Module : Mathématiques pour Ingénieur
Matière : Analyse Numérique
Chapitre 3
Interpolation polynomiale

Pr M.El Kyal

ENSA d'Agadir

Année universitaire 2021/2022

Motivations

En analyse numérique, une fonction f inconnue explicitement est souvent

- connue seulement en certains points $x_0, x_1, \cdots, x_n$;
- ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code numérique.

Mais dans de nombreux cas,

- On a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration,...) sur la fonction f.
- On cherche donc à reconstruire f par une autre fonction simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f.
- On espère que le modèle ne sera pas trop éloigné de la fonction f aux autres points.

Exemple de situation

Lorsqu'on effectue une série de mesures, on obtient les valeurs de la grandeur mesurée y_i en fonction du paramètre expérimental x_i que l'on fait varier.

- On n'a en régle générale pas accès à la fonction f qui relie ce paramètre à la valeur mesurée.
- Mais il peut être intéressant de pouvoir prédire une valeur approchée de $f(x)$ pour des valeurs de x que l'on n'a pas mesuré.
- On s'intéresse alors à la reconstruction de f par des polynômes

C'est ce que l'on appelle **l'interpolation polynomiale**.

Mais pourquoi les polynômes ?

- Le théorème d'approximation de Weierstrass :
  pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que

  $$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

  Plus ϵ est petit, plus le degré du polynôme est grand.
- La simplicité de l'évaluation d'un polynôme.
- La simplicité de manipulation d'un polynôme : dérivation, intégration....

Le développement de Taylor au voisinage d'un point x_0 à l'ordre n d'une fonction f est une interpolation polynomiale locale de f :

$$f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

où p_n est le polynôme de degré n donné par :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Cette approximation polynomiale de f n'a de sens que si f est dérivable à l'ordre $n + 1$. Nous n'étudierons pas cette approximation polynomiale supposée connue.

On cherche autre type de développement polynomial est donné losqu'on cherche à approximer (interpoler) une fonction $f : R \to R$ dont on connaît les $n+1$ valeurs $y_i = f(x_i)$ en $n+1$ points x_i distincts par un polynôme p_n (d'interpolation) de degré n qui passe par ces points, i.e. tel que $p_n(x_i) = y_i, 0 \leq i \leq n$.

DÉFINITION

Les points x_i en lesquels le polynôme p_n d'interpolation vérifie $p_n(x_i) = f(x_i)$ sont appelés points de collocation. Le polynôme obtenu est appelé polynôme d'interpolation.

Existence du polynôme interpolant

Dans le cas général, le problème peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.
Il paraît assez clair que pour que le problème ait une unique solution il faut établir une relation entre le degré m du polynôme et le nombre de points d'interpolation.
Pour déterminer le polynôme, on doit trouver tous ses coefficients et ils sont au nombre de $m+1$. On dispose pour ce faire des $n+1$ relations $p(x_i) = y_i$ Il est donc assez évident que pour espérer une solution unique au problème , on doit supposer que $m = n$.

Les polynôme p_n cherchés peuvent être décomposés sur la base $(1, x, x^1, \ldots, x^n)$ i.e. mis sous la forme

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

et les inconnues sont alors les $n + 1$ composantes a_i qui sont solutions du système formé des $n + 1$ équations $p(x_i) = f(x_i)$.

Le système s'écrit Matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de de Van der Monde. Son déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

car les x_i sont tous distincts.

Alors le système admet une unique solution qui détermine le polynôme.
La matrice de Van der Monde et est mal conditionnée.
Donc on préfère développer des polynômes de degré n sur d'autres bases telles que :

1. La base de Lagrange : $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}, 0 \leq i \leq n$
2. La base de Newton :
$(1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0) \cdots (x - x_n))$

On se donne $n+1$ réels $x_0, \cdots, x_n$ distincts et $n+1$ valeurs $y_0, \cdots, y_n$ qui correspondront à $y_i = f(x_i)$ pour une fonction f donnée.
On note P_n l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Définition

On dit que x_0 est racine d'un polynôme p si et ssi

$$p(x_0) = 0.$$

x_0 est racine simple si et ssi

$$p(x_0) = 0 \text{ et } p'(x_0) \neq 0.$$

x_0 est racine multiple d'ordre m si et ssi

$$p(x_0) = 0,\ p'(x_0) = 0, \cdots, p^{(m-1)}(x_0) = 0 \text{ et } p^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Proposition

Soit p un polynôme de degré n.

