

Persamaan Diferensial dalam Teknik Elektro:  
Kerangka Kerja untuk Mengintegrasikan Teori,  
Pedagogi, dan Praktik Modern

Novalio Daratha

June 29, 2025

# Chapter I

## Kerangka Dasar dan Filosofi Mata Kuliah

### I.1 Rasional Mata Kuliah: Bahasa Sistem Kelistrikan Modern

Persamaan diferensial adalah landasan dalam pendidikan matematika bagi para insinyur elektro, berfungsi sebagai bahasa utama untuk mendeskripsikan dan menganalisis sistem dinamis.[1] Perilaku rangkaian listrik, perambatan sinyal, operasi sistem kendali, dan karakteristik medan elektromagnetik semuanya secara fundamental diatur oleh hubungan yang melibatkan laju perubahan, yang diekspresikan secara matematis sebagai persamaan diferensial. Teks-teks dasar dengan tepat menyatakan bahwa "Hukum-hukum alam diekspresikan sebagai persamaan diferensial" [1], dan bagi insinyur elektro modern, ini secara langsung diterjemahkan menjadi alat yang sangat diperlukan untuk memodelkan, memprediksi, dan berinovasi di seluruh lanskap teknologi yang berkembang pesat.

Kurikulum yang disempurnakan ini dibangun di atas filosofi bahwa studi persamaan diferensial tidak seharusnya menjadi latihan matematika murni, tetapi sebuah eksplorasi mendalam tentang prinsip-prinsip dinamis yang menopang seluruh teknik elektro. Meskipun analisis rangkaian RLC klasik tetap menjadi aplikasi vital dan alat pedagogis yang sangat baik [1], motivasi untuk mata kuliah ini diperluas untuk mencakup tantangan tingkat sistem yang kompleks yang mendefinisikan rekayasa kontemporer. Tujuannya adalah untuk menetapkan persamaan diferensial tidak hanya sebagai bahasa komponen, tetapi sebagai bahasa seluruh sistem yang saling terhubung. Untuk tujuan itu, mata kuliah ini segera membingkai subjek dengan contoh-contoh mutakhir yang menarik dan relevan dengan generasi mahasiswa teknik saat ini. Aplikasi modern ini meliputi:

- **Sistem Energi Terbarukan (SET):** Integrasi tenaga surya dan angin ke

dalam jaringan listrik menghadirkan tantangan signifikan karena sifat stokastik dan intermiten dari sumber-sumber ini. Persamaan diferensial sangat penting untuk memodelkan dinamika sistem ini, mengoptimalkan penyimpanan energi, dan memastikan stabilitas jaringan [Nad24]. [2] Sebuah model sederhana namun kuat untuk energi yang tersimpan dalam baterai, misalnya, dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa (PDB) orde pertama,  $dE/dt = P_{in}(t) - P_{out}(t)$ , di mana laju perubahan energi yang tersimpan  $E$  adalah selisih antara daya masuk dari sumber terbarukan dan daya keluar ke beban. [3] Ini memberikan masalah yang nyata dan sangat relevan yang dapat dipahami mahasiswa sejak hari pertama.

- **Robotika dan Sistem Otonom:** Gerakan dan kontrol manipulator robotik diatur oleh sistem persamaan diferensial non-linier yang kompleks dan berpasangan yang diturunkan dari dinamika Lagrangian atau Newton-Euler. [4] Kemampuan untuk memodelkan interaksi robot dengan lingkungannya, merencanakan lintasan, dan merancang sistem kontrol yang stabil sepenuhnya bergantung pada kemampuan untuk menyelesaikan dan menganalisis PDB ini. [5] Domain aplikasi ini menunjukkan kekuatan PD dalam menciptakan sistem fisik yang cerdas.
- **Jaringan Cerdas (Smart Grids):** Stabilitas jaringan listrik modern, terutama dengan penetrasi tinggi sumber daya berbasis inverter seperti tenaga surya dan baterai, adalah area studi yang kritis. Perilaku dinamis jaringan, khususnya responsnya terhadap gangguan, dimodelkan menggunakan sistem persamaan diferensial, seperti persamaan ayunan (swing equation) yang menggambarkan dinamika frekuensi. [6] Teknik-teknik canggih bahkan memadukan model persamaan diferensial fisik dengan jaringan saraf menjadi Persamaan Diferensial Universal (UDE) untuk menangkap dinamika kompleks yang tidak termodelkan, yang mewakili garda terdepan analisis jaringan cerdas. [6]

Studi persamaan diferensial membekali mahasiswa teknik elektro dengan kemampuan untuk memahami dan memprediksi fenomena transien—bagaimana sistem merespons segera setelah perubahan—dan perilaku keadaan tunak (steady-state)—bagaimana sistem berperilaku setelah fluktuasi awal mereda. [1] Konsep-konsep ini sangat penting untuk merancang sistem kelistrikan yang stabil dan andal. Namun, kekuatan sebenarnya dari kerangka matematis ini terwujud ketika mahasiswa beralih dari menganalisis komponen individual ke menganalisis perilaku seluruh sistem. Aplikasi modern yang tercantum di atas bukan hanya contoh tambahan; mereka mewakili pergeseran fundamental dalam kompleksitas dari analisis tingkat komponen (seperti satu rangkaian RLC) ke pemikiran tingkat sistem yang dibutuhkan oleh para insinyur saat ini. Oleh karena itu, mata kuliah ini disusun untuk membimbing mahasiswa dalam perjalanan itu, memposisikan topik-topik lanjutan seperti transformasi

Laplace, sistem PDB, dan metode numerik sebagai perangkat penting untuk mengatasi tantangan rekayasa modern ini.

## **1.2 Capaian Pembelajaran Lulusan yang Dibebankan pada Mata Kuliah (CPMK)**

Tujuan utama dari mata kuliah ini adalah untuk memberikan mahasiswa teknik elektro keterampilan matematika yang esensial untuk secara efektif memodelkan, menganalisis, dan menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan diferensial yang ditemui di berbagai sub-disiplin ilmu teknik elektro. Tujuan utamanya adalah "membantu mahasiswa mengembangkan kemampuan untuk melakukan analisis rekayasa untuk masalah rekayasa yang melibatkan persamaan diferensial".[1]

Setelah berhasil menyelesaikan mata kuliah ini, mahasiswa akan dapat:

1. Memodelkan dan Mengklasifikasikan: Mengidentifikasi dan mengkategorikan berbagai jenis persamaan diferensial biasa (PDB) yang relevan dengan masalah teknik elektro, berdasarkan orde, linearitas, dan homogenitas. Mahasiswa akan dapat memodelkan sistem fisik EE sederhana untuk menurunkan PDB orde pertama dan kedua.[1]
2. Menyelesaikan secara Analitis: Menguasai teknik analitis untuk menyelesaikan PDB orde pertama (termasuk persamaan terpisah, linear dengan faktor integrasi, dan persamaan eksak) dan PDB linear orde kedua dengan koefisien konstan (baik tipe homogen maupun non-homogen, menggunakan metode seperti koefisien tak tentu dan variasi parameter).[1]
3. Menerapkan Transformasi Laplace: Memahami teori transformasi Laplace dan mahir menggunakannya untuk menyelesaikan masalah nilai awal (IVP) untuk PDB linear, menganalisis respons rangkaian listrik, dan menentukan fungsi transfer sistem.[1]
4. Menganalisis Sistem PDB: Menyelesaikan sistem PDB linear menggunakan metode berbasis matriks, khususnya pendekatan nilai eigen/vektor eigen, dan menghubungkan sistem ini dengan analisis sistem teknik elektro yang berpasangan.[1]
5. Menerapkan dalam Konteks Teknik Elektro: Menerapkan konsep matematika dan metodologi solusi yang dipelajari untuk menyelesaikan masalah rekayasa praktis di area inti seperti analisis rangkaian (rangkaiannya RC, RL, RLC), sistem kontrol dasar, robotika, dan aplikasi sistem energi terbarukan fundamental.[1]

6. Memanfaatkan Metode & Alat Numerik: Menerapkan metode numerik fundamental (misalnya, metode Euler, metode Runge-Kutta) untuk menemukan solusi perkiraan untuk PDB dan secara efektif memanfaatkan alat komputasi (seperti MATLAB, Python/NumPy, atau GNU Octave) untuk menyelesaikan, mensimulasikan, dan memvisualisasikan solusi persamaan diferensial dalam konteks teknik elektro.[1]
7. Mengevaluasi dan Menginterpretasikan Solusi secara Kritis: Mengevaluasi dan menginterpretasikan solusi matematika secara kritis dalam konteks fisiknya. Ini termasuk melakukan "pemeriksaan realitas" dengan menggunakan penalaran fisik, analisis grafis, dan menguji kasus-kasus ekstrem atau batas.[1] Mahasiswa akan menganalisis stabilitas sistem dari lokasi kutub atau nilai eigen [11] dan dengan jelas mengkomunikasikan makna fisik dari respons transien/keadaan tunak, resonansi, dan mode sistem.
8. Mensintesis dan Mengkomunikasikan: Mensintesis pengetahuan dari berbagai modul untuk memodelkan, menganalisis, dan mengusulkan solusi untuk masalah rekayasa yang kompleks dan terbuka. Secara efektif mengkomunikasikan proses pemodelan, hasil, dan interpretasi fisik dalam laporan teknis terstruktur atau portofolio.[13]

### 1.3 Prasyarat dan Kemampuan Dasar

Dasar yang kuat dalam beberapa bidang matematika fundamental sangat penting untuk keberhasilan dalam mata kuliah ini. Mahasiswa diharapkan memiliki pemahaman yang kuat tentang kalkulus diferensial dan integral satu variabel, kalkulus multivariabel, aljabar linear (termasuk matriks, determinan, nilai eigen, dan vektor eigen), dan bilangan kompleks.[1] Keakraban dengan fisika dasar, khususnya listrik dan magnet, juga penting untuk memahami penurunan dan penerapan persamaan diferensial dalam rangkaian listrik.[1] Keterkaitan prasyarat ini dengan materi mata kuliah tidak dapat dilebih-lebihkan. Misalnya, solusi PDB orde kedua sering kali melibatkan pencarian akar dari persamaan karakteristik kuadratik, yang bisa jadi kompleks, yang secara langsung memerlukan pengetahuan aritmatika kompleks. Demikian pula, analisis rangkaian berpasangan atau sistem robotik mengarah pada sistem PDB, di mana aljabar matriks menjadi alat yang sangat diperlukan untuk menemukan solusi.[1] Untuk memastikan mahasiswa siap dan untuk menetapkan filosofi inti mata kuliah sejak awal, diusulkan aktivitas diagnostik "Minggu 0". Diagnostik matematika tradisional secara efektif menguji keterampilan prosedural tetapi sering kali gagal menilai kompetensi yang lebih kritis bagi para insinyur: kemampuan untuk menghubungkan formalisme matematika abstrak dengan intuisi fisik.[15] Titik kegagalan yang umum bukanlah ketidakmampuan untuk mengeksekusi integral, tetapi

ketidakmampuan untuk mengenali apa yang diwakili oleh integral tersebut dalam konteks fisik. Aktivitas ini dirancang untuk mendiagnosis keterampilan krusial ini. Aktivitas Diagnostik: Tantangan "Pemeriksaan Realitas"

- Format: Aktivitas kelompok di dalam kelas dengan bobot rendah.
- Tugas: Mahasiswa disajikan dengan sistem fisik dinamis sederhana tanpa persamaan yang mengaturnya. Ini bisa berupa video pendek pendulum teredam, demonstrasi fisik, atau simulasi interaktif (misalnya, rangkaian RC dari PhET [16] atau sistem pegas-massa dari CalcPlot3D [17]).
- Prompt:
  1. "Amati perilaku sistem. Dalam kelompok Anda, buat sketsa grafik kualitatif dari variabel kunci (misalnya, sudut pendulum, tegangan pada kapasitor) terhadap waktu. Jangan menulis persamaan apa pun."
  2. "Tulis deskripsi satu paragraf tentang perilaku sistem menggunakan bahasa sehari-hari. Misalnya, apakah sistem berosilasi? Apakah gerakannya mereda? Apakah perubahannya cepat pada awalnya dan kemudian melambat? Apa yang menurut Anda akan terjadi jika kita menunggu waktu yang sangat lama?"
  3. "Faktor atau parameter fisik apa yang menurut Anda akan memengaruhi perilaku ini? (misalnya, massa, gesekan, resistansi)."
- Tujuan: Aktivitas ini memiliki beberapa fungsi pedagogis. Ini berfungsi sebagai diagnostik bagi instruktur, mengungkapkan tingkat intuisi fisik dasar kelas. Ini segera menetapkan tema sentral mata kuliah: matematika adalah alat untuk mendeskripsikan dan memprediksi realitas yang diamati secara tepat.[10] Dengan memulai dari observasi dan penalaran kualitatif, ini menekankan pemikiran dan interpretasi di atas perhitungan hafalan, menetapkan preseden untuk seluruh semester.

## **1.4 Sumber Daya untuk Mahasiswa Teknik Modern**

Untuk mendukung tujuan pembelajaran dan menyediakan alat yang fleksibel, dapat diakses, dan relevan dengan industri bagi mahasiswa, buku teks dan sumber daya berikut direkomendasikan. Peningkatan utama pada rencana awal adalah penyer-taan eksplisit perangkat lunak sumber terbuka (open-source) berkualitas tinggi dan

gratis di samping paket standar industri. Ini mempromosikan kesetaraan, memungkinkan mahasiswa untuk terus menggunakan alat-alat tersebut setelah mata kuliah selesai, dan mengembangkan kemahiran dalam berbagai lingkungan komputasi yang lebih luas.

#### Buku Teks Utama

- Lebl, Jiří. Notes on Diffy Qs: Differential Equations for Engineers. Sumber Daya Pendidikan Terbuka (OER) ini secara khusus disesuaikan untuk mahasiswa teknik, memberikan pendekatan yang relevan, dapat diakses, dan bebas biaya untuk subjek ini.[1]

#### Buku Teks OER Tambahan:

- Trench, William F. Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. OER berkualitas tinggi lainnya yang dapat berfungsi sebagai sumber daya tambahan yang sangat baik, menawarkan penjelasan alternatif dan soal-soal tambahan.[1]

#### Teks Referensi Standar (Bacaan Alternatif atau Tambahan):

- Edwards, C. H., & Penney, D. E. Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Ini adalah buku teks tradisional yang banyak digunakan yang dapat menawarkan kedalaman lebih la

#### Sumber Daya Alat Komputasi dan Simulasi

- Perangkat Lunak Standar Industri:
  - Lingkungan utama untuk komputasi numerik, simulasi, dan desain berbasis model di banyak industri. Mahasiswa harus diarahkan ke dokumentasi resmi, tutorial, dan kursus online (misalnya, MATLAB Onramp) yang disediakan oleh MathWorks.[1] Buku teks oleh Shankar, "Differential Equations: A Problem Solving Approach Based on MATLAB," juga menyediakan contoh-contoh yang relevan.[1]
- Alternatif Sumber Terbuka & Perangkat Gratis Industri:
  - GNU Octave: Perangkat lunak sumber terbuka gratis yang menampilkan bahasa pemrograman tingkat tinggi yang terutama ditujukan untuk komputasi numerik. Sintaksisnya sebagian besar kompatibel dengan MATLAB, menjadikannya alternatif tanpa biaya yang sangat baik bagi mahasiswa.[9] Ini mencakup pemecah (solver) bawaan yang kuat

untuk persamaan diferensial biasa (misalnya, Isode) dan persamaan diferensial-aljabar (misalnya, daspk, dassl).[22]

- Python dengan Pustaka Ilmiah: Kombinasi Python dengan pustaka seperti NumPy, SciPy, dan Matplotlib telah menjadi kekuatan besar untuk komputasi ilmiah dan rekayasa.

