Sommaire

I Rappels et complètements :

Définition

Une fonction $f : A \to B$ est *bijective* si elle est à la fois :

- **injective** : tout élément de B a *au plus* un antécédent dans A ;
- **surjective** : tout élément de B a *au moins* un antécédent dans A.

Autrement dit, chaque élément de B possède *exactement* un antécédent dans A. Pour déterminer si une fonction est bijective, on peut :

- calculer explicitement son inverse ;
- utiliser des critères comme la monotonie ou l'étude de la dérivée.

Remarque:

Si on prend la fonction (co-restriction) définie par : $f : A \to f(A)$; où on a changé l'ensemble d'arrivée à $f(A)$ au lieu de B.

Alors par définition la fonction f est surjective et pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective.

On retient donc :

$$\boxed{f : A \to f(A) \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective}}$$

Exemple 1 : Fonction homographique

Considérons $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On détermine son inverse :

$$y = \frac{2x+1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y(1-x) = 2x+1$$

$$y - yx = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = x(y+2)$$

$$x = \frac{y-1}{y+2}, \quad y \neq -2$$

Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Exemple 2 : Fonction quadratique

Soit $g(x) = x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Deux valeurs distinctes peuvent donner la même image :

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Rightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2\sqrt{3}) = 0.$$

Ainsi $x_1 = x_2$ ou $x_1 + x_2 = -2\sqrt{3}$. Comme il existe des couples distincts (x_1, x_2) vérifiant cette deuxième égalité, g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Restriction et bijectivité En se restreignant à $I = [-\sqrt{3}, +\infty[$, l'égalité $x_1 + x_2 = -2\sqrt{3}$ est impossible avec $x_1, x_2 \in I$, donc g devient injective. L'image est alors $[-4, +\infty[$, ce qui permet de dire que g est bijective de I sur $[-4, +\infty[$.

Calcul de la réciproque On cherche x en fonction de y dans l'équation :

$$y = x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 1.$$

Cela revient à résoudre :

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,x - (y + 1) = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(y+1)) = 12 + 4(y+1) = 4(y+4).$$

Les solutions sont :

$$x = \frac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{y+4}}{2} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{y+4}.$$

Sur l'intervalle $I = [-\sqrt{3}, +\infty[$, on choisit le signe $+$ pour rester dans I, d'où :

$$g^{-1}(y) = -\sqrt{3} + \sqrt{y+4}, \quad y \in [-4, +\infty[.$$

Ainsi, $g^{-1} : [-4, +\infty[\to [-\sqrt{3}, +\infty[$ est la réciproque de g.

Exemple 3 : Fonction trigonométrique

Considérons $h(x) = \tan(2x)$ définie sur

$$J = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Injectivité Supposons $h(x_1) = h(x_2)$, c'est-à-dire :

$$\tan(2x_1) = \tan(2x_2).$$

Comme tan est π-périodique, cela implique :

$$2x_1 = 2x_2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Or, $2x_1$ et $2x_2$ appartiennent tous deux à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, un intervalle de longueur π, la seule possibilité est $k = 0$, ce qui donne $x_1 = x_2$. Donc h est injective sur J.

Surjectivité On a $h : J \to \mathbb{R}$ et $h(J) = \mathbb{R}$

Donc h est surjective.

Et on a $\forall x \in J$; $h^{-1}(h(x)) = x$ et $\forall y \in h(J)$; $h(h^{-1}(y)) = y$

II Critères de bijectivité

Dans ce qui suit, nous allons présenter de nouveaux critères permettant d'établir la bijectivité d'une fonction. Nous travaillerons principalement sur des fonctions continues. En effet, si une fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle, on peut affirmer qu'elle est bijective (à la fois injective et surjective) sur cet intervalle.

Par ailleurs, lorsque la fonction est dérivable, sa monotonie se détermine par l'étude du signe de sa dérivée. Cette approche différentielle simplifie considérablement l'analyse et nous fournit ainsi un second critère pratique de bijectivité.

Nous appliquerons ces résultats pour construire rigoureusement les fonctions :

- racine n-ième
- puissance rationnelle
- logarithme népérien
- exponentielle
- les fonctions réciproques circulaire

II.1 Par monotonie

Théorème 1 (Bijectivité des fonctions continues strictement monotones). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors :*

- *Si f est strictement croissante sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*
- *Si f est strictement décroissante sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

Démonstration. **Injectivité** : Par stricte monotonie, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$ (ou $>$ pour décroissante), donc $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Surjectivité :Par définition f est surjective de I vers $f(I)$. □

II.2 Par dérivation

Théorème 2 (Bijectivité via la dérivée). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors :*

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante et réalise une bijection de I sur $f(I)$.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante et réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

Démonstration. **Stricte monotonie** : Supposons $f'(x) > 0$. Soient $x_1 < x_2$ dans I. Le taux d'accroissement $T(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est strictement positif donc la fonction f est strictement croissante. Le cas $f' < 0$ est analogue.

