Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Física computacional

Teoría de Estabilidad de las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Actividad 9

Iveth R. Navarro

19 de marzo de 2021
Puerto Peñasco, Sonora, México

Resumen

La teoría de estabilidad se refiere a la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ó trayectorias de un sistema dinámico bajo pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales. En esta actividad estudiaremos problemas de valor inicial en el caso de los sistemas autónomos

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

con $x(0) = x_0$. Donde A es una matríz cuadrada de dimensiones nxn.

1. Introducción

La Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos se enfoca en las propiedades asintóticas de las soluciones y sus trayectorias cuando el tiempo tiende a infinito. El ejemplo más sencillo de este tipo de comportamiento son los puntos de equilibrio o puntos fijos y las órbitas periódicas.

Se define un punto de equilibrio x para la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

si $f(t, x) = 0$ para todo tiempo t.

Cuando la función f no depende explícitamente del tiempo t, $f(x(t))$, se dice que el sistema de ecuaciones es un sistema autónomo.

Los puntos de equilibrio o puntos críticos $(f(x(t)) = 0)$, se pueden clasificar de acuerdo a los signos de los eigenvalores de la linearización de la ecuación respecto a los puntos de equilibrio. Esto es. se evalúa la matriz Jacobiana de la ecuación en cada punto de equilibrio y se buscan los eigenvalores. El comportamiento de la solución del sistema en la vecindad de cada punto de equilibrio puede ser determinado cualitativamente.

Un punto de equilibrio es hiperbólico si ninguno de sus eigenvalores tienen parte real cero. Si todos los eigenvalores tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es estable. Si al menos un eigenvalores tiene parte real positiva, entonces la solución es inestable. Si al menos un eigenvalor tiene parte real negativa y al menos uno tiene parte real positiva, el punto de equilibrio se le conoce como punto silla.

Esta práctica tiene por propósito el estudio de problemas de valor inicial en el caso de los sistemas autónomos haciendo uso de Python.

2. Desarrollo

Esta práctica se desarrolló en 10 ejercicios. Cada uno de ellos, a excepción del último, piden graficar en el espacio fase una familia de soluciones y determinar el tipo de punto crítico de diferentes sistemas de ecuaciones.

1. **Actividad 9.1**
$$\frac{dx}{dt} = y \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = -x \tag{2}$$

2. **Actividad 9.2**
$$\frac{dx}{dt} = y \tag{1}$$
$$\frac{dx}{dy} = x \tag{2}$$

3. **Actividad 9.3**
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0 > 0 \tag{1}$$

4. **Actividad 9.4**
$$\frac{dx}{dt} = -2x \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2z \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dt} = -2y \tag{3}$$

5. **Actividad 9.5**
$$\frac{dx}{dt} = -x + z \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dt} = -x - z \tag{3}$$

6. **Actividad 9.6**
$$\frac{dx}{dt} = -x \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 2y \tag{2}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 3 \tag{3}$$

7. **Actividad 9.7**
$$\frac{dx}{dt} = 2x + y \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y \tag{2}$$
$$x(1) = 1, y(1) = 1 \tag{3}$$

8. **Actividad 9.8**

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$
$$x(0) = (0, 3)$$
$$A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right] \tag{1}$$

9. **Actividad 9.9**

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$
$$x(0) = (0, -b, b)$$
$$A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right] \tag{1}$$

10. **Actividad 9.10** Encontrar las soluciones como funciones de t del sistema de resortes acoplados con dos masas mostrado en la figura 1 y graficarlas, así como las trayectorias en el espacio fase.

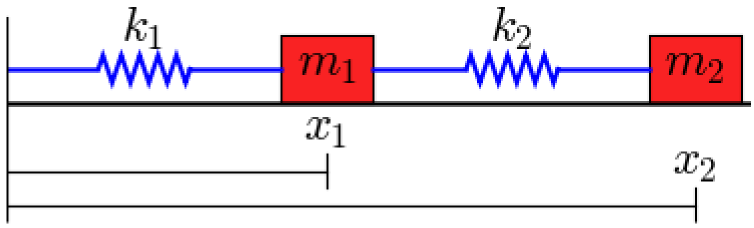

Figura 1

   a) **Actividad 9.10.1** Encontrar los eigenvalores del sistema y decir cómo son las soluciones.

   b) **Actividad 9.10.2** Caso sin fricción. $b_1 = b_2 = 0$, $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, condiciones iniciales $(x_1(0), x'_1(0), x_2(0), x'_2(0)) = (1, 0, 4, 0)$

