Sujet IMT-4

Axiome	Affaiblissement
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,(\mathrm{Aff})$

I - Lois de de Morgan

Les règles de la logique intuitionniste :

	Introduction	Élimination
Conjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,(\wedge_e^g)$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,(\wedge_e^d)$
Disjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\vee_i^g)$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\vee_i^d)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma', B \vdash C \quad \Gamma'' \vdash A \vee B}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash C}\,(\vee_e)$
Implication	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,(\to_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\,(\to_e)$
Négation	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash \neg A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\,(\neg_e)$
Constante $\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,(\top_i)$	
Constante $\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,(\bot_e)$

1. Deriver les séquents suivants à l'aide des règles de la logique intuitionniste (ci-dessus).
   - $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
   - $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
2. Montrer que la regle RAA, permet de dériver le séquent du Tiers-exclu : $\vdash A \vee \neg A$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\mathrm{RAA})$$

On ajoute à la logique intuitionniste l'axiome du Tiers-exclu:

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}(\mathrm{TE})$$

3. Montrer que $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ est dérivable.

II - Langages

Définition: Soit L un langage sur Σ, on définit la racine carrée de L, $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* | u.u \in L\}$

Définition: Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet. On définit $\forall q \in Q$, les automates finis A_q tels que:
- les états de A_q sont les couples $(q_i, q_j) \in Q^2$
- l'état initial de A_q est (q_0, q)
- les états terminaux de A_q sont les $(q, q_f), \forall q_f \in F$
- On a pour tout les A_q, la même fonction de transition δ_2 : $((q_i, q_j), a) \to (\delta(q_i, a), \delta(q_j, a))$

1. Caractériser simplement $\mathcal{L}(A_q)$
2. Montrer que la racine carré d'un langage rationnel est rationnelle.

Définition: Soit L un langage sur Σ, on définit $\frac{1}{2}L = \{u \in \Sigma^* | \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } u.v \in L\}$

3. Montrer que $\frac{1}{2}L$ est rationnel si L l'est aussi.