Graphes parfaits

Pour S un ensemble, on note $\mathcal{P}_2(S) = \{\{x, y\} : x, y \in S, x \neq y\}$ les sous-ensembles de S de cardinalité 2. Dans tout le sujet, on considère des graphes non-orientés $G = (V, E)$, avec un ensemble fini de sommets V, et un ensemble d'arêtes $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$.
Coloriage. Un coloriage d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $V \to \mathbb{N}$. Dans ce contexte, on appelle les entiers des *couleurs*. Un coloriage est *valide* si toute paire de sommets reliés par une même arête a des couleurs différentes. Le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour créer un coloriage valide de G.
Sous-graphe induit. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$, le *sous-graphe induit* par W est le graphe $G[W] = (W, E \cap \mathcal{P}_2(W))$. On dit que c'est un sous-graphe induit *propre* si W est inclus strictement dans V.
Cliques. Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ tel que le sous-graphe $G[W]$ induit par W est un graphe complet, c'est-à-dire : $G[W] = (W, \mathcal{P}_2(W))$. On note $\omega(G)$ la cardinalité de la plus grande clique de G.
Anticliques. Une *anticlique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ tel que le sous-graphe $G[W]$ induit par W ne contient pas d'arête, c'est-à-dire : $G[W] = (W, \varnothing)$. On note $\alpha(G)$ la cardinalité de la plus grande anticlique de G.

Question 1. Soit G un graphe quelconque. Montrer $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Question 2. Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque.

a. Montrer qu'un coloriage valide de G avec c couleurs existe si et seulement si il existe une partition $\{A_1, \ldots, A_c\}$ de V en c anticliques.
b. Montrer $\chi(G)\alpha(G) \geq |V|$.

Graphe parfait. Un graphe G est dit *parfait* si tous ses sous-graphes induits $G[W]$ satisfont : $\chi(G[W]) = \omega(G[W])$.
Graphe imparfait minimal. Un graphe G est dit *imparfait minimal* s'il n'est pas parfait, et que tous ses sous-graphes induits propres sont parfaits.

Question 3. Donner un exemple de graphe parfait, et de graphe imparfait minimal.

Pour simplifier les notations, dans les questions 4 à 8, on fixe G un graphe imparfait minimal quelconque. Sans perte de généralité, on pose $V = \{1, \ldots, n\}$. On note $\alpha = \alpha(G)$, $\omega = \omega(G)$, $\chi = \chi(G)$.

Question 4. Soit A une anticlique de G. Montrer $\omega(G[V \setminus A]) = \omega$.

Question 5. Soit A_0 une anticlique de G de cardinalité α. Montrer qu'il existe $\alpha\omega$ anticliques $A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$, telles que pour chaque sommet $v \in V$, v fait partie d'exactement α anticliques parmi $A_0, \ldots, A_{\alpha\omega}$. (Formellement : $\forall v \in V, |\{i \in \{0, \ldots, \alpha\omega\} : v \in A_i\}| = \alpha$.)

Question 6. On considère une suite d'anticliques $A_0, \ldots, A_{\alpha\omega}$ définie comme dans la question précédente. Montrer que pour tout i dans $\{0, \ldots, \alpha\omega\}$, il existe une clique C_i telle que $C_i \cap A_i = \varnothing$, et $\forall j \neq i, |C_i \cap A_j| = 1$.
Indication : utiliser la question 4

Matrice d'incidence. Étant donné une suite $V_0, \dots, V_{\alpha\omega}$ de sous-ensembles de $V = \{1, \dots, n\}$, on définit la *matrice d'incidence* de la suite (V_i) comme la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \alpha\omega} \in \{0,1\}^{n \times (\alpha\omega+1)}$ définie par $M_{i,j} = 1$ si $i \in V_j$, 0 sinon.

Question 7. Soit M_A la matrice d'incidence de la suite $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$ de la question 5, et M_C la matrice d'incidence de la suite $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$ de la question 6. On note $M_A^\top$ la transposée de M_A.

Montrer que $M_A^\top M_C$ est de rang $\alpha\omega + 1$, où les matrices sont vues comme à coefficient dans $\mathbb{Q}$.

Question 8. Montrer $n \geq \alpha\omega + 1$.

Dans les questions suivantes, $G = (V, E)$ est un graphe quelconque.

Question 9. Montrer que G est parfait si et seulement si $\omega(G[W])\alpha(G[W]) \geq |W|$ pour tout sous-graphe induit $G[W]$ de G.

Question 10. Soit $\overline{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ le graphe *complémentaire* de G. Montrer que G est parfait si et seulement si $\overline{G}$ est parfait.