   c) **Actividad 9.10.3**

   Igual que el caso anterior pero, con fricción: $b_1 = 0.1, b_2 = 0.2$

3. Resultados

1. **Actividad 9.1**

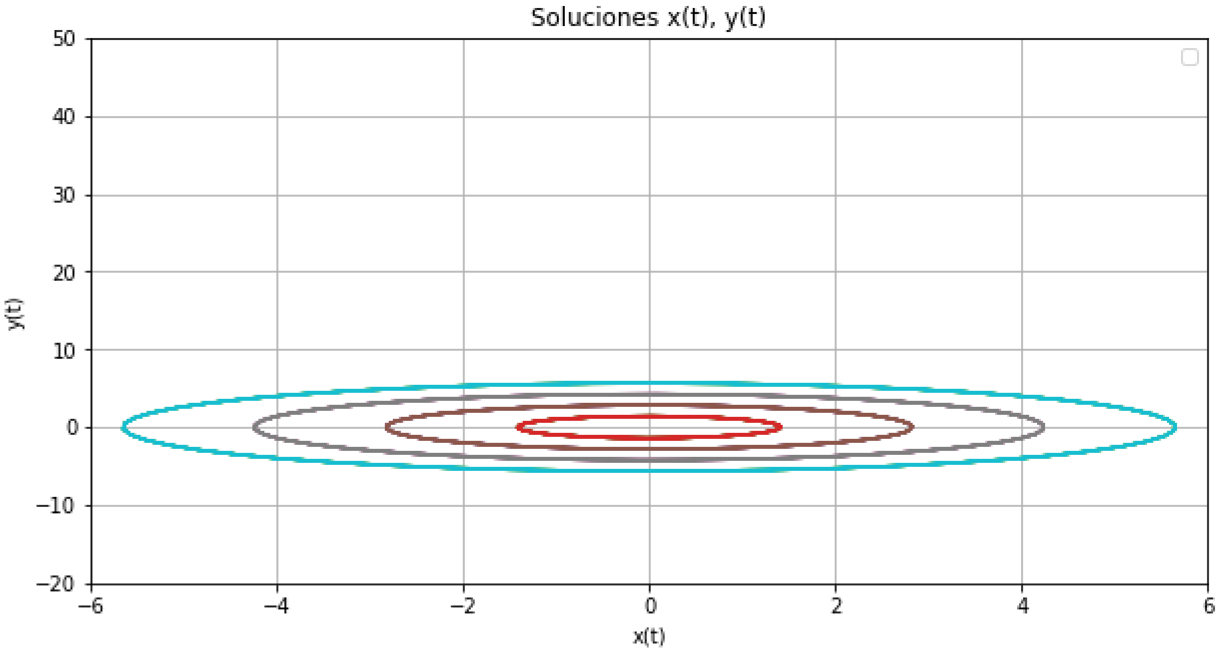

Figura 2

2. **Actividad 9.2**

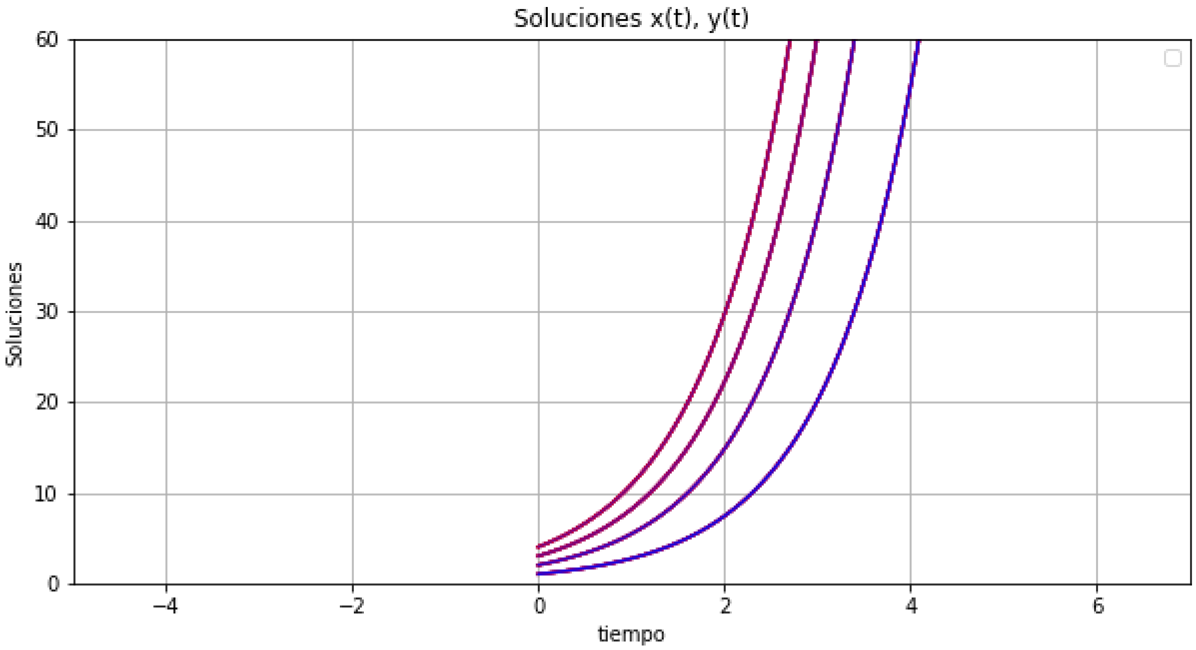

Figura 3

