Exercice 1. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On considère la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$:

$$(\mathcal{P}) \quad \exists \ell \in \mathbb{R};\ \exists \omega :\ \forall h \in I; a+h \in I \implies f(a+h) = f(a)+\ell h+\omega(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

1. Montrer que f est dérivable en $a \iff f$ vérifié la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 2. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est dérivable en 0
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

1. Soient x un élément de $\mathbb{R}$ et h un élément de $\mathbb{R}^*$. Montrer que :
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} + x$$
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x + f'(0)$$

Exercice 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I centré en a et dérivable en a.

1. Calculer :
$$\lim_{x\to a} \frac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$$
2. Application : Calculer :
$$\lim_{x\to \pi} \frac{\pi \cos x + x}{x-\pi}$$

Exercice 4. On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x+\alpha)^3$$

où α est un réel strictement positif.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) En déduire que pour tout $\alpha > 0$:
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \quad \frac{27}{4}\alpha^3 \leq f(x)$$
2. Soient a, b et c des réels strictement positifs.
   (a) Montrer que :
   $$\frac{1}{4}a(b+c)^2 \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x\sin(1/x)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$.
2. Montrer que f' a une infinité de zéros dans $[0,1]$ et que f est croissante.

Exercice 6.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{2+x}$.
   Calculer f'.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$.
   Calculer φ'.
3. Vérifier que pour tout réel t,
   $\varphi(t) = f(\sin t)$ et $\varphi'(t) = f'(\sin t) \times \cos t$.
4. Montrer que φ est 2π-périodique.
5. Montrer que f est strictement décroissante. En déduire les variations de φ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)^n$.

1. Calculer $f'(x)$; donner le résultat sous deux formes différentes dont l'une utilisera le développement de $f(x)$.
   Donner de même deux expressions de $f''(x)$.

2. En déduire, en fonction de n, la valeur des expressions A et B suivantes :
   $A = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p$; $B = \sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p$.

   On rappelle que $(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p$

Exercice 8. On considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad f(x) = |\cos(x)|\sqrt{1-\cos x}$$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$ et sur $]0,\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$2f(x)f'(x) = \sin 2x\left(\frac{3}{2}\cos x - 1\right)$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Exercice 9. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I centré en a et dérivable en a.

1. On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = f(a+x^2)$$

   (a) Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

   (b) Calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x^2)-f(a+x)}{x}$$

Exercice 10. On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2-x+1}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x > 0 \iff f(x) > 0$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| = \sqrt{2g(x^2+1)}$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) < \frac{1}{2}$$

4. En déduire que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que les variations de f.

Exercice 11. On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

2. En déduire que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$
$$\forall x \in]-\infty,-1[\quad f(x) = \arctan x + \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 12. À tout réel non nul a, on associe la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Déterminer la fonction dérivée f'_a de la fonction f_a.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\}$:
   $$f_{-a}(x) = -f_a(-x)$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$:
   $$f_a(x) = \arctan x + \arctan a$$
   (b) Montrer que :
   $$\arctan a + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$
   (c) En déduire que pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$:
   $$f_a(x) = \arctan x + \arctan a + \pi$$
3. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $xy \neq 1$:
   $$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan x + \arctan y + \epsilon\pi$$
   où $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$
4. Application : Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N};\ \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \arctan(k+1) - \arctan(k)$$
   En déduire la limite de :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Exercice 13. On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 3$$

1. Déterminer la fonction numérique u telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3u'(x) \cdot u^2(x)$$
2. (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty, +\infty[$.
   (b) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.
   (c) Déterminer la fonction dérivée de f^{-1}.

Exercice 14. oit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 0 \\ \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } f(a) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe $b \in]0, a[$ tel que $f'(b) = 0$.
2. On considère la fonction numérique g définie par :
   $$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que g est continue à droite en 0.
   (c) En déduire qu'il existe $c \in]0, b[$ tel que $f(c) = cf'(c)$.

Exercice 15. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0$$

1. Montrer que f est injective.
2. On suppose qu'il existe un réel α tel que $f'(\alpha) > 0$ et que f' est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Soit f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x^3(1-x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et prolongée par continuité en 0.

1. Montrer que f est dérivable à dérivée bornée.
2. Montrer que $f'(]0,1])$ n'est pas un intervalle fermé.

Exercice 17. Déterminer les réels a, b et c de sorte que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-ax^2}{x-1} & \text{si } x<0 \\ x^2+bx+c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

soit de classe C^2. Est-elle alors de classe C^3 ?