Bijectivité : Résulte du théorème précédent, car f est continue (comme dérivable) et strictement monotone. □

On va maintenant voir comment on dérive une fonction réciproque.

Théorème 3 (Dérivée de la fonction réciproque). *Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable, et on a :*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \textit{pour tout } y \in J.$$

Démonstration. On part de la relation fonctionnelle :

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \text{pour tout } y \in J.$$

En dérivant les deux membres par rapport à y (en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées), on obtient :

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

Comme $f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0$ par hypothèse, on peut isoler $(f^{-1})'(y)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

III Fonctions racine n-ième et puissances rationnelles

III.1 Construction des racines n-ièmes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction :

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^n.$$

- f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$ pour $x > 0$.
- Par le théorème 2, f_n est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction racine n-ième est la bijection réciproque de f_n :

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad y \mapsto \sqrt[n]{y} \quad \text{tel que} \quad (\sqrt[n]{y})^n = y.$$

III.2 Propriétés des racines n-ièmes

- $(\sqrt[n]{x})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$ pour $x \geq 0$.
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ pour $x, y \geq 0$.
- $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$ pour $x \geq 0$, $y > 0$.
- La fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, avec $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ (par théorème de dérivation des fonctions réciproques).

Démonstration. 1. **Preuve de $(\sqrt[n]{x})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$ pour $x \geq 0$:**
Par définition, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel positif y tel que $y^n = x$. Ainsi :

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{(par définition de la racine } n\text{-ième)}$$

Pour $\sqrt[n]{x^n} = x$, si $x \geq 0$, alors :

$$\sqrt[n]{x^n} = y \quad \text{où} \quad y^n = x^n \implies y = x \quad (\text{car } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0)$$

Autrement : on a $\sqrt[n]{x^n} = f^{-1}of = x$ et $\sqrt[n]{x}^n = fof^{-1} = x$

2. **Preuve de $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ pour $x, y \geq 0$:**
Posons $a = \sqrt[n]{x}$ et $b = \sqrt[n]{y}$. Alors :

$$a^n = x \quad \text{et} \quad b^n = y \implies (ab)^n = a^n b^n = xy$$

Par définition de la racine n-ième :

$$\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

3. **Preuve de $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$ pour $x \geq 0$, $y > 0$:**
Posons $a = \sqrt[n]{x}$ et $b = \sqrt[n]{y}$. Alors :

$$a^n = x \quad \text{et} \quad b^n = y \implies \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{x}{y}$$

Par définition de la racine n-ième :

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

□

Exercice:

Calculer les limites suivantes:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}+1}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5+3x^3-2x} - x$

Solution:

- **Première limite** : Posons $t = x^{1/60}$ (où 60 est le PPCM de 3,4,5). Alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}+1} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{20}+t^{15}}{t^{12}+1} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{20}(1+t^{-5})}{t^{12}(1+t^{-12})} \\ &= \lim_{t\to+\infty} t^8 \cdot \frac{1+t^{-5}}{1+t^{-12}} = +\infty\end{aligned}$$

- **Deuxième limite** : Décomposons la fraction :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^{3/4}}{x^{1/2}} - \frac{x^{2/5}}{x^{1/2}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(x^{1/4} - x^{-1/10}\right) \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

- **Troisième limite** : Reconnaissons la définition de la dérivée en 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} &= \lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}}\\ &= \frac{f'(1)}{g'(1)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1^{-2/3}}{\frac{1}{4}\cdot 1^{-3/4}} = \frac{4}{3}\\ &\text{où} \quad f(x)=x^{1/3}, g(x)=x^{1/4}\end{aligned}$$

- **Quatrième limite** : Utilisons l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+3x^3-2x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x}{(\sqrt[5]{x^5+3x^3-2x})^4+\cdots+x^4}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{5x^4}=0\end{aligned}$$

III.3 Puissances rationnelles

Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $q>0$. On définit pour $x>0$:

$$x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p}.$$

Cette définition est cohérente et étend les puissances entières. La fonction $x \mapsto x^{p/q}$ est bijective sur des domaines appropriés selon le signe de p/q et la parité de q.

Exercice 1. Montrer que pour $r,s\in\mathbb{Q}$, $x^{r+s}=x^rx^s$ et $(x^r)^s=x^{rs}$ pour $x>0$.

IV Fonction logarithme népérien

IV.1 Définition

La fonction logarithme népérien est l'unique fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$,
- $\ln(1)=0$.

(L'existence et l'unicité d'une telle fonction résultent de la théorie des équations différentielles ordinaires, car $x\mapsto 1/x$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.)

IV.2 Propriétés

Théorème 4. *La fonction* $\ln$ *vérifie :*

1. $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$, *donc* $\ln$ *est strictement croissante.*
2. $\ln''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, *donc* $\ln$ *est concave.*
3. $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,
   Donc $\ln$ *est bijective de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Les points 1 et 2 découlent directement de la définition et de la dérivation.

