

Modul 1: Pengantar Persamaan Diferensial

Bahasa Sistem Kelistrikan Modern

Novalio Daratha/Universitas Bengkulu

Departemen Teknik Elektro

June 29, 2025



Ikhtisar Modul 1

- 1 Minggu 1: Konsep Fundamental
 - Klasifikasi Persamaan Diferensial
 - Solusi dan Tipe Masalah
- 2 Minggu 2: Pemodelan dan Analisis Kualitatif
 - Pemodelan Matematis dan Metode Kualitatif



Apa itu Persamaan Diferensial (PD)?

Definisi

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunannya.

Mengapa Penting bagi Insinyur Elektro?

Hukum-hukum alam, terutama yang mengatur sistem dinamis, diekspresikan sebagai persamaan diferensial. Bagi insinyur elektro, PD adalah bahasa untuk memodelkan, menganalisis, dan berinovasi dalam:

- Perilaku rangkaian listrik & Perambatan sinyal
- Operasi sistem kendali & Medan elektromagnetik

Contoh Klasik: Rangkaian RLC

Perilaku muatan $q(t)$ dalam rangkaian RLC seri dimodelkan oleh PD orde kedua:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Klasifikasi PD (1): Berdasarkan Tipe

Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Hanya melibatkan turunan terhadap **satu** variabel independen, biasanya waktu (t).

- Fokus utama mata kuliah ini.
- Contoh: Persamaan rangkaian RC/RLC.

Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Melibatkan turunan parsial terhadap **beberapa** variabel independen, misalnya waktu (t) dan posisi (x).

- Contoh: Persamaan Gelombang untuk tegangan $V(x, t)$ di saluran transmisi:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$



Klasifikasi PD (2): Berdasarkan Orde

Definisi Orde

Orde dari sebuah persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi yang ada dalam persamaan tersebut.

Contoh

- **Orde Pertama:**

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = V_s$$

Turunan tertinggi adalah turunan pertama.

- **Orde Kedua:**

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Turunan tertinggi adalah turunan kedua.



Klasifikasi PD (3): Berdasarkan Linearitas

Persamaan Diferensial Linear

Fungsi yang tidak diketahui dan semua turunannya hanya muncul dalam pangkat pertama dan tidak dikalikan bersama. Teori untuk PD linear sudah sangat berkembang dan sering digunakan sebagai aproksimasi.

Persamaan Diferensial Non-linear

Setiap persamaan yang tidak memenuhi kriteria linear. Contohnya termasuk pemodelan pendulum dengan sudut besar atau dinamika robot yang kompleks.

Pentingnya Linearitas

Banyak teknik solusi yang akan kita pelajari (misalnya, Transformasi Laplace) hanya berlaku untuk PD linear.



Klasifikasi PD (4): Berdasarkan Homogenitas

Klasifikasi ini hanya berlaku untuk **persamaan diferensial linear**.

Homogen

Setiap suku dalam persamaan melibatkan fungsi yang tidak diketahui (y) atau salah satu turunannya (y' , y'' , \dots).

- Contoh: $ay'' + by' + cy = 0$
- Secara fisik sering mewakili respons alami sistem (tanpa input/sumber eksternal).

Non-homogen

Terdapat suku tambahan yang hanya melibatkan variabel independen (sering disebut fungsi pemaksa atau input).

- Contoh: $ay'' + by' + cy = g(t)$
- Secara fisik mewakili respons sistem terhadap input atau gaya eksternal.

Konsep Solusi

Apa itu Solusi?

Sebuah fungsi yang jika disubstitusikan ke dalam PD, akan memenuhi persamaan tersebut secara identik di seluruh domainnya.

Solusi Umum

- Mewakili keluarga fungsi yang menyelesaikan PD.
- Mengandung konstanta sembarang (C_1, C_2, \dots).
- Contoh: Solusi untuk $y' = y$ adalah $y(t) = Ce^t$.

Solusi Khusus

- Satu fungsi spesifik yang diperoleh dengan menentukan nilai konstanta.
- Membutuhkan informasi tambahan (kondisi awal/batas).
- Contoh: Jika $y(0) = 3$, solusi khususnya adalah $y(t) = 3e^t$.



