Exercice 1. 1) Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\tan 5x}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

2) Étudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$:

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(\lambda x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-\lambda}-\frac{1}{(x-2)^2}\right)$ $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$

Exercice 2. Montrer les limites suivantes :

1. En utilisant la quantité conjuguée lorsque nécessaire : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-3x\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)=1$

2. Calculs spécifiques :

   a) (Indication : multiplier par $1+\cos(x)$) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

   b) (Indication : écrire $\frac{e^x-1}{x}\cdot x\ln x$) $\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\ln x=0$

3. En appliquant le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(\cos x)}{x}=0$

Exercice 3. Soit $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$$

Déterminer les limites de f, si elles existent, en 0 et en $+\infty$.

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x)=xE\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

où E désigne la fonction partie entière. Montrer que f admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes aux points précisés :

1. $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ en $-\infty,-1,0,1,+\infty$
2. $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en 0 et $+\infty$
3. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ en 0
4. $g(x)=\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ en 0
5. $h(x)=\frac{\tan x}{x}$ en 0
6. $k(x)=\frac{x\sin 2x}{\tan 3x}$ en 0
7. $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ en 0
8. $f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\tan x-1}$ en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$
9. $f(x)=\ln\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$ en $-\frac{3}{2},1$ et $+\infty$

Exercice 6. Étudier l'existence, et le cas échéant la valeur de la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}},\quad x_0=0$
2. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x,\quad x_0=+\infty$
3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}},\quad x_0=1$
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}},\quad x_0=2$
5. $f(x)=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sin 3x+\sin x},\quad x_0=0$
6. $f(x)=\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$
7. $f(x)=1-xE\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad x_0=0$
8. $f(x)=\sin x\cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad x_0=0$

Exercice 7. On suppose $x\neq k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

1. Calculer :

$$S_n(x)=\tan x+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

On démontrera et on utilisera l'égalité :

$$\tan x=\frac{1}{\tan a}-\frac{2}{\tan 2a}$$

En déduire : $\lim_{n\to\infty}S_n(x)$.

2. On définit les suites de fonctions suivantes

$$P_n(x)=\cos x\cos\frac{x}{2}\dots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$Q_n(x)=(1-\tan^2 x)(1-\tan^2\frac{x}{2})\dots(1-\tan^2\frac{x}{2^n})$$

$$R_n(x)=(1+\tan^2 x)(1+\tan^2\frac{x}{2})\dots(1+\tan^2\frac{x}{2^n})$$

(a) À l'aide de l'égalité $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$, où l'on remplacera successivement x par $x,\frac{x}{2},\dots,\frac{x}{2^n}$, simplifier $P_n(x)$.
En déduire $\lim_{n\to\infty}P_n(x)$.

(b) Simplifier $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ et trouver leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Limites remarquables, croissances comparées
Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}-3}{x^5\ln(x)}$ $\quad f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\sqrt{x}+\sqrt{\ln(x)}}$ $\quad f(x)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{\sqrt{x}-\ln(x)}$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x+1}}-e^{\sqrt{\ln(x)}}$ $\quad f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-e^x$ $\quad f(x)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}$

Exercice 9. Étudier la limite en 0 (ou 0^+) de :

1. $f_1(x)=\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{\ln(1+\sqrt{x})^2}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}\cdot e^x}{x}$
$f_3(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\sin(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(\sqrt{x})}}$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure du graphe de f.
2. La fonction f est-elle continue ? Justifier.

Exercice 11. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin x$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 12. Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur un intervalle telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Exercice 14.

1. On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

   Existe-t-il des réels a, b, c pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}?$$

Exercice 15. Soit $f : x \mapsto \left|x^2 + x + 1 - |x-1|\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$f = v \circ (h - v \circ g)$$

   avec :

$$\begin{aligned} &g : x \mapsto x - 1 \\ &v : x \mapsto |x| \\ &h : x \mapsto x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. On note $E(x)$ la partie entière de x.

1. Soit la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$a(x) = (-1)^{E(x)} \cdot (x - E(x)).$$

   (a) Montrer que $a(x+2) = a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire une propriété géométrique liant les points $\mathrm{M}(x, a(x))$ et $\mathrm{M}(x+2, a(x+2))$.

(b) Étudier la continuité de a sur $\mathbb{R}$.
Tracer sa courbe représentative.

