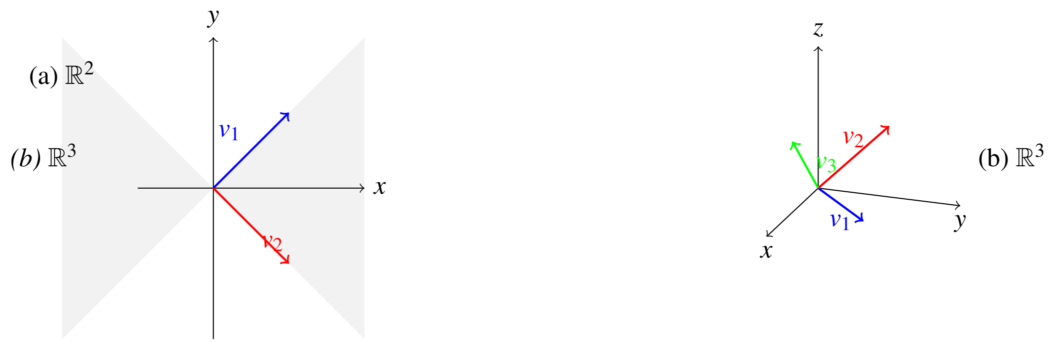
Théorème 1 (Propriétés des bases)**.**

1. *Toute base d'un espace vectoriel E a le même cardinal, appelé la* ***dimension*** *de E, notée $\dim E$.*
2. *Une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base.*
3. *Une famille génératrice de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base.*

Proof.

1. Si deux bases ont $p < q$ vecteurs, la base de p vecteurs est génératrice, mais $p \geq q$ (par la propriété des génératrices), contradiction.
2. Une famille libre de $n = \dim E$ vecteurs est maximale libre, donc génératrice, hence une base.
3. Une famille génératrice de $n = \dim E$ vecteurs est minimale génératrice, donc libre, hence une base.

□



figurePropriétés des bases : (a) Dans $\mathbb{R}^2$, une famille libre de 2 vecteurs est une base. (b) Dans $\mathbb{R}^3$, une famille génératrice de 3 vecteurs est une base.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ est une base en utilisant la propriété 3.

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que $\{1, X, X^2\}$ est une base en utilisant la propriété 4.

Remarque 4.1. *Ces notions sont interconnectées : une base combine liberté et capacité à engendrer l'espace entier, offrant un cadre pour représenter les vecteurs via des coordonnées uniques.*

5 L'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

L'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 sur un corps $\mathbb{K}$ forme un anneau et un espace vectoriel. Les matrices sont des outils puissants pour représenter des transformations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, avec des applications en géométrie, dynamique, et informatique.

Définition 5.1. *L'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de :*

- ***Addition*** *:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$.
- ***Multiplication*** *:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$.

Proposition 5.1. *$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un anneau avec unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Proof. Vérifions les axiomes d'un anneau :

- **Addition** : Associative, commutative, neutre $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, inverse $-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.
- **Multiplication** : Associative (vérifiable par calcul), distributive sur l'addition, unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Exemple 27. *Vérifions pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Unité : $AI_2 = A$.

5.1 Espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Proposition 5.2. *$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 4, avec la base* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Proof. Vérifions les axiomes :

- **Axiomes de groupe** : Addition associative, commutative, neutre $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, inverse $-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- **Axiomes du produit externe** : $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $1A = A$.

□

Exemple 28. *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2 Puissances de matrices

Pour calculer les puissances d'une matrice, nous utilisons le binôme de Newton dans un anneau. Soit R un anneau avec unité, et $a, b \in R$ tels que $ab = ba$ ou a commute avec l'unité. Le binôme de Newton s'écrit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Considérons une matrice $A = \lambda I_2 + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente ($B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Exemple 29. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + B$, *avec* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Puisque* $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *appliquons le binôme :*

$$A^n = (2I_2+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} B^k = (2I_2)^n + \binom{n}{1} (2I_2)^{n-1} B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 2^n \\ 0 \end{matrix}\right.$$

Pour $n = 3$ *:*

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vérifions : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

5.3 Inverse d'une matrice

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si $\det(A) = ad - bc \neq 0$. L'inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 30. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2\cdot 2 - 1\cdot 0 = 4$. *Alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 31. ***Application aux suites croisées*** *: Soit la suite récurrente* $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n$, *avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_n = (x_n, y_n)$, $\vec{u}_0 = (1,1)$. *Calculons* $\vec{u}_n = A^n\vec{u}_0$ *:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$ *:* $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4+2\cdot 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (8,4)$.

