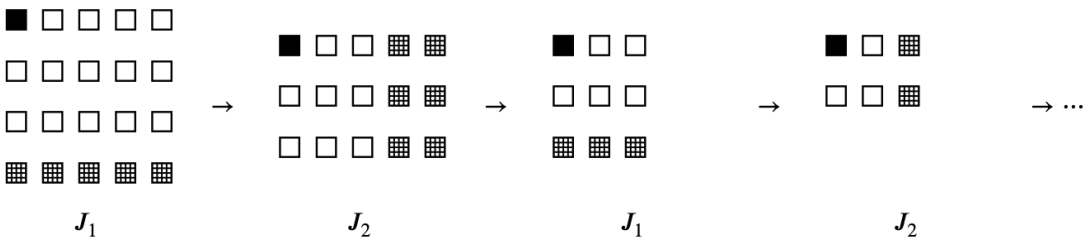
Exercice 2 Jeu de Chomp (type A)

On considère une variante du jeu de Chomp : deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent autour d'une tablette de chocolat de taille $l \times c$, dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Les joueurs choisissent chacun leur tour une ou plusieurs lignes (ou une ou plusieurs colonnes) partant du bas (respectivement de la droite) et mangent les carrés correspondants. Il est interdit de manger le carré empoisonné et le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer.

Dans la figure ci-dessous, matérialisant un début de partie sur une tablette de taille 4×5, le carré noir est le carré empoisonné, le choix du joueur J_i est d'abord matérialisé par des carrés hachurés, qui sont ensuite supprimés.



On associe à ce jeu un graphe orienté $G = (S, A)$. Les sommets S sont les états possibles de la tablette de chocolat, définis par un couple $s = (m, n), m \in [\![1, l]\!],\ n \in [\![1, c]\!]$. De plus, $(s_i, s_j) \in A$ si un des joueurs peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i à l'état s_j. On dit que s_j est un successeur de s_i et que s_i est un prédécesseur de s_j.

1. Dessiner le graphe G pour $l = 2$ et $c = 3$. Les états de G pourront être représentés par des dessins de tablettes plutôt que par des couples (m, n).

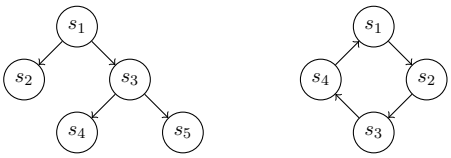
On va chercher à obtenir une stratégie gagnante pour le joueur J_1 par deux manières.

Utilisation des noyaux de graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que $N \subset S$ est un noyau de G si :

- pour tout sommet $s \in N$, les successeurs de s ne sont pas dans N,
- tout sommet $s \in S \setminus N$ possède au moins un successeur dans N

2. Donner tous les noyaux possibles pour les graphes suivants :



Dans la suite, on ne considère que des graphes acycliques.

3. Montrer que tout graphe acyclique admet un puits, c'est-à-dire un sommet sans successeur.

Dans le cas général, le noyau d'un graphe $G = (S, A)$ est souvent difficile à calculer. Si la dimension du jeu n'est pas trop importante, on peut toutefois le faire en utilisant l'algorithme suivant :

```
1 N = ∅
2 tant que il reste des sommets à traiter
3 |   Chercher un sommet s ∈ S sans successeur
4 |   N = N ⋃ {s}
5 |   Supprimer s de G ainsi que ses prédécesseurs
```

4. Justifier que cet algorithme termine et renvoie un noyau.

5. Démontrer que ce noyau est unique. Conclure que le graphe du jeu de Chomp possède un unique noyau N.

6. Appliquer cet algorithme pour calculer le noyau du jeu de Chomp à 2 lignes et 3 colonnes. Que peut-on dire du sommet (1,1) pour le joueur qui doit jouer ? En déduire à quoi correspondent les éléments du noyau.

7. Montrer que, dans le cas d'un graphe acyclique, tout joueur dont la position initiale n'est pas dans le noyau a une stratégie gagnante. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante pour ce jeu dans le cas $l = 2$ et $c = 3$?