Pour le point 3 : Puisque $\ln$ est strictement croissante et $\ln(1)=0$, on a $\ln(x)>0$ pour $x>1$ et $\ln(x)<0$ pour $0<x<1$.

Montrons que $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Soit $M>0$. Choisissons $a=2>1$, alors $\ln 2=\beta>0$ (car ln croissante). Posons $n=\lceil M/\beta\rceil+1$, alors pour $x=2^n$, $\ln x=n\beta>M$ (propriété prouvée ci-après). Comme $2^n\to+\infty$ quand $n\to+\infty$, la limite est $+\infty$.

Pour $x\to0^+$, posons $z=1/x\to+\infty$, alors $\ln x=-\ln z\to-\infty$ (propriété $\ln(1/x)=-\ln x$ découle de la propriété fondamentale ci-après). □

IV.3 Propriété fondamentale

Exercice 2. Montrer que $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ pour $x,y>0$.

Démonstration. Fixons $y>0$ et posons $f(x)=\ln(xy)-\ln x-\ln y$. Alors $f'(x)=\frac{y}{xy}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$. Donc f est constante. Comme $f(1)=\ln y-\ln 1-\ln y=0$, on a $f(x)=0$ pour tout $x>0$. □

Par récurrence, $\ln(x_1\cdots x_k)=\sum\ln x_i$, et pour x^r avec $r\in\mathbb{N}$, $\ln(x^r)=r\ln x$. Cela s'étend aux rationnels et aux négatifs via $\ln(1/x)=-\ln x$.

IV.4 Croissances comparées

Théorème 5. *Pour $n, m \in \mathbb{Q}^*$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^n |\ln x|^m = 0.$$

Exercice 3. Exercices sur les croissances comparées

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{0.1}}$
3. $\lim_{x \to 0^+} x^4 (\ln x)^5$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x^2+1))^3}{x^{1/3}}$
5. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} |\ln x|^{10}$

Solutions

1. **Limite en** $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^{1/2}} = 0 \quad (\text{théorème avec } n = \frac{1}{2}, m = 3)$$

2. **Limite en** $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{0.1}} = 0 \quad (\text{théorème avec } n = 0.1, m = 2)$$

3. **Limite en** 0^+ :

$$\lim_{x \to 0^+} x^4 (\ln x)^5 = 0 \quad (\text{théorème avec } n = 4, m = 5)$$

4. **Limite en** $+\infty$ (avec adaptation) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x^2+1))^3}{x^{1/3}} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x^2+x^2))^3}{x^{1/3}} \quad (\text{car } x^2+1 \leq 2x^2 \text{ pour } x \geq 1)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(2x^2))^3}{x^{1/3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln 2 + 2\ln x)^3}{x^{1/3}} = 0$$

5. **Limite en** 0^+ :

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/2} |\ln x|^{10} = 0 \quad (\text{théorème avec } n = \frac{1}{2}, m = 10)$$

Exercice 4. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, même petit.

Exercice : Étude de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

Énoncé

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine et en déduire les éventuelles asymptotes.
3. Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Solution détaillée

1. Domaine de définition La fonction f est définie lorsque :

- $\ln x$ existe $\Rightarrow x > 0$
- Le dénominateur x^2+1 ne s'annule pas (toujours vrai car $x^2+1 \geq 1 > 0$)

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]0, +\infty[}$$

2. Limites et asymptotes

- **En** 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

- **En** $+\infty$: Par croissance comparée, on sait que $\dfrac{\ln x}{x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^+}$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

3. Dérivée et variations La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient de deux fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - \ln x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2+1)^2}$$

Étude du signe :

- Le dénominateur est toujours positif sur $\mathcal{D}_f$
- Étudions le numérateur : $N(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

On remarque que :

- $N(1) = 1 + 1 - 0 = 2 > 0$
- $N(e) = 1 + e^2 - 2e^2 \approx -3.7 < 0$

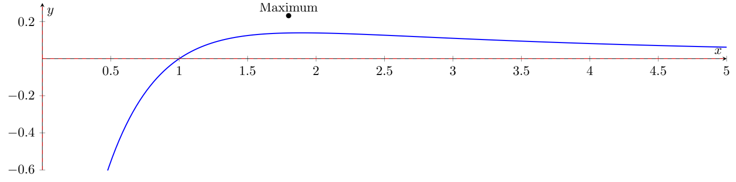
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]1, e[$ tel que $N(\alpha) = 0$.

4. Tableau de variations

x	0		α		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

La fonction admet un maximum en $x = \alpha \approx 1.8$ avec $f(\alpha) \approx 0.23$.