6 L'anneau $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

L'ensemble $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3 sur $\mathbb{K}$ forme un anneau et un espace vectoriel, utilisé pour représenter des transformations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, comme des rotations ou des déformations.

Proposition 6.1. $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *est un anneau avec unité* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proof. Vérifions :

- **Addition** : Associative, commutative, neutre $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, inverse $-(a_{ij})$.
- **Multiplication** : Associative, distributive, unité I_3.

□

Exemple 32. *Vérifions pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad AI_3 = A.$$

6.1 Espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Proposition 6.2. $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel de dimension* 9*, avec une base des matrices ayant un* 1 *à une position et des* 0 *ailleurs.*

Proof. Les axiomes sont vérifiés comme pour $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, avec addition et multiplication par un scalaire définies élément par élément. □

6.2 Puissances de matrices

Exemple 33. *Diagonale :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$. *Triangulaire :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 18 \\ 0 & 16 & 44 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$.

6.3 Inverse d'une matrice

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est inversible si $\det(A) \neq 0$. Le déterminant est :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Le *mineur* M_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j. Le *cofacteur* est $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. La *comatrice* est la matrice des cofacteurs, et la *transposée* de la comatrice est :

$$\operatorname{com}(A)^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

L'inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A)^T.$$

Exemple 34. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *:*

$$\det(A) = 1\cdot(1\cdot 0-(-1)\cdot 4) - 0\cdot(0\cdot 0-(-1)\cdot 3) + 2\cdot(0\cdot 4-1\cdot 3) = 4-6 = -2.$$

Cofacteurs : $C_{11} = 1\cdot 0-(-1)\cdot 4 = 4$, $C_{12} = -(0\cdot 0-(-1)\cdot 3) = -3$, *etc. Comatrice transposée :*

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 35. ***Application géométrique*** *: A représente une transformation dans* $\mathbb{R}^3$*, et* A^{-1} *annule cette transformation, utile pour résoudre des systèmes linéaires ou inverser des rotations.*

7 Exercices

Cette section propose une série d'exercices calculatoires et théoriques sur les espaces vectoriels de dimension ≤ 3, conçus pour consolider les concepts d'opérations vectorielles, de produits scalaires et vectoriels, de sous-espaces, de morphismes linéaires, et de matrices. Les exercices varient en difficulté, allant de calculs simples à des problèmes plus complexes adaptés au niveau du baccalauréat en sciences mathématiques. Ils incluent des applications géométriques, des suites récurrentes, et des vérifications théoriques pour renforcer la compréhension.

7.1 Exercice 1 : Calculs dans $\mathbb{R}^3$

Soient $\vec{u} = (2,-1,3)$, $\vec{v} = (1,0,2)$, et $\vec{w} = (0,4,-1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Calculer $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$.

b) Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Calculer le produit vectoriel $\vec{u}\times\vec{v}$ et vérifier qu'il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Déterminer l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution :

a) Calculons $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$:

$$2\vec{v} = 2(1,0,2) = (2,0,4), \quad \vec{u}+2\vec{v} = (2,-1,3)+(2,0,4) = (4,-1,7),$$

$$\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w} = (4,-1,7)-(0,4,-1) = (4,-5,8).$$

b) Produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 2 = 2+0+6 = 8$. Cauchy-Schwarz : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$, $|8| \leq \sqrt{14}\cdot\sqrt{5} \approx 5.92$, ce qui est vrai.

c) Produit vectoriel :

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ((-1)\cdot 2-3\cdot 0, 3\cdot 1-2\cdot 2, 2\cdot 0-(-1)\cdot 1) = (-2,-1,1).$$

Orthogonalité : $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = -2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 3 = -4+1+3 = 0$, et $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = -2\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 = 0$.

d) Aire : $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6} \approx 2.45$.

7.2 Exercice 2 : Produit extérieur dans $\mathbb{R}^2$

Soient $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (-2,4)$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer le produit extérieur $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

b) Vérifier l'antisymétrie du produit extérieur.

c) Interpréter géométriquement le résultat.