Secara khusus, fungsi `scipy.integrate.solve_ivp` adalah pemecah PDB yang serbaguna dan kuat yang banyak digunakan baik di akademisi maupun industri.[1]

- LTspice: Simulator sirkuit SPICE berkinerja tinggi yang dikembangkan oleh Analog Devices. Ini adalah perangkat lunak gratis standar industri yang banyak digunakan untuk menangkap skematik, simulasi, dan melihat bentuk gelombang. Ini adalah alat yang ideal bagi mahasiswa untuk membangun dan mensimulasikan rangkaian RC, RL, dan RLC yang mereka analisis secara analitis, memungkinkan analisis DC, AC, dan transien untuk memvalidasi solusi turunan mereka. Ini secara efektif menjembatani kesenjangan antara persamaan abstrak dan kinerja rangkaian di dunia nyata.[26]

- Alat Visualisasi Interaktif:

- PhET Interactive Simulations: Serangkaian simulasi sains dan matematika gratis berbasis penelitian dari University of Colorado. "Circuit Construction Kit" sangat berguna untuk membangun intuisi tentang perilaku rangkaian dasar.[16]
- CalcPlot3D & GeoGebra: Alat gratis ini menyediakan applet interaktif yang sangat baik untuk memvisualisasikan konsep seperti medan arah, potret fasa untuk sistem PDB, dan gerakan sistem pegas-massa teredam, yang merupakan analog mekanis dari rangkaian RLC.[17]

Jadwal mingguan yang komprehensif, yang diuraikan dalam Tabel 1, berfungsi sebagai peta jalan untuk mata kuliah ini, memastikan cakupan kurikulum yang sistematis dan penguatan berkelanjutan akan relevansi persamaan diferensial dengan teknik elektro modern.



Table 1.1: Jadwal Keseluruhan Mata Kuliah dan Rincian Mingguan yang Ditingkatkan

Minggu	Modul	Topik Utama	CPMK	Aktivitas di Kelas	Ide Lab/Proyek	Aplikasi Teknik Elektro Relevan	Bacaan (Lebl/Trench)
1	1: Pengantar PD	Definisi, Terminologi, Klasifikasi, Konsep Solusi, IVP, Diagnostik "Pemeriksaan Realitas"	1, 7	Pembelajaran Berbasis Inkuiri (IBL) dengan simulasi sistem fisik, mengklasifikasikan PD dari konteks EE.		Persamaan rangkaian RLC sebagai model PDB, persamaan gelombang pada saluran transmisi (contoh PDP).	Lebl Bab 0, 1.1; Trench Bab 1
2	1: Pengantar / 2: Orde-Pertama	Pemodelan Sistem EE Sederhana; Medan Arah; Persamaan Terpisah.	1, 2, 5, 7	Pengantar PBL: Penyimpanan Energi Terbarukan. Lokakarya pemodelan (baterai sebagai rangkaian RC). Menggambar medan arah dengan Octave/Python.	Menggambar medan arah untuk model pengisian/pengosongan baterai.	Pemodelan rangkaian RC/RL dasar, model pengisian baterai.	Lebl 1.2, 1.3; Trench Bab 2.1, 2.2
3	2: PDB Orde-Pertama	PDB Linear Orde-Pertama (Bentuk Standar), Faktor Integrasi.	2, 5	Flipped Classroom: Video pra-kelas tentang penurunan faktor integrasi. Penyelesaian masalah kelompok di kelas untuk model baterai.		Menyelesaikan State of Charge (SoC) baterai vs. waktu.	Lebl 1.4, 1.5; Trench Bab 2.4
4	2: PDB Orde-Pertama	Aplikasi: Rangkaian RL/RC (Transien, Keadaan Tunak, Konstanta Waktu), PD Eksak (singkat).	2, 5, 7	Sesi PBL: Analisis konstanta waktu untuk model baterai. Interpretasi makna fisik dari muatan transien vs. keadaan tunak.	Simulasikan pengisian/pengosongan baterai di LTspice atau MATLAB.	Analisis rangkaian RC/RL terperinci, konstanta waktu, pengisian/pengosongan.	Lebl 1.5, 1.6; Trench Bab 2.3, 2.6
Berlanjut di halaman berikutnya							

Minggu	Modul	Topik Utama	CPMK	Aktivitas di Kelas	Ide Lab/Proyek	Aplikasi Teknik Elektro Relevan	Bacaan (Lebl/Trench)
5	3: Orde-Kedua	PDB Persamaan Homogen, Koefisien Konstan: Persamaan Karakteristik (Akar Riil, Berulang, Kompleks), Superposisi.	2, 7	Pengantar PBL: Tantangan Desain Filter Crossover Audio. Penurunan untuk semua kasus akar.		Rangkaian RLC tanpa paksaan, analogi mekanis, respons alami sistem.	Lebl 2.1-2.3; Trench Bab 5.1-5.4
6	3: Orde-Kedua	PDB Persamaan Non-Homogen: Metode Koefisien Tak Tentu, Metode Variasi Parameter.	2	Metode langkah-demi-langkah, contoh komparatif untuk memilih metode yang tepat untuk masalah desain filter.		Respons paksa sistem, menemukan respons keadaan tunak terhadap input sinusoidal.	Lebl 2.4, 2.5; Trench Bab 5.5, 5.6
7	3: Orde-Kedua	PDB Aplikasi: Rangkaian RLC (Redaman, Resonansi), Filter RLC.	2, 5, 6, 7	Lokakarya PBL: Pilih nilai RLC untuk spesifikasi filter. Analisis redaman. Demo resonansi.	Simulasikan filter yang dirancang di LTspice/Simulink. Bandingkan respons frekuensi analitis vs. simulasi.	Analisis rangkaian RLC (overdamped, critically damped, underdamped), resonansi, desain filter crossover audio.	Lebl 2.6; Trench Bab 5.7, 5.8
8	4: Transformasi Laplace	Trans-Flipped Classroom: Definisi, Keberadaan, Linearitas, Transformasi Fungsi Elementer & Turunan.	3	Pra-kelas: Video tentang definisi/sifat TL. Di kelas: Kerja kelompok menurunkan transformasi dari definisi dan pembuatan tabel.		Mengubah PDB menjadi persamaan aljabar, memasukkan kondisi awal.	Lebl 6.1; Trench Bab 8.1, 8.2

Berlanjut di halaman berikutnya

Minggu	Modul	Topik Utama	CPMK	Aktivitas di Kelas	Ide Lab/Proyek	Aplikasi Teknik Elektro Relevan	Bacaan (Lebl/Trench)
9	4: Trans-formasi Laplace	Flipped Classroom: Invers TL, Ekspansi Fraksi Parsial, Teorema Konvolusi.	3	Pra-kelas: Video tentang teknik PFE. Di kelas: "Klinik Fraksi Parsial" - penyelesaian masalah kolaboratif pada invers transformasi kompleks.		Respons sistem melalui konvolusi, menyelesaikan respons domain waktu dari domain-s.	Lebl 6.1, 6.2; Trench Bab 8.3, 8.5
10	4: Trans-formasi Laplace	Flipped Classroom: Menyelesaikan IVP, Fungsi Step & Impuls.	3, 5, 7	Pra-kelas: Video tentang fungsi Heaviside/Dirac. Di kelas: Menyelesaikan IVP rangkaian RLC dengan input step/impuls menggunakan TL.	Selesaikan rangkaian RLC dengan input diskontinu melalui TL di MATLAB/Octave.	Analisis rangkaian dengan input diskontinu, respons impuls sistem.	Lebl 6.2, 6.3; Trench Bab 8.4, 8.6
11	4: Trans-formasi Laplace	Flipped Classroom: Fungsi Transfer, Kutub & Nol, Stabilitas Sistem.	3, 5, 7, 8	Pra-kelas: Membaca tentang FT. Di kelas: "Lokakarya Fungsi Transfer" - turunkan FT untuk filter/motor, gambar diagram kutub-nol, analisis stabilitas.	Analisis stabilitas motor DC atau model sistem kontrol sederhana menggunakan plot kutub-nol di MATLAB.	Desain filter, dasar sistem kontrol (motor DC), analisis stabilitas dari lokasi kutub.	Lebl 6.4; Trench Bab 8.7
12	5: Sistem PDB	Pengantar Sistem, Notasi Matriks, Sistem Homogen, Metode Nilai Eigen-Vektor Eigen.	4, 7	Pengantar Studi Kasus: Dinamika Lengan Robot 2-Link. Ubah PDB menjadi sistem. Contoh nilai eigen.	Gunakan MATLAB/Octave untuk menemukan nilai/vektor eigen untuk matriks lengan robot A.	Pemodelan sistem berpasangan, robotika, rangkaian multi-loop.	Lebl Bab 3; Trench Bab 7.1-7.6

Berlanjut di halaman berikutnya



Table 1.1 – lanjutan dari halaman sebelumnya

Minggu	Modul	Topik Utama	CPMK	Aktivitas di Kelas	Ide Lab/Proyek	Aplikasi Teknik Elektro Relevan	Bacaan (Lebl/Trench)
15	7: Metode Numerik & Runge-Kutta Orde Tinggi (RK <sub>4</sub> ), Menggunakan Solver PDB MATLAB/Python/Simulink, Tinjauan Mata Kuliah	Pengantar Proyek.	6, 7, 8	Lab Komputasi: Bandingkan RK <sub>4</sub> yang diimplementasikan sendiri vs. solver bawaan (ode45, lsode) untuk sistem non-linear.	Pengerjaan/konsultasi Proyek Mata Kuliah dimulai.	Simulasi rangkaian non-linear, sistem kontrol kompleks, dinamika EV/microgrid.	Lebl 1.8 (kunjungi kembali); Trench Bab 3.2, 3.3

# Chapter 2

## Modul 1: Pengantar Persamaan Diferensial (Minggu 1-2)

Modul dasar ini memperkenalkan mahasiswa pada dunia persamaan diferensial, menetapkan terminologi inti, klasifikasi, dan konsep fundamental pemodelan sistem fisik, terutama yang ditemui dalam teknik elektro. Pendekatan pedagogis menekankan inkuiri dan koneksi langsung ke konteks fisik.

### 2.1 Minggu 1: Definisi, Terminologi, dan Klasifikasi

Mata kuliah dimulai dengan mendefinisikan persamaan diferensial sebagai persamaan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunannya.[36] Untuk memberikan konteks dan motivasi langsung, contoh-contoh ilustratif diambil dari seluruh bidang teknik elektro. Ini tidak hanya mencakup PDB orde kedua klasik untuk rangkaian RLC,  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$  [1], tetapi juga pengenalan singkat tentang jenis-jenis persamaan yang memodelkan sistem yang lebih canggih.

Aspek kunci dalam memahami persamaan diferensial adalah klasifikasinya. Persamaan dikategorikan berdasarkan:

- **Tipe:** Perbedaan utama adalah antara Persamaan Diferensial Biasa (PDB), yang melibatkan fungsi dari satu variabel independen (biasanya waktu dalam banyak aplikasi EE), dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP), yang melibatkan fungsi dari beberapa variabel independen dan turunan parsialnya.[1] Meskipun mata kuliah ini berfokus pada PDB, pengenalan singkat namun konkret tentang PDP sangat penting untuk mengontekstualisasikan bidang ini. Misalnya, Persamaan Gelombang,  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ , yang mengatur perambatan tegangan  $V(x, t)$  di sepanjang saluran transmisi, dapat disajikan untuk mengilustrasikan sistem di mana kuantitas yang diminati bervariasi dalam ruang ( $x$ ) dan waktu

(t).[37] Demikian pula, Persamaan Laplace,  $\nabla^2\phi = 0$ , adalah fundamental untuk elektrostatis dalam menemukan potensial listrik di daerah bebas muatan.[1]

- **Orde:** Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi yang ada dalam persamaan.[1] Mahasiswa akan belajar mengidentifikasi PDB orde pertama, orde kedua, dan orde lebih tinggi.
- **Linearitas:** Persamaan diklasifikasikan sebagai linear atau non-linear. PDB linear adalah persamaan di mana fungsi yang tidak diketahui dan turunannya hanya muncul dalam pangkat pertama dan tidak dikalikan bersama. Teori untuk PDB linear sudah berkembang dengan baik, dan mereka sering muncul sebagai aproksimasi yang berguna untuk perilaku non-linear yang lebih kompleks.[1]
- **Homogenitas:** Persamaan diferensial linear selanjutnya diklasifikasikan sebagai homogen jika setiap suku melibatkan fungsi yang tidak diketahui atau turunannya, atau non-homogen jika ada suku yang hanya melibatkan variabel independen, sering kali mewakili input atau gaya eksternal.[1]

Aktivitas kelas akan melibatkan contoh interaktif di mana mahasiswa mengklasifikasikan berbagai persamaan diferensial yang diambil dari konteks EE. Ini diikuti oleh aktivitas diagnostik "Pemeriksaan Realitas" yang dijelaskan di Bagian I.C, yang dirancang untuk menilai dan menumbuhkan intuisi fisik sejak awal mata kuliah.

## 2.2 Minggu 1 (Lanjutan): Konsep Solusi, Masalah Nilai Awal dan Batas

Setelah klasifikasi, konsep **solusi** untuk persamaan diferensial diperkenalkan sebagai fungsi yang, ketika disubstitusikan ke dalam persamaan bersama dengan turunannya, memenuhi persamaan secara identik.[1] Perbedaan dibuat antara **solusi umum**, yang mewakili keluarga fungsi yang mengandung konstanta sembarang, dan **solusi khusus**, yang merupakan fungsi spesifik yang diperoleh dengan menentukan konstanta ini menggunakan kondisi tambahan. Kondisi tambahan ini biasanya mengarah pada **Masalah Nilai Awal (IVP)** atau **Masalah Nilai Batas (BVP)**.

- Sebuah IVP terdiri dari PDB beserta kondisi awal yang menentukan nilai fungsi yang tidak diketahui dan potensialnya turunannya pada satu titik dari variabel independen (misalnya,  $y(x_0) = y_0$ , dan untuk PDB orde kedua,  $y'(x_0) = y'_0$ ).[1] IVP ada di mana-mana dalam teknik elektro untuk menganalisis respons domain waktu dari rangkaian dan sistem dari keadaan awal yang diketahui.

- BVP, sebaliknya, melibatkan kondisi yang ditentukan pada titik-titik yang berbeda, sering kali batas-batas suatu domain. Meskipun kurang sentral dalam mata kuliah PDB pengantar ini, menyebutkan relevansinya dengan PDP dalam masalah elektrostatika atau saluran transmisi memberikan konteks penting.[1]

Konsep **keberadaan dan keunikan solusi** akan disinggung, terutama untuk IVP linear, di mana teorema menjamin bahwa solusi unik ada di bawah kondisi tertentu pada fungsi koefisien.[1] Mahasiswa akan berlatih memverifikasi apakah fungsi yang diberikan adalah solusi untuk PDB dan merumuskan IVP sederhana untuk skenario teknik elektro dasar.

## 2.3 Minggu 2: Pemodelan Sistem EE Sederhana & Pengantar Medan Arah

Keterampilan penting bagi para insinyur adalah kemampuan untuk menerjemahkan masalah fisik menjadi model matematika, yang sering kali berbentuk persamaan diferensial.[1] Mata kuliah ini menekankan keterampilan ini sejak awal. Contoh awal melibatkan penurunan PDB orde pertama untuk rangkaian RC sederhana yang terhubung ke sumber tegangan DC, menghasilkan persamaan seperti  $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_s$  atau, dalam hal tegangan kapasitor  $v_c$ ,  $RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_s$ .