Tipe Masalah: IVP vs. BVP

Masalah Nilai Awal (IVP - Initial Value Problem)

Terdiri dari sebuah PDB beserta kondisi yang semuanya ditentukan pada **satu titik** awal dari variabel independen (misalnya, pada $t = 0$).

- Sangat umum dalam teknik elektro untuk menganalisis respons sistem dari keadaan awal yang diketahui.
- Contoh: $y'' + y = 0$, dengan $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$.

Masalah Nilai Batas (BVP - Boundary Value Problem)

Terdiri dari sebuah PDB beserta kondisi yang ditentukan pada **titik-titik yang berbeda**, sering kali batas-batas suatu domain.

- Kurang sentral dalam mata kuliah ini, tetapi penting dalam elektrostatis atau analisis saluran transmisi.
- Contoh: $y'' + y = 0$, dengan $y(0) = 0$ dan $y(\pi) = 0$.

Prinsip Pemodelan Matematis

Keterampilan Kunci Insinyur

Kemampuan untuk menerjemahkan masalah fisik menjadi model matematika dalam bentuk persamaan diferensial adalah keterampilan esensial.

Proses Pemodelan

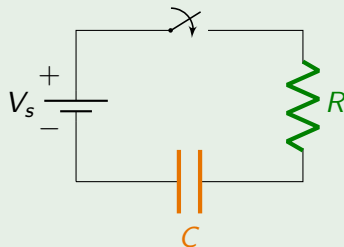
- 1 Identifikasi sistem fisik dan variabel yang relevan.
- 2 Terapkan hukum fisika fundamental (misalnya, Hukum Kirchhoff, Hukum Newton).
- 3 Turunkan persamaan yang menghubungkan variabel dan laju perubahannya.
- 4 Sederhanakan dan validasi model.



Studi Kasus: Pemodelan Rangkaian RC

Sistem: Pengisian Kapasitor

Kita akan menerapkan Hukum Tegangan Kirchhoff (KVL) pada rangkaian RC seri dengan sumber tegangan DC V_s .



KVL: $V_R(t) + V_C(t) = V_s$ Dengan $V_R = iR$ dan $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt}$, kita peroleh:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_s$$

Ini adalah PDB linear orde pertama non-homogen yang akan kita analisis lebih lanjut.



Analisis Kualitatif: Medan Arah (Direction Fields)

Membangun Intuisi Sebelum Menyelesaikan

Sebelum mencari solusi analitis, metode geometris dapat memberikan wawasan kualitatif yang berharga tentang perilaku solusi.

Medan Arah (Medan Kemiringan)

- Untuk PD orde pertama
 $dy/dx = f(x, y)$.
- Ini adalah representasi visual dari kemiringan (y') kurva solusi di berbagai titik pada bidang xy .
- Dengan menggambar segmen-segmen garis pendek dengan kemiringan ini, kita dapat memvisualisasikan "aliran" solusi.

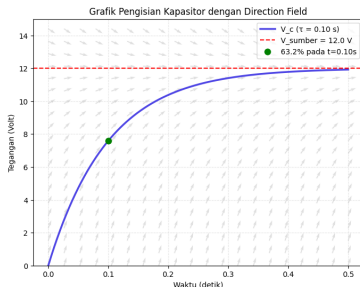


Figure: Contoh plot Medan Arah untuk model pengisian baterai, dibuat dengan Python.



Rangkuman Modul 1 dan Langkah Berikutnya

Apa yang Telah Kita Pelajari?

- Mendefinisikan dan mengklasifikasikan berbagai jenis persamaan diferensial.
- Memahami konsep solusi, IVP, dan BVP.
- Menurunkan model PD orde pertama untuk sistem EE sederhana seperti rangkaian RC.
- Menggunakan medan arah untuk menganalisis perilaku solusi secara kualitatif dan membangun intuisi fisik.

Selanjutnya di Modul 2

Kita akan beralih dari analisis kualitatif ke metode solusi analitis untuk menyelesaikan PD orde pertama secara eksak.