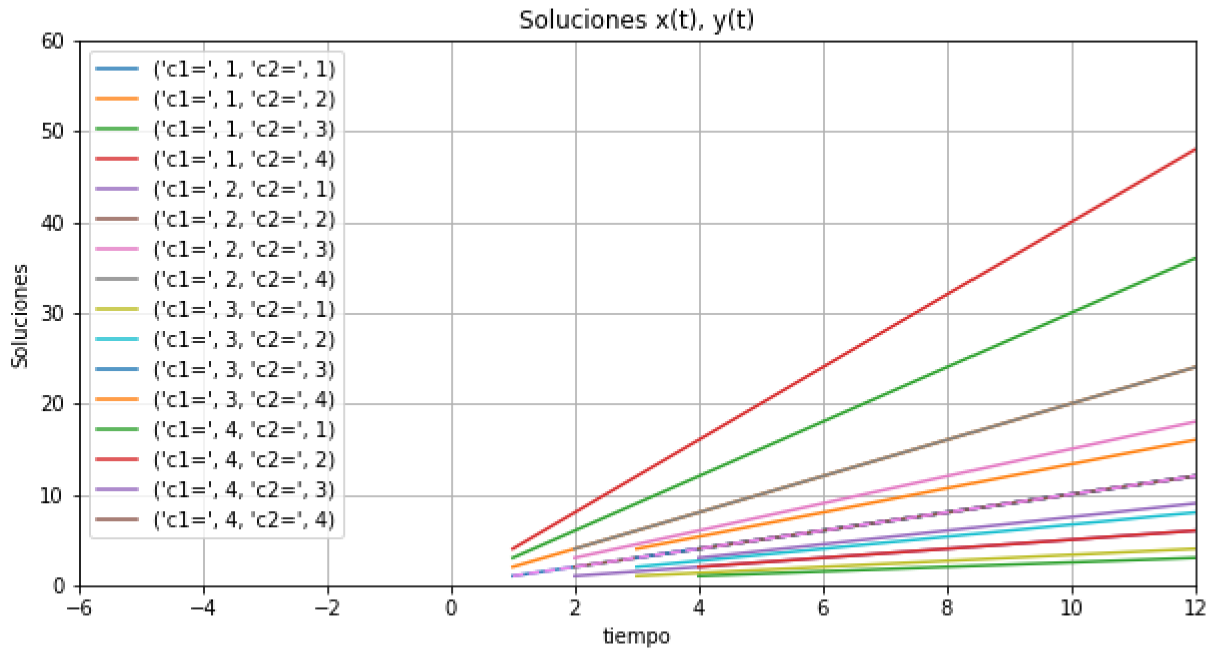

Figura 4

3. Actividad 9.3

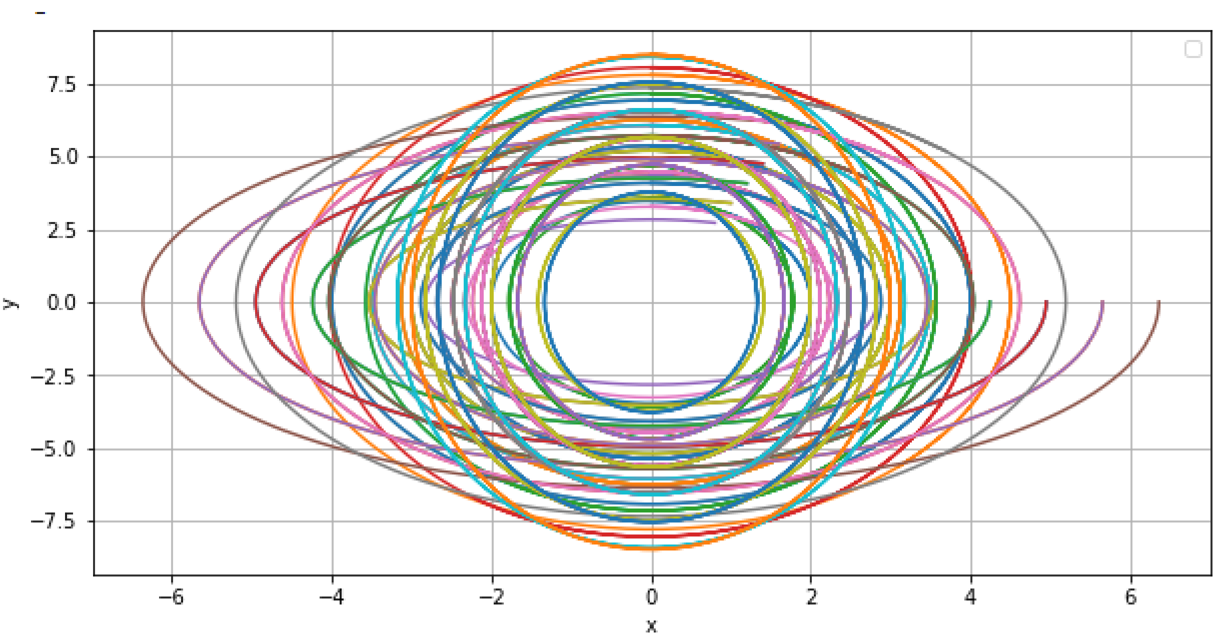

Figura 5

4. **Actividad 9.4**

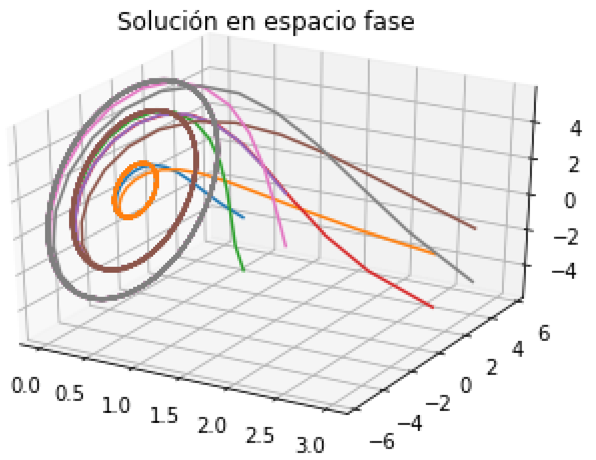

Figura 6

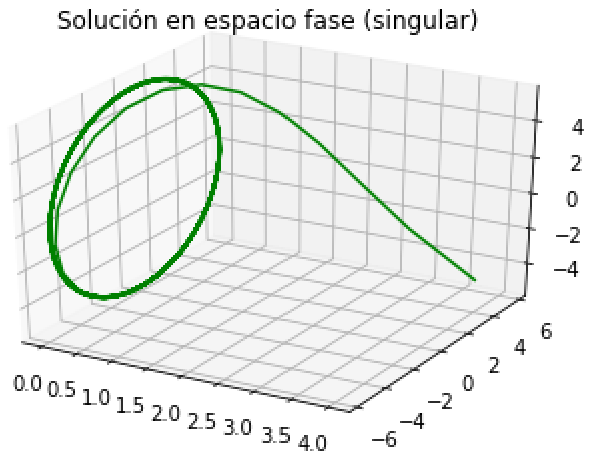

Figura 7

5. **Actividad 9.5**