Solution :

a) $\vec{u}\wedge\vec{v} = 3\cdot 4-1\cdot(-2) = 12+2 = 14$.

b) Antisymétrie : $\vec{v}\wedge\vec{u} = (-2)\cdot 1-4\cdot 3 = -2-12 = -14 = -(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

c) Le résultat 14 représente l'aire orientée du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme il est positif, l'orientation est dans le sens direct.

7.3 Exercice 3 : Vérification d'un espace vectoriel

Soit $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$. Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en vérifiant tous les axiomes.

Solution : $V = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est la droite $y=-x$. Vérifions les axiomes :

- **Addition** :
  - Associativité : $((x_1,-x_1)+(x_2,-x_2))+(x_3,-x_3) = (x_1+x_2,-x_1-x_2)+(x_3,-x_3) = (x_1+x_2+x_3,-(x_1+x_2+x_3))$, et similaire pour l'autre parenthèse.
  - Commutativité : $(x_1,-x_1)+(x_2,-x_2) = (x_1+x_2,-x_1-x_2) = (x_2+x_1,-x_2-x_1)$.
  - Neutre : $(0,0) \in V$ car $0+0=0$, et $(x,-x)+(0,0)=(x,-x)$.
  - Inverse : Pour $(x,-x)$, $(-x,x) \in V$ car $-x+x=0$, et $(x,-x)+(-x,x) = (0,0)$.
- **Produit externe** :
  - Associativité : $\lambda(\mu(x,-x)) = \lambda(\mu x,-\mu x) = (\lambda\mu x,-\lambda\mu x) = (\lambda\mu)(x,-x)$.
  - Distributivité (scalaires) : $(\lambda+\mu)(x,-x) = ((\lambda+\mu)x,-(\lambda+\mu)x) = \lambda(x,-x)+\mu(x,-x)$.
  - Distributivité (vecteurs) : $\lambda((x_1,-x_1)+(x_2,-x_2)) = \lambda(x_1+x_2,-(x_1+x_2)) = \lambda(x_1,-x_1)+\lambda(x_2,-x_2)$.
  - Compatibilité : $1\cdot(x,-x) = (x,-x)$.

Ainsi, V est un espace vectoriel.

7.4 Exercice 4 : Sous-espace vectoriel

Soit $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$.

a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base de W.

Solution :

a) Vérifions les conditions :
  - Non vide : $(0,0,0) \in W$ car $0+2\cdot 0-0=0$.
  - Fermeture : Soient $\vec{u} = (x_1,y_1,x_1+2y_1)$, $\vec{v} = (x_2,y_2,x_2+2y_2)$. Alors :
  $$\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda(x_1+2y_1)+\mu(x_2+2y_2)).$$
  Vérifions : $(\lambda x_1+\mu x_2)+2(\lambda y_1+\mu y_2)-(\lambda(x_1+2y_1)+\mu(x_2+2y_2)) = 0$. Ainsi, W est un sous-espace.

b) Base : Résolvons $x+2y-z=0$, soit $z=x+2y$. Les vecteurs sont de la forme $(x,y,x+2y) = x(1,0,1)+y(0,1,2)$. Les vecteurs $(1,0,1)$, $(0,1,2)$ sont linéairement indépendants (déterminant non nul dans une sous-matrice) et engendrent W. Base : $\{(1,0,1),(0,1,2)\}$.

7.5 Exercice 5 : Morphisme linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, 2x-y)$.

a) Montrer que f est un morphisme linéaire.

b) Donner la matrice de f dans la base canonique.

Solution :

a) Vérifions : $f(\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)) = f(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2) = ((\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2), 2(\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)) = \lambda f(x_1,y_1)+\mu f(x_2,y_2)$.

b) Matrice : $f(1,0)=(1,2)$, $f(0,1)=(1,-1)$, donc la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7.6 Exercice 6 : Calcul de puissances de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2+B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $B^2=0$.

b) Calculer A^n en utilisant le binôme de Newton.

c) Calculer A^3.

Solution :

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Puisque $B^2 = 0$, $(3I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} B^k = 3^n I_2 + n3^{n-1} B = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

c) Pour $n = 3$: $A^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 3 \cdot 3^2 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

7.7 Exercice 7 : Suites croisées

Soit la suite récurrente $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_0 = (2,1)$.

a) Calculer $\vec{u}_n$.

b) Calculer $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

c) Trouver l'inverse de A et vérifier que $\vec{u}_n = A^{-1}\vec{u}_{n+1}$.