Latihan pemodelan ini berfungsi sebagai titik masuk untuk tema Pembelajaran Berbasis Masalah (PBL) sentral modul: memodelkan sistem penyimpanan energi terbarukan. Mahasiswa ditugaskan untuk memodelkan baterai sederhana (direpresentasikan sebagai kapasitor besar) yang diisi oleh panel surya (direpresentasikan sebagai sumber tegangan atau arus yang bervariasi waktu). Ini segera menghubungkan model rangkaian RC abstrak ke aplikasi modern yang memotivasi.[3]

Sebelum mendalami teknik solusi analitis, metode geometris menawarkan wawasan kualitatif yang berharga tentang perilaku solusi. Medan arah (atau medan kemiringan) untuk PDB orde pertama dalam bentuk  $dy/dx = f(x, y)$  memberikan representasi visual dari kemiringan kurva solusi di berbagai titik di bidang.[1] Dengan membuat sketsa segmen garis pendek dengan kemiringan ini, seseorang dapat memvisualisasikan "aliran" solusi dan membuat sketsa kurva solusi perkiraan tanpa benar-benar menyelesaikan persamaan.

Tujuan pembelajaran untuk bagian ini termasuk menurunkan model PDB orde pertama untuk rangkaian RC/RL dasar (dikontekstualisasikan oleh masalah baterai), membangun medan arah, dan menafsirkan medan ini untuk membuat sketsa solusi perkiraan. Aktivitas utama akan menjadi lokakarya menggunakan alat komputasi seperti MATLAB atau Python untuk memplot medan arah untuk model pengisian baterai di bawah kondisi yang berbeda (misalnya, sinar matahari konstan vs. sinar matahari variabel). Penekanan awal pada pemodelan dan visualisasi ini secara ped-



agogis signifikan. Ini segera menghubungkan matematika abstrak dengan sistem fisik yang nyata dan menawarkan pemahaman intuitif tentang perilaku solusi bahkan sebelum mahasiswa menguasai teknik analitis formal, menumbuhkan pemahaman konseptual yang lebih dalam dan mempersiapkan mereka dengan lebih baik untuk mentransfer pengetahuan ini ke konteks rekayasa lainnya.[1]

## Chapter 3

# Modul 2: Persamaan Diferensial Biasa Orde Pertama (Minggu 2-5)

Modul ini mendalami teknik analitis untuk menyelesaikan berbagai jenis PDB orde pertama, yang merupakan dasar untuk menganalisis rangkaian dan sistem kelistrikan yang lebih sederhana. Pendekatan pedagogis dibingkai oleh skenario Pembelajaran Berbasis Masalah (PBL) sentral yang diperkenalkan di Modul 1, memastikan bahwa metode matematika dipelajari dalam konteks penyelesaian masalah rekayasa yang nyata.

### 3.1 Skenario PBL: Penyimpanan Energi Terbarukan

Masalah pemersatu untuk modul ini adalah analisis sistem penyimpanan energi terbarukan yang disederhanakan. Skenarionya adalah sebagai berikut:

- "Sebuah instalasi surya off-grid kecil menggunakan panel PV untuk mengisi bank baterai. Bank baterai dapat dimodelkan sebagai kapasitor besar ( $C$ ), dan rangkaian pengisian memiliki resistansi seri efektif ( $R$ ). Panel surya menyediakan tegangan  $V_{solar}(t)$  yang bervariasi sepanjang hari. Pada malam hari, baterai memberi daya pada beban, yang dapat dimodelkan sebagai beban resistif ( $R_{load}$ ). Tugas Anda adalah memodelkan perilaku pengisian dan pengosongan sistem ini. Secara khusus, Anda perlu menentukan bagaimana tegangan baterai (dan dengan demikian status pengisiannya) berevolusi dari waktu ke waktu di bawah kondisi yang berbeda."

Masalah ini secara langsung terhubung dengan pemodelan sistem energi terbarukan dan dinamika inherennya [Nad24]. [2] Fase pengisian dan pengosongan baterai dapat dimodelkan oleh PDB linear orde pertama klasik untuk rangkaian RC,  $RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = V_{source}(t)$ . [1] Dengan membingkai modul dengan cara ini, teknik matematika yang

mengikutinya tidak disajikan sebagai algoritma yang terisolasi tetapi sebagai alat yang diperlukan untuk menjawab pertanyaan spesifik tentang sistem praktis ini. Pendekatan ini menumbuhkan motivasi dengan menciptakan kebutuhan yang jelas akan teori tersebut.[40]

### **3.2 B. Minggu 2 (Lanjutan) - Minggu 3: Persamaan Terpisah dan Homogen**

Metode analitis pertama yang dibahas adalah untuk persamaan terpisah. Ini adalah persamaan yang dapat dimanipulasi secara aljabar menjadi bentuk  $g(y)dy = f(x)dx$ , di mana solusinya ditemukan dengan mengintegrasikan kedua sisi.[1] Meskipun tidak secara langsung berlaku untuk model RC linear dari skenario PBL utama, metode ini adalah blok bangunan fundamental. Selanjutnya, persamaan homogen orde pertama dalam bentuk  $dy/dx = F(y/x)$  dibahas. Ini dapat diubah menjadi persamaan terpisah dengan substitusi  $v = y/x$ . Jenis persamaan ini sangat penting untuk membangun keterampilan analitis dasar, dan mereka mungkin muncul dalam konteks rekayasa lainnya, seperti model perangkat non-linear tertentu atau masalah dalam dinamika fluida atau termodinamika.[42] Kegiatan akan mencakup kuliah, contoh soal yang dikerjakan, dan set soal latihan untuk memperkuat teknik-teknik ini.

### **3.3 C. Minggu 3-4: PDB Linear Orde Pertama dan Faktor Integrasi**

Kelas PDB orde pertama yang sangat penting dalam teknik elektro adalah PDB linear orde pertama, yang dapat ditulis dalam bentuk standar  $dy/dx + P(x)y = Q(x)$ . [1] Ini adalah bentuk persis dari persamaan yang mengatur model baterai PBL. Metode utama untuk menyelesaikan persamaan semacam itu adalah metode faktor integrasi. Ini melibatkan mengalikan seluruh persamaan dengan faktor integrasi,  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ , yang dengan cerdas mengubah sisi kiri persamaan menjadi turunan dari sebuah produk,  $(d/dx)(\mu(x)y)$ . Mengintegrasikan kedua sisi kemudian menghasilkan solusi.[1] Bagian ini akan diajarkan menggunakan model kelas terbalik (flipped classroom) untuk memaksimalkan waktu aplikasi di dalam kelas.

- Aktivitas Pra-Kelas: Mahasiswa menonton video kuliah singkat yang mencakup penurunan faktor integrasi dan prosedur langkah-demi-langkah untuk menyelesaikan PDB linear orde pertama umum.
- Aktivitas di Dalam Kelas: Mahasiswa bekerja dalam kelompok mereka untuk menerapkan metode faktor integrasi secara khusus pada masalah pengisian

baterai. Misalnya, mereka akan menyelesaikan tegangan kapasitor  $v_c(t)$  dengan asumsi sumber DC sederhana ( $V_{solar}(t) = V_s$ ). Ini mengharuskan mereka untuk mengidentifikasi  $P(t)$  dan  $Q(t)$  dari persamaan rangkaian mereka, menghitung faktor integrasi, dan menyelesaikan IVP yang dihasilkan dengan tegangan baterai awal yang diberikan. Sesi pemecahan masalah kolaboratif dan langsung ini memungkinkan instruktur bertindak sebagai fasilitator, mengatasi kesalahpahaman saat muncul.

### **3.4 D. Minggu 5: Aplikasi di Teknik Elektro: Analisis Rinci dan Pengenalan Numerik**

Minggu ini mensintesis teknik-teknik yang telah dipelajari dengan melakukan analisis mendalam terhadap model baterai dan rangkaian orde pertama lainnya, serta memperkenalkan konsep solusi numerik.

#### **3.4.1 Analisis Rinci Rangkaian RL dan RC:**

Mahasiswa sekarang akan memiliki alat untuk menganalisis skenario PBL secara penuh. Mereka akan menemukan baik solusi transien (bagian dari solusi yang meluruh seiring waktu, mewakili respons awal rangkaian) dan solusi keadaan tunak (bagian yang tersisa setelah transien mereda, mewakili perilaku jangka panjang).[1] Konsep kunci adalah konstanta waktu,  $\tau = RC$ . Dalam konteks PBL, mahasiswa akan diminta untuk menafsirkan makna fisiknya: ia menentukan seberapa cepat baterai mengisi atau mengosongkan menuju keadaan akhirnya. Konstanta waktu kecil berarti pengisian cepat, sedangkan yang besar berarti pengisian lambat.[1] Mereka akan menganalisis respons sistem terhadap input yang berbeda, seperti tegangan DC konstan (matahari penuh) atau fungsi step (matahari tiba-tiba muncul dari balik awan).

#### **3.4.2 Pengenalan Metode Numerik: Metode Euler**

Secara bersamaan, pengenalan metode numerik dilakukan dengan Metode Euler. Untuk IVP orde pertama yang diberikan oleh  $dy/dx = f(x, y)$  dengan  $y(x_0) = y_0$ , metode Euler menyediakan cara iteratif untuk mendekati solusi:  $y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n)$ , di mana  $\Delta x$  adalah ukuran langkah kecil.[1] Kesederhanaan metode Euler menjadikannya titik awal yang sangat baik. Pengenalan strategis metode numerik pada tahap ini sangat penting. Banyak masalah rekayasa dunia nyata, terutama yang melibatkan non-linearitas (seperti model baterai yang lebih realistis) atau input kompleks (seperti profil iradiasi surya yang realistis), tidak memiliki solusi analitis yang mudah.[1] Sesi laboratorium menggunakan MATLAB atau GNU Octave akan

sangat bermanfaat. Mahasiswa dapat: 1. Mengimplementasikan metode Euler untuk mendekati solusi PDB pengisian baterai mereka. 2. Memplot aproksimasi numerik mereka di samping solusi analitis yang mereka turunkan. 3. Menyelidiki efek perubahan ukuran langkah  $\Delta x$  terhadap akurasi solusi numerik. Paparan awal terhadap teknik numerik dasar ini memberikan jembatan konseptual ke alat komputasi yang lebih canggih (seperti solver ode45 MATLAB [43]) yang penting dalam praktik rekayasa modern.[15] Pendekatan ini memperkuat gagasan bahwa persamaan diferensial adalah alat untuk menemukan solusi—baik eksak maupun perkiraan—untuk masalah nyata, yang secara langsung sejalan dengan CPMK penerapan metode numerik dan penggunaan alat komputasi.[1] Penguatan siklus dari rangkaian RC—pertama untuk pemodelan, kemudian untuk solusi analitis, dan akhirnya untuk analisis rinci dan aproksimasi numerik—memungkinkan mahasiswa untuk melihat sistem fisik yang sama melalui lensa matematika yang semakin canggih, memperkuat baik teori maupun aplikasi praktisnya.

## Chapter 4

### Modul 3: Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Kedua (Minggu 6-8)

Modul ini beralih ke PDB linear orde kedua, yang sangat penting untuk memodelkan berbagai sistem teknik elektro, terutama rangkaian RLC dan sistem apa pun yang menunjukkan perilaku osilasi, redaman, dan resonansi.[1] Pendekatan pedagogis untuk modul ini bergeser dari analisis ke desain, membingkai konsep-konsep inti dalam tantangan pembelajaran berbasis masalah (PBL) yang mengharuskan mahasiswa tidak hanya menyelesaikan persamaan tetapi juga membuat pilihan desain dan memvalidasinya.

#### 4.1 Tantangan Desain PBL: Filter Crossover Audio

Aktivitas sentral untuk modul ini adalah tantangan desain yang memberikan konteks rekayasa nyata untuk matematika sistem orde kedua.

- Skenario: "Anda adalah bagian dari tim yang merancang jaringan crossover audio pasif untuk sistem pengeras suara dua arah. Tugas Anda adalah merancang filter band-pass RLC orde kedua yang akan menyalurkan frekuensi di rentang menengah (misalnya, 300 Hz hingga 3 kHz) ke driver speaker midrange, sambil meredam frekuensi di luar pita ini."
- Tugas:
  1. Pemodelan: Turunkan PDB linear orde kedua yang menggambarkan arus (atau tegangan pada komponen) dalam rangkaian RLC seri Anda ketika

didorong oleh sumber tegangan  $E(t)$ .

2. Desain & Analisis: Pilih nilai yang sesuai untuk resistor (R), induktor (L), dan kapasitor (C) untuk mencapai frekuensi resonansi yang diinginkan ( $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ) dan faktor kualitas (Q) yang memenuhi spesifikasi filter. Analisis redaman filter Anda—apakah overdamped, critically damped, atau underdamped? Berikan justifikasi mengapa karakteristik redaman tertentu diinginkan untuk aplikasi filter.
3. Validasi: Simulasikan desain akhir Anda menggunakan simulator rangkaian seperti LTspice atau Multisim. Hasilkan plot respons frekuensi (plot Bode) dari simulasi dan bandingkan dengan respons teoretis yang diprediksi oleh analisis fungsi transfer Anda. Apakah filter Anda memenuhi kriteria desain?

Tantangan desain ini mengharuskan mahasiswa untuk menerapkan setiap konsep yang diajarkan dalam modul, mulai dari menyelesaikan persamaan homogen dan non-homogen hingga memahami implikasi fisik dari redaman dan resonansi.[44]

## 4.2 Minggu 6: Persamaan Homogen dengan Koefisien Konstan

Modul dimulai dengan dasar: PDB linear homogen orde kedua dengan koefisien konstan, ditulis sebagai  $ay'' + by' + cy = 0$ . Teknik solusi inti melibatkan persamaan karakteristik (atau bantu):  $ar^2 + br + c = 0$ , yang diperoleh dengan mengasumsikan solusi berbentuk  $y(t) = e^{rt}$ . [1]

Sifat akar dari persamaan kuadrat ini, yang ditentukan oleh diskriminan  $b^2 - 4ac$ , menentukan bentuk solusi umum. Mahasiswa akan belajar menurunkan dan menerapkan solusi untuk ketiga kasus tersebut:

- Kasus 1: Akar Riil Berbeda ( $r_1, r_2$ ): Solusi umumnya adalah  $y_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ . Ini sesuai dengan sistem overdamped dalam konteks rangkaian RLC.
- Kasus 2: Akar Riil Berulang ( $r_1 = r_2 = r$ ): Solusi umumnya adalah  $y_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$ . Ini sesuai dengan sistem critically damped.
- Kasus 3: Akar Kompleks Konjugat ( $r = \alpha \pm i\beta$ ): Menggunakan rumus Euler ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ), solusi umum bentuk riilnya adalah  $y_h(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$ . Ini sesuai dengan sistem underdamped, yang menunjukkan osilasi. [1]

Prinsip Superposisi diperkenalkan sebagai properti fundamental yang memungkinkan pembangunan solusi umum dari dua solusi yang bebas linear. [46]

### 4.3 C. Minggu 7: Persamaan Non-Homogen dengan Koefisien Konstan

Modul ini meluas ke persamaan non-homogen,  $ay'' + by' + cy = g(t)$ , di mana  $g(t)$  adalah fungsi pemaksa (misalnya, sinyal audio dari amplifier dalam tantangan PBL). Solusi umumnya adalah jumlah dari solusi komplementer  $y_h(t)$  dan solusi khusus  $y_p(t)$ :  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ . [1]

Dua metode utama untuk menemukan  $y_p(t)$  dibahas:

1. Metode Koefisien Tak Tentu: Metode prosedural untuk bentuk spesifik dari  $g(t)$  (polinomial, eksponensial, sinusoid). Mahasiswa belajar membuat tebakan terdidik untuk  $y_p(t)$  berdasarkan  $g(t)$  dan menerapkan aturan modifikasi ketika sebuah suku dalam tebakan sudah ada di  $y_h(t)$ . [1]
2. Metode Variasi Parameter: Metode yang lebih umum dan kuat yang berlaku untuk setiap  $g(t)$  yang kontinu. Metode ini melibatkan penggantian konstanta dalam solusi komplementer dengan fungsi dan menyelesaikannya. [1]

Aktivitas kelas akan berfokus pada panduan langkah-demi-langkah dan contoh komparatif untuk membantu mahasiswa memutuskan metode mana yang paling sesuai untuk masalah tertentu, terutama dalam konteks menemukan respons keadaan tunak dari desain filter mereka terhadap input sinusoidal.