2. Pour un entier $p \geq 1$, on considère la fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b(x) = E(x) + (x - E(x))^p.$$

(a) Montrer que $b(x+1) = b(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Que peut-on en conclure concernant les points $\mathrm{M}(x, b(x))$ et $\mathrm{M}(x+1, b(x+1))$?

(b) Étudier la continuité de b.
Représenter graphiquement cette fonction pour quelques valeurs de p.

3. Soit la fonction $c : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par :

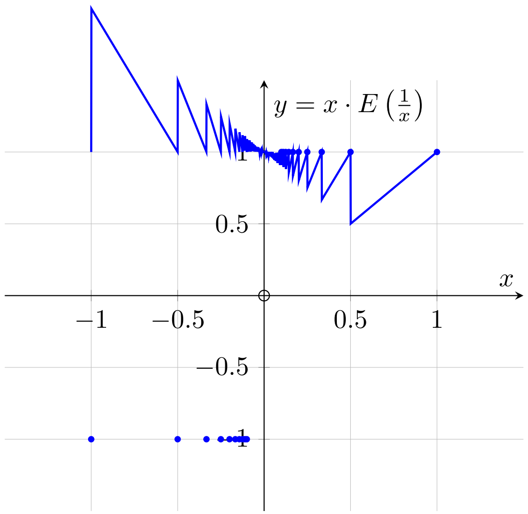
$$c(x) = x \cdot E(\frac{1}{x}).$$

(a) Tracer c pour $x > \frac{1}{4}$

(b) Étudier la continuité de c sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(c) Étudier la limite de c en zéro.
Commentaire : La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais la fonction $x \mapsto E(1/x)$, est discontinue en tout point de la forme $x = \frac{1}{k}$, avec $k \in \mathbb{Z}^*$. Cette discontinuité s'explique par le fait que la fonction partie entière $E(x)$ est elle-même discontinue en chaque entier.

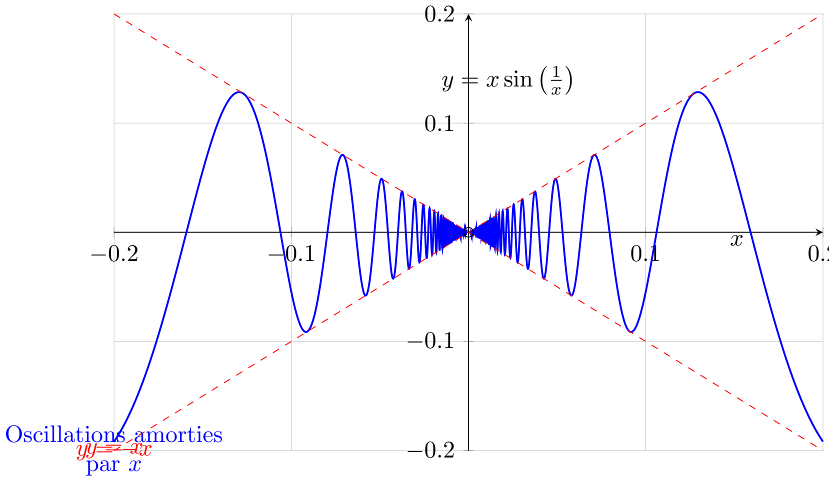
On observe également que, lorsque x tend vers 0, la fonction "oscille" fortement, dessinant une sorte de zigzag de plus en plus serré. Cependant, malgré ces fortes oscillations près de l'origine, elles restent suffisamment "maîtrisées" pour que la fonction reste continue en 0. Autrement dit, la limite existe en 0.

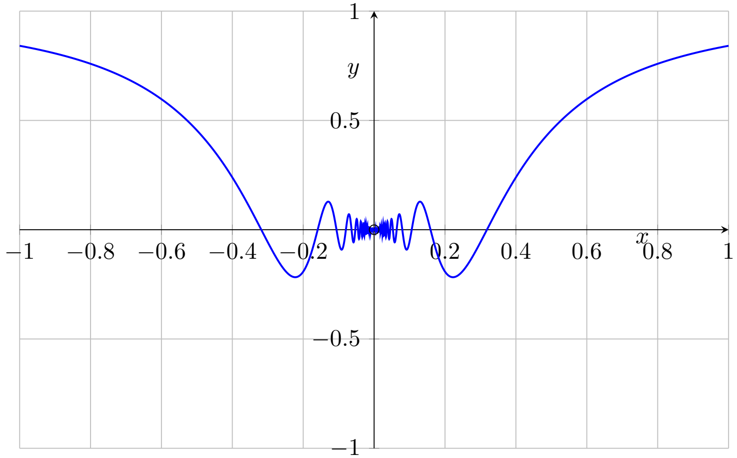


:

4. Dans le même ordre des idées, Je donne le graphe de la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$ qui sera étudier plus tard das les exercices.