1. *Si x_0 est une racine de p, alors il existe un polynôme q de degré $n-1$ tel que $p(x) = (x - x_0)q(x)$.*
2. *Si p a n racines simples $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, il est de la forme $C \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ où C est une constante.*
3. *Si x_0 est racine multiple d'ordre m, alors il existe un polynôme q de degré $n - m$ tel que $p(x) = (x - x_0)^m q(x)$.*
4. *Un polynôme p de degré n qui a $n+1$ racines est le polynôme nul.*
5. *Il existe un unique polynôme p de degré n qui en $n+1$ points distincts x_i prend $n+1$ valeurs $y_i = p(x_i)$.*

Preuve

En effet, suppusons qu'ils existent deux polynômes p et q de degré n qui en $n+1$ points distincts x_i prennent $n+1$ valeurs $y_i = p(x_i) = q(x_i)$. On pose alors

$$R(x) = p(x) - q(x.)$$

Puisque p et q sont de degré n alors le polynômes R est de degré $\leq\leq n$. Or

$$R(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0 \text{ pour } i = 0, \cdots n$$

alors R est un polynôme nul et par suite le polynôme d'interpolation est unique.
Finalement, peu importe la base sur laquelle nous allons développer notre polynôme dinterpolation, il sera unique.

On se donne $n+1$ points de collocation $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ distincts et $n+1$ réels $(y_i)_{1\leq i\leq n}$. On cherche un polynôme p de degré n tel que $p(x_i)=f(x_i)=y_i$ pour tout i.
l'idée est d'avoir une base $(L_0,\cdots,L_n)$ de P_n telle que pour tout $0\leq i,j\leq n$:

$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Les L_i polynômes cherchés ont pour racine les n points x_j pour $j \neq i$, ils sont donc de la forme

$$L_i(x) = C \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

de plus, $L_i(x_i) = 1$ donc

$$C = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Donc de manère générale,

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Finalement le polynôme d'interpolation chercé s'écrit :

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x).$$

En effet, puique chaque polynôme L_i est de degrès $\leq n$, alors P_n est de degrès $\leq n$. de plus, pour tout x_i, on a

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x_i) = f(x_i) L_i(x_i) = f(x_i)$$

Alors ce polynôme interpole f et le polynôme d'interpolation est unique.

Exemple

On cherche, en utilisant les polynômes de Lagrange, le polynôme de degré 3 qui interpole la fonction f aux points $(0,1),(1,2),(2,9)$ et $(3,28)$.
On a

$$L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \text{ pour } i=0,\cdots,3$$

donc

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{2} \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-2}
\end{aligned}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{6}$$

D'où le polynôme d'interpolation est

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{2} \\ &\quad +9\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{-2} + 28\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 + 1 \end{aligned}$$

L'interpolation de Lagrange présente un problème majeur : elle n'est pas récursive. En effet, supposons qu'on a cherché un polynôme d'interpolation de degré n, si on dispose d'un point supplémentaire (x_{n+1}, y_{n+1}) en plus des n+1 points précédents $(x_i, y_i), i = 0, \cdots, n$, le polynôme d'interpolation p_{n+1} obtenu ne peut pas se déduire du polynôme p_n. Il faut recommencer par donner tous les polynômes $L_i, i = 0, \cdots, n+1$.

L'idée des polynômes de Newton est d'écrire les polynômes de manière différente : on commence par un polynôme constant p_0 (de degré 0)

$$p_0(x) = a_0$$

ce qui revient à se donner un point x_0 et la valeur $y_0 = a_0$, on ajoute un point (x_1, y_1) pour obtenir un polynôme de degrè 1 sous la forme

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

vérifiant $p_1(x_0) = a_0$ et $p_1(x_1) = y_1$. On a ainsi ajouter le polynôme $a_1(x - x_0)$ de degré 1 qui s'annule en x_0, la valeur de x_0 est donc inchangée.
Comme ce polynôme doit vérifier $p_1(x_1) = y_1$, on aura

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Puis on poursuit le processus : on ajoute un point (x_2, y_2) pour obtenir :

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

où on a ajouté à p_1 un polynôme de degré 2 qui s'annule en x_0 et x_1 : la valeur en x_0 et x_1 est donc inchangée. Comme on doit avoir $p_2(x_2) = y_2$, il vient

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

soit

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}\right). \end{aligned}$$

On poursuit le processus : disposant des points (x_i, y_i) pour $i = 0, \cdots, k-1$, on ajoute un point (x_k, y_k) et le polynôme obtenu s'écrit :

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}),$$

et donc $p_k - p_{k-1}$ est le polynôme de degré k qui s'annule aux k points $x_0, \cdots, x_{k-1}$ et qui vaut y_k au point x_k, ce qui détermine a_k.