### 4.4 Minggu 8: Aplikasi di Teknik Elektro: Rangkaian RLC dan Desain Filter

Minggu ini didedikasikan untuk menerapkan seluruh rangkaian teknik PDB orde kedua pada tantangan desain PBL dan analisis yang lebih dalam tentang rangkaian RLC.

Redaman dan Respons Alami: Analisis kasus homogen ( $E(t) = 0$ ) sesuai dengan respons alami dari rangkaian RLC. Jenis redaman secara langsung ditentukan oleh parameter rangkaian R, L, dan C, seperti yang dirangkum dalam Tabel 2. Tabel ini adalah alat pedagogis penting yang secara eksplisit menghubungkan hasil matematis (sifat akar karakteristik) dengan perilaku fisik rangkaian.

- Overdamped ( $R^2 > 4L/C$ ): Rangkaian kembali ke kesetimbangan secara perlahan tanpa osilasi.
- Critically Damped ( $R^2 = 4L/C$ ): Kembali ke kesetimbangan tercepat tanpa osilasi.



- Underdamped ( $R^2 < 4L/C$ ): Rangkaian berosilasi dengan amplitudo yang meluruh. Ini adalah perilaku khas yang diinginkan untuk

**Respons Paksa dan Resonansi:** Kasus non-homogen, dengan sumber sinusoidal  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ , dianalisis untuk menemukan respons keadaan tunak, yang berosilasi pada frekuensi penggerak  $\omega$ . Fenomena kritis adalah resonansi, yang terjadi ketika frekuensi penggerak  $\omega$  mendekati frekuensi alami rangkaian  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Pada resonansi, amplitudo arus menjadi sangat besar, sebuah prinsip kunci dalam penyetelan rangkaian dan desain filter.[1]

**Lab Validasi:** Aktivitas puncaknya adalah lab simulasi di mana mahasiswa membangun filter crossover audio yang mereka rancang di LTspice, Simulink, atau alat serupa.[20] Mereka akan melakukan sapuan AC (AC sweep) untuk menghasilkan plot Bode dan membandingkan frekuensi resonansi, bandwidth, dan faktor-Q yang disimulasikan dengan perhitungan analitis mereka. Aktivitas ini memberikan pengalaman berharga dalam alur kerja rekayasa modern yaitu pemodelan, analisis, dan validasi berbasis simulasi.[48] Rangkaian RLC berfungsi sebagai aplikasi pemersatu yang sangat baik yang membuat teori abstrak PDB orde kedua menjadi nyata dan relevan secara langsung dengan praktik teknik elektro.

Table 4.1: Perbandingan Kondisi Redaman pada Rangkaian RLC Seri (Tanpa Paksaan)

Kondisi untuk Akar dari $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$	Tipe Redaman	Sifat Akar Karakteristik $(\lambda_1, \lambda_2)$	Bentuk Solusi Homogen $(q_h(t))$	Deskripsi Kualitatif Respons
$R^2 - \frac{4L}{C} > 0$ atau $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Overdamped	Akar Riil Berbeda, Negatif $(\lambda_1 \neq \lambda_2 < 0)$	$q_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$	Peluruhan non-osilasi menuju kesetimbangan.
$R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ atau $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Critically Damped	Akar Riil Berulang, Negatif $(\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L})$	$q_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{R}{2L} t}$	Peluruhan tercepat menuju kesetimbangan tanpa osilasi.
$R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ atau $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	Underdamped	Akar Kompleks Konjugat $(-\alpha \pm j\omega_d)$	$q_h(t) = e^{-\alpha t} (c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))$ di mana $\alpha = \frac{R}{2L}, \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	Osilasi yang meluruh di sekitar kesetimbangan. $\omega_d$ adalah frekuensi teredam.

# Chapter 5

## V. Modul 4: Transformasi Laplace (Minggu 9-12)

Modul ini memperkenalkan transformasi Laplace, sebuah alat matematika yang kuat yang digunakan secara luas dalam teknik elektro untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dan menganalisis sistem Linear Time-Invariant (LTI).[1] Keuntungan utama dari transformasi Laplace adalah kemampuannya untuk mengubah persamaan diferensial-integral domain waktu menjadi persamaan aljabar dalam domain frekuensi kompleks (domain-s), yang jauh lebih sederhana untuk dimanipulasi dan diselesaikan.[33] Modul ini disusun menggunakan pendekatan kelas terbalik (flipped classroom) untuk memaksimalkan waktu di dalam kelas untuk kegiatan aplikasi dan pemecahan masalah bernilai tinggi.

### 5.1 Struktur Kelas Terbalik (Flipped Classroom)

Format kuliah tradisional sering menghabiskan waktu yang signifikan pada aspek prosedural penurunan transformasi dan penerapan teorema. Hal ini memang perlu tetapi dapat dipelajari secara efektif melalui studi mandiri. Tantangan kognitif yang sebenarnya bagi mahasiswa terletak pada penerapan alat-alat ini untuk memodelkan sistem dan menafsirkan hasilnya di domain-s.[49] Model terbalik ini memindahkan pembelajaran prosedural ke kegiatan pra-kelas, mendedikasikan waktu kelas yang berharga dan dipandu oleh ahli untuk tugas-tugas konseptual dan berbasis aplikasi yang lebih sulit.

- **Aktivitas Pra-Kelas:** Sebelum setiap sesi kelas, mahasiswa bertanggung jawab untuk terlibat dengan materi persiapan. Ini akan mencakup:
  - Video kuliah singkat (6-20 menit) yang mencakup konsep-konsep dasar, seperti definisi transformasi Laplace, sifat-sifatnya (linearitas, teorema

pergeseran), transformasi turunan, dan teknik untuk ekspansi fraksi parsial.[30]

- Tugas membaca interaktif dari buku teks atau catatan yang disediakan.
- Kuis online singkat dengan bobot rendah (misalnya, melalui sistem berbasis Moodle [50]) untuk memeriksa pemahaman materi pra-kelas.
- **Aktivitas di Dalam Kelas:** Waktu kelas diubah menjadi lokakarya dinamis yang berfokus pada pemecahan masalah kolaboratif dan eksplorasi konseptual. Instruktur dan asisten dosen bertindak sebagai fasilitator, membimbing kelompok dan menjawab pertanyaan secara real-time.

## 5.2 Minggu 9: Domain-s dan Sifat-sifatnya

- **Pra-Kelas:** Mahasiswa menonton video tentang definisi Transformasi Laplace,  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ , kondisi keberadaannya (kontinu sepotong-sepotong dan orde eksponensial), dan sifat linearitasnya.[1] Mereka juga meninjau penurunan transformasi untuk fungsi-fungsi elementer seperti konstanta, eksponensial, dan sinusoid.
- **Lokakarya di Dalam Kelas:** Aktivitas utamanya adalah latihan ”Konstruksi Tabel” berbasis kelompok. Kelompok bekerja sama untuk menurunkan transformasi turunan yang krusial:
  - $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
  - $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Mereka mendiskusikan signifikansi dari sifat-sifat ini: mereka adalah mekanisme yang mengubah diferensiasi di domain waktu menjadi perkalian dengan  $s$  di domain- $s$ , dan mereka secara otomatis memasukkan kondisi awal ke dalam masalah aljabar.[1] Hal ini mengarah pada pembuatan tabel referensi bersama dari transformasi dan sifat-sifat utama.

## 5.3 Minggu 10: Transformasi Invers dan Respons Sistem

- **Pra-Kelas:** Mahasiswa menonton video tentang konsep Transformasi Laplace Invers,  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ , dan teknik utama yang digunakan untuk mememukannya: Ekspansi Fraksi Parsial (PFE). Video-video tersebut mencakup prosedur aljabar untuk menangani akar riil berbeda, akar riil berulang, dan akar kompleks konjugat di penyebut  $F(s)$ . [1]

Table 5.1: Tabel Kunci Transformasi dan Properti Laplace

$f(t)$ (Domain Waktu)	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ (Domain-s)	Nama Sifat (jika berlaku)	Ref.
$c$ (konstanta)	$\frac{c}{s}$		[1]
$t^n$ ( $n \geq 0$ integer)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		[1]
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$		[1]
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		
$u(t-a)$ (step Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	Pergeseran-t (Translasi dalam waktu)	[2]
$\delta(t-a)$ (delta Dirac)	$e^{-as}$		[2]
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	Linearitas	[3]
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	Teorema Pergeseran Pertama (Pergeseran-s)	[1]
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	Transformasi Turunan Pertama	[2, 4]
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	Transformasi Turunan Kedua	[2, 4]
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	Transformasi Integral	
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$	Teorema Konvolusi	[2]

- **Lokakarya di Dalam Kelas:** "Klinik Fraksi Parsial." Sesi ini didedikasikan sepenuhnya untuk menguasai PFE. Mahasiswa bekerja dalam kelompok pada serangkaian masalah menantang yang telah dikurasi yang mencakup semua kasus akar yang berbeda. Latihan kolaboratif yang intensif ini sangat pent-

ing, karena kemahiran aljabar dalam PFE adalah batu sandungan yang umum. Teorema Konvolusi,  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$ , juga diperkenalkan sebagai metode alternatif dan sebagai cara untuk memahami output sistem sebagai konvolusi dari input dengan respons impuls sistem.[1]

## 5.4 Minggu 11: Menyelesaikan IVP dan Aplikasi Rangkaian

- **Pra-Kelas:** Mahasiswa menonton video yang mendemonstrasikan prosedur lengkap untuk menyelesaikan IVP menggunakan transformasi Laplace: mentransformasikan PDB, menyelesaikan  $Y(s)$  secara aljabar, dan menginvers untuk menemukan  $y(t)$ . Video-video tersebut juga memperkenalkan fungsi step Heaviside  $u(t - a)$  dan fungsi delta Dirac  $\delta(t - a)$  sebagai alat penting untuk memodelkan input diskontinu (seperti sakelar yang menyala atau sambaran petir) yang umum dalam teknik elektro.[1]
- **Lokakarya di Dalam Kelas:** Kelompok-kelompok menangani masalah rangkaian RLC (meninjau kembali filter dari Modul 3) yang dikenai input step dan impuls. Aktivitas utamanya adalah pemecahan masalah komparatif: menyelesaikan IVP yang sama sekali menggunakan metode klasik dari Modul 3 dan sekali menggunakan transformasi Laplace. Ini secara langsung menyoroti efisiensi dan kekuatan metode Laplace, terutama untuk masalah non-homogen dengan kondisi awal tidak nol.[1]

## 5.5 Minggu 12: Fungsi Transfer, Stabilitas, dan Analisis Sistem

- **Pra-Kelas:** Mahasiswa menyelesaikan tugas membaca tentang konsep Fungsi Transfer,  $H(s)$ , yang didefinisikan sebagai rasio transformasi Laplace output terhadap input, dengan asumsi semua kondisi awal nol:  $H(s) = Y(s)/U(s)$ . [1]
- **Lokakarya di Dalam Kelas:** "Analisis Fungsi Transfer dan Stabilitas." Lokakarya puncak ini mensintesis seluruh modul.
  - Penurunan: Kelompok menurunkan fungsi transfer untuk berbagai sistem EE, seperti filter RLC yang dikonfigurasi sebagai filter lolos-rendah atau lolos-pita, dan model motor DC sederhana di mana inputnya adalah tegangan dan outputnya adalah kecepatan sudut.[1]

- Kutub dan Nol: Untuk setiap fungsi transfer, mereka menemukan kutub (akar dari penyebut) dan nol (akar dari pembilang).
- Analisis Stabilitas: Menggunakan MATLAB atau Python, mereka membuat plot kutub-nol di bidang- $s$  kompleks. Mereka belajar dan menerapkan aturan fundamental stabilitas sistem LTI: sistem stabil jika dan hanya jika semua kutubnya terletak di setengah bidang kiri (LHP) dari bidang- $s$ .<sup>[1]</sup> Mereka menafsirkan apa arti kutub pada sumbu imajiner (stabilitas marjinal) atau di setengah bidang kanan (ketidakstabilan) bagi perilaku sistem fisik.
- Respons Frekuensi: Dibuat koneksi bahwa respons frekuensi sistem ditemukan dengan mengevaluasi fungsi transfer di sepanjang sumbu imajiner,  $s = j\omega$ .

Modul ini, melalui struktur terbaliknya dan lokakarya yang berfokus pada aplikasi, memastikan mahasiswa tidak hanya mempelajari mekanisme transformasi Laplace tetapi juga mendapatkan pemahaman yang mendalam dan intuitif tentang bagaimana kerangka matematika ini menyediakan lensa yang kuat untuk menganalisis dan merancang sistem dinamis yang menjadi pusat dari semua bidang teknik elektro.<sup>[38]</sup>

## Chapter 6

### Modul 5: Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear (Minggu 13-14)

Modul ini memperluas studi PDB ke sistem persamaan linear yang berpasangan. Sistem ini penting untuk memodelkan berbagai fenomena teknik elektro yang kompleks di mana beberapa komponen berinteraksi secara dinamis, seperti rangkaian multi-loop, manipulator robotik, dan stabilitas microgrid.[1] Fokus pedagogis modul ini adalah untuk bergerak melampaui perhitungan hafalan nilai eigen dan vektor eigen menuju interpretasi fisik yang mendalam tentang apa yang diwakili oleh objek matematika ini dalam konteks sistem dinamis.

#### 6.1 A. Minggu 13: Metode Nilai Eigen-Vektor Eigen

Modul dimulai dengan memotivasi perlunya sistem PDB. Ini termasuk memodelkan sistem yang saling berhubungan, seperti rangkaian RLC dua loop di mana arus berinteraksi [55], dan mengubah PDB orde ke- $n$  menjadi sistem setara dari  $n$  PDB orde pertama.[1] **Notasi Matriks dan Sistem Homogen:** Sistem persamaan PDB linear orde pertama paling kuat direpresentasikan menggunakan notasi matriks. Fokusnya adalah pada sistem homogen dengan koefisien konstan, yang ditulis sebagai:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

di mana  $\mathbf{x}(t)$  adalah vektor keadaan (misalnya, berisi arus dan tegangan),  $\mathbf{x}'(t)$  adalah vektor turunan waktunya, dan  $A$  adalah matriks koefisien konstan yang mendefinisikan dinamika internal sistem.[1]



**Metode Nilai Eigen-Vektor Eigen:** Teknik analitis inti untuk menyelesaikan sistem semacam itu adalah metode nilai eigen-vektor eigen. Metode ini didasarkan pada pencarian solusi berbentuk  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ . Mensubstitusikan bentuk ini ke dalam persamaan sistem mengarah langsung ke masalah nilai eigen aljabar fundamental:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

di mana  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor eigen yang sesuai.[1] Nilai eigen ditemukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Mahasiswa akan belajar membangun solusi umum sebagai kombinasi linear dari solusi-solusi modal ini, mencakup tiga kasus berdasarkan sifat nilai eigen:

1. **Nilai Eigen Riil Berbeda:** Solusinya adalah superposisi dari pertumbuhan atau peluruhan eksponensial murni di sepanjang arah vektor eigen.
2. **Nilai Eigen Kompleks Konjugat ( $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ):** Kasus ini menimbulkan perilaku osilasi (spiral atau pusat di bidang fasa), dengan bagian riil  $\alpha$  menentukan stabilitas (spiral meluruh atau tumbuh) dan bagian imajiner  $\beta$  menentukan frekuensi osilasi.
3. **Nilai Eigen Riil Berulang:** Kasus ini memerlukan pencarian solusi bebas linear tambahan, terkadang melibatkan vektor eigen umum.

