Sujet IMT-4

I - Lois de de Morgan

Les règles de la logique intuitionniste :

Axiome	Affaiblissement
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,(\mathrm{Aff})$

Symbole	Règle d'introduction	Règle d'élimination
$\top/\bot$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot_{\mathrm{é}}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,\neg_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_{\mathrm{é}}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1}\,\wedge_{\mathrm{é,d}}$ $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2}\,\wedge_{\mathrm{é,g}}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee_{\mathrm{i,g}}$ $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee_{\mathrm{i,d}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,\vee_{\mathrm{é}}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\,\rightarrow_{\mathrm{i}}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,\rightarrow_{\mathrm{é}}$

1. Deriver le séquent suivant à l'aide des règles de la logique intuitionniste (ci-dessus).
   - $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
2. Montrer que la regle RAA, permet de dériver le séquent du Tiers-exclu : $\vdash A \vee \neg A$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\mathrm{RAA})$$

On ajoute à la logique intuitionniste l'axiome du Tiers-exclu:

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}(\mathrm{TE})$$

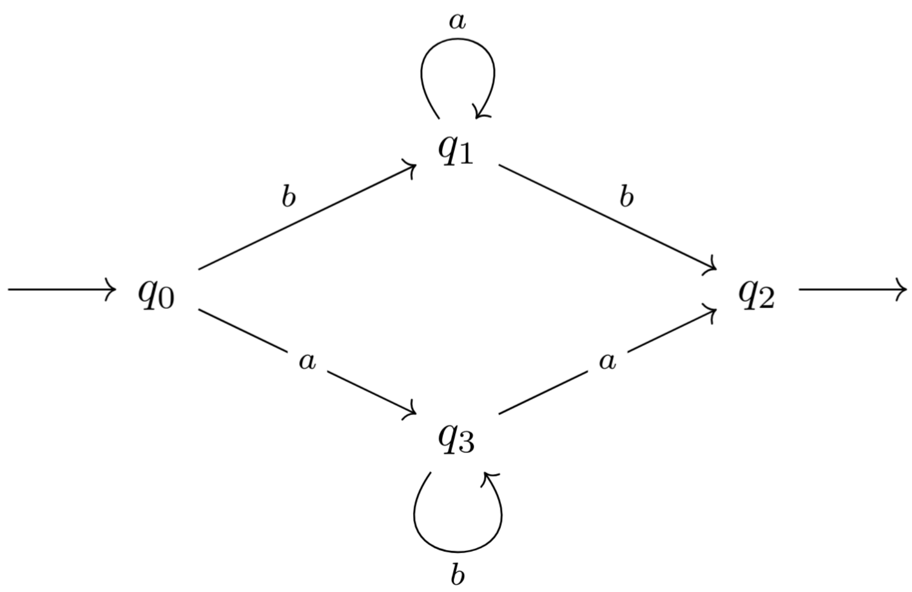
3. Montrer que $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ est dérivable.

Penser à tourner la feuille...

II - Langages

Définition: Soit L un langage sur Σ, on définit la racine carrée de L, $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* | u.u \in L\}$

On définit l'automate A_0 suivant :



0. Donner $\sqrt{\mathcal{L}(A_0)}$.

Définition: Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$[1] un automate fini déterministe complet. On définit $\forall q \in Q$, les automates finis A_q tels que:

- les états de A_q sont les couples $(q_i, q_j) \in Q^2$
- l'état initial de A_q est (q_0, q)
- les états terminaux de A_q sont les $(q, q_f), \forall q_f \in F$
- On a pour tout les A_q, la même fonction de transition $\delta_2 : ((q_i, q_j), a) \to (\delta(q_i, a), \delta(q_j, a))$

1. Caractériser simplement $\mathcal{L}(A_q)$ (quels sont les mots appartenant à $\mathcal{L}(A_q)$?).
2. Montrer que la racine carré d'un langage rationnel est rationnelle.

[1]**Rappel**: Fonction de transition δ.

Pour $q, q' \in Q$ et $a \in \Sigma$, on rappelle que :

$$\delta(q, a) = q' \Leftrightarrow q \overset{a}{\to} q'$$

De plus pour $w = w_1 ... w_n \in \Sigma^*$ un mot fini quelconque (dont w_i sont les lettres):

$$\delta^*(q, w) = q' \Leftrightarrow q \left(\overset{*}{\to}\right)^w q'$$

$$\Leftrightarrow \exists (q_1, q_{n-1}) \in Q^n, q \overset{w_1}{\to} q_1 \overset{w_2}{\to} q_2 ... q_{n-1} \overset{w_n}{\to} q'$$