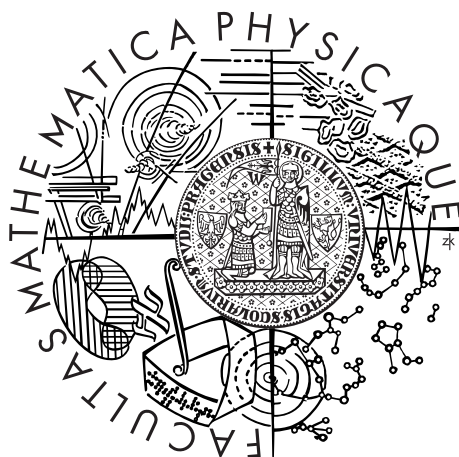


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁRSKA PRÁCA



Tomáš Novella

## Grid-Based Path Planning

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Tomáš Balyo

Študijný program: Informatika

Študijný obor: Obecná informatika

Praha 2013

Rád by som poďakoval predovšetkým vedúcemu práce

Mgr. Tomášovi Balyovi

za vedenie práce, námietky a pripomienky a konzultácie.

Ďalej by som sa rád poďakoval

Mgr. Martinovi Marešovi

za konzultácie ohľadom teórie grafov.

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona a v platnom znení, obzvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Názov práce: Grid-Based Path Planning

Autor: Tomáš Novella

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Tomáš Balyo, Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Práca sa zaoberá efektívnym hľadaním ciest medzi dvoma bodmi na mriežkových grafoch. Prvú časť práce tvorí prehľad najdôležitejších algoritmov slúžiacich na hľadanie najkratšej cesty. V druhej časti práce zavedieme koncept tzv. obdĺžnikovej dekompozície grafu. Na základe tohto konceptu sme navrhli algoritmus, pôvodne postavený na algoritme A\*. Podľa experimentov tento algoritmus zrýchľuje hľadanie najkratšej cesty na špecifickom type mriežkových grafov. Experimenty sme uskutočnili na mriežkových grafoch, ktoré slúžia v praxi ako herné mapy.

Kľúčové slová: mriežkový graf, problém hľadania najkratšej cesty, algoritmus A\*

Title: Grid-Based Path Planning

Author: Tomáš Novella

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: Mgr. Tomáš Balyo, Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: This thesis deals with effective ways of pathfinding in grid-based graphs. In the first part we present the most important approaches to finding the shortest path. In the second part we proposed an algorithm that improves the speed of pathfinding in some special cases of grid-based graph. In the end we proved it by providing a series of experiments.