Exercice 18.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$ tel que $g'(x_0) \neq 0$. Montrer que :

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

(C'est la règle de L'Hospital)

pour le cas où $g(x) = x$, on peut le considérer au programme et l'utiliser. si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus x_o$ alors

$$\boxed{f \textbf{ continue en } x_0 \textbf{ et } \lim_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R} \implies f \text{ est dérivable en } x_0}$$

3. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$

(b) $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{e^x-1}{\sin x - 1}$

(c) $\lim_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$ $(c \neq d)$,

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin x - \sin\frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 19. Soit a un nombre réel. On définit la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{1-\cos x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \sin x \leq x \leq \tan x$
2. Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle la fonction f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Dans la suite de l'exercice, on supposera que $a = a_0$. Montrer que f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et expliciter $f'(x)$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
4. La fonction f' est-elle continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

Exercice 20. Étudier la régularité de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \in [-1,0[\\ x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

Exercice 21**.** Soit λ et $f_\lambda : x \mapsto x^{2+\lambda} \sin \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lambda \in [0, 2[$.

1. Montrer que f_λ peut être prolongée par continuité en 0. On note encore f_λ la fonction prolongée, sur $\mathbb{R}_+$, avec $f_\lambda(0) = 0$.
2. Montrer que :
   (a) Si $\lambda \in [0, 1[$, f_λ est dérivable avec une dérivée continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.
   (b) Si $\lambda \in [1, 2[$, f_λ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et la dérivée seconde n'est pas bornée sur aucun voisinage de 0.
   (c) Si $\lambda = 2$, f_λ est deux fois dérivable mais sa dérivée seconde n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, et la dérivée seconde est bornée au voisinage de 0.

Exercice 22**.** On considère la fonction $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin^3 x.$$

1. Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$.
2. En déduire l'expression générale des primitives de la fonction $f_{a,b}$.
3. Quelle est, parmi ces fonctions données, celle dont la courbe représentative C passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ et a une tangente au point d'abscisse zéro parallèle à la première bissectrice $(\Delta) : y = x$?

Exercice 23**.** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2|x|.$$

Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$, déterminer celle qui vérifie $F(1) = 0$.

Exercice 24**.** On considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 0$.

1. On considère la fonction numérique G définie par :
$$G(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2 + x$$
   (a) Étudier les variations de la fonction G.
   (b) En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{2}x^2 - x \leq F(x)$$
   (c) Déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x)$$
2. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) < x$$
   (b) En déduire la limite :
$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

Exercice 25**.** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis montrer qu'elles sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et calculer leurs dérivées.

1. $b(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
2. $c(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$
3. $d(x) = 1 + xe^{\frac{1}{1-x}}$
4. $e(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$
5. $f(x) = (x + 1)^x$

***Exercice 26*.** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues en x_0 ? Parmi celles qui sont continues en x_0, lesquelles sont dérivables en x_0 ? Dans ce cas, calculer la dérivée en x_0.

1. $x_0 = 1$ et $a(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\cos \pi x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2. $x_0 = 0$ et $b(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $x_0 = 0$ et $c(x) = \begin{cases} x^2 \ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4. $x_0 = 0$ et $d(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5. $x_0 = 0$ et $e(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\frac{1}{x})}{x^2+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

6. $x_0 = 1$ et $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \cos \pi x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

***Exercice 27*. Partie I: Encadrement de $\sqrt{1+a}$**

Soit les fonctions :

$$f : x \mapsto \sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (x+1)\sqrt{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
2. Étudier les variations de g sur $[0; 1]$.
3. Soit $a \in [0; 1]$. Montrer que, quel que soit $x \in [0; a]$,
$$g'(0) \leq g'(x) \leq g'(a).$$
4. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0; a]$, montrer que :
$$\frac{3}{2}(a-0) \leq (1+a)\sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{3}{2}\sqrt{1+a}(a-0).$$
5. En déduire que, pour tout $a \in [0; 1]$:
$$(1) \quad \frac{1+\frac{a}{2}}{1+a} \leq \sqrt{1+a},$$
$$(2) \quad 1 - \frac{a}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a}},$$
$$(3) \quad \frac{1}{1-\frac{a}{2}} \geq \sqrt{1+a}.$$
Conclure.