Définition

Pour une fonction f définie en deux points a et b distincts.

- On appelle première différence divisée de f la valeur :

$$f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(pente moyenne entre a et b.)

- Si f est définie en 3 points distincts x_0, x_1 et x_2, on appelle deuxième différence divisée de f la valeur :

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

- Et de manière générale, on définit la $n^{\text{ième}}$ différence divisée en $n+1$ points distincts par :

$$f[x_0\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

A partir de cette définition, le polynôme de Newton de degré 1 sera noté

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

et le polynôme de Newton p_2 sera noté

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

A partir de cette définition, le polynôme de Newton de degré 1 sera noté

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

et le polynôme de Newton p_2 sera noté

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Proposition

Étant donnés $n+1$ points $(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, n$ l'unique polynôme de degré n qui passe par ces points est donné par :

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Preuve

Démonstration par récurrence. L'hypothèse est vraie pour p_1.
Etant donnés n points, $(x_i, y_i = f(x_i)), i = 0, \cdots, n-1$,
Supposons que l'hypothèse soit vraie pour le polynôme p_{n-1} de Newton, Alors :

$$p_{n-1}(x) = f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,\cdots,x_{n-1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})$$

On a alors aussi, pour les points $(x_i, f(x_i)), i = 1, \cdots, n$, le polynôme q_{n-1} de Newton donné par :

$$q_{n-1}(x) = f(x_1)+f[x_1,x_2](x-x_1)+f[x_1,\cdots,x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

De plus,

$$p_{n-1}(x_i) = q_{n-1}(x_i) = y_i = f(x_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1$$

D'où, en posant :

$$p_n(x) = \frac{(x_n - x)p_{n-1}(x) + (x - x_0)q_{n-1}(x)}{(x_n - x_0)}$$

on aura

$$p_n(x_i) = f(x_i) \text{ pour tout } i = 0, \cdots, n.$$

Donc p_n est le polynôme cherché. Il reste à montrer que

$$p_n(x) - p_{n-1}(x) = f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Posons

$$s_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_n - x_0)}(q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)),$$

le polynôme s_n de degré n s'annule en les n points $x_i, 0 \leq i \leq n-1$, donc s_n est de la forme

$$s_n(x) = \alpha(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

pour un scalaire α donné.
Il reste à montrer que

$$\alpha = f[x_0, \cdots, x_n]$$

Mais, à partir de l'expression de p_n, le coefficient de x_n est donné par :

$$\frac{-f[x_0, \cdots, x_{n-1}] + f[x_1, \cdots, x_n]}{(x_n - x_0)}$$

donc

$$\alpha = f[x_0, \cdots, x_n].$$

Il reste maintenant à calculer efficacement la valeur de ce polynôme. La manière la plus simple consiste à construire une table dite table de différences divisées de la façon suivante :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

La construction de cette table est simple, nous nous sommes arrêtés aux troisièmes différences divisées, mais les autres s'obtiendraient de la même façon. Prenons l'exemple suivant :
La table des différences divisées pour les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$ est :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1			
		1		
1	2		3	
		7		1
2	9		6	
		19		
3	28			

D'où le polynôme d'interpolation est

$$p_3(x) = 1+1(x-0)+3(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-2) = x^3+1$$

Si on rajoute un quatrième point d'interpolation $(5, 54)$ pour obtenir un polynôme de degré 4, il suffit de compéter la table des différences divisées déjà utilisée :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+}$
0	1				
		1			
1	2		3		
		7		1	
2	9		6		
		19		-2	
3	28		-2		
		13			
5	54				

et alors le polynôme d'interpolation de degré 4 est

$$p_4(x) = p_3(x) + (-3/5)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Erreur d'interpolation

L'interpolation permet, à partir d'un certain nombre de données sur les valeurs d'une fonction, de faire l'approximation de $f(x)$ en tout point x. Toute fois, cette opération entraine une erreur d'interpolation qu'il convient d'étudier en détail.
On peut exprimer l'erreur d'interpolation de la façon suivante :

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$$

ou encore

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

On constate immédiatement que

$$E_n(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n$$

et donc que l'erreur d'interpolation est nulle aux points de collocations puisque le polynôme passe exactement par ces points.

