Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Física computacional

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Actividad final

Iveth R. Navarro

30 de abril de 2021
Puerto Peñasco, Sonora, México

Índice

Resumen

La presente Actividad se centra en sintetizar y fundamentar las últimas tres actividades realizadas en el curso de Física Computacional de la Universidad de Sonora, sobre solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales utilizando el Método de Diferencias Finitas.

1. Introducción

Parece conveniente iniciar por preguntarse, ¿Qué son las ecuaciones diferenciales parciales?

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida $u : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ (o, más generalmente, de un colector diferenciable de dimensión $d \geq 2$).

A menudo, también se consideran sistemas de ecuaciones diferenciales parciales para funciones con valores vectoriales $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, o para asignaciones con valores en una variedad diferenciable.

Sin embargo, la definición anterior es engañosa, ya que en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales uno no estudia ecuaciones arbitrarias, sino que se concentra en esas ecuaciones que ocurren naturalmente en diversas aplicaciones (física y otras ciencias, ingeniería, economía) o en otros contextos matemáticos.

En otras palabras, Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona las derivadas de una función (escalar) dependiendo de una o más variables. Por ejemplo

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dx^2} + u^2 = \cos x \tag{1}$$

es una ecuación diferencial para la función $u(x)$ que depende de una sola variable x, mientras que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \tag{2}$$

es una ecuación diferencial que involucra una función $u(t, x, y)$ de tres variables.

Una ecuación diferencial es ordinaria si la función u depende de una sola variable y es llamada *parcial* si depende de más de una variable.

Existen tres ecuaciones diferenciales parciales lineales esenciales de segundo orden en uno, dos, y tres dimensiones espaciales: la ecuación del calor, modelando la termodinámica en un medio, así como la difusión de poblaciones animales y contaminantes químicos; la ecuación de onda, modelando de vibraciones de barras, cuerdas, placas y cuerpos sólidos, así como acústicos, vibraciones fluidas y electromagnéticas; y la ecuación de Laplace y su contraparte heterogénea, la ecuación de Poisson, que gobierna los equilibrios mecánicos y térmicos de cuerpos, así como potenciales fluidos-mecánicos y electromagnéticos.

Cada aumento en la dimensión requiere un aumento en la sofisticación matemática, así como el desarrollo de herramientas analíticas adicionales. Los tres ejemplos protagonistas, calor, onda y Laplace / Poisson, no solo son esenciales para una amplia gama de aplicaciones, sino que también sirven como paradigmas instructivos para las tres clases principales de ecuaciones diferenciales parciales lineales: parabólicas, hiperbólicas y elípticas.

A lo largo de este reporte estudiaremos esta categorización de ecuaciones diferenciales parciales, conocimiento puesto en práctica en las tres últimas actividades del curso referentes al tema.

2. Desarrollo

2.1. Ecuación del calor, de onda y de Poisson

Las versiones homogéneas de las tres paradigmáticas ecuaciones diferenciales parciales de segundo ordenpara funciones de dos variables son

Ecuación de onda	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	Hiperbólica
Ecuación del calor	$u_t - \gamma u_{xx} = 0$	Parabólica
Ecuación de Laplace	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Elíptica

La última columna indica el tipo de ecuación, de acuerdo con la taxonomía estándar de ecuaciones diferenciales parciales. La ecuación de onda, calor y Laplace son las representantes prototípicas de estos tres géneros fundamentales. Cada género tiene sus propias características analíticas distintivas, manifestaciones físicas e incluso esquemas de solución numérica. Las ecuaciones que gobiernan las vibraciones, como la ecuación de onda, son típicamente hiperbólicas. Las ecuaciones que modelan la difusión, como la ecuación del calor, son parabólicas. Las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas normalmente representan procesos dinámicos, por lo que una de las variables independientes es identificada como tiempo. Por otro lado, las ecuaciones que modelan fenómenos de equilibrio, incluidas las ecuaciones de Laplace y Poisson, suelen ser elípticas e implican sólo variables espaciales. Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas están asociados con problemas de valores en la frontera, mientras que las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas requieren problemas de valor inicial y de límite inicial.