**Pengantar Studi Kasus: Dinamika Lengan Robot 2-Link** Untuk memberikan aplikasi yang konkret dan memotivasi, modul ini memperkenalkan dinamika lengan robotik 2-link.[34] Persamaan yang mengaturnya adalah seperangkat PDB orde kedua non-linear yang berpasangan. Untuk gerakan kecil di sekitar titik kesetimbangan, persamaan ini dapat dilinearisasi menjadi bentuk  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Sistem robotik ini akan berfungsi sebagai studi kasus sentral untuk kegiatan berbasis inkuiri modul. Dalam pengaturan lab, mahasiswa akan diberi matriks  $A$  untuk sistem ini dan akan menggunakan alat komputasi (MATLAB atau GNU Octave) untuk menemukan nilai eigen dan vektor eigennya, mempersiapkan panggung untuk eksplorasi sesi berikutnya.[20]

## 6.2 Minggu 14: Interpretasi Fisik dan Aplikasi

Minggu ini didedikasikan untuk kegiatan pembelajaran berbasis inkuiri yang dirancang untuk membangun pemahaman yang mendalam dan intuitif tentang nilai eigen dan vektor eigen, diikuti dengan pengenalan representasi ruang keadaan. Aktivitas Pembelajaran Berbasis Inkuiri: Menemukan Mode Sistem Tujuan dari kegiatan ini adalah agar mahasiswa menemukan makna fisik dari vektor eigen daripada hanya diberitahu. Prosesnya adalah sebagai berikut:

1. Pengaturan: Mahasiswa memiliki matriks  $A$  untuk lengan robot 2-link yang dilinearisi dan nilai eigen ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ) serta vektor eigen ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ ) yang telah dihitung dari sesi sebelumnya.
2. Pertanyaan Pemandu: Instruktur mengajukan pertanyaan: "Apa yang istimewa dari arah-arah di ruang yang didefinisikan oleh vektor eigen? Mari kita selidiki. Menggunakan alat simulasi (seperti Simulink atau skrip Python), atur keadaan awal sistem lengan robot menjadi perpindahan kecil murni searah dengan vektor eigen pertama,  $\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1$ . Simulasikan respons sistem dan jelaskan gerakannya."
3. Penemuan: Mahasiswa akan mengamati bahwa vektor keadaan sistem  $\mathbf{x}(t)$  tetap berada di garis yang didefinisikan oleh  $\mathbf{v}_1$  sepanjang waktu. Gerakannya sederhana: ia meluruh ke titik asal (jika  $\lambda_1 < 0$ ) atau tumbuh menjauhinya (jika  $\lambda_1 > 0$ ), tetapi tidak berotasi atau bergerak ke lintasan lain. Sistem berperilaku seolah-olah itu adalah sistem satu dimensi yang sederhana.
4. Eksplorasi: Mahasiswa mengulangi simulasi dengan kondisi awal di sepanjang vektor eigen kedua,  $\mathbf{x}(0) = c_2 \mathbf{v}_2$ , dan mengamati gerakan sederhana serupa yang sesuai dengan mode tersebut.
5. Sintesis: Instruktur memimpin diskusi untuk memformalkan penemuan tersebut. Vektor eigen mewakili sumbu alami atau mode utama dari sistem. Mereka adalah arah-arah khusus di ruang keadaan di mana sistem yang kompleks dan berpasangan berperilaku dengan cara yang sangat sederhana dan tidak berpasangan.[12] Nilai eigen yang sesuai hanyalah konstanta laju (peluruhan, pertumbuhan, atau osilasi) untuk mode tersebut. Setiap gerakan umum dari sistem hanyalah superposisi (kombinasi linear) dari perilaku-perilaku modal sederhana ini.[58]

Pendekatan pedagogis ini mengubah topik dari perhitungan prosedural menjadi konsep fisik yang mendalam. Vektor eigen tidak lagi hanya vektor yang memenuhi  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ; mereka adalah "mode getaran" fundamental dari sistem dinamis.[59] Tanda bagian riil dari nilai eigen secara langsung menentukan stabilitas setiap mode, dan dengan demikian stabilitas seluruh sistem. Sebuah sistem stabil jika dan hanya jika semua nilai eigennya memiliki bagian riil negatif.[11] Aplikasi dan Representasi Ruang Keadaan: Teknik-teknik tersebut kemudian diterapkan untuk menganalisis rangkaian RLC berpasangan [55] dan untuk memperkenalkan konsep Representasi Ruang Keadaan, sebuah landasan teori kontrol modern.[1] Sistem  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  disajikan sebagai persamaan keadaan tanpa paksaan dari model ruang keadaan yang lebih umum:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \text{ (Persamaan Keadaan)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \text{ (Persamaan Output)}$$

di mana  $\mathbf{u}(t)$  adalah vektor input dan  $\mathbf{y}(t)$  adalah vektor output.[61] Ini memberikan tautan langsung ke mata kuliah masa depan dalam sistem kontrol, menunjukkan bahwa analisis nilai eigen dari matriks  $A$  adalah fundamental untuk memahami stabilitas dan perilaku sistem kontrol LTI apa pun. Jika waktu memungkinkan, memvisualisasikan potret fasa untuk sistem 2x2 dapat memberikan konfirmasi geometris yang kuat dari analisis stabilitas yang diturunkan dari nilai eigen (misalnya, simpul, pelana, spiral).[1]

# Chapter 7

## Modul 6: Deret Fourier dan Analisis Sinyal Periodik (Minggu 14)

Modul ini memperkenalkan deret Fourier, sebuah alat matematika yang kuat untuk merepresentasikan fungsi periodik sebagai jumlah tak hingga dari sinus dan kosinus. Bagi insinyur elektro, ini bukan topik opsional atau perifer; ini adalah pilar fundamental dari pemrosesan sinyal, komunikasi, dan elektronika daya. Penyertaannya sebagai modul standar sangat penting untuk menyediakan perangkat analitis yang lengkap. Sementara transformasi Laplace unggul dalam menganalisis transien dan masalah nilai awal, deret Fourier secara khusus dirancang untuk analisis sinyal periodik dan respons keadaan tunak sistem terhadap sinyal semacam itu.[1]

Topik: Modul dimulai dengan mendefinisikan fungsi periodik dan memperkenalkan contoh-contoh yang sangat relevan dengan teknik elektro: gelombang persegi yang ditemukan dalam logika digital dan catu daya switching, gelombang segitiga yang digunakan dalam generator sinyal, dan gelombang gigi gergaji yang ditemukan dalam rangkaian pewaktuan, selain bentuk gelombang AC sinusoidal yang sudah dikenal. Konsep intinya adalah Representasi Deret Fourier. Ini menyatakan bahwa setiap fungsi periodik  $f(t)$  yang berperilaku wajar dengan periode  $T$  dapat direpresentasikan sebagai jumlah tak hingga dari sinusoid yang berhubungan secara harmonis:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

di mana  $\omega_0 = 2\pi/T$  adalah frekuensi fundamental. Mahasiswa akan mempelajari rumus integral standar untuk menghitung koefisien Fourier:

- $a_0$  (komponen DC atau nilai rata-rata sinyal)

- $a_n$  (amplitudo komponen kosinus pada frekuensi harmonik  $n\omega_0$ )
- $b_n$  (amplitudo komponen sinus pada frekuensi harmonik  $n\omega_0$ )

## 7.1 Aplikasi Pembelajaran Berbasis Masalah: Respons terhadap Input Non-Sinusoidal

Aplikasi utama dan aktivitas pembelajaran sentral dari modul ini adalah menyelesaikan PDB dengan fungsi pemaksa periodik dan non-sinusoidal. Ini adalah masalah umum dan praktis dalam teknik elektro.

- **Skenario PBL:** "Sebuah filter RLC (seperti yang dirancang di Modul 3) dikenai input tegangan gelombang persegi dari catu daya switching. Berapakah arus keadaan tunak yang mengalir melalui rangkaian?"
- **Metodologi:** Masalah ini tidak dapat diselesaikan secara langsung menggunakan metode untuk input sinusoidal. Proses solusinya, yang dipandu oleh instruktur, melibatkan tiga langkah kunci:
  1. **Dekomposisi:** Temukan representasi deret Fourier dari tegangan input gelombang persegi. Ini menguraikan input kompleks menjadi jumlah tak hingga dari komponen sinusoidal sederhana (komponen DC, komponen frekuensi fundamental, dan komponen harmonik tak hingga).
  2. **Superposisi:** Karena rangkaian RLC adalah sistem linear, prinsip superposisi berlaku. Respons keadaan tunak terhadap setiap komponen sinusoidal dapat ditemukan secara individual menggunakan teknik dari Modul 3 atau, lebih efisien, menggunakan konsep impedansi dari teori rangkaian AC.
  3. **Sintesis:** Respons keadaan tunak total dari rangkaian adalah jumlah dari respons individual terhadap setiap komponen harmonik dari sinyal input.[1]

## 7.2 Tujuan Pembelajaran:

Setelah menyelesaikan modul ini, mahasiswa akan dapat:

- Mendefinisikan fungsi periodik dan menentukan periode dan frekuensi fundamentalnya.
- Menghitung koefisien deret Fourier untuk bentuk gelombang periodik umum seperti gelombang persegi dan gelombang segitiga.

- Menerapkan deret Fourier dan prinsip superposisi untuk menentukan respons keadaan tunak dari sistem linear (seperti rangkaian RLC) terhadap input periodik dan non-sinusoidal.

### 7.3 Aktivitas dan Aplikasi Teknik Elektro:

Aktivitas kelas utama akan menjadi lokakarya di mana mahasiswa bekerja dalam kelompok untuk menyelesaikan skenario PBL. Mereka pertama-tama akan menghitung koefisien Fourier untuk gelombang persegi dan kemudian menghitung respons rangkaian terhadap beberapa harmonik pertama. Lab komputasi menggunakan MATLAB atau GNU Octave dapat digunakan untuk memplot aproksimasi deret Fourier dari gelombang persegi, menunjukkan bagaimana ia membaik seiring penambahan lebih banyak suku. Aplikasi deret Fourier dalam teknik elektro sangat luas dan modul ini akan membuat koneksi eksplisit ke:

- **Analisis Sinyal:** Menguraikan sinyal periodik apa pun menjadi spektrum frekuensinya, yang merupakan dasar dari pemrosesan sinyal dan alat seperti penganalisis spektrum.
- **Elektronika Daya:** Menganalisis bentuk gelombang tegangan dan arus non-sinusoidal yang dihasilkan oleh penyearah, inverter, dan konverter DC-DC, yang merupakan komponen penting dalam sistem energi terbarukan dan catu daya.
- **Komunikasi:** Memahami bagaimana gelombang pembawa dimodulasi dalam sistem komunikasi.
- **Desain Filter:** Memahami bagaimana filter memengaruhi tidak hanya satu frekuensi, tetapi seluruh konten harmonik dari sinyal kompleks, yang sangat penting untuk memahami konsep seperti distorsi harmonik total (THD).

Dengan membingkai deret Fourier di sekitar masalah praktis, modul ini memberikan mahasiswa perspektif analitis penting lainnya, melengkapi pandangan domain-s dari transformasi Laplace dan memperkuat pentingnya analisis domain frekuensi dalam semua aspek teknik elektro.

# Chapter 8

## Modul 7: Metode Numerik dan Rekayasa Komputasi (Minggu 15)

Modul ini meninjau kembali dan secara signifikan memperluas pengenalan metode numerik dari Modul 2. Fokusnya bergeser dari pemahaman konseptual dasar ke aplikasi praktis alat komputasi yang kuat dan relevan dengan industri untuk menyelesaikan PDB yang tidak dapat dipecahkan secara analitis. Modul ini dirancang sebagai puncak dari perangkat pemecahan masalah mata kuliah, menekankan bahwa dalam praktik rekayasa profesional, simulasi numerik bukanlah pilihan terakhir tetapi metode utama analisis dan desain.[15]

### 8.1 Topik:

Modul dimulai dengan rekap singkat **Metode Euler**,  $y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$ , mengulangi kesederhanaannya tetapi menyoroti keterbatasannya. Ini adalah metode orde pertama, yang berarti kesalahan globalnya sebanding dengan ukuran langkah  $\Delta t$ , membuatnya tidak efisien untuk persyaratan akurasi tinggi dan berpotensi tidak stabil untuk masalah tertentu.[1] Untuk mengatasi keterbatasan ini, **metode Runge-Kutta orde tinggi** diperkenalkan. Fokusnya bukan pada penurunan yang ketat tetapi pada struktur algoritmik dan kinerja superiornya.

- **Metode Euler yang Ditingkatkan (Metode Heun):** Metode Runge-Kutta orde kedua disajikan sebagai pendekatan "prediktor-korektor", menawarkan peningkatan akurasi yang jelas.
- **Metode Runge-Kutta Orde Keempat Klasik (RK4):** Metode ini disajikan sebagai andalan pemecah PDB numerik, dipuji karena keseimbangan yang sangat baik antara akurasi (metode orde keempat dengan kesalahan global

sebanding dengan  $(\Delta t)^4$ ) dan efisiensi komputasi. Langkah-langkah algoritmik metode RK<sub>4</sub> akan disajikan, dan mahasiswa akan dibimbing melalui implementasinya untuk PDB sederhana.[1]

Bagian paling penting dari modul ini adalah memberdayakan mahasiswa untuk menggunakan alat komputasi tingkat profesional untuk menyelesaikan PDB. Penekanannya adalah pada pemanfaatan pemecah (solver) bawaan yang sangat dioptimalkan, yang merupakan praktik standar dalam rekayasa.

- **MATLAB:** Mahasiswa akan diperkenalkan dengan rangkaian ode MATLAB yang kuat, khususnya ode45. Pemecah ini didasarkan pada metode Runge-Kutta langkah adaptif (pasangan Dormand-Prince), yang secara otomatis menyesuaikan ukuran langkah  $\Delta t$  untuk memenuhi toleransi kesalahan yang ditentukan, membuatnya efisien dan andal.[43] Prosesnya melibatkan pendefinisian sistem PDB sebagai fungsi MATLAB dan memanggil pemecah dengan handle fungsi, rentang waktu, dan kondisi awal. Untuk masalah dengan skala waktu yang sangat berbeda, konsep persamaan "kaku" (stiff) dan penggunaan pemecah yang sesuai seperti ode15s akan diperkenalkan.[1]
- **Python:** Kemampuan yang setara dalam tumpukan ilmiah Python akan didemonstrasikan, dengan fokus pada fungsi `scipy.integrate.solve_ivp`, yang merupakan antarmuka modern dan serbaguna untuk berbagai metode solusi yang mendasarinya.[1]
- **GNU Octave:** Fungsi `lsode`, pemecah kuat yang diwarisi dari pustaka Fortran, akan disorot sebagai alat utama untuk menyelesaikan sistem PDB di lingkungan sumber terbuka gratis ini.[23]
- **Simulink:** Bagi mahasiswa yang lebih menyukai pendekatan diagram blok grafis (terutama mereka yang tertarik pada sistem kontrol), Simulink diperkenalkan sebagai lingkungan yang kuat untuk memodelkan dan mensimulasikan sistem dinamis yang dijelaskan oleh PDB tanpa menulis kode secara langsung.[1]

## 8.2 Tujuan Pembelajaran:

Pada akhir modul ini, mahasiswa harus dapat:

- Menjelaskan motivasi penggunaan metode numerik orde tinggi dibandingkan metode Euler.
- Memahami algoritma untuk metode RK<sub>4</sub> dan dapat mengimplementasikannya untuk sistem sederhana.