Keywords: grid-based graph, shortest path problem, A\* search algorithm

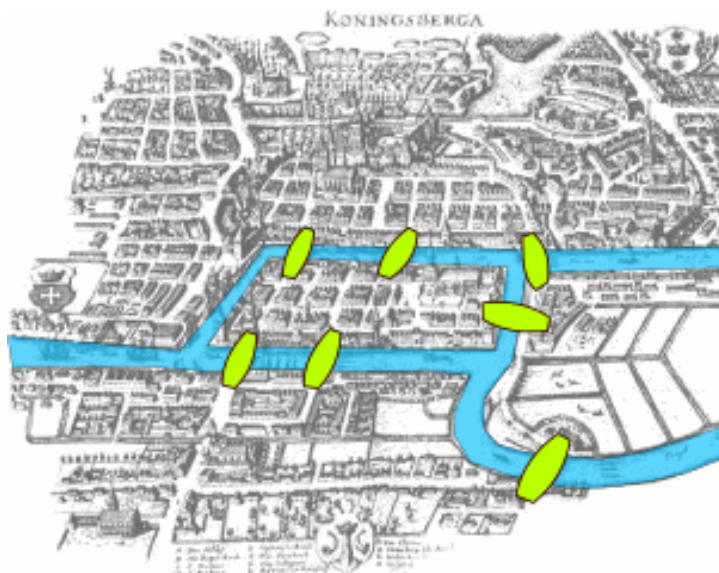
# Obsah

Úvod	7
<b>I Analýza problému</b>	<b>9</b>
<b>1 Zadanie problému a cieľové požiadavky</b>	<b>10</b>
1.1 Úvodné definície a značenia	10
1.2 Mriežkový graf	11
1.3 GPPC: Grid-Based Path Planning Competition	12
1.3.1 Špecifiká súťaže, limity	12
1.3.2 Kritériá súťaže, hodnotenie programov	13
<b>2 Prehľad algoritmov</b>	<b>14</b>
2.1 Kritériá efektivity algoritmu	14
2.2 Dijkstrov algoritmus	14
2.2.1 Zložitosť	15
2.2.2 Halda na mriežkovom grafe	16
2.2.3 Popis haldy	16
2.3 A*	19
2.3.1 Heuristická funkcia	20
<b>II Implementácia</b>	<b>22</b>
<b>3 Súťažný algoritmus</b>	<b>23</b>
3.1 Mriežkový graf bez prekážok	23
3.2 Hľadáme obdĺžniky	24
3.2.1 Proporcie obdĺžnikov	24
3.2.2 Nájdenie najväčšej jednotkovej podmatice	26
<b>4 Testovanie a výsledky</b>	<b>29</b>
4.1 Kritériá a popis testovania	29
4.1.1 Vstupné dáta	29
4.1.2 Testovacie kritériá	31
4.1.3 Testované algoritmy	31
4.1.4 Kompilácia	31
4.2 Výsledky	32
<b>Záver</b>	<b>33</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>34</b>
<b>Prílohy</b>	<b>35</b>

<b>A</b>	<b>T-maps — užívateľská dokumentácia</b>	<b>36</b>
A.1	Popis programu T-maps . . . . .	36
A.2	Formát vstupu a výstupu . . . . .	36
A.3	Vykreslenie znakovej matice . . . . .	36
A.4	Vykreslenie dátového súboru . . . . .	37
A.5	Ukážky programu . . . . .	37
<b>B</b>	<b>T-maps — programátorská dokumentácia</b>	<b>39</b>
B.1	Architektúra aplikácie . . . . .	39
B.2	Kľúčové funkcie aplikácie . . . . .	39

# Úvod

Slávna Eulerova úloha siedmych mostov v Kaliningrade [1] sa považuje za prvú prácu, ktorá zaviedla teóriu grafov. Úlohou je prejsť po týchto siedmych mostoch tak, aby sme po každom prešli práve raz.



Obr. 1: Sedem mostov v Kaliningrade, [http://en.wikipedia.org/wiki/Seven\\_Bridges\\_of\\_K%C3%B6nigsberg](http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg)

Od tej doby sa využitie teórie grafov značne rozšírilo a v dnešnej dobe patrí medzi významné a rozpracované teórie. V modernej dobe je jedným z jej najdôležitejších problémov hľadanie najkratšej cesty. Najčastejšie sa s nimi stretávame pri plánovaní trasy v GPS navigácii. Medzi najvýznamnejšie práce považujeme práce od Dijkstru [2] a Floyd-Warshalla [3].

So začiatkom fenoménu počítačových hier a umelej inteligencie sa do povedomia dostal špeciálny typ grafu – mriežkový graf, využívaný ako herná mapa. V hrách často trebalo nájsť cestu pre počítačom ovládanú postavičku z miesta A do miesta B. Nakoľko je väčšina hier komerčná, algoritmy využívané v hrách boli a sú taktiež komerčné. Dôsledkom toho nie sú verejne publikované a porovnané rôzne prístupy a algoritmy na vyhľadávanie (ideálne najkratších) ciest v mriežkových mapách. A keď už aj sú, tak práce používajú rôzne mapy na bechmarking a teda neexistuje žiadna globálna porovnávacia štúdia týchto prístupov.