La teoría de clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales reales de segundo orden para una función de valor escalar $u(t, x)$ que depende de dos variables procede de la siguiente manera. La forma más general de la ecuación es

$$L[u] = Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \tag{3}$$

donde se permite que los coeficientes A, B, C, D, E, F sean funciones de (t, x), como es la función $G(t, x)$. La ecuación es homogénea si y solo si G≡0. Suponemos que al menos uno de los coeficientes principales A, B y C no son idénticamente cero, ya que de lo contrario, la ecuación decae en una ecuación de primer orden.

La cantidad clave que determina el tipo de tal ecuación diferencial parcial es su discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \tag{4}$$

Esto puede recordarnos al discriminante de una ecuación cuadrática

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5}$$

cuyas soluciones trazan una curva plana, una sección cónica. En los casos no degenerados, el discriminante (4) fija su tipo geométrico:

- Una hipérbola cuando $\Delta > 0$
- Una parábola cuando $\Delta = 0$
- Una elipse cuando $\Delta < 0$

Esto motiva la elección de la terminología utilizada para clasificar ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

En un punto (t, x), la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden (3) es llamada

Hiperbólica	si	$\Delta(t, x) > 0$,
Parabólica	si	$\Delta(t, x) = 0$, pero $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$,
Elíptica	si	$\Delta(t, x) < 0$
Singular	si	$A = B = C = 0$

En particular,

- La ecuación de onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$ tiene discriminante $\Delta = 4$, por lo que es hiperbólica.
- La ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$ tiene discriminante $\Delta = 0$, por lo que es parabólica.
- La ecuación de Poisson $u_{tt} + u_{xx} = -f$ tiene discriminante $\Delta = -4$, por lo que es elíptica.

2.2. Condiciones a la frontera

Hay tres tipos principales de problemas de valores límite que surgen en la mayoría de las aplicaciones. Especificar el valor de la solución a lo largo del límite del dominio se llama *Condición de frontera de Dirichlet*, en honor al analista del siglo XIX Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Especificar la derivada normal de la solución a lo largo del límite da como resultado una *Condición de frontera de Neumann*, que lleva el nombre de su contemporáneo Carl Gottfried Neumann. Prescribir la función a lo largo de parte del límite, y la derivada normal a lo largo del resto, da como resultado un problema de valor límite mixto. Por ejemplo, en equilibrio térmico, el problema del valor límite de Dirichlet especifica la temperatura de un cuerpo a lo largo de su límite, y nuestra tarea es encontrar la distribución de temperatura interior resolviendo una ecuación diferencial parcial apropiada. De manera similar, el valor límite de Neumann prescribe el flujo de calor a través del límite. En particular, un límite aislado no tiene flujo de calor y, por lo tanto, la derivada normal de la temperatura es cero en la frontera. El problema del valor de frontera mixto prescribe la temperatura a lo largo de parte de el límite y el flujo de calor a lo largo del resto. Nuevamente, nuestra tarea es determinar la temperatura interior del cuerpo.

Podemos resumir en un contexto de la ecuación del calor: hay tres tipos comunes de condiciones de frontera. La primera es la Condición de frontera de Dirichlet, donde el final se lleva a cabo a una temperatura prescrita. Por ejemplo,

$$u(t, a) = \alpha(t) \tag{6}$$

fija la temperatura (posiblemente variable en el tiempo) en el extremo izquierdo. Alternativamente, la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = \mu(t) \tag{7}$$

prescribe el flujo de calor $w(t, a) = -(a)u_x(t, a)$ allí. En particular, una condición Neumann homogénea , $u_x(t, a)\equiv 0$, modela un extremo aislado que evita que fluya la energía térmica dentro o fuera. La *condición de frontera de Robin,*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) + \beta(t)u(t, a) = \tau(t) \tag{8}$$

modela el intercambio de calor resultante de la colocación del extremo de la barra en un baño de calor (depósito térmico) a temperatura $\tau(t)$.