Solution :

a) De l'exercice 6 : $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}_n = A^n \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n + n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

b) Pour $n = 2$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \\ 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+6 \\ 9 \end{pmatrix} = (24,9)$. Pour $n = 3$: $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 \\ 27 \end{pmatrix} = (81,27)$.

c) Inverse : $\det(A) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 9$, $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vérifions pour $n = 2$:

$$A^{-1}\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{81}{3} - \frac{27}{9} \\ \frac{27}{3} \end{pmatrix} = (24,9) = \vec{u}_2.$$

7.8 Exercice 8 : Inverse d'une matrice 3×3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(A)$.

b) Calculer la comatrice et l'inverse de A.

c) Vérifier que $AA^{-1} = I_3$.

Solution :

a) Déterminant :

$\det(A) = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 3) + 2 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = 2 - 0 - 12 = -10.$

b) Mineurs : $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$, etc. Comatrice :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & 5 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inverse : $A^{-1} = \frac{1}{-10}\text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

c) Vérification : Calculons AA^{-1}, première ligne :

$$(1 \cdot (-\frac{1}{5}) + 0 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}, \dots) = (1,0,0).$$

Les autres lignes donnent I_3.

8 Système général d'ordre 2, et méthode de Cramer

Considérons le système linéaire suivant avec deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

où $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

8.1 Solution par Cramer

Le déterminant principal du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si $\Delta \neq 0$, la solution unique est donnée par :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

où :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ec$$

Si $\Delta = 0$, on a soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

8.2 Exemples

8.3 Exemple 1 : Système sans paramètre

Résoudre :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

Solution par Cramer :

$$\Delta = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14 \neq 0$$

$$\Delta_x = (5)(-1) - (3)(1) = -5 - 3 = -8$$

$$\Delta_y = (2)(1) - (5)(4) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}, \quad y = \frac{-18}{-14} = \frac{9}{7}$$

8.4 Exemple 2 : Système avec paramètre

Résoudre selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$:

$$(S_2) : \begin{cases} mx + 2y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$$

Solution par Cramer :

$$\Delta = m \cdot m - 2 \cdot 4 = m^2 - 8$$

$$\Delta_x = 3 \cdot m - 2 \cdot 6 = 3m - 12$$

$$\Delta_y = m \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6m - 12$$

- Si $m^2 - 8 \neq 0$ (i.e. $m \neq \pm 2\sqrt{2}$) :

$$x = \frac{3m - 12}{m^2 - 8}, \quad y = \frac{6m - 12}{m^2 - 8}$$

- Si $m = 2\sqrt{2}$:

$$\Delta = 0, \Delta_x = 6\sqrt{2} - 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Aucune solution}$$

- Si $m = -2\sqrt{2}$:

$$\Delta = 0, \Delta_x = -6\sqrt{2} - 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Aucune solution}$$

8.5 Résolution par Matrice Inverse

Le système (S) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Si A est inversible ($\det A \neq 0$), alors :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{de-bf}{ad-bc} \\ \frac{af-ce}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

8.6 Application à l'Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -14$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & 3/14 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \\ \frac{10}{7} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

8.7 Application à l'Exemple 2

Pour $m \neq \pm 2\sqrt{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 4 & m \end{pmatrix}, \quad \det A = m^2 - 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{m^2-8}\begin{pmatrix} m & -2 \\ -4 & m \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2-8}\begin{pmatrix} 3m-12 \\ -12+6m \end{pmatrix}$$

9 Système général d'ordre 3, et méthode de Cramer

Considérons le système linéaire suivant avec trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

9.1 Solution par Cramer

Le déterminant principal du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Si $\Delta \neq 0$, la solution unique est donnée par :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

où :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Si $\Delta = 0$, le système est soit incompatible, soit possède une infinité de solutions.

9.2 Exemples

9.2.1 Exemple 1 : Système numérique

Résoudre :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

Solution par Cramer :
Calculons d'abord Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1(5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3)) - 2(2 \cdot 1 - 2 \cdot 6) + 3(2 \cdot (-3) - 5 \cdot 6)$$

$$= (5+6) - 2(2-12) + 3(-6-30) = 11 + 20 - 108 = -77 \neq 0$$

Calculons les déterminants secondaires :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6(5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3)) - 2(4 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + 3(4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2)$$

$$= 6(5+6) - 2(4-4) + 3(-12-10) = 66 - 0 - 66 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 6(2 \cdot 1 - 2 \cdot 6) + 3(2 \cdot 2 - 4 \cdot 6)$$

$$= (4-4) - 6(2-12) + 3(4-24) = 0 + 60 - 60 = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1(5\cdot 2 - 4\cdot(-3)) - 2(2\cdot 2 - 4\cdot 6) + 6(2\cdot(-3) - 5\cdot 6)$$

$$= (10+12) - 2(4-24) + 6(-6-30) = 22 + 40 - 216 = -154$$

La solution est donc :

$$x = \frac{0}{-77} = 0, \quad y = \frac{0}{-77} = 0, \quad z = \frac{-154}{-77} = 2$$