Súťaž *Grid-Based Path Planning Competition* [9] sa snaží tento problém vyriešiť tým, že porovnáva rôzne algoritmy na veľkej množine máp použitých v známych počítačových hrách a vyhodnocuje ich úspešnosť v rámci viacerých kategórií.

Cieľom tejto práce je spraviť prehľad doterajších prístupov k tomuto problému, zistiť ich vlastnosti a prispieť vlastným algoritmom do súťaže s niekoľkými vylepšeniami k doterajším prístupom hľadania najkratšej cesty na mriežkových grafoch.

V prvej kapitole si zavedieme kľúčové termíny a popíšeme problém formálne. Na konci kapitoly spomenieme súťaž, ktorej sa daný algoritmus zúčastnil. Druhá

kapitola je zameraná na vytvorenie prehľadu kľúčových algoritmov používaných na riešenie problému. V ďalšej kapitole navrhujeme vlastné riešenie založené na poznatkoch popísaných v druhej kapitole s pridaním vlastných vylepšení. A v poslednej kapitole toto riešenie porovnáme s dosavadnými.

Práca obsahuje dve prílohy: stručnú užívateľskú a programátorskú dokumentáciu programu *T-maps*, ktorý slúži na grafické zobrazenie mriežkového grafu.



Časť I

**Analýza problému**

# 1. Zadanie problému a cieľové požiadavky

## 1.1 Úvodné definície a značenia

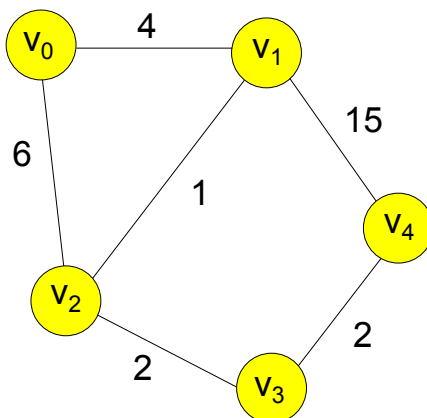
Na začiatok si zavedieme niektoré dôležité pojmy z teórie grafov. Úlohu so všetkými jej špecifikami si ozrejníme v nasledujúcich podkapitolách.

**Definícia 1.** Graf  $G$  je usporiadaná dvojica  $(V, E)$ , kde  $V$  označuje množinu vrcholov(vertices) a  $E \subseteq V \times V$  označuje množinu hrán(edges). Značíme  $G = (V, E)$ .

**Poznámka 1.** Hrana je jednoznačne určená dvojicou vrcholov.

**Definícia 2.** Ohodnotený graf  $(G, w)$  je graf  $G$  spolu s reálnou funkciou (tzv. ohodnotením)  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $w$  je funkcia, ktorá každej hrane priradí reálne číslo reprezentujúce dĺžku, alebo hodnotu hrany.

Ukážka obecného ohodnoteného grafu je na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Ohodnotený graf

Pri hľadaní najkratšej cesty v grafe pracujeme s pojmom, ako sú *cesta* a *najkratšia cesta*.

**Definícia 3.** Cesta  $P$  z vrcholu  $v_0$  do vrcholu  $v_n$  v grafe  $G$  je postupnosť  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ , pre ktorú platí  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  a taktiež  $v_i \neq v_j$  pre každé  $i \neq j$ .

Všimnime si, že na ceste nenavštívime žiaden vrchol dvakrát a teda cesta neobsahuje kružnice.

**Definícia 4.** Dĺžka cesty  $P$  z vrcholu  $v_0$  do vrcholu  $v_n$  v ohodnotenom grafe  $(G, w)$  je súčet dĺžok hrán, ktoré sa na ceste nachádzajú.

Samozrejme, medzi dvoma vrcholmi môže existovať viacero ciest.

**Definícia 5.** Najkratšia cesta  $P$  z vrcholu  $v_0$  do vrcholu  $v_n$  v ohodnotenom grafe  $(G, w)$  je cesta z vrcholu  $v_0$  do vrcholu  $v_n$  s najmenšou dĺžkou.