Remarque

On suppose que les données des points $(x_i, f(x_i))$ *sont exactes, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, si ces données proviennent de mesures expérimentales, elles peuvent être entachées d'une erreur de mesure. Nous supposons, dans la suite, que cette erreur est nulle.*

Théorème

Soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, des points de collocation. On suppose que la fonction f est définie dans un intervalle $[a, b]$ et qu'elle est $n+1$ fois dérivable sur cet intervalle. Alors pour tout x dans $[min(x_i), max(x_i)]$, il existe $\xi(x)$ dans $[min(x_i), max(x_i)]$ tel que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

Preuve

Soit le polynôme d'interpolation de degré n passant par $x_0, \cdots, x_n$.

- Pour tout $x \in [a, b]$, Si $x = x_i$ pour un indice $0 \leq i \leq n$ la formule est vérifiée car $f(x_i) = p_n(x_i)$.
- Fixons maintenant un $\overline{x} \in [a, b]$ qui soit différent des x_i et montrons la formule pour ce $\overline{x}$.
  On considère le polynôme p_{n+1} qui interpole la fonction f aux points $x_0, \cdots, x_n$ et $\overline{x}$.
  Par définition

  $$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0 \cdots, x_n, \overline{x}](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

  et notons

  $$R(x) = f(x) - p_{n+1}(x),$$

  R est alors une fonction dérivable à l'ordre $n + 1$.

- Par définition de R, la différence $f(x) - p_{n+1}(x)$ s'annule en $n+2$ points distincts $x_0, \cdots, x_n, \overline{x}$.
- Comme R est dérivable , on peut appliquer $n+1$ fois le théorème de Rolle et on en déduit que R' admet $n+1$ zéros distincts dans $[a, b]$.
- De la même façon, R" admet n zéros distincts dans $[min(x_i), max(x_i)]$.
- Finalement encore $R^{(n+1)}$ admet un zéro dans $[a, b]$. Notons ce zéro de $R^{(n+1)}$ par ξ. Alors, on a

$$R^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - p_{(n+1)}^{(n+1)}(\xi))$$

Alors

$$f^{(n+1)}(\xi) = p_{(n+1)}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! f[x_0 \cdots, x_n, \overline{x}]$$

car $p_{(n+1)}$ est un polynôme de degré $n+1$, donc

$$f[x_0 \cdots, x_n, \overline{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

et puisque

$$p_{(n+1)}(\overline{x}) = f(\overline{x})$$

alors

$$\begin{array}{rcl} f(\overline{x}) - p_{(n)}(\overline{x}) & = & p_{(n+1)}(\overline{x}) - p_{(n)}(\overline{x}) \\ & = & f[x_0 \cdots, x_n, \overline{x}](\overline{x} - x_0) \cdots (\overline{x} - x_n) \\ & = & \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\overline{x} - x_0) \cdots (\overline{x} - x_n). \end{array}$$

$\overline{x}$ étant un élément de $[a, b]$.

Alors $\forall x \in [a, b)]$, on a

$$f(x) - p_{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Remarque

Des commentaires sont nécessaires pour bien comprendre ce résultat :

1. L'erreur d'interpolation est nulle aux points de collocation.
2. La fonction a priori inconnue f apparaît par l'intermise de sa dérivée d'ordre $n+1$ évaluée au point ξ) également inconnu.
3. Il existe une similarité entre l'erreur d'interpolation et l'erreur liée au développement de Taylor : dans les deux cas, on montre l'existence d'un point ξ qu'on ne peut généralement pas déterminer.
4. Le terme d'erreur en un point x fait intervenir des coefficients de la forme $(x - x_i)$ donc on a intérêt à choisir des points x_i qui sont situés le plus près possible de x. Ce choix est utile lorsqu'on a un grand nombre de points de collocation.