5. Représentation graphique



V Fonction exponentielle

V.1 Définition

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de ln :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(x) = y \iff \ln y = x.$$

V.2 Propriétés

Théorème 6. *La fonction exponentielle vérifie :*

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ *(où* $e \approx 2.718$ *est la base du logarithme népérien).*
3. $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\exp'(x) = \exp(x)$.
4. $\exp$ *est convexe (car* $\exp''(x) = \exp(x) > 0$*) et strictement croissante.*
5. $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$.

Démonstration. 1. Posons $a = \exp(x)$, $b = \exp(y)$. Alors $\ln(ab) = \ln a + \ln b = x + y$, donc $ab = \exp(x + y)$.

2. $\exp(0) = y \iff \ln y = 0 \iff y = 1$. $\exp(1) = y \iff \ln y = 1$, noté e.

3. Par le théorème de dérivation des fonctions réciproques : $(\ln^{-1})'(x) = 1/\ln'(\exp x) = 1/(1/\exp x) = \exp x$.

4. Découle de $\exp' > 0$ et $\exp'' > 0$.

5. Résulte de la bijectivité et des limites de ln. □

Exercice 5. Montrer que $\exp(rx) = (\exp x)^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.

V.3 Croissances comparées (Exponentielle vs Polynômes)

Théorème 7. *Pour tout polynôme P et tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$$

Plus précisément, pour $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{e^{ax}} = 0$$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes en utilisant les théorèmes de croissances comparées :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{e^{0.5x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^4 + 3x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{e^{0.1x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^5 - 3x^3 + 2)e^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{100}}$

Solution détaillée

1. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{e^{0.5x}} = 0}$$

   Preuve : Le dénominateur $e^{0.5x}$ domine le polynôme $x^3 + 2x^2 - 5$ en $+\infty$.

2. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^4 + 3x^2} = +\infty}$$

   Preuve : L'exponentielle e^{2x} croît plus vite que le polynôme $x^4 + 3x^2$.

3. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{e^{0.1x}} = 0}$$

   Preuve : Même avec un petit coefficient 0.1, l'exponentielle domine toute puissance de $\ln x$.

4. $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} (x^5 - 3x^3 + 2)e^x = 0}$$

   Preuve : En $-\infty$, e^x tend vers 0 plus vite que le polynôme tend vers $\pm\infty$.

5. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{100}} = +\infty}$$

   Preuve : La croissance de $e^{\sqrt{x}}$ domine toute puissance polynomiale, même x^{100}.

Méthodologie

Pour résoudre ces limites :

- Identifier le type de fonctions en présence (exponentielle, polynôme, logarithme)
- Appliquer la hiérarchie des croissances :

$$\text{Pour } x \to +\infty : \quad \ln x \ll x^n \ll e^{ax} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$$

- Factoriser par le terme dominant si nécessaire

Exercice 7. Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1000}}{e^{x^{0.001}}}$
2. $\lim_{x\to0^+} x^{100}e^{-1/x}$

Indications. • Pour la première, poser $t = x^{0.001}$

- Pour la seconde, faire le changement de variable $u = 1/x$

□

Exercice 8. Étude de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f
2. Étudier les limites de f aux bornes du domaine
3. Calculer la dérivée f' et étudier son signe
4. Dresser le tableau de variations complet
5. Tracer l'allure de la courbe représentative

Solution détaillée

1. Domaine de définition La fonction f est définie lorsque :

- Le dénominateur $x^2 + 1 \neq 0$ (toujours vrai car $x^2 + 1 \geq 1 > 0$)
- L'exponentielle e^x est définie sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$$

2. Limites et asymptotes

- **En** $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+}$$

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

- **En** $+\infty$: Par comparaison des croissances :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad (\text{car } e^x \text{ domine } x^2)$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3. Dérivée et variations La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Étude du signe :

- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $(x-1)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $(x^2+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi :

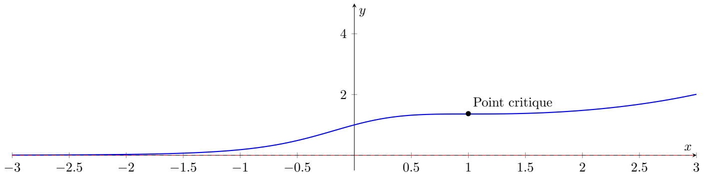
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{sur tout } \mathbb{R}$$

4. Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec un point critique (non extremum) en $x = 1$.

5. Représentation graphique



Compléments

- $f(0) = 1$ (ordonnée à l'origine)
- Point d'inflexion possible à étudier avec f''
- Comportement asymptotique : pas d'asymptote oblique en $+\infty$

VI Puissances à exposant réel

Grâce à ln et exp, on définit pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$x^a = \exp(a \ln x).$$

Cela étend les puissances rationnelles et vérifie $x^{a+b} = x^a x^b$, $(x^a)^b = x^{ab}$, etc.