Utilisation des attracteurs

On modélise le jeu par un graphe biparti : pour ce faire, on dédouble les sommets du graphe précédent : un sommet s_i génère donc deux sommets s_i^1 et s_i^2, s_i^j étant le sommet i contrôlé par le joueur J_j. On forme alors deux ensembles de sommets $S_1 = \{s_i^1\}_i$ et $S_2 = \{s_i^2\}_i$, et on construit le graphe de jeu orienté $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \bigcup S_2$ et $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$. De plus, $(s_i^1, s_j^2) \in A$ si le joueur 1 peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i^1 à l'état s_j^2. On raisonne de même pour $(s_i^2, s_j^1) \in A$.
On rappelle la définition d'un attracteur : soit F_1 l'ensemble des positions finales gagnantes pour J_1. On définit alors la suite d'ensembles $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $\mathcal{A}_0 = F_1$ et

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ \mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{s \in S_1 / \exists t \in \mathcal{A}_i, (s,t) \in A\} \cup \{s \in S_2 \text{ non terminal}, \forall t \in S, (s,t) \in A \Rightarrow t \in \mathcal{A}_i\}$$

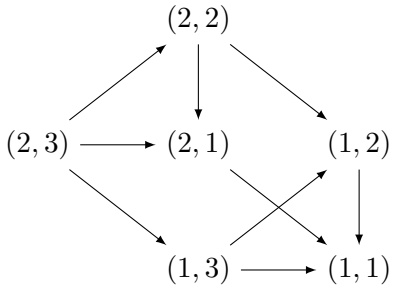
et $\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ est l'attracteur pour J_1.

8. Que représente l'ensemble $\mathcal{A}_i$?

9. Dans le cas du jeu de Chomp à deux lignes et trois colonnes (question 1), calculer les ensembles $\mathcal{A}_i$. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante ? Comment le savoir à partir de $\mathcal{A}$?

Proposition de corrigé

1. On obtient le graphe suivant (plus lisible avec des tablettes) :



2. Pour le premier graphe, le noyau est (s_2, s_4, s_5). Pour le second il y a deux noyaux (s_1, s_3) et (s_2, s_4).

3. Soit G un graphe acyclique sans puits. Soit $(s_0 \cdots s_k)$ un chemin dans G. Comme s_k n'est pas un puits, il existe un arc (x_k, y) qui prolonge le chemin précédent. Il y a donc un chemin de longueur arbitraire dans G. Par le principe des tiroirs, tout chemin assez long contient nécessairement deux sommets qui coïncident, on a donc un cycle, en contradiction avec G acyclique. Donc il existe au moins un puits dans G.

4. Supprimer des sommets d'un graphe acyclique le laisse acyclique donc la question 3 assure qu'on trouvera toujours un sommet s convenable en ligne 3. Par conséquent, le nombre de sommets dans G décroît strictement à chaque itération ce qui assure la terminaison de l'algorithme.

Exercice 4 Mots de Dyck (type B)

Cet énoncé est accompagné d'un ou plusieurs codes compagnons en C fournissant certaines des fonctions mentionnées dans l'énoncé : il sont à compléter en y implémentant les fonctions demandées.

La ligne de compilation `gcc -o main.exe -Wall *.c -lm` *vous permet de créer un exécutable* `main.exe` *à partir du ou des fichiers C fournis. Vous pouvez également utiliser l'utilitaire* `make`*. En ligne de commande, il suffit d'écrire* `make`*. Dans les deux cas, si la compilation réussit, le programme peut être exécuté avec la commande* `./main.exe`*.*

Il est possible d'activer davantage d'avertissements et un outil d'analyse de la gestion de la mémoire avec la ligne de compilation `gcc -o main.exe -g -Wall -Wextra -fsanitize=address *.c -lm` *ou en écrivant* `make safe`*. L'examinateur pourra vous demander de compiler avec ces options.*

Si vous désirez forcer la compilation de tous les fichiers, vous pouvez au préalable nettoyer le répertoire en faisant `make clean` *et relancer une compilation.*

La compilation du code compagnon initial avec `make safe` *provoque des warnings attendus qui seront résolus lors de l'implémentation des fonctions demandées par le sujet.*

On s'intéresse dans cet exercice aux mots de Dyck, c'est-à-dire aux mots bien parenthésés. Dans ce type de mots, toute parenthèse ouverte "(" est fermée ")" et une parenthèse ne peut être fermée si elle ne correspond pas à une parenthèse préalablement ouverte.

Par exemple pour deux couples de parenthèses, "(())" et "()()" sont des chaînes de parenthèses bien formées. "())(" et ")()(" ne le sont pas.