Exemple

Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, on veut avoir une approximation de $\sqrt{8}$ qui est égale à $2,828427125$. On suppose qu'on a les points d'interpolations suivants : $(1;1)$,$(3;1,732051)$, $(7,5;2,738613)$,$(9,1;3,016620)$ et $(12;3,464102)$. On construit le tableau des différences divisées.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, ..x_{i+2}]$	$f[x_i, ..x_{i+3}]$	$f[x_i, ..x_{i+4}]$
$7,5$	$2,738613$				
		$0,173755$			
$9,1$	$3,016621$		$-0,00432247$		
		$0,154304$		$0,0004291$	
12	$3,464102$		$-0,00625344$		$0,0001149$
		$0,192450$		$0,0011761$	
3	$1,732051$		$-0,01577954$		
		$0,366025$			
1	1				

On remarque que les abscisses x_i ont été ordonnées en fonction de leur distance par rapport à $x = 8$ cela nous permet d'effectuer d'abord l'interpolation avec les valeurs les plus proches de 8 pour minimiser l'erreur d'interpolation. On a le tableau des résultats suivant :

degré n	$p_n(8)$	$\|p_n(8) - \sqrt{8}\|$
1	2,825490	$0{,}29 \times 10^{-2}$
2	2,827868	$0{,}55 \times 10^{-3}$
3	2,828812	$0{,}38 \times 10^{-3}$
4	2,827547	$0{,}88 \times 10^{-3}$

Supposons que les abscisses x_i ont été ordonnées par ordre croissant, on aurait le tableau suivant :

degré n	$p_n(8)$	$\lvert p_n(8) - \sqrt{8}\rvert$
1	3,562178	$0,73 \times 10^{0}$
2	2,795705	$0,32 \times 10^{-1}$
3	2,825335	$0,30 \times 10^{-2}$
4	2,827547	$0,88 \times 10^{-3}$

Test darrêt

- L'expression analytique de l'erreur d'interpolation ne permet pas d'évaluer la précision de l'approximation.
- Il est cependant souhaitable de pouvoir évaluer cette erreur, même de façon grossière.
- Cela est possible avec la formule de Newton.

En effet, l'expression de l'erreur fait intervenir la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction f en ξ, c'est ce terme qu'il est nécessaire d'estimer (puisque c'est le seul qui ne puisse être évalué exactement).

Or d'après la démonstration de l'expression analytique de l'erreur, on a remarqué que pour tout $x \in [a, b]$

$$f[x_0, \cdots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

On peut ainsi estimer l'erreur d'interpolation $E_n(x)$ par :

$$E_n(x) \simeq f[x_0, \cdots, x_{n+1}](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

avec x_{n+1} un point d'interpolation qui prend la place de x.

Remarque

1. *Finalement, l'approximation de l'erreur d'interpolation n'est rien d'autre que le terme necessaire au calcul du polynôme de degré $(n+1)$ dans la formule de Newton.*
2. *Cette approximation n'est pas toujours d'une grande précision, mais c'est généralement la seule disponible.*
3. *Cette approximation nous amène à suggérer le critère d'arrêt suivant : on considère que l'approximation $p_n(x)$ est suffisamment précise si :*

$$\frac{|p_{n+1}(x) - p_n(x)|}{|p_{n+1}(x)|} < \epsilon$$

où ϵ est une valeur de tolérence fixée à l'avance. Il est généralement recommandé de fixer également la degré maximal N des polynômes utilisés.

Exemple

Reprenons l'exemple de la fonction $\sqrt{x}$ pour laquelle on va comparer l'erreur exacte d'interpolation au point 8 avec l'approximation de l'erreur.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, .x_{i+2}]$	$f[x_i, .x_{i+3}]$	$f[x_i, .x_{i+}$
7	$2, 645751$				
		$0, 177124$			
9	3		$-0, 00470299$		
		$0, 158321$		$0, 000206783$	
11	$3, 316625$		$-0, 00346229$		$0, 9692 \times 1$
		$0, 144463$		$0, 000129248$	
13	$3, 605551$		$-0, 00268680$		
		$0, 133716$			
15	$3, 872983$				

On a le tableau des résultats suivant :

degré n	$p_n(8)$	$\lvert p_n(8) - \sqrt{8} \rvert$	$\lvert p_{n+1}(8) - p_n(8) \rvert$
1	2,8222875	$0,55 \times 10^{-2}$	$0,47 \times 10^{-2}$
2	2,827577990	$0,84 \times 10^{-3}$	$0,62 \times 10^{-3}$
3	2,828198339	$0,22 \times 10^{-3}$	$0,145 \times 10^{-3}$
4	2,827547	$0,88 \times 10^{-3}$	

On constate que l'erreur approximative est assez près de l'erreur exacte.