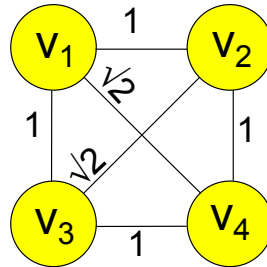
## 1.2 Mriežkový graf

Keď sme si už zaviedli kľúčové pojmy, prejdime k samotnému zadaniu úlohy. Ako sme už spomínali, problém budeme riešiť na tzv. mriežkových grafoch. Čo je mriežkový graf a v čom sa od obecného grafu odlišuje?

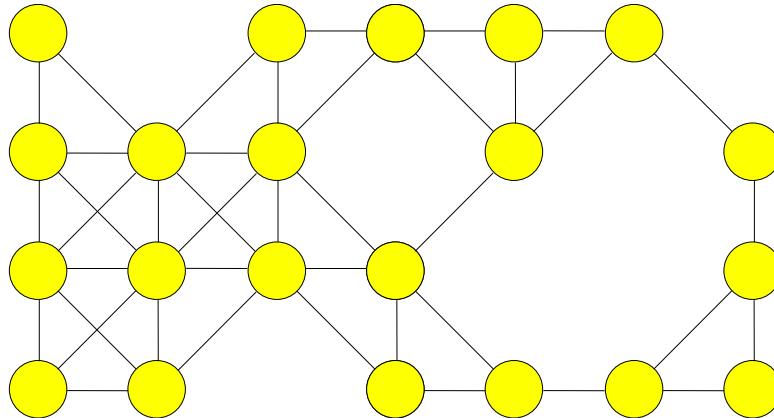
V hernej praxi predstavuje mriežkový graf mapu hracej plochy, s ktorou sa stretávame v najrôznejších hrách, ako je Warcraft, Startcraft, Dragon Age [10] a podobne. Preto niekedy používame pojem *mapa* na označenie mriežkového grafu.

Ide o špeciálny a dosť obmedzený typ grafu. Vizualne si ho môžeme predstaviť ako konečný graf v ktorom sú vrcholy rozostúpené v tvare mriežky a hrana je stále medzi dvojicami susedných vrcholov vo všetkých ôsmich smeroch. Dĺžka vodorovnej alebo zvislej hrany je 1 a dĺžka šikmej hrany je  $\sqrt{2}$ .

**Poznámka 2.** Mriežkový graf patrí medzi riedke grafy, pretože má veľmi malý počet hrán (lineárny od počtu vrcholov).



Obr. 1.2: Mriežkový graf 2x2



Obr. 1.3: Mriežkový graf bez označenia vrcholov a dĺžok hrán

Zadefinujme si teraz mriežkový graf formálne.

**Definícia 6.** Mriežkový graf rozmerov  $m \times n$  je ohodnotený graf s ohodnotením  $w$  s  $m \cdot n$  vrcholmi očíslovanými od  $v_{1,1}$  až po  $v_{m,n}$  s priamymi hranami  $j$  v tvare  $\{v_{a,b}, v_{a,b+1}\}, \{v_{a,b}, v_{a+1,b}\}$ , kde  $w(j) = 1$  a šikmými hranami s v tvare  $\{v_{a,b}, v_{a+1,b+1}\}, \{v_{a,b}, v_{a-1,b+1}\}$ , kde  $w(s) = \sqrt{2}$ .

**Poznámka 3.** Mriežkový graf sa dá reprezentovať ako matica  $m \times n$  nad telesom  $\mathbb{Z}_2$ , kde jednotky predstavujú miesta, kde sú vrcholy.

**Poznámka 4.** Konkrétny vrchol  $v_{x,y}$  sa dá taktiež popísať jedným číslom  $c := x \cdot n + y$ , kde  $n$  je počet stĺpcov matice.