Théorème 8. *Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Elle est strictement croissante (dérivée $ax^{a-1} > 0$) et continue, avec limites 0 en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. □

Exercice 9. Étude de la fonction $f(x) = x^{1/x}$

Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^{1/x}$ pour $x > 0$:

1. Déterminer le domaine de définition
2. Calculer les limites aux bornes du domaine
3. Étudier la dérivabilité et calculer $f'(x)$
4. Dresser le tableau de variations
5. Tracer la courbe représentative
6. Déterminer le maximum de la fonction

Solution détaillée

1. Domaine de définition La fonction $x \mapsto x^{1/x}$ est définie pour :

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[}$$

2. Étude des limites

- **En 0^+ :**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \boxed{0}$$

- **En $+\infty$:** On utilise la transformation exponentielle :

$$x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \boxed{1}$$

3. Dérivée et variations On utilise la réécriture exponentielle :

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Dérivée :

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = x^{1/x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

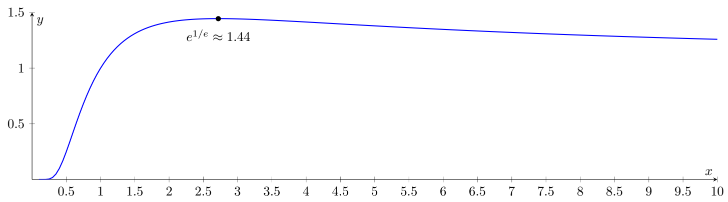
Signe de la dérivée :

- $x^{1/x} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ du signe de $1 - \ln x$
- $f'(x) > 0$ pour $x \in]0, e[$
- $f'(x) < 0$ pour $x \in]e, +\infty[$

4. Tableau de variations

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

5. Représentation graphique



6. Maximum de la fonction La fonction atteint son maximum en $x = e$:

$$\boxed{f(e) = e^{1/e} \approx 1.4447}$$

Compléments

- Point d'inflexion à étudier avec la dérivée seconde
- Comportement asymptotique : $y = 1$ est asymptote horizontale
- Valeurs particulières :

$$f(1) = 1, \quad f(2) \approx 1.414, \quad f(10) \approx 1.2589$$

VII Fonctions trigonométriques réciproques

VII.1 Fonction Arccosinus

Définition La fonction arccosinus est la réciproque de cosinus restreinte à $[0, \pi]$:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Exercice d'étude Considérons $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition
2. Calculer les limites aux bornes
3. Étudier la dérivabilité
4. Tracer la courbe

Solution

1. $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pi$, $\lim_{x\to-1/2} f(x) = 0$
3. $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)\sqrt{-x(2x+1)}}$ sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

VII.2 Fonction Arcsinus

Définition La fonction arcsinus est la réciproque de sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

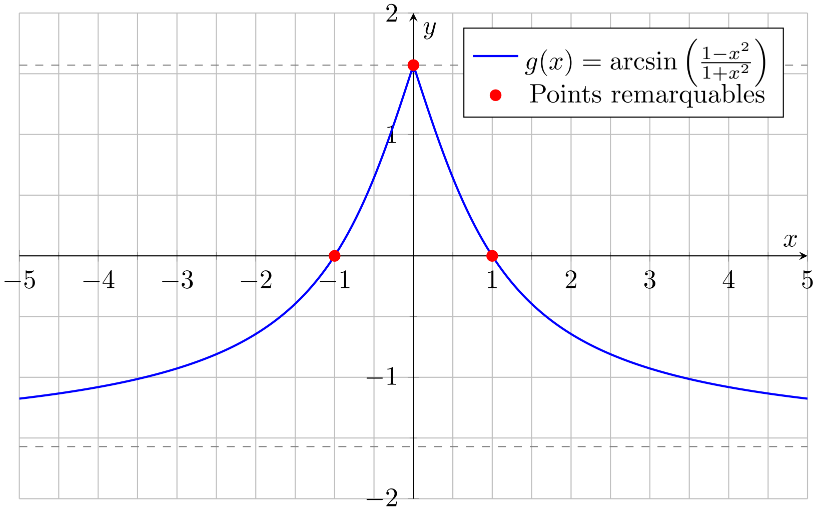
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Exercice d'étude Étudier $g(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Solution

- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
- Paire, dérivée $g'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$
- Maximum en $x = 0$: $g(0) = \frac{\pi}{2}$

Graphe de $g(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$



Fonction Arctangente

Définition La fonction arctangente est la réciproque de tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