9.2.2 Exemple 2 : Système avec paramètre

Résoudre selon les valeurs de $k \in \mathbb{R}$:

$$(S_2) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$

Solution par Cramer :
Calculons Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1(k\cdot k - 1\cdot 1) - 1(1\cdot k - 1\cdot 1) + 1(1\cdot 1 - k\cdot 1)$$

$$= (k^2-1) - (k-1) + (1-k) = k^2 - 1 - k + 1 + 1 - k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$$

- **Cas 1** : $k \neq 1$ ($\Delta \neq 0$)

  Calculons les déterminants secondaires :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} = (k\cdot k - 1\cdot 1) - (k\cdot k - 1\cdot k^2) + (k\cdot 1 - k\cdot k^2)$$

$$= (k^2-1) - (k^2-k^2) + (k-k^3) = k^2 - 1 - 0 + k - k^3 = -k^3 + k^2 + k - 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix} = (k\cdot k - 1\cdot k^2) - (1\cdot k - 1\cdot 1) + (1\cdot k^2 - k\cdot 1)$$

$$= (k^2-k^2) - (k-1) + (k^2-k) = 0 - k + 1 + k^2 - k = k^2 - 2k + 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = (k\cdot k^2 - k\cdot 1) - (1\cdot k^2 - k\cdot 1) + (1\cdot 1 - k\cdot 1)$$

$$= (k^3-k) - (k^2-k) + (1-k) = k^3 - k - k^2 + k + 1 - k = k^3 - k^2 - k + 1$$

  La solution est :

$$x = \frac{-k^3+k^2+k-1}{(k-1)^2}, \quad y = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2} = 1, \quad z = \frac{k^3-k^2-k+1}{(k-1)^2}$$

- **Cas 2** : $k = 1$ ($\Delta = 0$)

  Le système devient :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

  Il y a une infinité de solutions : $\{(x,y,1-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

9.3 Résolution par Matrice Inverse

Le système (S) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Si A est inversible ($\det A \neq 0$), alors :

$$X = A^{-1}B$$

où $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{com}(A)^T$ (comatrice transposée).

9.3.1 Application à l'Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -77$$

Calcul de la comatrice :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & -36 \\ -11 & -17 & 15 \\ -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse est donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{-77} \begin{pmatrix} 11 & -11 & -11 \\ 10 & -17 & 4 \\ -36 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions par $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{77} \begin{pmatrix} 66 - 44 - 22 \\ 60 - 68 + 8 \\ -216 + 60 + 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{77} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9.3.2 Application à l'Exemple 2 (cas $k \neq 1$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad \det A = (k-1)^2$$

Calcul de la comatrice :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & -(k-1) & 1-k \\ -(k-1) & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

L'inverse est donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} k^2-1 & -(k-1) & 1-k \\ -(k-1) & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

Multiplions par $B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$:

$$X = \frac{1}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} (k^2-1)\cdot 1 - (k-1)k + (1-k)k^2 \\ -(k-1)\cdot 1 + (k-1)k + 0\cdot k^2 \\ (1-k)\cdot 1 + 0\cdot k + (k-1)k^2 \end{pmatrix}$$

Après simplification, on retrouve les mêmes solutions que par la méthode de Cramer.

10 Exercices de synthèse

10.1 Exercice 1: BAC 2025

On rappelle que $M_3(\mathbb{R}), +, \times$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1-

a) Vérifier que : $A^2 = -2A$

b) En déduire que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$

2-

a) Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) En déduire que la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

3-

Montrer que : $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$
(on pourra utiliser l'identité : $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$)

4-

Montrer que : $\left(E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe commutatif.

5-

On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) T M(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x \in \mathbb{R}; \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$
a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$
b) En déduire que (E, T) est un groupe commutatif.