Nous déterminons ici l'ordre de convergence de l'approximation polynomiale.
Si on retient le cas où les abscisses sont également distantes, il suffit de poser :

$$s = \frac{x - x_0}{h} \text{ ou encore } (x - x_0) = sh$$

On remarque alors que :

$$x - x_i = x - (x_0 + ih) = (x - x_0) - ih = sh - ih = (s - i)h$$

Il suffit maintenant de remplacer $x - x_i$ par $(s - i)h$ dans l'expression analytique de l'erreur d'interpolation pour obtenir le résultat suivant :

Théorème

Dans le cas où les points de collocations x_i sont équidistants, l'expression analytique de l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$\frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)h^{n+1}$$

pour un certain ϵ dans l'intervalle $[x_0, x_n]$

On peut alors conclure que le polynôme d'interpolation p_n est une approximation d'ordre $n+1$ de la fonction f. De plus, si on prend des points de collocation situés à une distance $h/2$ les uns des autres, l'erreur d'interpolation est diminuée d'un facteur de 2^{n+1}.

Autre type d'interpolation

On peut faire une interpolation par morceaux : On construit des interpolations en utilisant des groupes de points. On s'assure d'interpoler tous les points en garantissant que tous les nuds sont utilisés.

- L'exemple classique est la droite brisée : une interpolation linéaire par morceaux.
- Mais on pourrait faire la même chose avec des quadratiques par morceaux,
- des cubiques par morceaux

L'inconvénient est que Les polynômes par morceaux ne sont généralement pas ń lisses ż aux points d'intersection : même si on a continuité de l'interpolation, leurs dérivées seront généralement discontinues. Dans certaines applications, ce manque de régularité n'est pas acceptable.

Pour ce qui est d'imposer une collocation sur la dérivées, c'est ce que l'on appelle l'interpolation d'Hermite :
On cherche un polynôme qui interpole la fonction f ainsi que ses dérivťées aux points
$((x_0, f(x_0), f'(x_0), ...f^{(k)}(x_0)), \cdots, (x_0, f(x_0), f'(x_n), ...f^{(k)}(x_n))$
donnés. précisément, soient les $(n+1)$ triplets $((x_i, f(x_i), f'(x_i))$, on cherche un polynôme p tel que :

$$\begin{cases} p(x_i) & = & f(x_i) & i = 0, ...n \\ \vdots p^{(k)}(x_i) & = & f^{(k)}(x_i) & i = 0, ...n) \end{cases}.$$

Mais pour ce qui est d'imposer une collocation sur la dérivée cela implique une connaissance a priori de la fonction et de ces dérivées car les interpolations d'Hermite ont besoin de $f(x) \cdots f^{(k)}(x)$, elles sont appropriées pour interpoler des fonctions dont l'expression est connue.

Une solution consiste à ńmélanger ż ces deux approches : on introduit des conditions supplémentaires de continuité sur les dérivées pour des polynômes par morceaux, C'est ce que l'on appelle les Splines cubiques
Pour les points de collocations $(x_i, f(x_i)), i = 0, , n$ on construit une interpolation cubique sur les n sous intervalles en imposant la continuité de la dérivée première et deuxième sur les points internes : $x_i, i = 1, ...n-1$. On aura alors le polynôme d'interpolation $S(x)$ défini par :

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) & si & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) & si & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x) & si & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

En plus

1. $S(x)$ interpole les nuds x_i donnant $n+1$ conditions.
2. $s(x)$ est continu aux nuds internes donnant $n-1$ conditions.
3. $s'(x)$ et $s''(x)$ sont continuent aux nuds internes donnant $2(n-1)$ conditions.

Bilan : $4n$ inconnues et $4n-2$ équations, le système est sous déterminé. il manque alors deux équation pour que le système admette une solution. On peut donc définir différentes splines cubiques, en fonction des 2 conditions supplémentaires choisies. Il est plus simple d'ajouter les conditions supplémentaires $S''(x_0)=0$ et $S''(x_n)=0$ c'est ce que l'on appelle les splines naturelles.