Sujet IMT-1

I - Représentation binaire des nombres

Q1) Rappeler le système de complément à deux pour enregistrer des nombres négatifs en mémoire.

Q2) Comment déterminer la parité d'un nombre à partir de sa représentation binaire ? En déduire ce que retourne ce code:

```c
int fonction_mystere(int arg){
  return arg&(-arg);
}

int main() {
  int nombre;
  scanf("%d", &nombre);
  printf("%d\n", fonction_mystere(arg));
}
```

Q3) On se propose de manipuler des sous-ensembles d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour cela, on va représenter un sous ensemble $\{a_i \mid i \in J\}$ avec $J \in \mathcal{P}(⟦1, n⟧)$, où $\mathcal{P}(⟦1, n⟧)$ correspond aux parties de l'ensemble $⟦1, n⟧$, par un nombre binaire $b = b_1 b_2 ... b_n$ où $b_i = 1$ si $i \in J$, et $b_i = 0$ sinon. Par exemple, si $n = 5$, l'ensemble $\{a_2, a_3\}$ est représenté par $b = 01100$. Expliquer avec quels opérateurs binaires on peut effectuer:

- L'union de deux sous-ensembles.
- L'intersection de deux sous-ensembles.
- Le complémentaire d'un sous-ensemble.

II - Décidabilité

Définition: *PCP*

- Soit Σ un alphabet tel que $|\Sigma| \geq 2$
- Soit $N \in \mathbb{N}$
- Soit $\alpha_1, ..., \alpha_N$ et $\beta_1, ..., \beta_N$ de listes de mots (finis) sur Σ.

Existe-t-il une suite $(i_k)_{1<k<K} \in ⟦1, N⟧^K$ avec $K \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_{i_1} ... \alpha_{i_K} = \beta_{i_1} ... \beta_{i_K}$?

On admet que PCP est **indécidable**.

1. Que dire des instances suivantes ?
   1. Soit $\Sigma = \{a, b\}$
      - $(\alpha_i) = a, \text{ab}, \text{bba}$
      - $(\beta_i) = \text{baa}, \text{aa}, \text{bb}$
   2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$
      - $(\alpha_i) = a, \text{ab}, \text{bba}$
      - $(\beta_i) = \text{baa}, \text{bb}, \text{aa}$
   3. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$
      - $(\alpha_i) = a, b, c$
      - $(\beta_i) = \text{bac}, \text{ca}, \text{bca}$
2. Exhiber un algorithme donnant pour tout instance l'existence d'une solution (de taille bornée).

Définition: *INTER-G*

Soit (G,G') un couple de grammaires sans contextes, existe-t-il un mot w engendré par les deux grammaires ?

3. Quel est le type du problème *INTER-G* ?

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit Σ l'alphabet sur lequel sont définies $(u_k)_{0 \leq k \leq N}$ et $(v_k)_{0 \leq k \leq N}$ deux listes de mots. Soit $\mathrm{A} = \{a_0, ..., a_{N-1}\}$ des caractères disjoints de Σ (càd $\Sigma \cap A = \emptyset$). On définit les langages suivant, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $L_U = \left\{a_{i_0}..a_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}}...u_{i_0}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], i_k \in [\![0, N]\!]\right\}$
- $L_V = \left\{a_{i_0}..a_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}}...v_{i_0}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], i_k \in [\![0, N]\!]\right\}$

4. Montrer que L_U et L_V sont des langages sans contextes.
5. Montrer que *INTER-G* est indécidable.