On admet que le nombre de mots bien parenthésés à n couples de parenthèses est donné par les nombres de Catalan définis par la formule suivante :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ pour } n \geq 0$$

On rappelle que le type `uint64_t` est un type entier non signé codé sur 64 bits.

1. Complétez dans le code compagnon la fonction dont le prototype est `uint64_t catalan(int n)`. Vous pouvez utiliser une fonction auxiliaire si cela vous semble pertinent.
2. Que va-t-il se passer si on tente d'afficher `catalan(n)` pour `n` un peu grand ? Le constatez-vous ici ?

On cherche maintenant à afficher le nombre de mots (chaînes) bien parenthésés avec n fixé couples de parenthèses, ainsi que les mots eux-mêmes.

Un algorithme de force brute pour déterminer toutes les chaînes à n couples de parenthèses bien formées consiste à générer toutes les possibilités puis à ne garder que les chaînes bien formées.

3. Complétez dans le code compagnon la fonction dont le prototype est `bool verification(char * mot)`. Cette fonction renvoie `true` si le mot fourni en paramètre `mot` est bien parenthésé, `false` sinon.
4. Quelle est la complexité de cette vérification ?
5. Quelle est la complexité finale de l'algorithme de force brute ?

On appelle `n` le nombre de couples de parenthèses voulu. Dans le fichier compagnon fourni, le nombre de couples a été limité à 18.

On vous propose de coder l'énumération des chaînes de parenthèses bien formées en appliquant l'algorithme de backtracking suivant, dont on admet qu'il est correct : on compte le nombre de parenthèses ouvertes `o` et le nombre de parenthèses fermées `f` dans une chaîne de caractères courante (vide au départ).

- Si `o = f = n`, on a trouvé une chaîne bien formée.
- Si `o < n`, on ajoute une parenthèse ouvrante et on relance.
- Si `f < o`, on ajoute une parenthèse fermante et on relance.

Cet algorithme est à implémenter dans la fonction dont le prototype est `void dyck(char s[N], int o, int f, int n)` qui affiche sur la sortie standard les chaînes de parenthèses bien formées avec `n` couples de parenthèses lorsque `s` est la chaîne de caractère courante, `o` est son nombre de parenthèses ouvrantes et `f` est son nombre de parenthèses fermantes.

6. Compléter la fonction `dyck` pour afficher les chaînes bien parenthésées avec 5 couples de parenthèses.
7. Adapter la fonction `dyck` pour calculer le nombre de mots obtenus. Combien de mots trouvez-vous pour 16 couples de parenthèses ?
8. Adapter la fonction `dyck` pour stocker les mots bien parenthésés dans une liste chaînée et les afficher après l'appel à la fonction. Vous trouverez dans le code compagnon une structure qui peut vous aider.

Proposition de corrigé

1. Une solution et d'implémenter une factorielle. On peut aussi simplifier la formule donnée (ce qui permet de repousser un peu plus loin le dépassement).

```
uint64_t fact(int n) {
    uint64_t r = 1;
    for(int i = 2; i <= n; i = i + 1){
        r = r * i;
    }
    return r;
}

uint64_t catalan1(int n) {
    return fact(2*n)/fact(n+1)/fact(n);
```

2. On obtient un dépassement d'entier. Expérimentalement, si on utilise la fonction factorielle, le résultat devient faux pour $n = 11$. En simplifiant la formule en $2n \times ... \times (n+2)/n!$, c'est pour $n = 16$ que ça coince. Dans tous les cas, le dépassement finira par arriver provoquant un comportement indéfini.
3. On utilise un compteur qui indique le nombre de parenthèses ouvertes : on l'incrémente lorsqu'on rencontre une parenthèse ouvrante et on le décrémente lorsqu'on rencontre une parenthèse fermante. Si ce compteur devient négatif, le mot n'est pas bien parenthésé puisqu'il y a trop de parenthèses fermantes et on peut donc interrompre l'exécution (même si on peut se passer de cette subtilité). En fin de décompte, le compteur devrait être nul si le mot est bien parenthésé.

```
bool verification(char * mot) {
    int i = 0;
    bool fin = false;
    int compteur = 0;
    bool resultat = false;
    while (!fin && (mot[i] != '\0')) {
        if (mot[i]=='(') {
            compteur++;
```