**Príklad 1.** Mriežkový graf rozmerov  $2 \times 2$  s vyznačenými dĺžkami hrán vidíme na obrázku 1.2. Príklad mriežkového grafu  $4 \times 7$  je na obrázku 1.3. Príklad jeho maticovej reprezentácie je na obrázku 1.4.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obr. 1.4: Maticová reprezentácia mriežkového grafu

## 1.3 GPPC: Grid-Based Path Planning Competition

Algoritmus navrhnutý a naprogramovaný v tejto práci bol zaradený do súťaže GPPC, ktorá sa koná približne raz ročne.

### 1.3.1 Špecifiká súťaže, limity

Mriežkové grafy budú mať rozmery maximálne  $2048 \times 2048$ . Súťaž bude rozdelená do dvoch fáz — fázy predspracovania grafu (pre-processing) a fázy testovania. Na predspracovanie grafu bude vyhradený čas maximálne 30 minút a program si svoje dáta uloží na disk do súboru o veľkosti maximálne 50MB. Potom vo fáze testovania budú dostávať požiadavky na nájdenie najkratšej cesty. Úlohou je naimplementovať interface zobrazený na obrázku 1.5.

Funkcia *PreprocessMap* má za úlohu predspracovať mriežkový graf a vytvoriť si pomocné dátové štruktúry podľa predpísaných limitov. Jej prvým argumentom je samotný mriežkový graf predaný ako zlinearizovaná matica, ktorú bolo vidieť

```
struct xyLoc
{
    int x;
    int y;
};

void PreprocessMap(std::vector<bool> &bits, int width,
    int height, const char *filename);

void *PrepareForSearch(std::vector<bool> &bits, int width,
    int height, const char *filename);

bool GetPath(void *data, xyLoc s, xyLoc g, std::vector &path);
```

Obr. 1.5: Interface, ktorý treba naimplementovať

na obrázku 1.4. Ďalšími argumentami sú rozmery grafu, keďže z jednorozmernej reprezentácie nie sú odvoditeľné. Posledným argumentom je názov súboru, do ktorého sa pomocné dátové štruktúry uložia.

Funkcia *PrepareForSearch* slúži na načítanie dát z vytvoreného súboru. Argumenty má rovnaké, ako predošlá funkcia. Štvrtý argument dodáva názov súboru, z ktorého sa pomocné dáta načítajú. Funkcia po načítaní dát skonštruuje dátové štruktúry a vráti na nich smerník.

Tento smerník prevezme v prvom argumente funkcia *GetPath*, ktorá slúži na nájdenie najkratšej cesty. Jej ďalšími argumentami sú súradnice počiatočného a koncového bodu, pre ktoré sa bude hľadať cesta a posleným argumentom je referencia na vektor, do ktorého sa samotná cesta uloží. Funkcia vracia hodnotu typu boolean na základe toho, či už vypočítala istý úsek a chce vrátiť cestu. Zíde sa napríklad, keď treba vrátiť čo najrýchlejšie aspoň prvých  $k$  krokov cesty (viď. Kritériá, sekcia 1.3.2).

### 1.3.2 Kritériá súťaže, hodnotenie programov

Na algoritmus môžeme kladť rôzne požiadavky, ktoré si častokrát navzájom protirečia, preto programy posudzujeme podľa viacerých kritérií.

- Celkový čas na nájdenie cesty.
- Čas na nájdenie prvých 20 tich krokov.
- Dĺžka cesty (zohľadnená suboptimalita).
- Maximálny čas vrátenia hociktorej časti cesty.

Testovací počítač má 12 GB RAM pamäti a dva 2.4 GHz Intel Xeon E5620 procesory.

## 2. Prehľad algoritmov

Na hľadanie najkratších ciest v grafe poznáme mnoho algoritmov, ktoré rozdelujeme do týchto troch [4] skupín:

- Point To Point Shortest Path(P2PSP) - hľadajú najkratšiu cestu medzi dvoma zadanými bodmi.
- Single Source Shortest Path(SSSP) - pre daný vrchol  $v$  hľadajú najkratšiu cestu do všetkých vrcholov grafu.
- All Pairs Shortest Path (APSP)- skúmajú najkratšiu cestu medzi všetkými dvojicami vrcholov.