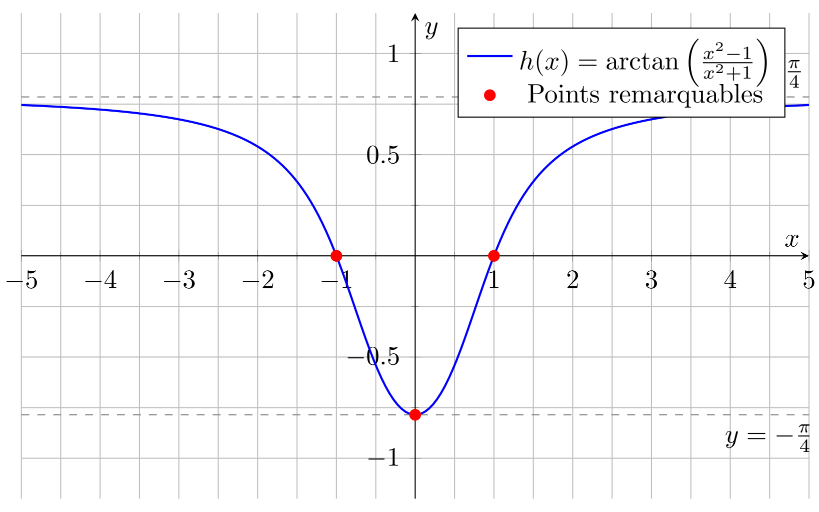
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice d'étude Analyser $h(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

Solution

- $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$
- Paire, dérivée $h'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^4+6x^2+1)}$
- Points remarquables : $h(0) = -\frac{\pi}{4}$, $h(1) = 0$

Graphe de $h(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$



VII.3 Comparaison des propriétés

	Arccos	Arcsin	Arctan
Domaine	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Image	$[0, \pi]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
Dérivée	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

VII.4 Dérivées des fonctions réciproques

1. Arccosinus Pour $x \in]-1, 1[$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve : Par dérivation de la relation $\cos(\arccos x) = x$:

$$-\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1 \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

Or $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Arcsinus Pour $x \in]-1, 1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve : De même :

$$\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1 \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Arctangente Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Preuve :

$$(1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)' = 1 \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

VII.5 Exercices types avec solutions

Exercice 1 Calculer la dérivée de $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Solution :

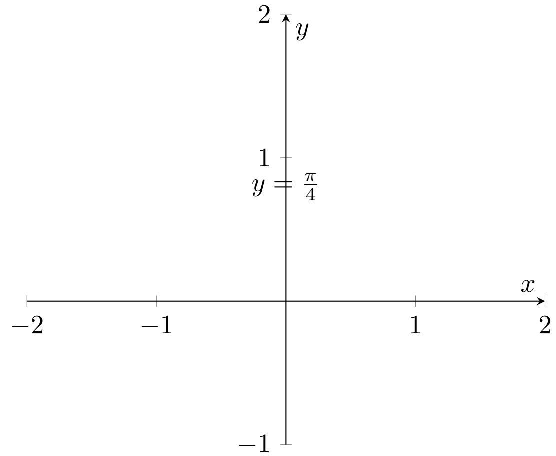
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\right) = \frac{|x|}{x(1+x^2)}$$

Exercice 2 Étudier $g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$

Solution : En calculant $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc $g(x) = C$. En évaluant en $x = 0$: $C = \frac{\pi}{4}$.



VIII Bijectivité et suites

Ce paragraphe concerne l'étude des suites définies implicitement par une relation fonctionnelle. Il s'agit d'étudier la nature d'une suite et ses propriétés (bornitude, convergence, monotonie) ainsi que le calcul de sa limite, sans disposer d'une formule explicite pour le terme général. La suite est définie uniquement à travers une relation de bijectivité, comme image réciproque d'un élément de l'ensemble d'arrivée d'une fonction. Bien que le cas le plus fréquent soit celui d'un zéro de fonction (c'est-à-dire $f_n(x_n) = 0$), cette approche peut s'appliquer à d'autres valeurs.

Analysons un exemple :

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction numérique:

$$f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$$

. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
On note x_n cette racine. Étudier la suite (x_n). (monotonie, bornitude, convergence ...)

On pourra commencer par tracer sur un même graphe $y = f_n(x)$ et $y = f_{n+1}(x)$, puis localiser x_{n+1} et x_n.

Comment étudier une suite définie par une équation (implicitement) ?

On suppose que f_n est une application monotone sur I, continue et que $0 \in f_n(I)$. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f_n^{-1}(0)$ (il s'agit d'un ensemble à un seul élément).

- **Encadrement.** On a nécessairement $x_n \in I$, et donc si I est borné, il en est de même de (x_n).

Étude de la dynamique (c'est le plus subtil).
Il faut comparer $f_{n+1}(x_n)$ à $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, puis utiliser la monotonie de f_{n+1}.
Ainsi par exemple, si l'on sait que $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ puis que f_{n+1} est décroissante, alors $x_n < x_{n+1}$ et donc (x_n) croissante.
Pour faire cette comparaison, on est souvent amené à faire $f_{n+1}(x_n) = f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$.
Très souvent, on exploite le tableau de variations.

- **Convergence.** On applique tout simplement le théorème de la limite monotone.