- Mahir menggunakan pemecah PDB bawaan (misalnya, ode45 di MATLAB, lsode di Octave, atau solve\_ivp di Python) untuk menyelesaikan IVP yang relevan dengan sistem EE yang kompleks.
- Memodelkan dan mensimulasikan sistem EE sederhana menggunakan lingkungan grafis seperti Simulink.

### 8.3 Aktivitas: Lab Komputasi

Aktivitas utama untuk modul ini adalah sesi laboratorium komputasi langsung. Lab ini dirancang untuk menjembatani kesenjangan antara algoritma buku teks dan pemecahan masalah rekayasa praktis.

- **Tugas Lab:** Mahasiswa ditugaskan untuk menganalisis sistem yang sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara analitis, seperti:
  - Pendulum dengan ayunan sudut besar (PDB non-linear:  $\theta'' + (g/L) \sin(\theta) = 0$ ).
  - Rangkaian RLC dengan elemen non-linear, seperti dioda dengan karakteristik arus-tegangan eksponensialnya.
  - Model lengan robot 2-link dari Modul 5, tetapi menggunakan persamaan gerak non-linear penuh.
- **Prosedur:**
  1. Mahasiswa pertama-tama mencoba menyelesaikan masalah menggunakan implementasi sederhana mereka sendiri dari metode RK4.
  2. Mereka kemudian menyelesaikan masalah yang sama menggunakan pemecah bawaan seperti ode45 atau lsode.
  3. Mereka membandingkan hasil, akurasi, dan waktu komputasi dari kedua pendekatan tersebut.
  4. Akhirnya, mereka memodelkan sistem yang sama di Simulink dan memverifikasi bahwa hasilnya konsisten.
- **Hasil:** Pengalaman praktis ini sangat penting. Ini menunjukkan kekuatan dan keandalan pemecah yang dikembangkan secara profesional dan mengajarkan mahasiswa alur kerja modern untuk menganalisis sistem dinamis yang kompleks.[1]

## **8.4 Aplikasi Teknik Elektro:**

Modul ini secara eksplisit mempersiapkan mahasiswa untuk mata kuliah lanjutan dan praktik profesional di mana metode numerik sangat diperlukan. Aplikasi termasuk simulasi rangkaian non-linear dengan transistor, analisis dinamika sistem tenaga skala besar, desain dan simulasi sistem kontrol canggih, dan pemodelan sistem komunikasi modern.[1] Tujuannya bukan hanya untuk mengajarkan algoritma numerik atau sintaks perangkat lunak secara terpisah, tetapi untuk menumbuhkan kemampuan memecahkan masalah rekayasa menggunakan persamaan diferensial dengan bantuan efektif dari alat komputasi modern, menjembatani kesenjangan antara teori abstrak dan analisis rekayasa praktis.[15]

## Chapter 9

# Proyek Aplikasi Lanjutan dan Pengalaman Puncak (Capstone)

Untuk mensintesis pengetahuan dan keterampilan yang diperoleh selama mata kuliah, sebuah proyek puncak (capstone) yang signifikan merupakan komponen yang tak ternilai dari pengalaman belajar. Hal ini sejalan dengan pendekatan pedagogis yang menekankan pembelajaran berbasis proyek dan masalah (PBL), yang mengharuskan mahasiswa untuk mengintegrasikan konsep dari berbagai domain untuk memecahkan masalah rekayasa yang realistis.[1] Proyek-proyek ini dirancang untuk menilai CPMK tingkat tinggi, seperti kemampuan untuk mensintesis pengetahuan dan menerapkan alat komputasi untuk mengatasi masalah baru dan menantang.[1]

Berikut adalah ringkasan proyek terperinci yang dapat ditugaskan kepada kelompok mahasiswa. Proyek-proyek ini mengharuskan mahasiswa untuk memanfaatkan beberapa modul: pemodelan sistem fisik (Modul 1-3), penerapan transformasi Laplace untuk analisis sistem (Modul 4), penanganan sistem PDB (Modul 5), dan penggunaan metode numerik serta simulasi untuk validasi dan analisis (Modul 7). Pendekatan integratif ini mencerminkan bagaimana para insinyur mengatasi masalah dunia nyata dan mendorong pembelajaran yang lebih dalam serta retensi keterampilan.[1]

### 9.1 Ringkasan Proyek 1: Pemodelan Dinamis dan Analisis Kinerja Powertrain Kendaraan Listrik

- **Tujuan:** Mengembangkan dan mensimulasikan model dinamis sederhana dari kendaraan listrik baterai (EV) untuk memprediksi profil kecepatannya, kebutuhan daya, dan konsumsi energi selama siklus mengemudi standar. Proyek ini akan memberikan pengalaman dalam memodelkan sistem elektromekanis yang kompleks.

- **Latar Belakang:** Gerakan sebuah EV diatur oleh hukum kedua Newton. Gaya traksi yang disediakan oleh motor listrik harus mengatasi berbagai gaya hambat, termasuk hambatan aerodinamis, hambatan gelinding, dan gaya gravitasi di tanjakan. Motor, pada gilirannya, menarik daya dari paket baterai, yang status pengisiannya berkurang seiring waktu. Dinamika yang saling berinteraksi ini dapat dijelaskan oleh sistem persamaan diferensial biasa.[35]

- **Tugas:**

1. Pemodelan Matematis:

- Turunkan persamaan diferensial utama untuk kecepatan kendaraan,  $v(t)$ , berdasarkan persamaan dinamika longitudinal:  $m_{eff} \frac{dv}{dt} = F_{tractive} - F_{resistive}$ , di mana  $m_{eff}$  adalah massa efektif (termasuk inersia rotasi),  $F_{tractive}$  adalah gaya dari motor, dan  $F_{resistive}$  adalah jumlah dari gaya beban jalan.[67]
- Modelkan gaya hambat:
  - \* Hambatan Aerodinamis:  $F_{drag} = \frac{1}{2} \rho A C_D v^2$ , di mana  $\rho$  adalah kepadatan udara,  $A$  adalah area frontal, dan  $C_D$  adalah koefisien hambatan.
  - \* Hambatan Gelinding:  $F_{roll} = C_{rr} m g \cos(\theta)$ , di mana  $C_{rr}$  adalah koefisien hambatan gelinding,  $m$  adalah massa kendaraan,  $g$  adalah gravitasi, dan  $\theta$  adalah kemiringan jalan.
  - \* Gaya Gravitasi:  $F_{grade} = m g \sin(\theta)$ .
- Turunkan persamaan diferensial kedua untuk Status Pengisian (SoC) baterai,  $\frac{d(SoC)}{dt} = -\frac{I_{batt}(t)}{Q_{batt}}$ , di mana  $Q_{batt}$  adalah kapasitas total baterai dalam Ampere-jam. Arus baterai,  $I_{batt}$ , ditentukan oleh daya yang dibutuhkan oleh motor,  $P_{motor} = F_{tractive} \times v$ , dibagi dengan tegangan baterai dan memperhitungkan efisiensi.

2. Implementasi Simulasi:

- Implementasikan sistem PDB non-linear yang berpasangan ini di MATLAB/Simulink atau Python dengan SciPy.[67] Gunakan parameter kendaraan yang disediakan (massa, area frontal, koefisien hambatan, dll.) dan model motor serta baterai yang disederhanakan.
- Gunakan siklus mengemudi standar (misalnya, Urban Dynamometer Driving Schedule - UDDS yang disederhanakan) sebagai input kecepatan target untuk simulasi Anda.

3. Analisis dan Verifikasi:

- Jalankan simulasi selama durasi siklus mengemudi.
- Plot hasil berikut:

- \* (i) kecepatan target vs. kecepatan simulasi aktual dari waktu ke waktu,
- \* (ii) torsi motor yang dibutuhkan dari waktu ke waktu,
- \* (iii) arus baterai dari waktu ke waktu, dan
- \* (iv) SoC baterai dari waktu ke waktu.
- Hitung total energi yang dikonsumsi (dalam kWh) dan efisiensi energi kendaraan secara keseluruhan (dalam Wh/km atau Wh/mil).

#### 4. Laporan Teknis:

- Siapkan laporan teknis komprehensif yang mencakup:
  - \* Penurunan yang jelas dari semua persamaan diferensial yang mengatur.
  - \* Deskripsi model simulasi Anda (dengan cuplikan kode atau diagram Simulink).
  - \* Presentasi dan diskusi semua plot hasil.
  - \* Analisis kritis terhadap hasil, termasuk diskusi tentang asumsi model, keterbatasan, dan saran untuk perbaikan di masa depan (misalnya, menambahkan model pengereman regeneratif).

- **Kriteria Penilaian:** Proyek akan dievaluasi berdasarkan kebenaran model matematika, keberhasilan implementasi simulasi, kedalaman analisis hasil, serta kejelasan dan profesionalisme laporan akhir.

## 9.2 B. Ringkasan Proyek 2: Analisis Stabilitas dan Kontrol Microgrid Terintegrasi Energi Terbarukan

- **Tujuan:** Memodelkan microgrid terisolasi (islanded) yang disederhanakan, menganalisis stabilitas frekuensinya dengan adanya sumber energi terbarukan yang berfluktuasi (surya), dan mengimplementasikan strategi kontrol dasar untuk meningkatkan kinerjanya.
- **Latar Belakang:** Dalam jaringan listrik, frekuensi (nominal 60 Hz atau 50 Hz) harus dijaga dalam toleransi yang sangat ketat. Frekuensi adalah indikator langsung dari keseimbangan antara pembangkitan daya dan konsumsi beban. Ketika pembangkitan melebihi beban, frekuensi naik; ketika beban melebihi pembangkitan, frekuensi turun. Integrasi sumber terbarukan intermiten seperti PV surya membuat menjaga keseimbangan ini menjadi tantangan. Dinamika frekuensi jaringan dapat dimodelkan oleh persamaan ayunan

(swing equation), sebuah PDB orde kedua yang menghubungkan ketidakseimbangan daya dengan percepatan inersia ekuivalen sistem.[6]

• **Tugas:**

1. Pemodelan Matematis:

- Kembangkan model sederhana dari microgrid terisolasi yang terdiri dari satu generator sinkron yang dapat diatur (dispatchable), satu pembangkit listrik tenaga surya (PLTS), dan satu beban daya konstan.
- Persamaan sentralnya adalah persamaan ayunan untuk deviasi frekuensi,  $\Delta f: 2H \frac{d(\Delta f)}{dt} = P_m - P_e - D\Delta f$ , di mana  $H$  adalah konstanta inersia generator,  $P_m$  adalah input daya mekanis (variabel kontrol Anda),  $P_e$  adalah beban listrik, dan  $D$  adalah koefisien redaman.
- Modelkan ketidakseimbangan daya bersih,  $P_m - P_e$ , sebagai  $P_{gen} - P_{load} - P_{solar}(t)$ . Daya surya,  $P_{solar}(t)$ , akan berupa file data deret waktu yang diberikan yang mewakili hari cerah dengan awan intermiten.

2. Analisis Stabilitas:

- Ubah PDB orde kedua menjadi sistem dua PDB orde pertama.
- Linearakan sistem di sekitar titik operasi stabil (di mana  $P_m = P_e$ ). Tulis sistem dalam bentuk matriks  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ .
- Hitung nilai eigen dari matriks  $A$ . Berdasarkan nilai eigen, tentukan apakah sistem yang tidak terkontrol stabil. Jelaskan makna fisik dari nilai eigen dalam hal dinamika sistem (misalnya, redaman dan frekuensi osilasi).

3. Simulasi dan Kontrol:

- Implementasikan model sistem non-linear penuh di Simulink atau Python.[8]
- Simulasikan respons frekuensi microgrid terhadap input daya surya yang berfluktuasi tanpa kontrol apa pun. Plot deviasi frekuensi selama periode 24 jam.
- Rancang dan implementasikan kontroler Proporsional-Integral (PI) sederhana yang menyesuaikan daya mekanis generator  $P_m$  untuk melawan deviasi frekuensi. Hukum kontrolnya adalah  $P_m(t) = P_{ref} - K_p \Delta f(t) - K_i \int \Delta f(t) dt$ .
- Setel (tuning) gain kontroler ( $K_p$  dan  $K_i$ ) untuk mencapai kinerja yang baik (yaitu, meminimalkan deviasi frekuensi).

4. Laporan Teknis:
- Siapkan laporan teknis komprehensif yang merinci:
    - \* Penurunan model microgrid dan representasi ruang keadaan.
    - \* Hasil analisis stabilitas nilai eigen dan interpretasi nilai eigen.
    - \* Perbandingan respons frekuensi yang disimulasikan dengan dan tanpa kontroler PI.
    - \* Diskusi tentang tantangan mengintegrasikan energi terbarukan ke dalam jaringan listrik dan peran sistem kontrol dalam memastikan stabilitas.
- **Kriteria Penilaian:** Proyek akan dievaluasi berdasarkan keakuratan model, kebenaran analisis stabilitas, keberhasilan implementasi dan penyetelan kontroler PI, serta kualitas laporan akhir.

## Chapter 10

# Strategi Penilaian dan Evaluasi yang Dimodernisasi

Strategi penilaian yang seimbang dan otentik sangat penting untuk mengevaluasi pembelajaran mahasiswa di seluruh CPMK yang beragam dari mata kuliah ini. Strategi tersebut harus melampaui ujian tradisional untuk menilai keterampilan tingkat tinggi seperti sintesis, aplikasi praktis, dan refleksi. Rencana yang direvisi ini menggabungkan campuran penilaian formatif dan sumatif, dengan penekanan kuat pada portofolio mata kuliah, ujian berbasis lab praktis, dan evaluasi rekan sejawat untuk memberikan ukuran kompetensi mahasiswa yang holistik.[1]

### 10.1 A. Rincian Komponen Penilaian

Pembobotan berikut diusulkan untuk mencerminkan penekanan mata kuliah pada aplikasi dan sintesis:

- Portofolio Matematika Rekayasa (40%): Kumpulan karya selama satu semester yang menampilkan proses, karya terbaik, dan refleksi mahasiswa.
- Ujian Laboratorium Praktis (20%): Ujian langsung menggunakan perangkat lunak simulasi untuk menilai keterampilan pemecahan masalah dan troubleshooting praktis.
- Ujian Tengah Semester (20%): Ujian tradisional yang berfokus pada teknik solusi analitis untuk PDB orde pertama dan kedua.
- Ujian Akhir Semester (20%): Ujian komprehensif yang berfokus pada teknik analitis dari paruh kedua mata kuliah (Laplace, Sistem PDB, Deret Fourier).



