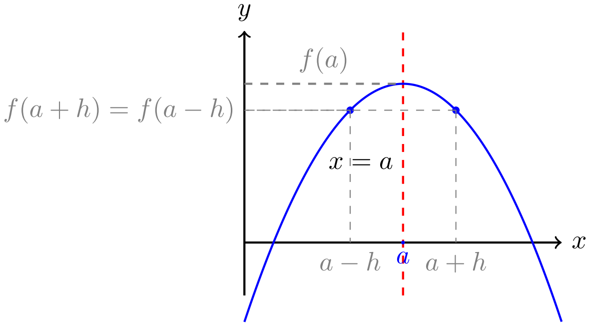
Exercice 1. Soit f une fonction définit sur un domaine D, et C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal donné.
On suppose que f vérifié la propriété suivante:

$$\forall h \in \mathbb{R}; \quad a+h \in D \implies a-h \in D$$

1. Montrer que si, on a:

$$\forall h \in \mathbb{R}; \quad a+h \in D \implies f(a-h) = f(a+h)$$

Alors, C_f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie,

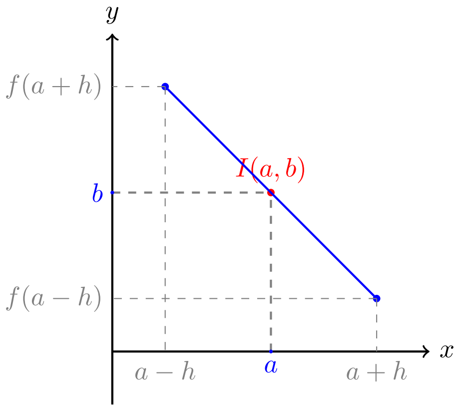


Symétrie axiale par rapport à $(\Delta) : x = a$

2. Montrer que si, on a:

$$\forall h \in \mathbb{R}; \quad a+h \in D \implies \frac{1}{2}[f(a+h) + f(a-h)] = b$$

Alors, C_f admet le point $I(a, b)$ centre de symétrie.



Symétrie centrale par rapport à $I(a, b)$

Exercice 2. On désigne par f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x + \cos x = 0$. En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f admet pour période π.
3. On appelle C la représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Montrer que C admet le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pour centre de symétrie.
4. Faire l'étude de f sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et tracer C, ainsi que la tangente à C en A.

Exercice 3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \in]-\infty, -2] \\ \arctan \sqrt{x+2} & \text{si } x \in]-2, +\infty[\end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

1. Montrer que la fonction f est continue en -2.
2. (a) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en -2.
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{x \to -2^+} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha}{\tan^2 \alpha}$$
   (c) En déduire que f n'est pas dérivable à droite en -2.
   Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Étudier les branches infinies de la courbe (C).
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in]-\infty, -2], \quad f(x) - (2x+3) > 0$$
   (c) Construire la courbe (C).
4. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I =]-\infty, -2]$.
   (a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
   (b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans l'intervalle J.

Partie II

Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, 2]$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = h(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x \leq x$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 2$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. (a) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, 2]$.
   (b) Montrer que $h([0, 2]) \subset [0, 2]$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4. Soit f la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$\frac{x}{x^2+1} < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$
   (b) En déduire les variations de la fonction f.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation des demi-tangentes à (C) en O.
   (b) Construire la courbe (C).

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

On rappelle que la notation $h(x)^{g(x)}$ désigne : $e^{g(x)\ln(h(x))}$.

1. Calculer l'ensemble de définition de f, D_f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et en -1.

4. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Montrer que f est décroissante sur $]1, +\infty[$

6. Donner le tableau de variation de f.

7. Donner l'équation des tangentes à C_f dans les bornes de D_f

8. Tracer sommairement la courbe de f.

Exercice 6. On étudie la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

1. (a) Déterminez l'ensemble de définition de f.
   (b) Montrez que f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminez les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Étudiez la dérivabilité de f, et déterminez sa dérivée.
   Le prolongement de f est-il dérivable ?

3. (a) Étudiez les variations de la fonction $g : u \mapsto 1 + (1+u)e^u$.
   (b) En déduire les variations de f.

4. Étudiez les branches infinies de f.

   Montrez que la représentation graphique de f admet des asymptotes que l'on déterminera.
   Tracez la représentation graphique de f.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

1. Réduire le domaine d'étude de f.

2. Étudiez les variations de f et précisez les limites aux bornes.

3. Déterminez un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la branche infinie.

4. Étudiez la concavité de f et calculez les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

5. Tracez de la représentation graphique de f (on donnera les tangentes en 0 et aux points d'inflexion).

Exercice 8. On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. (a) Déterminer D, l'ensemble de définition de la fonction f.
   (b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

2. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.

3. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

Exercice 9. On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{2-\cos x}{2+\cos x}}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$$

2. On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$$

   Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\cos x\right) + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 10. On considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \arccos x$$

Soit F une primitive de f telle que $F(1) = 0$.

1. On considère la fonction numérique G définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad G(x) = F(-x) - F(x) + \pi x$$

   (a) Déterminer la fonction dérivée G' de la fonction G.

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad F(-x) - F(x) = -\pi x$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad -\pi \leq F(x) \leq 0$$

3. On considère la fonction numérique H définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad H(x) = F(x) - xf(x)$$

   (a) Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad F(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

Exercice 11. Soient a un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par:

$$f(x) = \frac{\sin(x^a)}{x}$$

.

1. On suppose dans cette question que $a > 2$.

   (a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$? Est-elle dérivable en 0 ? Si oui, la fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

2. Refaire toutes les questions précédentes lorsque $a = \dfrac{3}{2}$.