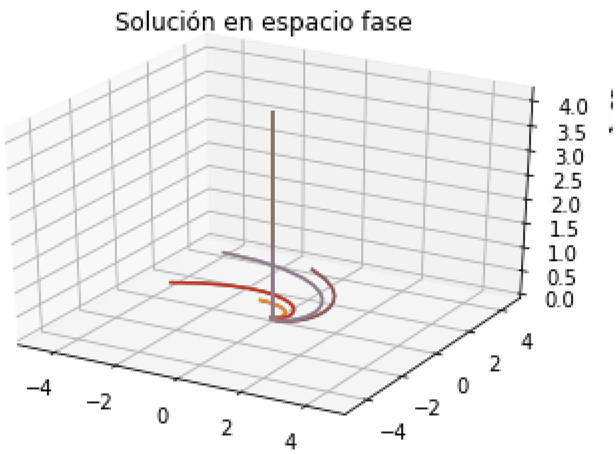

Figura 8

6. **Actividad 9.6**

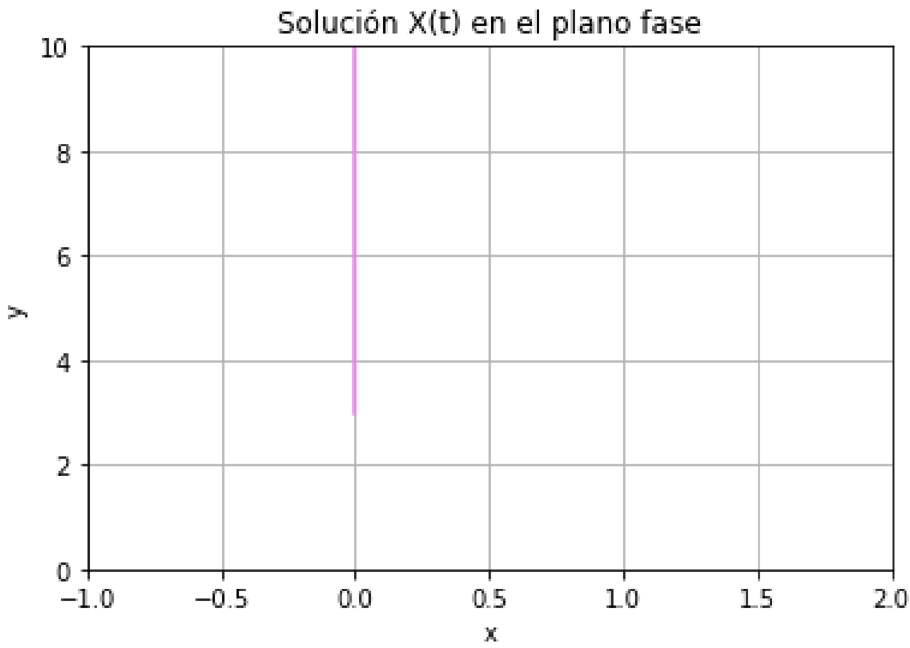

Figura 9

7. **Actividad 9.7**

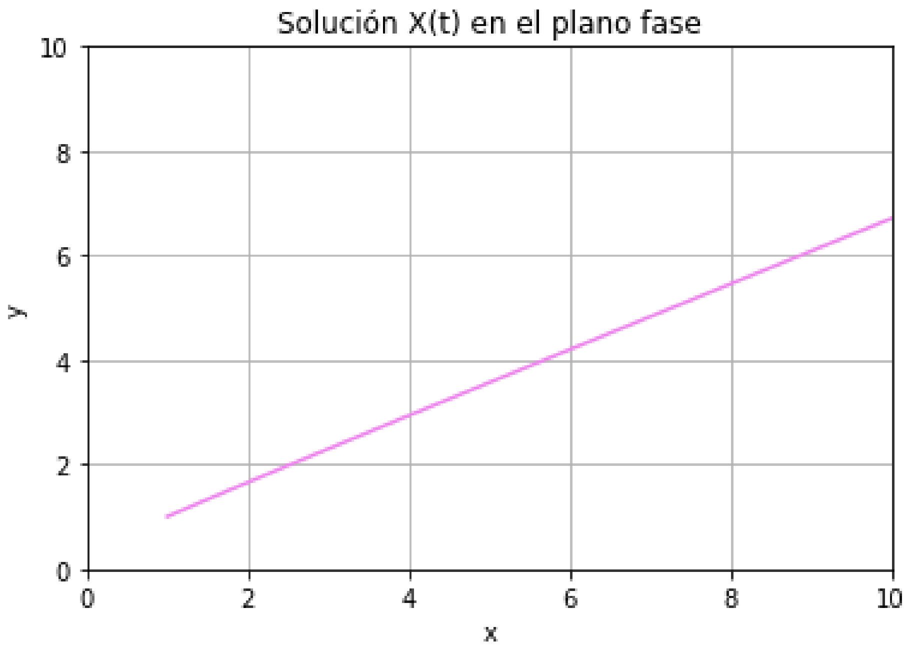

Figura 10

8. **Actividad 9.8**

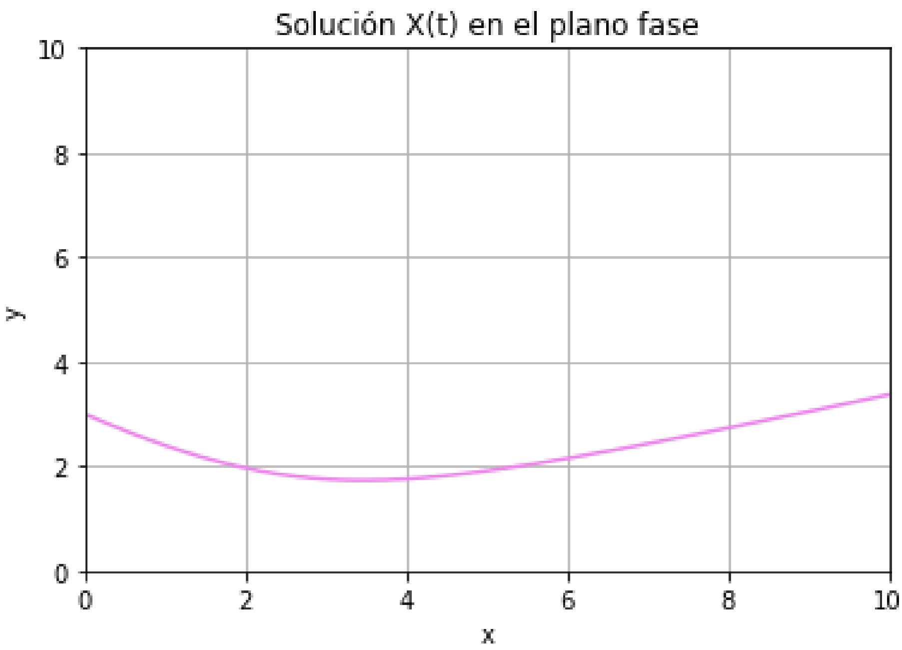

Figura 11

9. **Actividad 9.9**