Struktur ini mengurangi bobot ujian berwaktu yang berisiko tinggi dan memberikan nilai lebih besar pada pekerjaan proyek terapan dan upaya berkelanjutan yang ditunjukkan melalui portofolio, yang telah terbukti menjadi pendorong utama pembelajaran dan pemikiran kreatif.[14]

## 10.2 B. Portofolio Matematika Rekayasa

Portofolio menggantikan satu proyek tunggal yang berfokus pada produk dengan koleksi berorientasi proses yang mendokumentasikan seluruh perjalanan belajar mahasiswa. Ini adalah bentuk penilaian yang lebih otentik bagi para insinyur, karena mencerminkan praktik profesional dalam mendokumentasikan, mengkurasi, dan merefleksikan pekerjaan proyek.[13]

### • Isi yang Diperlukan:

1. 1. *Solusi Masalah Terkurasi (Karya Pameran)*: Mahasiswa memilih 3-4 masalah dari tugas pekerjaan rumah yang mereka rasa mewakili karya terbaik mereka. Mereka harus menulis ulang solusinya dengan rapi, menambahkan komentar yang menjelaskan tidak hanya bagaimana mereka menyelesaikan masalah, tetapi mengapa metode mereka sesuai dan apa arti hasil matematis tersebut dalam konteks fisiknya.
2. *Ringkasan Lab Komputasi*: Untuk setiap kegiatan komputasi utama (e.g., simulasi filter RLC, analisis nilai eigen lengan robot), mahasiswa menyerahkan ringkasan satu halaman termasuk kode atau model mereka, hasil utama (plot), dan analisis singkat yang membandingkan hasil simulasi dengan prediksi teoretis.
3. *Laporan Proyek Puncak (Capstone)*: Laporan teknis lengkap dan terperinci dari proyek Powertrain EV atau Stabilitas Microgrid yang dijelaskan di Bagian IX. Ini berfungsi sebagai pusat dari portofolio.
4. *Esai Reflektif*: Esai 1-2 halaman yang dipandu oleh pertanyaan-pertanyaan yang dirancang untuk mendorong metakognisi.[14] Contoh pertanyaan pemandu:
  - "Pilih satu contoh karya yang ingin Anda perbaiki. Mengapa Anda memilihnya, dan langkah-langkah apa yang akan Anda ambil untuk memperbaikinya?"
  - "Jelaskan sebuah kejadian di mana model matematika atau solusi awal Anda tidak benar. Bagaimana Anda menggunakan 'pemeriksaan realitas' atau simulasi untuk mendiagnosis kesalahan tersebut?"

- "Apa konsep terpenting yang Anda pelajari dalam mata kuliah ini, dan bagaimana Anda mengantisipasi penggunaannya dalam studi atau karier rekayasa Anda di masa depan?"

- **Rubrik Penilaian Portofolio:** Untuk memastikan penilaian yang adil dan transparan, rubrik analitik terperinci akan diberikan kepada mahasiswa di awal semester.

Table 10.1: Rubrik Penilaian Portofolio Matematika Rekayasa

Kriteria	Teladan (5)	Mahir (4)	Berkembang (3)	Awam (2)	Tanpa Bukti (0-1)	Bobot
<b>Kebenaran &amp; Ketepatan Matematis</b>	Semua penurutan dan solusi matematis bebas dari kesalahan, logis, dan menunjukkan pemahaman yang cangguh tentang teori yang mendasarinya.	Karya matematis benar dengan hanya kesalahan kecil yang tidak signifikan. Langkah-langkahnya logis dan mudah diikuti.	Karya matematis sebagian besar benar, tetapi mungkin mengandung beberapa kesalahan konsep-tual atau celah logis.	Terdapat beberapa kesalahan matematis yang signifikan, menunjukkan pemahaman yang lemah tentang teknik solusi.	Karya sebagian besar salah atau tidak lengkap.	30%

*Lanjutan di halaman berikutnya...*

Table 10.1: Rubrik Penilaian Portofolio Matematika  
Rekayasa (Lanjutan)

Kriteria	Teladan (5)	Mahir (4)	Berkembang (3)	Pemula (2)	Tanpa Bukti (0-1)	Bobot
<b>Interpretasi Fisik &amp; Pemeriksaan Realitas</b>	Memberikan interpretasi fisik yang mendalam dan berwawasan untuk semua hasil utama. Secara konsisten menghubungkan formalisme matematis dengan perilaku fisik. Secara eksplisit memeriksa realitas solusi.	Memberikan interpretasi fisik yang benar untuk sebagian besar hasil. Membuat koneksi yang jelas antara matematika dan konteks aplikasi.	Memberikan interpretasi dasar atau dangkal. Hubungan antara matematika dan fisika dinyatakan tetapi tidak dieksplorasi secara mendalam.	Interpretasi seringkali salah, atau konteks fisik diabaikan. Solusi disajikan tanpa validasi.	Tidak ada upaya interpretasi atau validasi.	30%

*Lanjutan di halaman berikutnya...*

Table 10.1: Rubrik Penilaian Portofolio Matematika  
Rekayasa (Lanjutan)

Kriteria	Teladan (5)	Mahir (4)	Berkembang (3)	Pemula (2)	Tanpa Bukti (0-1)	Bobot
<b>Aplikasi Alat Komputasi</b>	Secara efektif menggunakan alat komputasi tidak hanya untuk validasi tetapi juga untuk eksplorasi dan mendapatkan wawasan baru. Kode/model bersih, terdokumentasi dengan baik, dan efisien.	Menerapkan simulasi dengan benar untuk memvalidasi hasil analitis. Kode/model fungsional dan menghasilkan output yang benar.	Simulasi diimplementasikan tetapi mungkin memiliki kesalahan atau inefisiensi kecil. Hasil disajikan dengan analisis minimal.	Kode/model tidak fungsional atau menghasilkan hasil yang salah. Peran simulasi tidak dipahami dengan baik.	Tidak menggunakan alat komputasi.	20%

*Lanjutan di halaman berikutnya...*

Table 10.1: Rubrik Penilaian Portofolio Matematika  
Rekayasa (Lanjutan)

Kriteria	Teladan (5)	Mahir (4)	Berkembang (3)	Dimula (2)	Tanpa Bukti (0-1)	Bobot
<b>Komunikasi &amp; Refleksi</b>	Portofolio terorganisir dengan sangat baik dan disajikan secara profesional. Tulisan jelas, ringkas, dan tepat. Refleksi berwawasan, jujur, dan menunjukkan kesadaran metakognitif yang mendalam.	Portofolio terorganisir dengan baik dan mudah dinavigasi. Tulisan jelas dan sebagian besar bebas dari kesalahan. Refleksi menunjukkan keterlibatan tulus dengan proses belajar.	Portofolio memiliki struktur logis tetapi mungkin tidak teratur di beberapa bagian. Tulisan dapat dimengerti tetapi mungkin kurang jelas atau mengandung kesalahan. Refleksi dangkal.	Portofolio tidak terorganisir dengan baik. Tulisan tidak jelas dan sulit diikuti. Refleksi minimal atau tidak ada.	Portofolio adalah kumpulan karya sederhana tanpa organisasi atau refleksi.	20%

### 10.3 Ujian Laboratorium Praktis

Penilaian ini dirancang untuk mengukur keterampilan yang sulit dievaluasi dalam ujian tertulis tradisional: aplikasi praktis, pemecahan masalah (troubleshooting), dan penyelesaian masalah dalam lingkungan simulasi.[48]

- **Format:** Ujian 2 jam di dalam lab, menggunakan simulator rangkaian (misalnya, LTspice, CircuitLab, Multisim).[75]

- **Tugas:** Mahasiswa diberi file rangkaian yang sudah dibuat sebelumnya yang tidak berfungsi sesuai spesifikasi desainnya. Contoh: "Filter band-pass RLC yang disediakan ini dirancang untuk frekuensi pusat 5 kHz dan faktor-Q 10. Implementasi saat ini salah. Tugas Anda adalah:
  1. Gunakan alat analisis AC simulator untuk menentukan frekuensi pusat dan faktor-Q filter saat ini.
  2. Menggunakan persamaan diferensial yang mengatur dan fungsi transfer untuk rangkaian, hitung nilai komponen (R, L, atau C) yang benar yang diperlukan untuk memenuhi spesifikasi desain.
  3. Ubah rangkaian di simulator dengan nilai-nilai baru Anda dan verifikasi bahwa sekarang berfungsi dengan benar.
  4. Kirimkan file sirkuit Anda yang telah diperbaiki dan laporan singkat yang membenarkan perhitungan Anda dan menyediakan plot yang menunjukkan kinerja akhir yang benar."
- **Penilaian:** Dinilai berdasarkan keakuratan analisis awal, kebenaran perhitungan analitis, keberhasilan modifikasi rangkaian yang disimulasikan, dan kejelasan justifikasi.

## 10.4 Penilaian Rekan Sejawat untuk Kerja Kelompok

Untuk menumbuhkan akuntabilitas individu dan mengembangkan keterampilan kerja tim yang esensial selama proyek puncak berbasis kelompok, evaluasi rekan sejawat yang bersifat rahasia akan digunakan.[77] Skor dari evaluasi ini akan berfungsi sebagai pengali untuk nilai individu setiap mahasiswa pada bagian proyek kelompok dari portofolio mereka.

Table 10.2: Rubrik Penilaian Rekan Sejawat untuk Proyek Rekayasa Kolaboratif (Lanskap)

<b>Kriteria</b>	<b>Teladan (4)</b>	<b>Mahir (3)</b>	<b>Berkembang (2)</b>	<b>Perlu Peningkatan (1)</b>
<b>Kontribusi pada Ide &amp; Pemecahan Masalah</b>	Secara konsisten menyumbangkan ide-ide berwawasan dan solusi kreatif. Secara aktif membantu kelompok mengatasi tantangan.	Secara teratur menyumbangkan ide-ide yang berguna dan berpartisipasi secara konstruktif dalam pemecahan masalah.	Menyumbangkan beberapa ide tetapi sering pasif, membiarkan orang lain memimpin pemecahan masalah.	Jarang menyumbangkan ide atau tidak terlibat dalam proses pemecahan masalah.
<b>Keandalan &amp; Penyelesaian Tugas</b>	Menyelesaikan semua tugas yang diberikan dengan standar tinggi, selalu tepat waktu atau lebih awal dari jadwal. Pekerjaan dapat diandalkan dan tidak memerlukan pengingat.	Menyelesaikan semua tugas yang diberikan dengan andal dan tepat waktu.	Menyelesaikan sebagian besar tugas, tetapi terkadang memerlukan pengingat atau perpanjangan waktu. Pekerjaan kadang-kadang terlambat.	Gagal menyelesaikan beberapa tugas yang diberikan atau secara konsisten melewatkan tenggat waktu, menghambat kelompok.

*Lanjutan di halaman berikutnya...*

Table 10.2: Rubrik Penilaian Rekan Sejawat untuk Proyek Rekayasa Kolaboratif (Lanjutan)

<b>Kriteria</b>	<b>Teladan (4)</b>	<b>Mahir (3)</b>	<b>Berkembang (2)</b>	<b>Perlu Peningkatan (1)</b>
<b>Kerja Sama &amp; Sikap</b>	Menunjukkan sikap yang sangat positif dan suportif. Secara aktif mendorong orang lain dan membantu membangun konsensus kelompok.	Memperlakukan anggota kelompok dengan hormat dan bekerja sama secara efektif. Menangani perselisihan secara konstruktif.	Umumnya kooperatif tetapi terkadang bisa sulit, negatif, atau tidak mendukung keputusan kelompok.	Sering tidak sopan, tidak kooperatif, atau menciptakan dinamika kelompok yang negatif.
<b>Komunikasi dalam Kelompok</b>	Komunikasi secara konsisten jelas, proaktif, dan tepat waktu. Memberi tahu semua anggota tentang kemajuan dan secara aktif mendengarkan orang lain.	Berkomunikasi secara efektif dengan anggota kelompok dan menanggapi pesan secara tepat waktu.	Komunikasi jarang atau tidak jelas. Kadang-kadang sulit dihubungi.	Tidak responsif dan gagal berkomunikasi dengan kelompok, yang menyebabkan kebingungan dan penundaan.

Strategi penilaian komprehensif ini selaras dengan capaian pembelajaran mata kuliah dengan mengevaluasi tidak hanya apa yang mahasiswa ketahui, tetapi apa yang dapat mereka lakukan dengan pengetahuan itu dalam konteks praktis, reflektif, dan kolaboratif.[79]



# Chapter II

## Rekomendasi Pedagogis

Untuk menciptakan lingkungan belajar yang menarik dan efektif bagi mahasiswa teknik elektro yang mempelajari persamaan diferensial, perpaduan pendekatan pedagogis modern yang berbasis bukti sangat direkomendasikan. Tujuannya adalah untuk beralih dari instruksi berbasis ceramah pasif tradisional dan menumbuhkan budaya kelas yang penuh dengan inkuiri, aplikasi, dan pemahaman konseptual yang mendalam. Upaya reformasi saat ini dalam pendidikan PD menekankan pergeseran dari metode analitis hafalan ke instruksi berbasis inkuiri dan integrasi alat komputasi untuk membuat pengetahuan lebih dapat ditransfer ke praktik rekayasa profesional.[15]

**Strategi Pembelajaran Aktif:** Menggabungkan teknik pembelajaran aktif adalah yang terpenting untuk meningkatkan keterlibatan mahasiswa, pemikiran kritis, dan retensi pengetahuan jangka panjang.[66]

- Pembelajaran Berbasis Masalah (PBL): Seperti yang dirinci dalam Modul 2 dan 3, menyusun seluruh unit di sekitar penyelesaian masalah rekayasa spesifik dan realistis (misalnya, memodelkan sistem penyimpanan energi terbarukan, merancang filter audio) memberikan konteks dan motivasi untuk mempelajari materi teoretis.[65] Pendekatan ini mendorong mahasiswa untuk melihat teknik matematika sebagai alat untuk diterapkan, bukan sebagai konsep abstrak untuk dihafal.
- Pembelajaran Berbasis Inkuiri (IBL): Strategi ini, yang menjadi pusat perlakuan modul 5 terhadap nilai eigen, mendorong mahasiswa untuk menemukan konsep sendiri. Dengan mengajukan pertanyaan pemandu dan meminta mahasiswa menjelajahi sistem melalui simulasi, mereka dapat membangun pemahaman mereka sendiri tentang topik-topik kompleks seperti mode sistem.[40] Proses eksplorasi, dugaan, dan verifikasi ini menumbuhkan pemahaman yang jauh lebih dalam daripada instruksi langsung saja.[41]

- **Kelas Terbalik (Flipped Classroom):** Model terbalik, yang diusulkan untuk modul Transformasi Laplace, adalah strategi yang efektif untuk mengoptimalkan waktu di kelas. Menugaskan video ceramah dan bacaan yang direkam sebelumnya untuk konten prosedural dasar memungkinkan sesi di kelas diubah menjadi lokakarya dinamis yang didedikasikan untuk pemecahan masalah dan aplikasi kolaboratif, di mana bimbingan instruktur paling berharga.[79]
- **Think-Pair-Share:** Teknik sederhana namun kuat ini dapat digunakan untuk pemeriksaan konseptual cepat di sepanjang kuliah. Misalnya: "Dengan nilai  $R$ ,  $L$ , dan  $C$  ini, apakah rangkaian akan overdamped atau underdamped? Luangkan waktu 30 detik untuk berpikir, lalu diskusikan dengan teman sebangku Anda." Ini memecah kemonotonan kuliah dan mendorong pembelajaran antar-rekan.[66]

**Pemanfaatan Tutorial dan Lab yang Efektif:** Sesi tutorial terstruktur dan pengalaman laboratorium langsung sangat penting untuk memperkuat konsep dan mengembangkan keterampilan praktis.[1]

- **Tutorial:** Sesi ini seharusnya tidak menjadi pengulangan kuliah. Mereka harus didedikasikan untuk pemecahan masalah kolaboratif yang terpandu, dengan fokus pada contoh yang lebih kompleks atau kesalahan umum mahasiswa. Asisten Dosen harus bertindak sebagai fasilitator, membimbing mahasiswa melalui masalah daripada hanya menyajikan solusi.
- **Lab Komputasi:** Sesi laboratorium adalah wahana utama untuk mengintegrasikan alat komputasi. Lab-lab ini harus dirancang untuk memperkuat konsep teoretis melalui simulasi, visualisasi, dan analisis.[20] Misalnya, di lab RLC, mahasiswa tidak hanya belajar menggunakan simulator; mereka menggunakan simulator untuk melihat puncak resonansi yang mereka hitung dan untuk memverifikasi bahwa filter yang mereka rancang memenuhi spesifikasinya. Lab menjadi tempat untuk validasi model, sebuah praktik inti dalam rekayasa.[1]

**Integrasi Alat Komputasi Secara Menyeluruh:** Alat komputasi seperti MATLAB, GNU Octave, dan Python tidak boleh ditempatkan hanya di satu modul di akhir mata kuliah. Mereka harus ditunen ke dalam jalinan kurikulum, diperkenalkan secara progresif di mana mereka secara alami meningkatkan pemahaman.[15]

- **Modul 1:** Menggambar medan arah untuk membangun intuisi.[1]
- **Modul 2:** Mensimulasikan respons rangkaian RC/RL dan membandingkan solusi numerik (Euler) dan analitis.