6-

Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

Solution

1-

a) Calculons A^2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -2A$$

Donc $A^2 = -2A$.

b) En utilisant $A^2 = -2A$, calculons $M(x) \times M(y)$:

$$M(x) \times M(y) = (I + xA)(I + yA) = I + xA + yA + xyA^2 = I + (x + y - 2xy)A = M(x + y - 2xy)$$

2-

a) Calculons $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = I + \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit donne :

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si $M\left(\frac{1}{2}\right)$ était inversible, le produit ne serait pas nul. Donc $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible.

3-

Montrons que $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication.
Soient $M(x), M(y) \in E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$, alors $x, y \neq \frac{1}{2}$.
En utilisant l'identité donnée :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$$

On montre que $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$, donc $M(x) \times M(y) \in E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$.

4-

Pour montrer que $\left(E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\},\times\right)$ est un groupe commutatif :

- Associativité : héritée de $M_3(\mathbb{R})$.
- Élément neutre : $M(0)=I$.
- Inverses : Pour $M(x)$, $M\left(\frac{-x}{1-2x}\right)$ est son inverse.
- Commutativité : $M(x)\times M(y)=M(y)\times M(x)$.

5-

a) Montrons que φ est un homomorphisme :

$$\varphi(x+y)=M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right)=M\left(\frac{1-x}{2}+\frac{1-y}{2}-\frac{1}{2}\right)=M\left(\frac{1-x}{2}\right)TM\left(\frac{1-y}{2}\right)=\varphi(x)T\varphi(y)$$

De plus, $\varphi(\mathbb{R})=E$ car tout $M(x)\in E$ s'écrit $\varphi(1-2x)$.

b) (E,T) est un groupe commutatif car φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).

6-

Pour montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif :

- (E,T) est un groupe commutatif.
- $(E-\{M\left(\frac{1}{2}\right)\},\times)$ est un groupe commutatif.
- Distributivité de $\times$ sur T : vérifiée par construction.

10.2 Exercice 2: sur les matrices d'ordre 2.

cet exercices est pour réviser son cours et l'approfondir

Toutes les matrices dans cet exercice sont considérées comme éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ où $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels.

On note $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et on considère la matrice $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

La matrice M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est dite *involutive* si et seulement si $M^2=I$.

1.

(a) Montrer que $M^2=(a+d)M-(ad-bc)I$.

(b) En déduire que M est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$.

(c) Dans le cas où $ad-bc\neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a,b,c et d.

2.

(a) Montrer que la matrice αI, α désignant un nombre réel, est involutive si et seulement si $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$.

(b) On suppose, dans cette question que $M\neq I$ et $M\neq -I$. Montrer que M est involutive si et seulement si $a+d=0$ và $ad-bc=-1$.

3.

Soit $A=\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}$.

(a) Trouver un nombre réel α tel que $A=\alpha I+B$, B étant une matrice involutive.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I et B.

(c) Montrer que A est inversible et vérifier que la formule trouvée en 3(b) est encore valable pour $n=-1$.

Solution

1.

(a) Calculons M^2:

$$M^2=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+cb&ac+cd\\ab+bd&cb+d^2\end{pmatrix}$$

D'autre part:

$$(a+d)M-(ad-bc)I=(a+d)\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}-(ad-bc)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(\begin{matrix}a(a+d)-(ad-bc)&c\\b(a+d)&d(a+\end{matrix}\right.$$

En développant:

$$= \begin{pmatrix} a^2+ad-ad+bc & ac+cd \\ ab+bd & ad+d^2-ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} = M^2$$

(b) Si $ad-bc \neq 0$, alors d'après (a), M vérifie $M^2-(a+d)M = -(ad-bc)I$, donc:

$$M\left(\frac{(a+d)I-M}{ad-bc}\right) = I$$

donc M est inversible. Réciproquement, si M est inversible, supposons $ad-bc=0$. Alors $M^2=(a+d)M$. Si $a+d \neq 0$, M est proportionnelle à un projecteur, donc non inversible (sauf si $M=0$, mais alors $M^2=0\neq I$). Si $a+d=0$, alors $M^2=0\neq I$. Contradiction.

(c) D'après (a), $M^{-1} = \frac{(a+d)I-M}{ad-bc} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2.

(a) $(\alpha I)^2 = \alpha^2 I$. Donc αI est involutive ssi $\alpha^2=1$, soit $\alpha=\pm 1$.