Graphe de $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0





Pour cette fonction, elle est continue sur tout $\mathbb{R}$, car elle est composée et produit de fonctions continues. En revanche, ses fortes oscillations au voisinage de l'origine empêchent de lui tracer une tangente en ce point, ce qui explique qu'elle n'y soit pas dérivable. La question de la dérivabilité de telles fonctions sera étudiée en travaux dirigés sur la dérivation (voir les exercices).

5. On définit la fonction $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$d(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

   (a) Montrer que $d(x+1) = d(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Que peut-on en conclure pour les points $\mathrm{M}(x, d(x))$ et $\mathrm{M}(x+1, d(x+1))$?

   (b) Étudier la continuité de d.
   Tracer la courbe de la fonction d.

Exercice 17. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. On suppose que $a < b$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$, c'est-à-dire que f possède au moins un point fixe.

2. **Application 1 – Tracé graphique :**
   Sur un repère, représenter graphiquement une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue.
   Tracer également la droite d'équation $y = x$.
   Montrer visuellement qu'il existe au moins un point d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = x$.

3. **Application 2 – Équation algébrique :**
   Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $\cos(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   Conclure quant à l'existence d'un point fixe pour la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 18. Soit une fonction f: $[a; +\infty[$ croissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $]a; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Montrer que si g est croissante alors f est constante.

Exercice 19. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Montrer que si $f(I)$ est un ensemble fini alors f est constante.

2. Donner un contre-exemple si f n'est pas continue.

Exercice 20. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que pour tout x réel positif non nul : $f(x) < x$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $M \in [0; 1]$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad f(x) \leq Mx.$$

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et atteint sa borne inférieure.

Exercice 22. 1. Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que pour tout x dans $[a, b]$ on ait : $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout x dans $[a, b]$: $f(x) \geq m$.

2. Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$ telles que pour tout x dans $[a, b]$ on ait : $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout x dans $[a, b]$: $f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice 23. On cherche les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et pour tout réel x : $f(f(x)) = x$.

1. Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2. En déduire que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $f(x) = x$ (indication : raisonner par l'absurde en supposant $f(x) < x$ puis $f(x) > x$ pour un élément x de $[0; 1]$).

Exercice 24. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.
En déduire que tout polynôme impaire a au moins un racine réel.

Exercice 25.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{1}{2}\right)$. Illustrer ce résultat graphiquement.
2. Une personne fait un tour de 6 km en 40 minutes. Montrer qu'il existe une portion de chemin de 3 km qu'elle a parcourue en 20 minutes.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$.

   (indication : considérer la fonction g définie sur$[0, 1 - 1/n]$par $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ et montrer que g s'annule au moins une fois en raisonnant par l'absurde).
4. Montrer en revanche que le résultat précédent devient faux si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 26. L'objectif est de déterminer toutes les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est continue en } 0 \text{ et en } 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est paire.
2. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(x^{2^n}\right) = f(x)$.
   (b) On note (u_n) la suite définie par son terme général : $u_n = x^{2^n}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
   (c) Déduire de (a) et (b) que $f(x) = f(1)$.
3. En question 2. on a établi que f est constante sur $]0, +\infty[$. Démontrer que f est constante sur $]-\infty, 0]$, puis sur $\mathbb{R}$.
4. Conclure.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$. Montrer que f est bijective.