- Modul 3: Menggunakan simulator rangkaian (LTspice) untuk memvalidasi desain filter dan mengamati resonansi.
- Modul 4: Menggunakan kemampuan matematika simbolik untuk membantu invers transformasi dan menggambar diagram kutub-nol.
- Modul 5: Menggunakan alat matriks untuk menemukan nilai eigen/vektor eigen dan mensimulasikan respons sistem.
- Modul 7: Membandingkan metode numerik yang diimplementasikan sendiri dengan pemecah bawaan tingkat profesional.

**Penekanan pada Pemahaman dan Interpretasi Konseptual:** Tujuan utamanya adalah untuk melampaui hafalan rumus. Penekanan tanpa henti harus ditempatkan pada pemahaman mengapa metode bekerja dan, yang paling penting, apa arti solusi matematis dalam konteks fisik.[1] Hal ini dicapai melalui:

- Pemeriksaan Realitas (Reality Checking): Terus-menerus mendorong mahasiswa untuk bertanya: "Apakah jawaban ini masuk akal?" Ini bisa melibatkan pemeriksaan satuan, pengujian kasus batas (misalnya, apa yang terjadi saat  $R \rightarrow 0$ ), dan membandingkan bentuk grafik solusi dengan intuisi fisik.[1]
- Menggunakan Analogi Fisik dan Alat Peraga: Menghubungkan konsep listrik dengan konsep mekanis yang lebih intuitif (misalnya, rangkaian RLC dan sistem pegas-massa-peredam) dapat membantu pemahaman.[1] Menggunakan alat peraga konkret atau virtual (seperti simulasi interaktif) membantu menghubungkan simbol-simbol abstrak dengan perilaku fisik.[85]
- Verbalisasi Penalaran: Mendorong mahasiswa untuk menjelaskan penalaran mereka dan menafsirkan hasil mereka, baik secara tertulis (dalam portofolio) maupun dalam diskusi kelompok, akan memperkuat pemahaman mereka.[41]

Dengan menciptakan lingkungan belajar yang aktif, didorong oleh aplikasi, dan terintegrasi secara komputasi, kurikulum ini bertujuan untuk menumbuhkan bukan hanya teknisi matematika, tetapi pemecah masalah rekayasa sejati yang dapat dengan percaya diri menerapkan prinsip-prinsip persamaan diferensial pada sistem dinamis yang kompleks di dunia modern.

# Chapter 12

## Kesimpulan

Kurikulum yang disempurnakan ini menyediakan kerangka kerja yang komprehensif dan terstruktur untuk mata kuliah persamaan diferensial yang dirancang dengan cermat untuk kebutuhan mahasiswa sarjana teknik elektro modern. Dengan secara sistematis mengintegrasikan teori fundamental dengan aplikasi kontemporer dalam robotika, energi terbarukan, dan jaringan cerdas, mata kuliah ini bergerak melampaui contoh-contoh klasik untuk membekali mahasiswa dengan keterampilan matematika dan pemecahan masalah yang dituntut oleh lanskap teknologi saat ini.

Filosofi pedagogis yang mendasari rencana ini menekankan pergeseran dari instruksi pasif ke pembelajaran aktif, berbasis inkuiri, dan berbasis masalah. Strategi seperti kelas terbalik untuk transformasi Laplace, tantangan desain PBL untuk rangkaian RLC, dan penemuan berbasis inkuiri untuk memahami nilai eigen digunakan secara strategis untuk menumbuhkan pemahaman konseptual yang mendalam daripada hafalan. Prinsip inti dari pendekatan ini adalah koneksi yang berkelanjutan dan disengaja antara solusi matematika abstrak dan interpretasi fisiknya, mendorong mahasiswa untuk menjadi pemikir kritis yang dapat memvalidasi dan "memeriksa realitas" hasil mereka.

Integrasi alat komputasi yang mulus—termasuk perangkat lunak standar industri seperti MATLAB/Simulink, perangkat gratis seperti LTspice, dan alternatif sumber terbuka yang dapat diakses seperti GNU Octave dan Python—adalah fitur yang menentukan. Alat-alat ini tidak diperlakukan sebagai tambahan tetapi ditenun ke dalam kurikulum sebagai instrumen penting untuk simulasi, visualisasi, dan validasi, yang mencerminkan praktik rekayasa modern.

Strategi penilaian yang dimodernisasi, yang berpusat pada portofolio rekayasa yang komprehensif, ujian berbasis laboratorium praktis, dan evaluasi rekan sejawat, memberikan ukuran kompetensi mahasiswa yang lebih otentik dan holistik. Ini menghargai proses, refleksi, dan keterampilan praktis setara dengan pengetahuan teoretis, mempersiapkan mahasiswa untuk pekerjaan terdokumentasi dan kolabo-

ratif yang dibutuhkan dalam karier profesional mereka.

Pada akhirnya, rencana pembelajaran ini berupaya menjembatani kesenjangan antara teori matematika abstrak dan aplikasi rekayasa yang nyata. Dengan berdasarkan kurikulum pada masalah tingkat sistem yang memotivasi dan memanfaatkan teknik pedagogis yang inovatif, ini mempersiapkan mahasiswa teknik elektro untuk dengan percaya diri memodelkan, menganalisis, dan menyelesaikan sistem dinamis kompleks yang akan mereka hadapi dan ciptakan dalam usaha akademik dan profesional mereka di masa depan. Implementasi yang berhasil dari mata kuliah semacam itu akan menumbuhkan insinyur yang tidak hanya mengetahui bahasa persamaan diferensial tetapi juga fasih menggunakannya untuk mendeskripsikan, memprediksi, dan membentuk dunia fisik.

# Daftar Pustaka

- [1] Uploaded: Comprehensive Lesson Plan: Differential Equations for Electrical Engineering Students [2] Mubasher Nadeem. (2024). Optimization And Control Of Renewable Energy Systems Using Differential Equations. *Kurdish Studies*, 12(5), 1110–1116. <https://doi.org/10.53555/ks.v12i5.3417>. [3] Mubasher Nadeem. (2024). Optimization And Control Of Renewable Energy Systems Using Differential Equations. *Kurdish Studies*, 12(5), 1110–1116. [4] Featherstone, R., & Orin, D. (2000). Robot Dynamics: Equations and Algorithms. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*. [5] B. Paden, et al. (2024). An Efficient Differentiable Programming Framework for Robotics. *arXiv:2402.00279*. [6] N. S., T. (2025). Universal Differential Equations for Scientific Machine Learning of Node-Wise Battery Dynamics in Smart Grids. *arXiv:2506.08272*. [7] OSTI.gov. (2017). Serious Game for Resilient Control of Microgrid Power Systems. [8] N. S., T. (2025). Universal Differential Equations for Scientific Machine Learning of Node-Wise Battery Dynamics in Smart Grids. *arXiv*. [9] Julius AI. (n.d.). 5 Best MATLAB Alternatives for Engineering Students. [10] ProSoundTraining. (2018). Solving Engineering Problems – Trial-and-Error vs. Math Approach. [11] LibreTexts Engineering. (n.d.). Using eigenvalues and eigenvectors to find stability and solve ODEs. [12] ResearchGate. (n.d.). What is the physical significance of eigenvalues and eigenvectors? [13] Washington University in St. Louis. (n.d.). How to Create an Engineering Portfolio. [14] Taylor & Francis Online. (2025). The portfolio as an instrument for learning and assessment in statistics. [15] Craver, J. L. (2016). DIFFERENTIAL EQUATIONS COURSE DELIVERY AND ITS RELATIONSHIPS TO MATHEMATICAL PROBLEM FRAMING IN ENGINEERING. WSU Research Exchange. [16] MERLOT. (n.d.). MERLOT Virtual Labs: Math. [17] Monroe Community College. (n.d.). Visualizing Differential Equations. [18] AIMS Press. (2021). Modelling as a pedagogical glue for STEM education and teacher education. [19] Lebl, J. (2022). Differential Equations for Engineers. LibreTexts. [20] MathWorks. (n.d.). Electrical and Computer Engineering - MATLAB & Simulink. [21] Shankar, S. (2021). Differential Equations: A Problem Solving Approach Based on MATLAB. Routledge. [22] GNU Octave Documentation. (n.d.). Section 23: Differential Equations. [23] UFPR. (n.d.). Octave-2.1.35

Manual: Differential Equations. [24] Scribd. (n.d.). Lecture 5 - Part 2 - Solving ODEs in GNU Octave. [25] University of California, Davis. (n.d.). Using Python to Solve Partial Differential Equations. [26] Analog Devices. (n.d.). LTspice Simulator. Diperoleh dari <https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html> [27] Mubasher Nadeem. (2024). Optimization And Control Of Renewable Energy Systems Using Differential Equations. ResearchGate. [28] StudyPug. (n.d.). Applications of Second Order Differential Equations. [29] Smith, J. O. (n.d.). RLC Filter Analysis. Introduction to Digital Filters. [30] Wolfram. (2025). Master the Basics of Laplace Transforms in Just 15 Lessons with Wolfram Language. Wolfram Blog. [31] MathTutorDVD.com. (n.d.). Lesson 1 - Laplace Transform Definition (Engineering Math). [32] Math and Science. (n.d.). Inverse Laplace Transform Using The First Shifting Theorem. YouTube. [33] Verica Radisavljevic-Gajic, et al. (2020). The Modeling and Control of Renewable Energy Systems by Partial Differential Equations-An Overview. ResearchGate. [34] Scribd. (n.d.). two-link-robot-arm. [35] MDPI. (2024). Dynamic Electric Vehicle Modeling and Simulation Using the Discrete Event System Specification Method. Applied Sciences, 12(2), 224. [36] IJRASET. (2022). Mathematical Modeling and Applications of Differential Equations in Science and Engineering. [37] Verica Radisavljevic-Gajic, Dimitri Karagiannis, Zoran Gajic. (2023). The Modeling and Control of (Renewable) Energy Systems by Partial Differential Equations—An Overview. Energies, 16(24), 8042. [38] Radisavljevic-Gajic, V., Karagiannis, D., & Gajic, Z. (2023). The Modeling and Control of (Renewable) Energy Systems by Partial Differential Equations—An Overview. Energies, 16(24), 8042. [39] Lumen Learning. (n.d.). Applications of First-order Linear Differential Equations. Calculus II. [40] UPC. (2022). Inquiry-based learning in a differential equations course for engineering students. Proceedings of the 50th Annual SEFI Conference. [41] The Soni-Hess anian, T. S. H. (n.d.). Instructional Strategies for Successful Math Learning. [42] Stack Exchange. (2012). Practical applications of first order exact ODE. [43] MathWorks. (n.d.). Differential Equations - MATLAB & Simulink Example. [44] SlideShare. (2016). 2nd order ode applications. [45] Vernier. (n.d.). RLC Circuits. [46] Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics (10th ed.). Wiley. [47] OpenStax. (n.d.). 17.3: Applications of Second-Order Differential Equations. Math LibreTexts. [48] ResearchGate. (2019). Designing a Practical Lab-based Assessment: A Case Study. [49] Kim, J. (2018). Flipped Classroom Lesson Plan: Laplace Transform. San Jose State University. [50] NGU Led, D. C. (2018). OER\_Mathematics.pdf. [51] Bazett, T. (n.d.). ODEs: The Laplace transform. [52] Fiveable. (n.d.). Laplace Transforms. Ordinary Differential Equations Class Notes. [53] ETH Zurich. (n.d.). Lecture 6: Motor Control. [54] Fiveable. (n.d.). Differential equations and their applications. Intro to Engineering Class Notes. [55] eCampusOntario. (n.d.). 6.10 Applications of Systems of Differential Equations.

Differential Equations for Electrical and Computer Engineers. [56] ResearchGate. (2018). Modeling of 2-DOF robot Arm and Control. [57] Physical Significance of Eigen Values and Eigen Vectors. (n.d.). YouTube. [58] Gonçalves, P. (2006). The role of eigenvalues and eigenvectors in the analysis of dynamic systems. Proceedings of the 24th International Conference of the System Dynamics Society. [59] Introduction to State-Space Equations. (n.d.). Eigenvectors and Eigenvalues. YouTube. [60] Stack Exchange. (2015). Real life examples for eigenvalues/eigenvectors. [61] Arizona State University. (n.d.). Lecture 2: Modeling of Dynamic Systems. [62] My Physics Lab. (n.d.). Numerical Solution of Differential Equations. [63] Scribd. (n.d.). Lab 1: Systems Modeling in Simulink Using Differential Equations. [64] Teachy.app. (n.d.). Transformations in the Plane - Flipped Classroom Lesson Plan. [65] MDPI. (2022). Towards Active Evidence-Based Learning in Engineering Education: A Systematic Literature Review of PBL, PjBL, and CBL. *Sustainability*, 14(21), 13955. [66] Johns Hopkins Engineering. (n.d.). Implementing Teaching Best Practices. [67] MDPI. (2021). Modeling, Simulation and Validation of an Electric Vehicle Powertrain. *Energies*, 14(5), 1493. [68] PMC. (2025). Modeling and Simulation of an Electric Vehicle for Postal Delivery Services Using MATLAB and Simulink. [69] MathWorks. (n.d.). Simplified Model of a Small Scale Micro-Grid. [70] *Frontiers in Education*. (2025). The impact of multiple low-stakes assessments on students' approaches to learning mathematics. [71] Utah State University. (n.d.). Engineering Portfolio. [72] NSF PAR. (2019). The Engineering Design Process Portfolio Scoring Rubric (EDPPSR). [73] Scribd. (n.d.). portfolio assessment. [74] Teesside University. (n.d.). Designing, delivering and assessing practical and laboratory-based sessions. [75] Iowa State University. (n.d.). ADS Circuit Simulation. [76] CircuitLab. (n.d.). Online Circuit Simulator and Schematic Editor. [77] Teachers Pay Teachers. (n.d.). Peer Evaluation Group Projects Rubric & STEM Team Building Group Work Rubric. [78] Teachers Pay Teachers. (n.d.). STEM Engineering Challenge Student Collaboration Rubric. [79] Taylor & Francis Online. (2025). A workbook and assessment scheme implemented for engineering mathematics students: a study of motivation. [80] *International Journal of Latest Research in Engineering and Technology*. (2016). Effective Assessment Strategies in Mathematics. [81] Inquiry Maths. (n.d.). Home. [82] Teachy.app. (n.d.). Transformations in the Plane - Flipped Classroom Lesson Plan. [83] Learn Alberta. (2008). Models in the Mathematics Classroom. [84] OpenStax. (n.d.). 17.3: Applications of Second-Order Differential Equations. *Calculus Volume 3*. [85] Maths No Problem. (n.d.). How to use mathematical manipulative tools in the classroom. [86] Edutopia. (2023). Real-World Math Problem Solving. [87] Digital Commons@ODU. (2024). Teacher talk moves for supporting mathematical modeling.



# Bibliography

- [Nad24] Mubasher Nadeem. “Optimization And Control Of Renewable Energy Systems Using Differential Equations”. In: *Kurdish Studies* 12.5 (2024), pp. 1110–1116. DOI: 10.53555/ks.v12i5.3417.