Tieto problémy sú na obecných grafoch NP-ťažké. Napriek tomu na mriežkových grafoch (kde sú vzdialenosti medzi vrcholmi vždy kladné) existujú algoritmy v polynomiálnom čase.

V práci sa budeme ďalej zaoberať riešením prvého problému (Point to Point Shortest Path).

V tejto kapitole popíšeme algoritmy, ktoré sú použiteľné na grafoch s nezápornými dĺžkami hrán.

### 2.1 Kritériá efektivity algoritmu

Na porovnanie efektivity algoritmov slúži v teoretickej informatike odhad asymptotickej složitosti [8]. Tento odhad je veľmi užitočný v teoretickej informatike a veľmi často algoritmus s lepšou zložitosťou je v praxi rýchlejší. Nie je to ale pravidlom a teda potrebujeme zaviesť ďalšie kritériá, ktoré presnejšie popíšu a porovnajú správanie algoritmov v praxi. Kritériá, podľa ktorých budeme porovnávať efektivitu algoritmov sú teda nasledovné:

- Asymptotická zložitosť.
- Počet navštívených vrcholov.
- Reálny čas behu algoritmu.

### 2.2 Dijkstrov algoritmus

Medzi základné algoritmy typu SSSP patrí Dijkstrov algoritmus [2] popísaný už v roku 1959. Miernu modifikáciu pôvodného algoritmu môžeme vidieť na Algoritme 1). Patrí medzi relaxačné algoritmy a zbežne korektne na grafoch s nezápornými hranami.

Pri hľadaní cesty z vrcholu  $s$  do vrcholu  $t$  prechádzame postupne vrcholy s neklesajúcou vzdialenosťou od  $s$ , až dokým sa nedostaneme k cieľovému vrcholu  $t$ .

Vrchol môže byť v jednom z troch stavov: NENAVŠTÍVENÝ, OTVORENÝ a ZATVORENÝ. Nenavštívený bude vrchol, do ktorého sme ešte ani nezačali

hľadať najkratšiu cestu. Vrchol je otvorený, keď sme našli najkratšiu cestu k nejakému jeho susedovi a vrchol je uzavretý, pokiaľ sme už k nemu našli najkratšiu cestu. V algoritme budeme používať minimovú haldu, ktorá vracia vrcholy s najmenšou vzdialenosťou. Vrchol sa po vložení do haldy automaticky otvára.

Na začiatku sú všetky vrcholy v stave NENAVŠTÍVENÝ a vložíme do haldy počiatočný vrchol. Postupne z haldy vyberáme vrcholy a po vybratí ich uzavrieme. Po vybratí otvoreného vrcholu prejdeme všetkých jeho neuzavretých susedov a pokiaľ sme k nim našli cestu kratšiu, ako bola dosiaľ nájdená, tak ich vložíme do haldy.

---

**Algoritmus 1** Dijkstra: zisti vzdialenosť najkratšej cesty z vrcholu  $s$  do všetkých dostupných vrcholov

---

**Vstup:** graf  $G$

**Výstup:** dĺžková funkcia  $d$  obsahujúca najkratšie cesty z vrcholu  $s$  do vrcholov grafu

```

1:  $d(*) \leftarrow \infty$ 
2:  $stav(*) \leftarrow \text{NENAVŠTÍVENÝ}$ 
3: // pridám počiatok
4:  $d(s) \leftarrow 0$ 
5:  $stav(s) \leftarrow \text{OTVORENÝ}$ 
6: Heap  $H$ 
7:  $Insert(H, s)$ 
8: while  $H$  not empty do
9:   // vyberieme  $v$  — najbližší otvorený vrchol
10:   $v \leftarrow ExtractMin(H)$ 
11:  while  $stav(v) \neq \text{OTVORENÝ}$  do
12:     $v \leftarrow ExtractMin(H)$ 
13:  end while
14:   $stav(v) \leftarrow \text{UZAVRETÝ}$ 
15:  // zrelaxujeme vrchol  $v$ 
16:  for all  $e, e = (v, u)$  do
17:    if  $d(u) > d(v) + l(v, u)$  then
18:       $Insert(H, v)$ 
19:       $stav(u) \leftarrow \text{OTVORENÝ}$ 
20:       $d(u) \leftarrow d(v) + l(v, u)$ 
21:    end if
22:  end for
23: end while
```