Exercice 28.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, les démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.
   (a) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante et $f(0) = 1$, alors
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$
   (b) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, alors
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

   (c) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
   (d) Si on a $f(x) < g(x) < h(x)$ pour tout x, et si ces trois fonctions tendent respectivement vers ℓ, ℓ' et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors on a
$$\ell < \ell' < \ell''.$$
   (e) Si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x, et si f et h tendent respectivement vers ℓ et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors g tend vers une limite ℓ' vérifiant
$$\ell \leq \ell' \leq \ell''.$$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   (a) Si I est ouvert alors $f(I)$ est ouvert.
   (b) Si I est fermé alors $f(I)$ est fermé.
   (c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.
   (d) Si I est fermé borné, alors $f(I)$ est fermé borné.

3. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? En cas de réponse négative, justifier par un contre-exemple. f désigne une fonction strictement monotone.
   (a) Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors la fonction f définie sur $[a;b]$ s'annule une fois sur $[a;b]$.
   (b) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{x\to-\infty} f \times \lim_{x\to+\infty} f \leq 0$ alors f s'annule une fois sur $\mathbb{R}$.
   (c) Si f est continue sur $]a;b[$ et si $\lim_{x\to a} f \times \lim_{x\to b} f = -1$ alors f s'annule une fois sur $]a;b[$.
   (d) Si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) > 0$ alors f ne s'annule pas sur $[a;b]$.

4. Donner un exemple de fonction f, continue sur $[0;1]$, telle que $f(0) \times f(1) < 0$ et
   (a) i. f a une racine et une seule en $x = \dfrac{1}{2}$.
      ii. f a deux et seulement deux racines distinctes.
      iii. f a une infinité de racines.
   (b) Reprendre les questions précédentes, mais cette fois-ci avec la condition $f(0) \times f(1) > 0$.

Exercice 29. Pour les proposition suivante faire un schéma correspondant aux hypothèses et donner l'image de l'intervalle I par la fonction continue f.
a, b, c et d désignent des nombres réels, et $a < b$.

1. (a) f est strictement croissante sur $I = [a;b]$.
   (b) f est strictement décroissante sur $I = [a;b]$.
2. (a) f est strictement croissante sur $I = [a;b[$ et $\lim_{x\to b} f = c$.
   (b) f est strictement décroissante sur $I = [a;b[$ et $\lim_{x\to b} f = c$.
3. (a) f est strictement croissante sur $I =]-\infty;a[$; $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x\to a} f = +\infty$.
   (b) f est strictement décroissante sur $I =]-\infty;a[$; $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x\to a} f = -\infty$.
4. (a) f est strictement croissante sur $I =]a;b[$; $\lim_{x\to a} f = c$ et $\lim_{x\to b} f = d$.
   (b) f est strictement décroissante sur $I =]a;b[$; $\lim_{x\to a} f = c$ et $\lim_{x\to b} f = d$.
5. (a) f est strictement croissante sur $I = [a;b[$ et $\lim_{x\to b} f = +\infty$.
   (b) f est strictement décroissante sur $I = [a;b[$ et $\lim_{x\to b} f = -\infty$.

Exercice 30. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que :
$$\begin{cases} f \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \\ \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} < 1 \end{cases}$$

1. On suppose que $f(x) \leq x$. Montrer que : $f(0) \leq 0$

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) > \alpha$
3. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -\infty$$
4. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$f(\beta) < \beta$$
5. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$f(\gamma) = \gamma$$

***Exercice 31*.** **Partie I:** On considère la fonction g_n définie par :
$$g_n(x) = x^n(1-x) \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$
(a) Étudier les variations de g_n.

(b) Montrer que l'équation dans $\mathbb{R}$: $g_n(x) = 1$ a une seule solution ou aucune suivant la parité de n.

Partie II: On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$
où n est un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$.
2. En déduire que :
$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$$
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[\dfrac{2n}{n+1}, 2\right]$ tel que :
$$f(\alpha) = 0$$

***Exercice 32*.** **Partie I**

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

On considère la fonction numérique g définie par :
$$\forall x \in]a,b[\quad g(x) = f(x) - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-x}$$

1. Déterminer :
$$\lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} g(x)$$
2. En déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]a,b[$ tel que :
$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-a} + \frac{1}{b-\alpha}$$

Partie II

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) < 1 \\ \exists a \in \mathbb{R}_+^*, & f(a) = a \\ \exists b \in \mathbb{R}_+^*, & g(b) = b \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un réel c tel que :
$$\begin{cases} \inf(a,b) \le c \le \sup(a,b) \\ f(c)\cdot g(c) = c \end{cases}$$