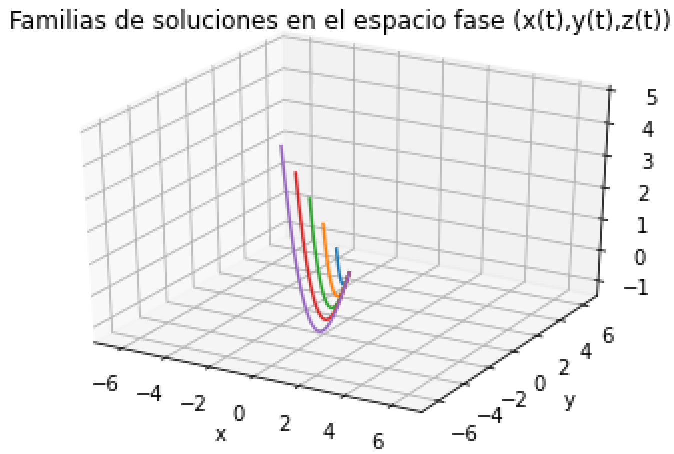

Figura 12

10. **Actividad 9.10**

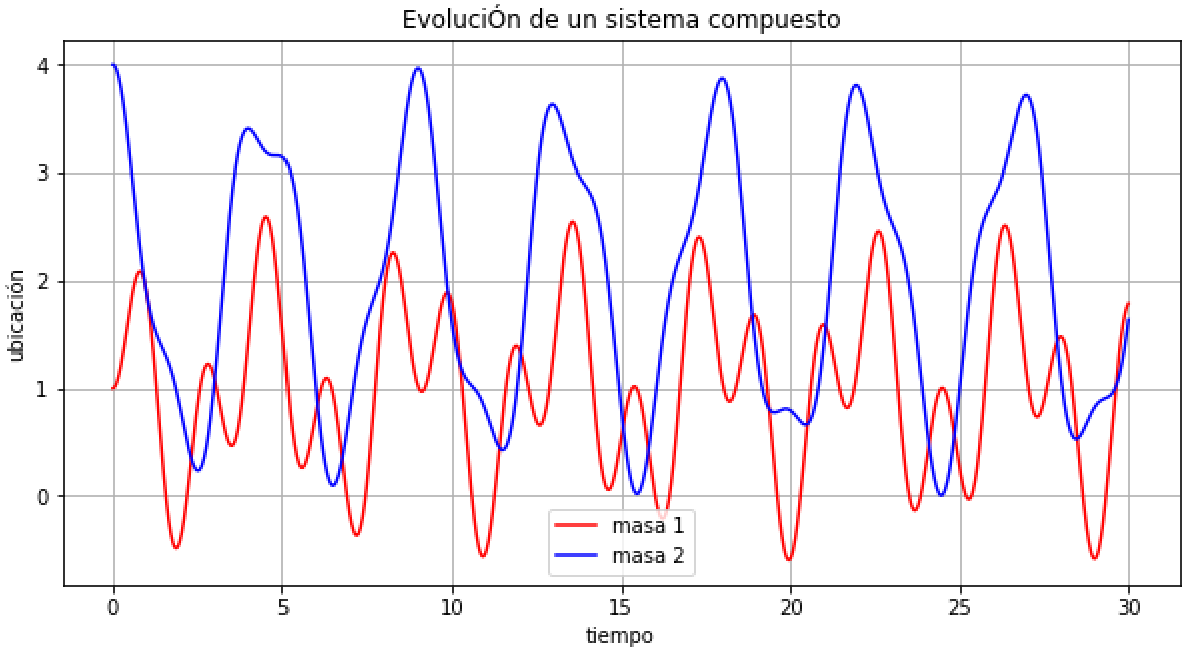

Figura 13

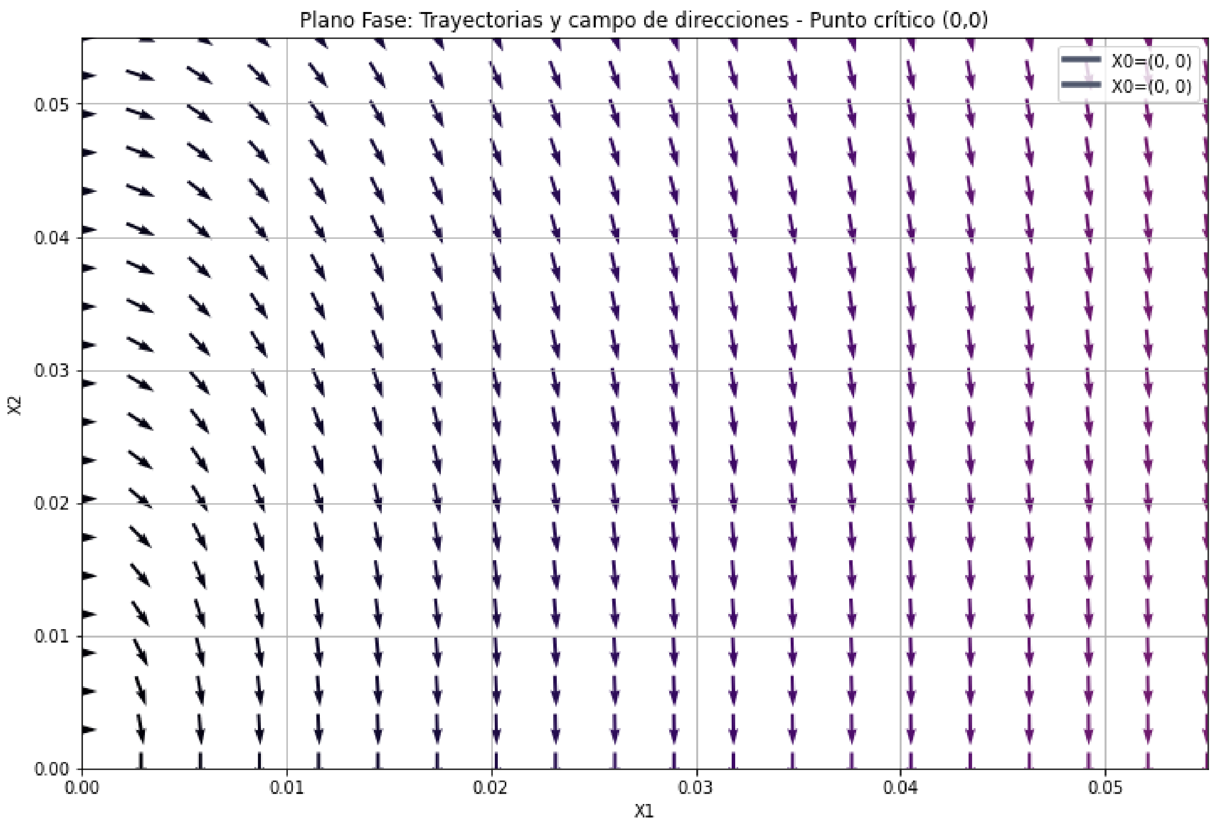

Figura 14

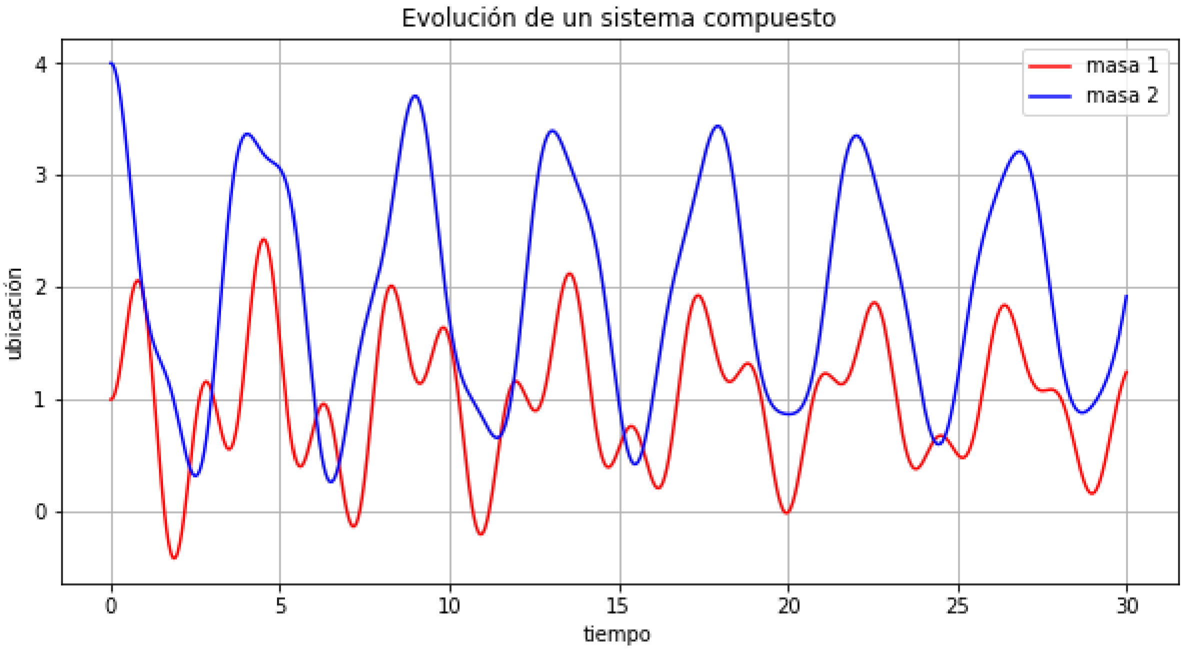

Figura 15

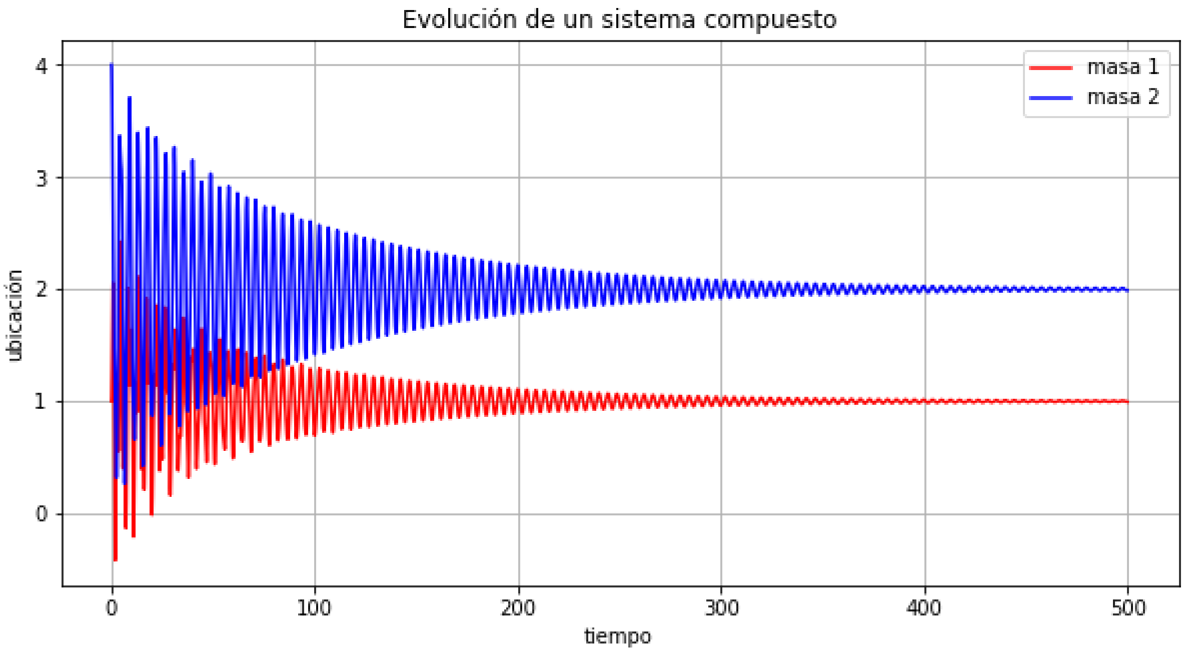

