Sujet IMT-5

I - Lois de de Morgan

Les règles de la logique intuitionniste :

Axiome	Affaiblissement
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (\mathrm{Ax})$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (\mathrm{Aff})$

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top/\bot$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot_{\mathrm{é}}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{é}}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \wedge_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1}\ \wedge_{\mathrm{é,d}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2}\ \wedge_{\mathrm{é,g}}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee_{\mathrm{i,g}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee_{\mathrm{i,d}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{é}}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ \rightarrow_{\mathrm{é}}$

1. Deriver le séquent suivant à l'aide des règles de la logique intuitionniste (ci-dessus).
   - $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
2. Montrer que la regle RAA, permet de dériver le séquent du Tiers-exclu : $\vdash A \vee \neg A$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\mathrm{RAA})$$

On ajoute à la logique intuitionniste l'axiome du Tiers-exclu:

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}(\mathrm{TE})$$

3. Montrer que $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ est dérivable.

Penser à tourner la feuille...

II - Décidabilité

Définition: *PCP*

- Soit Σ un alphabet tel que $|\Sigma| \geq 2$
- Soit $N \in \mathbb{N}$
- Soit $\alpha_1, ..., \alpha_N$ et $\beta_1, ..., \beta_N$ de listes de mots (finis) sur Σ.

Existe-t-il une suite $(i_k)_{1<k<K} \in [\![1, N]\!]^K$ avec $K \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_{i_1}...\alpha_{i_K} = \beta_{i_1}...\beta_{i_K}$?

On admet que PCP est **indécidable**.

1. Que dire des instances suivantes ?
   1. Soit $\Sigma = \{a, b\}$
      - $(\alpha_i) = \text{a, ab, bba}$
      - $(\beta_i) = \text{baa, aa, bb}$
   2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$
      - $(\alpha_i) = \text{a, ab, bba}$
      - $(\beta_i) = \text{baa, bb, aa}$
   3. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$
      - $(\alpha_i) = \text{a, b, c}$
      - $(\beta_i) = \text{bac, ca, bca}$
2. Exhiber un algorithme donnant pour tout instance l'existence d'une solution (de taille bornée).

Définition: *INTER-G*

Soit (G,G') un couple de grammaires sans contextes, existe-t-il un mot w engendré par les deux grammaires ?

3. Quel est le type du problème *INTER-G* ?

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit Σ l'alphabet sur lequel sont définies $(u_k)_{0 \leq k \leq N}$ et $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ deux listes de mots. Soit $\mathrm{A} = \{a_0, ..., a_{N-1}\}$ des caractères disjoints de Σ (càd $\Sigma \cap A = \emptyset$). On définit les langages suivant, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $L_U = \left\{a_{i_0}..a_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}}...u_{i_0}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], i_k \in [\![0, N]\!]\right\}$
- $L_V = \left\{a_{i_0}..a_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}}...v_{i_0}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], i_k \in [\![0, N]\!]\right\}$

4. Montrer que L_U et L_V sont des langages sans contextes.
5. Montrer que *INTER-G* est indécidable.