- **Recherche de la limite.** Ici, il faut montrer toutes nos qualités d'analyse mathématicien : il faut savoir faire des encadrements et appliquer les théorèmes d'encadrement afin de trouver une première approximation puis la valeur ℓ de la limite visée.

Appliquons cette méthode à l'exercice précédent:

Solution détaillée

1. Existence et unicité de la racine x_n

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4.$$

- **Continuité:** f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions continues.

- **Variations:**
  Pour $x > 0$, la dérivée est:
  $$f_n'(x) = nx^{n-1} + 32x.$$
  Comme $nx^{n-1} \geq 0$ et $32x > 0$ pour $x > 0$, on a $f_n'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
  De plus, $f_n(0) = -4 < 0$.
  Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

- **Limite en $+\infty$:**
  $$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

- **Théorème de la bijection:**
  D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que:
  $$f_n(x_n) = 0.$$

2. Encadrement et bornitude de la suite (x_n)

- Pour $n = 0$: $f_0(x) = 1 + 16x^2 - 4 = 16x^2 - 3$.
  L'unique solution positive est $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

- Pour $n = 1$: $f_1(x) = x + 16x^2 - 4$.
  On a $f_1(0) = -4$, $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 4 - 4 = \frac{1}{2} > 0$.
  Donc $x_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

- Pour $n = 2$: $f_2(x) = x^2 + 16x^2 - 4 = 17x^2 - 4$.
  L'unique solution positive est $x_2 = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

- Pour tout $n \geq 1$, on a:
  $$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 16\left(\frac{1}{4}\right) - 4 = \frac{1}{2^n} + 4 - 4 = \frac{1}{2^n} > 0.$$
  $$f_n(0) = -4 < 0.$$

  Donc $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ pour tout $n \geq 1$.
  La suite (x_n) est bornée.

3. Monotonie de la suite (x_n)

Comparons $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$:

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 16x_n^2 - 4.$$

Mais comme $f_n(x_n) = 0$, on a $x_n^n = 4 - 16x_n^2$. Donc:

$$f_{n+1}(x_n) = x_n \cdot x_n^n + 16x_n^2 - 4 = x_n(4 - 16x_n^2) + 16x_n^2 - 4 = 4x_n - 16x_n^3 + 16x_n^2 - 4.$$

Soit:

$$f_{n+1}(x_n) = -16x_n^3 + 16x_n^2 + 4x_n - 4 = -4(4x_n^3 - 4x_n^2 - x_n + 1).$$

Étudions le signe de $g(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$g'(x) = 12x^2 - 8x - 1.$$

Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g'(x) < 0$ (car $g'(0) = -1$, $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 4 - 1 = -2$).
Donc g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
De plus:

$$g(0) = 1 > 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

Ainsi, $g(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, avec $g(x) > 0$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Par conséquent:

$$f_{n+1}(x_n) = -4g(x_n) \leq 0.$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on a:

$$f_{n+1}(x_n) \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}.$$

Ainsi, la suite (x_n) est croissante.

4. Convergence et limite

La suite (x_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc convergente vers une limite $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.
Montrons que $\ell = \frac{1}{2}$. Par l'absurde, supposons $\ell < \frac{1}{2}$.
Comme $x_n \to \ell$ et $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a pour n assez grand:

$$x_n^n \to 0 \quad (\text{car } \ell < 1).$$

Or, $f_n(x_n) = 0$ donne:

$$x_n^n + 16x_n^2 - 4 = 0 \Rightarrow 16x_n^2 = 4 - x_n^n.$$

À la limite:

$$16\ell^2 = 4 \Rightarrow \ell^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}.$$

Ce qui contredit $\ell < \frac{1}{2}$. Donc $\ell = \frac{1}{2}$.

5. Conclusion

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.
- La suite (x_n) est croissante et bornée: $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$.
- La suite converge vers $\ell = \frac{1}{2}$.

Cela termine l'étude de la suite (x_n) sans avoir son expression explicite.
De façon similaire, on pourrait étudier des fonctions définies implicitement (à partir d'une fonction dépendant d'un paramètre réel au lieu de la variable discrète n). Par exemple, on pourrait considérer des fonctions définies par deux variables... mais cela dépasse le cadre de ce document.
Pour les plus ambitieux, nous recommandons la consultation du cours sur les fonctions de plusieurs variables en MPSI/MP2I.

VIII.1 Exemple d'études de suites définit implicitement

Partie A : Analyse de la fonction f_n

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}.$$

1. Étudier le signe de f'_n. En déduire le tableau de variations de f_n. On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_n$ représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation. Tracer $\mathcal{C}_2$.
3. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n.

Partie B : Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$

On se propose dans cette partie de montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ admet une limite ℓ et de calculer ℓ. À cet effet, on cherche à réaliser un encadrement de x_n.