2.3. Diferencias finitas

Uno puede apreder rápidamente que, las ecuaciones diferenciales que pueden resolverse mediante fórmulas analíticas explícitas son pocas y distantes entre sí. En consecuencia, el desarrollo de esquemas de aproximación numérica precisos son una herramienta esencial para extraer información cuantitativa así como lograr una comprensión cualitativa de los posibles comportamientos de las soluciones a la vasta mayoría de ecuaciones diferenciales parciales. (Por otro lado, el exitoso diseño de Los algoritmos numéricos requieren una comprensión bastante profunda de sus propiedades analíticas básicas, y por lo tanto, la dependencia exclusiva de los números no es una opción.) Incluso en casos como las ecuaciones de calor y de onda, en las que las fórmulas de solución explícitas (ya sea en forma cerrada o series infinitas), existen, los métodos numéricos todavía pueden emplearse de manera rentable. De hecho, uno puede probar con precisión un algoritmo numérico propuesto ejecutándolo en una solución conocida.

Muchos de los esquemas de solución numérica básicos para ecuaciones diferenciales parciales pueden encajar en dos grandes temas. El primero, que a nosotros nos compete en esta sección, es el de métodos de diferencias finitas, obtenido reemplazando las derivadas en la ecuación por las fórmulas de diferenciación numérica.

A continuación se describirán algunas fórmulas elementales de diferencias finitas usadas para aproximar numéricamente derivadas de funciones de primer y segundo orden.

2.3.1. Algoritmo numérico para la ecuación del calor

Consideremos la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{9}$$

en un intervalo de longitud l, con difusividad térmica constante $\gamma > 0$. Imponemos Condiciones de frontera de Dirichlet dependientes del tiempo

$$u(t, 0) = \alpha(t), \quad u(t, \ell) = \beta(t), \quad t > 0 \tag{10}$$

fijando la temperatura al final del intervalo, junto con las condiciones iniciales

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \tag{11}$$

especificando la distribución de temperatura inicial. Para efectuar una aproximación numérica a la solución de este problema de valor de frontera inicial, comenzamos por introducir una malla que consta de nodos $(t_j, x_m) \in \mathbb{R}^2$ con

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \quad \text{y} \quad 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \ell$$

Para simplificar, mantenemos un espaciado de malla uniforme en ambas direcciones, con

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j, \quad \Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{l}{n},$$

que representan, respectivamente, el tamaño del paso de tiempo y el tamaño de la malla espacial. Será imprescindible que no exijamos a priori que los dos sean iguales. Usaremos la notación

$$u_{j,m} \approx u(t_j, x_m), \quad \text{donde} \quad t_j = j\Delta t, \quad x_m = m\Delta x, \tag{12}$$

para denotar la aproximación numérica al valor de la solución en el nodo indicado.

Como primer intento de diseñar un esquema de solución numérica, emplearemos la aproximaciones de diferencias finitas más simple a las derivadas que aparecen en la ecuación. La La derivada espacial de segundo orden se aproxima mediante la fórmula de diferencia centrada

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O\left(h^2\right) \tag{13}$$

y por eso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_m) \approx \frac{u(t_j, x_{m+1}) - 2u(t_j, x_m) + u(t_j, x_{m-1})}{(\Delta x)^2} + O\left((\Delta x)^2\right) \tag{14}$$

$$\approx \frac{u_{j,m+1} - 2u_{j,m} + u_{j,m-1}}{(\Delta x)^2} + O\left((\Delta x)^2\right), \tag{15}$$

donde el error en la aproximación es proporcional a $(\Delta x)^2$. Del mismo modo, la aproximación en diferencias finitas unilateral

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \tag{16}$$

se usa para aproximar la derivada en el tiempo, por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_m) \approx \frac{u(t_{j+1}, x_m) - u(t_j, x_m)}{\Delta t} + O(\Delta t) \approx \frac{u_{j+1,m} - u_{j,m}}{\Delta t} + O(\Delta t), \tag{17}$$

donde el error es proporcional a Δt. En general, se debe tratar de asegurar que las aproximaciones tienen órdenes de precisión similares, lo que nos lleva a requerir

$$\Delta t \approx (\Delta x)^2 \tag{18}$$

Asumiendo $\Delta x < 1$, esto implica que los pasos de tiempo deben ser mucho más pequeños que el espacio tamaño de malla.