(b) Si M est involutive, $M^2=I$. D'après 1(a), cela donne:

$$(a+d)M-(ad-bc)I = I$$

Comme $M \neq \pm I$, M n'est pas proportionnelle à I, donc on doit avoir $a+d=0$ et $-(ad-bc)=1$. Réciproquement, si $a+d=0$ et $ad-bc=-1$, alors $M^2 = 0\cdot M-(-1)I = I$.

3.

(a) Posons $A=\alpha I+B$. On veut B involutive. D'après 2(b), B doit avoir trace nulle et déterminant -1. Calculons la trace:

$$\mathrm{tr}(A) = 5+(-1) = 4 = 2\alpha+\mathrm{tr}(B) = 2\alpha$$

Donc $\alpha=2$. Alors $B = A-2I = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Vérifions que B est involutive:

$$\mathrm{tr}(B)=0 \quad \text{et} \quad \det(B) = 3\times(-3)-(-4)\times 2 = -9+8 = -1$$

Donc B est bien involutive.

(b) $A=2I+B$. Comme $B^2=I$, on peut développer A^n avec la formule du binôme:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I)^{n-k}B^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}B^k$$

Or $B^0=I$, $B^1=B$, $B^2=I$, $B^3=B$, etc. Donc:

$$A^n = \sum_{k\text{ pair}}\binom{n}{k}2^{n-k}I + \sum_{k\text{ impair}}\binom{n}{k}2^{n-k}B$$

On peut simplifier en:

$$A^n = \frac{(2+1)^n+(2-1)^n}{2}I + \frac{(2+1)^n-(2-1)^n}{2}B = \frac{3^n+1}{2}I+\frac{3^n-1}{2}B$$

(c) $\det(A) = 5\times(-1)-(-4)\times 2 = -5+8 = 3\neq 0$, donc A est inversible. Pour $n=-1$:

$$A^{-1} = \frac{3^{-1}+1}{2}I+\frac{3^{-1}-1}{2}B = \frac{\frac{1}{3}+1}{2}I+\frac{\frac{1}{3}-1}{2}B = \frac{2}{3}I-\frac{1}{3}B$$

Calculons directement A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

D'autre part:

$$\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}B = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Les deux expressions coïncident.

10.3 Exercice 3:

Soient f et id les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives M et I de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dans la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I:

1. (a) Calculer M^{-1}.
   (b) Calculer M^2 et M^3.
   (c) En déduire que $M^4 = I$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice M^n en fonction de I, M, M^2, M^3.
3. Montrer que $M - I$ est inversible. En déduire la relation $M^3 + M^2 + M + I = 0$.

Partie II:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = \lambda X\}$.

1. (a) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que si $E_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels E_λ non réduits au vecteur nul. Préciser leur dimension. En donner une base.

Partie III:

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.
   (c) Déterminer u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.
3. Démontrer qu'il existe trois éléments $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I$$

Exercice 4

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note, pour tout x nombre réel, $f(x) = \det(xI - A)$.

1. Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. *(On donnera $f(x)$ sous forme polynomiale et on présentera soigneusement tous les calculs sur la copie.)*
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. *(On vérifiera que cette équation admet 3 racines distinctes x_1, x_2, x_3 avec $0 < x_1 < x_2 < x_3$ et que 1 est l'une d'entre elles.)*
3. Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, le système $AX = x_i X$ (l'inconnu est X)admet au moins une solution.

10.4 Problème

Problème d'analyse faisant intervenir l'algèbre.
Ce problème ne doit pas être traité en temps limité, mais constitue un défi pour se préparer au concours général marocain.

Ce problème utilise des notions hors programme de mathématiques du lycée.

Le programme marocain de mathématiques ne contient pas la notion de borne supérieure et/ou inférieure, ni celle de densité. Cependant, au niveau du baccalauréat, il existe une alternative mécanique sous forme d'équivalence : la caractérisation par les suites adjacentes, qui remplace l'approche par les bornes supérieures/inférieures.

