Exercice 1. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = n^{22} - 8n^{20} + 17 \quad b_n = \frac{n^3 - n + 1}{n^2 - n + 1} \quad c_n = 2n - \ln n \quad d_n = n^2 e^{-n}$$
$$e_n = \sqrt{n^2+1} - n \quad f_n = \frac{(\ln n)^{2026}}{n^2} \quad g_n = \frac{3^n}{n^2}; a \in \mathbb{R} \quad h_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1) \times n!}$$

Exercice 2. En factorisant par le terme qui domine en $+\infty$ déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1} \qquad b_n = (2n - \ln n) \ln(n+1) \qquad c_n = \sqrt{n^3+1} - n$$

Exercice 3. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3^n}{n!}$.
1. Montrer qu'il existe un entier N à partir duquel $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
2. En déduire que pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_N$. Conclure.

Exercice 4. **Critères de convergence**
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et soit $l \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition d'une suite convergente.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0 \text{ et } \lim u_n = l \quad \Rightarrow \quad l \geq 0.$$
(On pourra raisonner par l'absurde.)
3. Rappeler la définition d'une suite bornée.
4. Montrer que :
   (a) Si (u_n) est convergente, alors (u_n) est bornée.
   (b) Si $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = l$.
   (c) Si $|u_n - l| \leq k^n$ avec $|k| < 1$, alors $\lim u_n = l$.
   (d) Si $|u_n| \leq k v_n$ avec $|k| < 1$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.
   (e) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.
   (f) Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
   (g) Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.
   (h) (Critère des racines) : Si $\lim u_n^{1/n} < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
5. Une suite réelle (y_n) est dite **de Cauchy** si :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \geq N, \ |y_n - y_m| < \varepsilon.$$
   (a) Montrer que cette définition est équivalente à :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon.$$
   (b) Montrer que :
$$(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow (u_n) \text{ est de Cauchy.}$$
   (c) **Application :** Soit $(H_n)_{n>0}$ la suite définie par :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
      i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
      ii. En déduire que $(H_n)_{n>0}$ n'est pas une suite de Cauchy.
      iii. En déduire que $(H_n)_{n>0}$ n'est pas convergente.
6. **Applications:** Pour chaque suite ci-dessous, justifier sa convergence ou sa divergence en appliquant l'un des critères étudiés :
   (a) $u_n = \frac{1}{n}$
   (b) $u_n = \frac{1}{n^2}$
   (c) $u_n = \frac{n}{n+1}$
   (d) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   (e) $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n}$
   (f) $u_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$
   (g) $u_n = \frac{1}{n!}$
   (h) $u_n = \frac{3^n}{n!}$
   (i) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
   (j) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

***Exercice 5*.** On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et déterminer ses limites éventuelles.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 2|$. Conclure.

***Exercice 6*.** Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n+1}$ et $u_0 > 0$.
1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n$ existe et $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u.
2. La suite est-elle convergente et calculer sa limite éventuelle ?
3. Montrer que $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$ puis que $\forall n \geq 0, u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$.
Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

***Exercice 7*.** Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n > 0$. Déterminer la monotonie de u et les limites éventuelles de u ?

***Exercice 8*.** On considère une suite u positive telle que $\forall n \geq 0$, $u_{n+2} \leq \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$.
On introduit la suite v définie par $v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n$ avec $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
1. Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq v_n$.
2. Déterminer la forme de la suite v.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

***Exercice 9*.** On définit deux suites a et b par $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.

***Exercice 10*.** Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par
$u_0 = a, v_0 = b$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
1. Montrer que $\forall n \geq 0, 0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante.
3. Démontrer que $\forall n \geq 0$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
4. Déduire des questions précédentes que les deux suites convergent vers la même limite l.
5. Calcul de la limite de u. On note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
(a) Déterminer la limite de la suite (u_nv_n).
(b) Montrer que la suite (u_nv_n) est constante et expliciter la constante.
(c) En déduire la limite de u et v.

***Exercice 11*.** Soit (u_n) une suite décroissante qui converge vers 0 et $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que S converge.
Applications: Justifier la convergence des suites suivantes:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{n\geq 0}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k r^k\right)_{n\geq 0} \text{ avec } 0 < r < 1, \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}\right)_{n\geq 2}.$$

***Exercice 12*.** **Limite de Césaro,** Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers un réel ℓ.

On pose alors, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n| \leq \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Sans nouveaux calculs, montrer que dans le cas général, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

***Exercice 13*.** **Caractérisation séquentielle de la limite.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$ un point de D.

On s'intéresse à l'équivalence suivante :
$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff$
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (D \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}, \left(\lim_{n\to+\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell\right).$

1. Rappeler la définition de la limite d'une fonction f en un point a, c'est-à-dire la signification de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. Rappeler la définition de la limite d'une suite convergente vers a, c'est-à-dire la signification de $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

3. **Sens direct :** Montrer que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

4. **Sens réciproque : par contraposé** Montrer que si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Remarque : La notation $(D \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \in D \setminus \{a\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice 14*.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$.

1. Trouver une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(x_n)$ tende vers $+\infty$.

2. Trouver une suite (y_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(y_n)$ tende vers 0.

3. La fonction f admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

***Exercice 15*. Démonstration de théorème des valeurs intermidaires**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ en construisant deux suites adjacentes qui convergent vers c.

On définit les suites (a_n) et (b_n) par dichotomie de la manière suivante :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
  - Si $f(c_n) \leq 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  - Si $f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.
   Indication : Raisonner par récurrence.

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, c'est-à-dire :
   - (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
   - $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

3. En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite $c \in [a, b]$.

4. Montrer que $f(c) = 0$.
   Indication : Utiliser la continuité de f et le passage à la limite dans les inégalités $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

5. Démontrer à présent la version générale c'est-à-dire : si f est continue sur $[a, b]$ et k est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.