Reemplazando las derivadas en la ecuación de calor (19) por sus aproximaciones en diferencias finitas (14, 17) y reordenando términos, terminamos con el sistema lineal

$$u_{j+1,m} = \mu u_{j,m+1} + (1-2\mu)u_{j,m} + \mu u_{j,m-1}, \qquad \begin{array}{l} j = 0, 1, 2, \ldots, \\ m = 1, \ldots, n-1, \end{array} \tag{19}$$

en el cual

$$\mu = \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{20}$$

El esquema resultante es de forma iterativa, por lo que los valores de la solución $u_{j+1,m} \approx u(t_{j+1}, x_m)$ en el tiempo t_{j+1} se calculan sucesivamente, mediante (19), a partir de los del tiempo t_j anterior.

La condición inicial (11) indica que debemos inicializar nuestros datos numéricos por muestreo de la temperatura inicial en los nodos

$$u_{0,m} = f_m = f(x_m), \quad m = 1, ..., n-1 \tag{21}$$

Similarmente, las condiciones de frontera (10) requieren que

$$u_{j,0} = \alpha_j = \alpha(t_j), \quad u_{j,n} = \beta_j = \beta(t_j), \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{22}$$

En aras de la coherencia, debemos suponer que las condiciones iniciales y de cfrontera coinciden en los extremos del dominio:

$$f_0 = f(0) = u(0,0) = \alpha(0) = \alpha_0, \quad f_n = f(l) = u(0,l) = \beta(0) = \beta_0 \tag{23}$$

Las tres ecuaciones (19, 21, 22) prescriben completamente el esquema de aproximación numérica para la solución del problema del valor de frontera inicial (9, 10, 11).

Reescribamos las ecuaciones precedentes en una forma vectorial más transparente. Primero, sea

$$\mathbf{u}^{(j)} = (u_{j,1}, u_{j,2}, \ldots, u_{j,n-1})^T \approx (u(t_j, x_1), u(t_j, x_2), \ldots, u(t_j, x_{n-1}))^T \tag{24}$$

el vector cuyas entradas son las aproximaciones numéricas a los valores de la solución en el tiempo t_j en los nodos interiores. Omitimos los nodos de frontera (t_j, x_0), (t_j, x_n), ya que esos valores están fijados por las condiciones de frontera (22). Entonces (19) toma la forma

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = A\mathbf{u}^{(j)} + \mathbf{b}^{(j)} \tag{25}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\mu & \mu & & & & \\ \mu & 1-2\mu & \mu & & & \\ & \mu & 1-2\mu & \mu & & \\ & & \mu & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \mu \\ & & & & \mu & 1-2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu\alpha_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu\beta_j \end{pmatrix}. \tag{26}$$

La matriz A de coeficientes $(n-1)\times(n-1)$ es simétrica y tridiagonal, y solo se muestran sus valores distintos de cero. Las contribuciones (22) de los nodos de contorno aparecen en el vector $b^(j) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Este método numérico se conoce como esquema explícito, ya que cada iteración es calculado directamente de su predecesor sin tener que resolver ninguna ecuación auxiliar.

2.3.2. Algoritmo numérico para la ecuación de onda

Consideremos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t \geq 0 \tag{27}$$

en un intervalo acotado de longitud l con velocidad de onda constante $c > 0$. Para especificidad, imponemos las condiciones de frontera de Dirichlet (posiblemente dependientes del tiempo)

$$u(t,0) = \alpha(t), \quad u(t,l) = \beta(t), \quad t \geq 0 \tag{28}$$

a lo largo con las condiciones iniciales usuales

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l \tag{29}$$

Al igual que en el algoritmo anterior, adoptamos una malla espaciada uniformemente

$$t_j = j\Delta t, \quad x_m = m\Delta x, \quad \text{donde} \quad \Delta x = \frac{l}{n}. \tag{30}$$