1. On considère la fonction φ définie sur $]1, +\infty[$ par
$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\frac{x-1}{x+1}.$$
   (a) Déterminer le signe de φ'. En déduire le signe de φ.
   (b) Montrer que $\varphi(n) < 0$, puis que $f_n(-2) < 0$.
   (c) En déduire que $x_n > -2$.
2. (a) Établir l'égalité
$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} + \ln\frac{n}{n+1}\right].$$
   (b) On considère la fonction Ψ définie sur $]0, +\infty[$ par
$$\Psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\frac{x}{x+1}.$$
   Étudier le signe de Ψ'. En déduire le signe de Ψ, puis celui de
$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right).$$
   (c) Montrer que $x_n < 2n\ln\frac{n}{n+1}$.
3. (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)$. On pourra poser $u = \frac{1}{n}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de ℓ.

VIII.2 Solution de l'exemple

Partie A : Analyse de la fonction f_n

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}.$$

1. **Étudier le signe de f_n'. En déduire le tableau de variations de f_n. Calculer le maximum.**

$$f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}, \quad f_n'(x) = 0 \implies \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} \implies x = n\ln\frac{n}{n+1}.$$

Puisque $\frac{n}{n+1} < 1$, $x < 0$. Dérivée seconde :
$$f_n''(x) = -\frac{1}{n^2}e^{\frac{x}{n}} < 0.$$

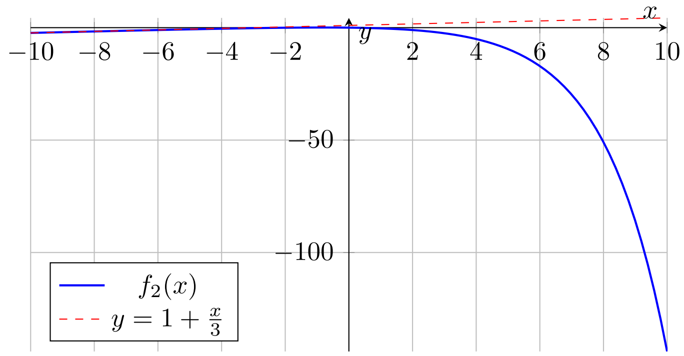
Maximum à $x = n\ln\frac{n}{n+1}$:
$$f_n\left(n\ln\frac{n}{n+1}\right) = 1+\frac{n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1} = 1-\frac{n}{n+1}\left(1-\ln\frac{n}{n+1}\right) > 0.$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$n\ln\frac{n}{n+1}$	$+\infty$
f_n'	$+$	0	$-$
f_n	$\nearrow$	max	$\searrow$

2. **Montrer que $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote. Tracer $\mathcal{C}_2$.**

Pour $x \to -\infty$, $e^{\frac{x}{n}} \to 0$, donc $f_n(x) \approx 1+\frac{x}{n+1}$. Asymptote : $y = 1+\frac{x}{n+1}$.
Pour $n = 2$, $f_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - e^{\frac{x}{2}}$.



3. **Démontrer que sur $]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ admet une racine unique x_n.**
   Sur $]-\infty, 0[$, $f_n'(x) > 0$, donc f_n est croissante. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$, $f_n(0) = 0$. Il existe une unique racine $x_n < 0$.

Partie B : Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$

1. **Étude de $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\frac{x-1}{x+1}$.**
   (a) **Signe de φ'.**
   $$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{x^2(x^2-1)} > 0 \quad (x > 1).$$
   φ est strictement croissante, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = -\infty$, donc $\varphi(x) < 0$.
   (b) **Montrer $\varphi(n) < 0$, puis $f_n(-2) < 0$.**
   Puisque φ est décroissante et négative, $\varphi(n) < 0$.
   Pour $f_n(-2)$:
   $$f_n(-2) = 1 - \frac{2}{n+1} - e^{-\frac{2}{n}} < 0 \quad (\text{car } e^{-\frac{2}{n}} > \frac{n-1}{n+1} \text{ cela provient de } \phi(n) < 0).$$
   (c) **Déduire $x_n > -2$.**
   Puisque $f_n(-2) < 0 = f_n(x_n)$, $f_n(0) = 0$, et f_n croissante, $-2 < x_n < 0$.

2. **Encadrement supérieur.**
   (a) **Vérifier l'égalité.**
   $$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) = 1 + \frac{2n\ln\frac{n}{n+1}}{n+1} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n}{n+1}\left[\ln\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\right].$$
   (b) **Signe de $\Psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\frac{x}{x+1}$.**
   $$\Psi'(x) < 0, \quad \Psi(x) > 0 \implies f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) > 0.$$
   (c) **Montrer $x_n < 2n\ln\frac{n}{n+1}$.**
   Puisque $f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) > 0 = f_n(x_n)$, $2n\ln\frac{n}{n+1} > x_n$.

3. **Limite.**
   (a)
   $$2n\ln\frac{n}{n+1} = -2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to -2.$$
   (b) Puisque $-2 < x_n < 2n\ln\frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = -2$.