Figura 16

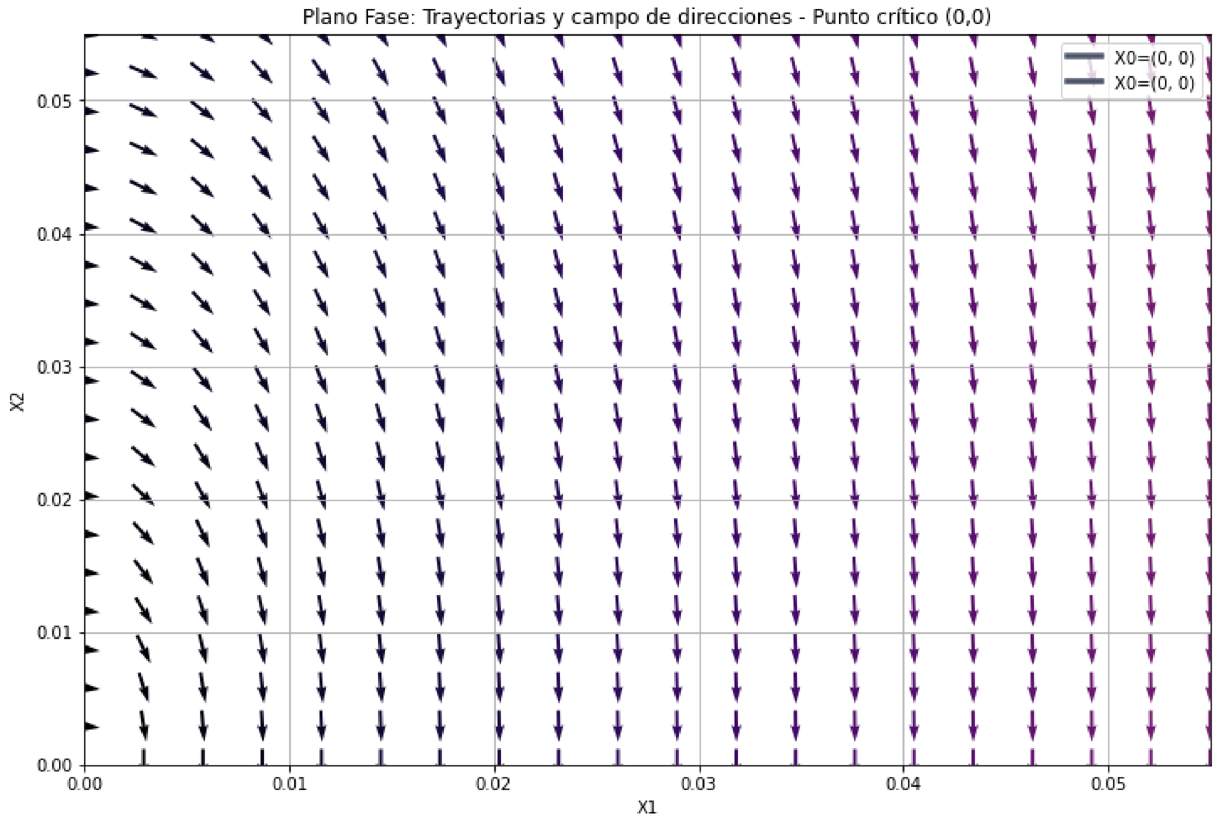

Figura 17

4. Conclusión

Esta actividad fue sin duda la que más trabajo me ha costado y lo peor es que no creo haberla realizado con éxito. Lo cierto es que tuve problemas con entender la teoría detrás de la aplicación que empleamos en esta ocasión.

Por otra parte, considero que es una actividad muy completa y estoy segura de que si mi conocimiento de transfondo hubiera sido mejor, no me habría resultado tediosa. Le doy un grado de dificultad alta y mi recomendación sería tal vez la sitetización de los ejemplos y un despliegue teórico más alto.

5. Bibliografía

- Lizárraga, C. L. C. (2021, 16 marzo). computacional1 [licensed for non-commercial use only] / Actividad 9 (2021–1). computacional1. `http://computacional1.pbworks.com/w/page/143635371/Actividad%209%20(2021-1)`