La discretización se implementa reemplazando las derivadas de segundo orden en la ecuación de onda por sus aproximaciones estándar en diferencias finitas (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_j, x_m) &\approx \frac{u(t_{j+1}, x_m) - 2u(t_j, x_m) + u(t_{j-1}, x_m)}{(\Delta t)^2} + O\left((\Delta t)^2\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_m) &\approx \frac{u(t_j, x_{m+1}) - 2u(t_j, x_m) + u(t_j, x_{m-1})}{(\Delta x)^2} + O\left((\Delta x)^2\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Dado que los términos de error son ambos de segundo orden, anticipamos poder elegir el tamaños de paso de espacio y tiempo para tener magnitudes comparables: $\Delta t \approx \Delta x$. Sustituyendo el fórmulas de diferencias finitas (31) en la ecuación diferencial parcial (27) y reordenando términos, somos llevados al sistema iterativo

$$u_{j+1,m} = \sigma^2 u_{j,m+1} + 2\left(1-\sigma^2\right) u_{j,m} + \sigma^2 u_{j,m-1} - u_{j-1,m}, \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, \\ m = 1, \ldots, n-1, \end{array} \tag{32}$$

para las aproximaciones numéricas $u_{j,m} \approx u(t_j, x_m)$ a los valores de la solución en los nodos. El parámetro

$$\sigma = \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 0 \tag{33}$$

depende de la velocidad de la onda y la relación de los tamaños de paso de espacio y tiempo. Las condiciones de límite (28) requieren que

$$u_{j,0} = \alpha_j = \alpha(t_j), \quad u_{j,n} = \beta_j = \beta_j = \beta(t_j), \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{34}$$

Esto nos permite reescribir el sistema iterativo en forma vectorial.

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = B\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)} + \mathbf{b}^{(j)}, \tag{35}$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 2\left(1-\sigma^2\right) & \sigma^2 & & & \\ \sigma^2 & 2\left(1-\sigma^2\right) & \sigma^2 & & \\ & \sigma^2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sigma^2 \\ & & & \sigma^2 & 2\left(1-\sigma^2\right) \end{pmatrix}, \mathbf{u}^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{j,1} \\ u_{j,2} \\ \vdots \\ u_{j,n-2} \\ u_{i,n-1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}^{(j)} = \begin{pmatrix} \sigma^2\alpha_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma^2\beta_j \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Las entradas de $\mathbf{u}^(j) \in \mathbb{R}^{n-1}$ son, como en (24), las aproximaciones numéricas a los valores solución en los nodos interiores. Note que (35) describe un esquema iterativo de segundo orden, dado que calcular la iteración posterior $\mathbf{u}(j+1)$ requiere conocer los valores de los dos anteriores: $\mathbf{u}(j) y \mathbf{u}(j-1)$.

2.3.3. Algoritmo numérico para la ecuación de Poisson

Por especificidad, nos concentramos en el problema del valor límite de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u = -u_{xz} - u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y), \quad \text{for} \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{37}$$

en un dominio plano acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. El primer paso es discretizar el dominio Ω mediante la construcción de una malla. Por tanto, el método de diferencias finitas es especialmente adecuado a dominios cuyo límite se alinea con los ejes de coordenadas; de lo contrario, los nodos de malla generalmente, no se encuentran exactamente en $\partial\Omega$, lo que hace que la aproximación de los datos de frontera sea más desafiante, aunque no insuperable.

Para simplificar, estudiemos el caso en el que

$$\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$$

es un rectángulo. Introducimos una malla rectangular regular, con espaciamientos x y y dados, respectivamente, por

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \quad \Delta y \frac{c-d}{n}, \tag{38}$$

para enteros positivos m, n. Por lo tanto, el interior del rectángulo contiene $(m-1)(n-1)$ nodos interiores

$$(x_i, y_j) = (a + i\Delta x, c + j\Delta y) \quad \text{for} \quad 0 < i < m, \quad 0 < j < n.$$