Partie II: d'autres Encadrement de $\sqrt{1+a}$

1. Étudier f sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.
2. Montrer en calculant f'' que la dérivée f' de f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.
3. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0; a]$, montrer que pour $a \in [0; 1]$:
$$\frac{1}{2\sqrt{1+a}}a \leq \sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{a}{2}.$$
4. Montrer de même que pour $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$:
$$-\frac{a}{2} \leq 1 - \sqrt{1+a} \leq -\frac{a}{2\sqrt{1+a}}.$$
5. En déduire que pour $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$:
$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}.$$
Conclure.

***Exercice 28*. Partie I : Inégalités pour les fonctions trigonométriques**

1. En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :
$$-x \leq \sin x \leq x.$$
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que:
   $$\forall x \geq 0, f'(x) \leq g'(x) \implies f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0).$$
   Remarque : Ce résultat fait partie du cours et peut être réutilisé sans démonstration.
   Méthode d'utilisation de résultat précédente :
   Pour montrer $f(x) \leq g(x)$ on commence à vérifier que $f(0) = g(0)$ puis on montre $f'(x) \leq g'(x)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :
   $$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2}.$$
   (c) Montrer que les inégalités de la question b) sont valides pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.
3. On sait que $\cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On conservera donc les inégalités :
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$
En appliquant itérativement le procédé précédent, montrer que :
   - pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
   $$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!},$$
   - pour tout réel $x \geq 0$,
   $$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Partie II : Inégalités pour d'autres fonctions
Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
2. Pour tout $x \in [0, 1]$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $xe^x + 1 \geq e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
5. Pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

À l'aide des résultats précédents, calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3},$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

***Exercice 29*. Partie I:** Calculer les dérivées première, seconde et $n$ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ (rappel : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$),
2. $g : x \mapsto x^n$,
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x+1}$,
4. $l : x \mapsto \cos x$,
5. $m : x \mapsto \sin x$,
6. $n : x \mapsto e^x$.

Partie II: Une formule de Leibniz
Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.

1. Montrer que la fonction fg est n fois dérivable sur I et que
$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(1)}g^{(n-1)} + \cdots + C_n^p f^{(p)}g^{(n-p)} + \cdots + f^{(n)}g.$$
(On pourra établir cette formule par récurrence.)

2. **Application**

   (a) Calculer de deux façons la dérivée $n$ième de :
   $$x \mapsto x^{2n}.$$
   (Remarquer que $x^{2n} = x^n \cdot x^n$.)

   (b) En déduire que :
   $$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

   (c) Trouver la dérivée n-ième de :
   $$x \mapsto e^x cos(x).$$

Exercice 30.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$
   Tracer la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormal.

2. Montrer que f admet une application réciproque f^{-1}. Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le plan P.
   Calculer $x - \sqrt{1+x^2}$ en fonction de $f(x)$. En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$.

3. Étudier les variations de l'application g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $$g(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right).$$
   (On ne demande pas de représentation graphique de g.)

4. Soit n un entier naturel. On pose :
   $$P_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n + \left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^n\right].$$
   Montrer, sans le calculer explicitement, que $P_n(x)$ est un polynôme dont on précisera le degré en fonction de n. (penser à la récurrence)
   Comparer $P_n(x)$ et $P_n(-x)$.

5. En notant φ la fonction telle que $\varphi(x) = x^n$, montrer que, suivant la parité de n, on a :
   $$P_n = g \circ \varphi \circ f \text{ ou } P_n = f^{-1} \circ \varphi \circ f.$$
   Déduire de ce qui précède le tableau de variation de P_n.

6. On suppose dans ce qui suit que n est un entier pair non nul. a étant un paramètre réel, étudier le nombre de racines réelles de l'équation : $P_n(x) = a$.

Exercice 31. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Étude de f. Points d'inflexion.

2. Montrer que la dérivée n-ième s'écrit :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}},$$
   où P_n est un polynôme de degré n. Calculer a_n, le coefficient dominant de P_n.

3. Montrer que $P_n' = -n^2 P_{n-1}$.

Exercice 32. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}^\times$? Est-elle continue en 0 ?

3. Soit $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Étudier le signe de la fonction g. En déduire le tableau de variation de f.

4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) sur un intervalle à déterminer.

***Exercice 33*.** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier la parité de f puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire son tableau de variation.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.