Catatan Kuliah Minggu 3: PDB Linear dan Faktor Integrasi

Mata Kuliah: Persamaan Diferensial untuk Teknik Elektro
Dosen: [Nama Dosen Anda]

July 3, 2025

1 PDB Linear Orde Pertama

Di minggu sebelumnya, kita telah berhasil memodelkan rangkaian RC dan mendapatkan persamaan:

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_s(t)$$

Persamaan ini termasuk dalam kelas persamaan diferensial yang sangat penting dan umum, yaitu **PDB Linear Orde Pertama**.

1.1 Bentuk Standar

Setiap PDB linear orde pertama dapat ditulis dalam **bentuk standar** berikut:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

- $P(t)$ adalah fungsi koefisien dari suku y.
- $Q(t)$ adalah fungsi non-homogen atau fungsi pemaksa (*forcing function*).

1.2 Mengubah Model RC ke Bentuk Standar

Untuk menerapkan metode solusi umum, kita harus terlebih dahulu mengubah persamaan rangkaian RC kita ke bentuk standar. Kita bagi seluruh persamaan dengan RC:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC}v_c = \frac{V_s(t)}{RC}$$

Dengan membandingkannya dengan bentuk standar, kita dapat mengidentifikasi:

- $y = v_c(t)$
- $P(t) = \frac{1}{RC}$ (dalam kasus ini, sebuah konstanta)
- $Q(t) = \frac{V_s(t)}{RC}$

Sekarang persamaan kita siap untuk diselesaikan.

2 Metode Solusi: Faktor Integrasi

Metode persamaan terpisah tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan PDB linear secara umum. Oleh karena itu, kita memerlukan teknik yang lebih kuat: **metode faktor integrasi**.

2.1 Ide Utama

Idenya adalah mencari sebuah fungsi khusus, yang kita sebut **faktor integrasi** $\mu(t)$, yang jika dikalikan ke kedua sisi PDB, secara ajaib akan mengubah sisi kiri persamaan menjadi turunan dari sebuah produk.

$$\text{Sisi Kiri: } \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)P(t)y \quad \xrightarrow{\text{ingin menjadi}} \quad \frac{d}{dt}[\mu(t)y]$$

Jika kita menggunakan aturan produk pada $\frac{d}{dt}[\mu(t)y]$, kita mendapatkan $\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y$. Dengan membandingkan kedua ekspresi, kita menemukan bahwa kita memerlukan $\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)P(t)$. Ini adalah PD terpisah untuk $\mu(t)$, yang solusinya adalah:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$$

2.2 Prosedur Solusi Langkah-demi-Langkah

Untuk menyelesaikan PDB linear orde pertama $y' + P(t)y = Q(t)$:

1. **Pastikan dalam Bentuk Standar:** Tulis ulang PDB ke dalam bentuk standar dan identifikasi $P(t)$ dan $Q(t)$.

2. **Hitung Faktor Integrasi:** Hitung $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$. Kita tidak memerlukan konstanta integrasi pada langkah ini.

3. **Kalikan PDB dengan $\mu(t)$:** Kalikan seluruh persamaan di Langkah 1 dengan $\mu(t)$. Sisi kiri secara otomatis akan menjadi $\frac{d}{dt}[\mu(t)y]$.

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)Q(t)$$

4. **Integralkan Kedua Sisi:** Integralkan kedua sisi terhadap t.

$$\int \frac{d}{dt}[\mu(t)y]\,dt = \int \mu(t)Q(t)\,dt$$

$$\mu(t)y = \int \mu(t)Q(t)\,dt + C$$

5. **Selesaikan untuk y:** Bagi kedua sisi dengan $\mu(t)$ untuk mendapatkan solusi umum.

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)Q(t)\,dt + C\right]$$

3 Contoh Aplikasi: Menyelesaikan Masalah Rangkaian RC

Mari kita terapkan prosedur ini untuk menemukan tegangan kapasitor $v_c(t)$ dalam skenario PBL kita, dengan asumsi sumber tegangan DC konstan, $V_s(t) = V_s$.

PDB dalam bentuk standar: $\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC}v_c = \frac{V_s}{RC}$.

1. **Identifikasi:** $P(t) = \frac{1}{RC}$ dan $Q(t) = \frac{V_s}{RC}$.
2. **Faktor Integrasi:**
$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{t/RC}$$
3. **Kalikan dan Integralkan:**
$$\frac{d}{dt}[e^{t/RC}v_c] = e^{t/RC}\left(\frac{V_s}{RC}\right)$$
$$e^{t/RC}v_c = \int \frac{V_s}{RC}e^{t/RC}\,dt$$
$$e^{t/RC}v_c = \frac{V_s}{RC}(RCe^{t/RC}) + C = V_s e^{t/RC} + C$$
4. **Selesaikan untuk $v_c(t)$:** Bagi kedua sisi dengan $e^{t/RC}$.
$$v_c(t) = V_s + Ce^{-t/RC}$$
Ini adalah solusi umum untuk tegangan pada kapasitor.

3.1 Menemukan Solusi Khusus dengan Kondisi Awal

Misalkan kapasitor pada awalnya kosong, sehingga kondisi awalnya adalah $v_c(0) = 0$.
$$0 = V_s + Ce^{-0/RC} \implies 0 = V_s + C \implies C = -V_s$$
Dengan mensubstitusikan kembali nilai C, solusi khususnya adalah:
$$v_c(t) = V_s - V_s e^{-t/RC} = V_s(1 - e^{-t/RC})$$
Persamaan ini secara akurat mendeskripsikan bagaimana tegangan kapasitor meningkat dari 0 menuju nilai akhirnya V_s.

Rangkuman Minggu 3

Pada minggu ini, kita telah:

- Mempelajari cara mengidentifikasi dan menulis PDB linear orde pertama dalam **bentuk standar**.
- Menguasai **metode faktor integrasi** sebagai teknik yang kuat untuk menyelesaikan jenis PDB ini.
- **Menerapkan metode** tersebut untuk menemukan solusi analitis dari masalah rekayasa praktis (pengisian rangkaian RC).

Langkah Selanjutnya:
Di minggu keempat, kita akan menganalisis solusi yang telah kita temukan lebih dalam, membahas konsep-konsep penting seperti respons transien, respons keadaan tunak, dan makna fisik dari konstanta waktu.