Además, los nodos de límite $2m+2n$, $(x_0, y_j) = (a, y_j), (x_m, y_j) = (b, y_j), (x_i, y_0) = (x_i, c), (x_i, y_n) = (x_i, d)$, se encuentran en la frontera del rectángulo. En cada nodo interior, empleamos la fórmula de diferencia centrada (13) para aproximar las derivadas de segundo orden relevantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{(\Delta x)^2} + \mathrm{O}\left((\Delta x)^2\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{(\Delta y)^2} + \mathrm{O}\left((\Delta y)^2\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Sustituyendo estas fórmulas de diferencias finitas en la ecuación de Poisson produce el lineal sistema

$$-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}-\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=f_{i,j}, \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,m-1, \\ j=1,\ldots,n-1, \end{array} \tag{40}$$

donde $u_{i,j}$ denota nuestra aproximación numérica a los valores solución $u(x_i,y_j)$ en los nodos, mientras que $f_{i,j}=f(x_i,y_j)$. Si ponemos

$$\rho=\frac{\Delta x}{\Delta y}, \tag{41}$$

entonces la ecuación (40) puede ser reescrita como

$$\begin{array}{r} 2\left(1+\rho^2\right)u_{i,j}-\left(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}\right)-\rho^2\left(u_{i,j-1}+u_{i,j+1}\right)=(\Delta x)^2 f_{i,j} \\ i=1,\ldots,m-1, \quad j=1,\ldots,n-1. \end{array} \tag{42}$$

Dado que ambas aproximaciones en diferencias finitas (39) son de segundo orden, se debe elegir Δx y Δy para tener un tamaño comparable, manteniendo ρ alrededor de 1.

El sistema lineal (42) forma la aproximación en diferencias finitas para la ecuación de Poisson en los nodos interiores. Se complementa con las condiciones de frontera de Dirichlet discretizado.

$$\begin{array}{lll} u_{i,0}=g_{i,0}, & u_{i,n}=g_{i,n+} & i=0,\ldots,m, \\ u_{0,j}=g_{0,j}, & u_{m,j}=g_{m,j}, & j=0,\ldots,n. \end{array} \tag{43}$$

Estos valores límite se pueden sustituir directamente en el sistema, haciendo (42) un sistema de $(m-1)(n-1)$ ecuaciones lineales que involucran las $(m-1)(n-1)$ incógnitas $u_{i,j}$ para $1\le i\le m-1$, $1\le j\le n-1$. Imponemos un orden conveniente para estas entradas, por ejemplo, de izquierda a derecha y luego de abajo hacia arriba, formando el vector columna de incógnitas

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \left(w_1,w_2,\ldots,w_{(m-1)(n-1)}\right)^T \\ &= \left(u_{1,1},u_{2,1},\ldots,u_{m-1,1},u_{1,2},u_{2,2},\ldots,u_{m-1,2},u_{1,3},\ldots,u_{m-1,n-1}\right)^T \end{aligned} \tag{44}$$

El sistema lineal combinado (42, 43) se puede reescribir en forma de matriz.

$$A\mathbf{w}=\hat{\mathbf{f}}, \tag{45}$$

donde el lado derecho se obtiene combinando el vector columna $f=(\ldots f_{i,j}\ldots)^T$ con los datos de contorno proporcionados por (43) según dónde aparecen en el sistema.

3. Conclusión

Este conjunto de actividad nos dio la oportunidad de aprender un tema tan importante e interesante como lo es el de ecuaciones diferenciales parciales y su resolución numérica. Personalmente, aunque se me dificultó administrar mi tiempo para la realización de las mismas, creo que el tomarme el tiempo para estudiarlo a fondo y no solo quedarme con el conocimiento adquirido por realizar códigos, valió la pena. Lo cierto es que me resultó un tema complejo, pero fue precisamente eso lo que lo hizo tan interesante. Espero poder poner en práctica nuevamente este conocimiento en algún proyecto, ya que lo disfruté (en especial el implementar el algoritmo en este reporte descrito).

4. Bibliografía

- Borthwick, D. P. (2016). Introduction to Partial Differential Equations (1.a ed., Vol. 1). Springer.
- Olver, P. J. O. (2014). Introduction to Partial Differential Equations (1.a ed., Vol. 1). Springer.
- Jost, J. J. (2013). Partial Differential Equations (3.a ed., Vol. 1). Springer.