1. **Définitions**
   - Soit $(x_n)_n$ une suite réelle. On dit que $(x_n)_n$ est **de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon.$$

- $(x_n)_n$ est dite **stationnaire à partir d'un certain rang** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et un réel c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n = c.$$

- Une **suite extraite** de $(x_n)_n$ est une suite de la forme $(x_{\phi(n)})_n$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
- Un nombre réel a est appelé **valeur d'adhérence** pour $(x_n)_n$ si cette dernière admet une suite extraite convergente vers a.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Une suite réelle est dite **convergente dans** A si elle est convergente et sa limite appartient à A.
- A est dite **fermée** si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.
- A est dite **compacte** si toute suite d'éléments de A admet une suite extraite qui converge dans A.
- A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de A.
- La **borne supérieure** (resp. **borne inférieure**) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est le plus petit (resp. plus grand) majorant (resp. minorant) de A, noté $\sup A$ (resp. $\inf A$).

$$\sup A = \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leq M\}.$$

2. Structure d'anneau :

a) Vérifier que l'ensemble $B(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ des suites réelles bornées est un anneau commutatif.

b) Est-il intègre ? un corps ? (justifier votre réponse)

c) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy.

   i) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $p \geq n_0$ on a $|x_p - x_{n_0}| < 1$.

   ii) Déduire que la suite $(x_n)_n$ est bornée.

d) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

   i) Montrer que la suite $(x_n y_n)_n$ est de Cauchy.
   (Indice : $x_p y_p - x_q y_q = x_p(y_p - y_q) + (x_p - x_q)y_q$).

   ii) Montrer que l'ensemble des suites de Cauchy est un sous-anneau de $B(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

3. Suite de Cauchy :

a) Montrer qu'une suite réelle convergente est de Cauchy.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   i) Montrer que $|s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2}$.

   ii) $(s_n)_n$ est-elle de Cauchy ?

   iii) En déduire que $(s_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

c) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy.

   i) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_n = \inf\{x_p \mid p \geq n\}$ et $v_n = \sup\{x_p \mid p \geq n\}$. Justifier leur définition.

   ii) Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante.

   iii) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers u et v avec $u \leq v$.

   iv) Pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - v_{n_0}| < \varepsilon$. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

   v) Conclure que $(x_n)_n$ converge.

4. Topologie & suites :

a) Donner un exemple de partie compacte de $\mathbb{R}$ (justifier).

b) $\mathbb{R}$ est-il compact ?

c) Montrer que toute partie compacte de $\mathbb{R}$ est fermée.

d) Soit A une partie compacte non majorée de $\mathbb{R}$.

   i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, x_n > n$.

   ii) Calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

   iii) Conclure à une contradiction.

e) Montrer que A est minorée, puis bornée.

f) Montrer que $[a, +\infty)$ est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$.

g) Donner un exemple de fermé non compact de $\mathbb{R}$.

h) Montrer que toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire. En déduire que $\mathbb{Z}$ est fermé.

5. Valeur d'adhérence :

a) Soit $(x_n)_n$ définie par $x_n = (-1)^n$. Quelles sont ses valeurs d'adhérence ?

b) Montrer qu'une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence.

c) En déduire la nature de $(x_n)_n$.

d) Soit $(x_n)_n$ définie par $x_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $x_{2n+1} = 2n+1$.

   i) Combien a-t-elle de valeurs d'adhérence ?

   ii) Converge-t-elle ?

   iii) La réciproque de b) est-elle vraie ?

6. Densité :

a) Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est dense ssi pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite dans A convergeant vers a.

b) Montrer qu'une partie dense dans $\mathbb{R}$ n'est ni majorée, ni minorée, ni finie.

c) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{Z}$.

   i) Montrer que $\mathbb{Z} \subset A$.

   ii) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $]k, k+1[\cap A \neq \emptyset$.

   iii) En déduire que $A \cap [0,1] \neq \emptyset$. Soit $a \in A \cap [0,1]$.

   iv) Soient $x < y$ dans $\mathbb{R}$.

   - Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a^n$.
   - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N < y - x$.
   - Trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x < pa^N < y$.
   - Conclure sur la densité de A.

d) Quels sont les sous-anneaux non denses de $\mathbb{R}$?

e) Soit $p \geq 2$ un entier. On pose $P = \left\{ \frac{m}{p^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

   i) Vérifier que P est un sous-anneau.

   ii) Montrer que P est dense dans $\mathbb{R}$.

   iii) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   - Montrer que $\frac{\lfloor p^n x \rfloor}{p^n} \leq x < \frac{\lfloor p^n x \rfloor}{p^n} + \frac{1}{p^n}$.
   - Déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor p^n x \rfloor}{p^n}$.
   - Retrouver la densité de P.

f) Déduire que l'ensemble D des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.