---

**Veta 1.** V dijkstrovom algoritme uzatvárame každý dosiahnuteľný vrchol práve raz.

*Dôkaz.* Napríklad [4].

□

### 2.2.1 Zložitosť

Každý vrchol vložíme do haldy maximálne  $deg(v)$ -krát (v najhoršom prípade postupne vyberáme z haldy jeho susedov a cez každého nasledujúceho suseda

vedie kratšia cesta k vrcholu  $v$  – teda ho stále pridáme znovu). Počet všetkých vložení bude teda rádovo  $O(\sum_v \deg(v)) = O(m)$ . Zo štruktúry môžeme vybrať maximálne toľko prvkov, koľko sme tam vložili a teda aj volania *ExtractMin* trvajú  $O(m)$ .

Algoritmus zbehne v čase  $O(mT_i + mT_e)$ , kde  $T_i$  odpovedá času na vloženie prvku a  $T_d$  odpovedá času na vybranie najmenšieho prvku.

To znamená, že zložitosť algoritmu závisí od zložitosti operácií *Insert* a *ExtractMin*. Na riedke grafy je obecné v praxi najvýhodnejšie použiť binárnu haldu, ktorej obe operácie trvajú  $O(\log n)$  a celkový čas je  $O(m \log n)$ . Prehľad štruktúr aj so zložitostami operácií *Insert* a *ExtractMin* sa nachádza napr. v [4].

## 2.2.2 Halda na mriežkovom grafe

Nakoľko mriežkový graf je veľmi špeciálny typ grafu, vieme niektoré jeho vlastnosti využiť na to, aby sme vytvorili štruktúru, ktorá zvládne obe operácie v konštantnom čase.

Na konštrukciu tejto štruktúry (viď. [11]) budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

**Veta 2.** *Pokiaľ sme v Dijkstrovom algoritme uzavreli vrchol  $u$  so vzdialenosťou  $d(u)$  a najkratšia hrana v grafe má dĺžku  $\epsilon$ , tak môžeme taktiež uzavrieť všetky vrcholy  $v$  so vzdialenosťami  $d(v) \in (d, d + \epsilon)$ .*

*Dôkaz.* Do haldy vieme pridávať len vrcholy so vzdialenosťami aspoň  $d + \epsilon$  (kratšia hrana tam už nie je), ale tie už cestu k vrcholom so vzdialenosťami  $d_v \in (d, d + \epsilon)$  skrátiť nemôžu.  $\square$

**Dôsledok 1.** *Keď uzavrieme vrchol so vzdialenosťou  $d_u$ , môžeme uzavrieť aj vrcholy so vzdialenosťami menšími, ako  $d_u + \epsilon$  pričom poradie je nezávislé od skutočnej vzdialenosti vrcholov.*

**Príklad 2.** *Dĺžka  $\epsilon$  najkratšej hrany v mriežkovom grafe je 1. Je to dĺžka akejkoľvek vodorovnej, alebo zvislej hrany. Keď teda uzavrieme vrchol so vzdialenosťou  $d(u)$ , môžeme uzavrieť aj vrcholy so vzdialenosťami menšími, ako je  $d(u) + 1$  a to v ľubovoľnom poradí.*

Tieto skutočnosti vieme výborne využiť pri konštrukcii štruktúry zvanej *priehradková halda*. Tá, využívajúc vyššie uvedenú vetu, uzatvára a pridáva vrcholy bez porušenia akejkoľvek konzistencie behu algoritmu.

## 2.2.3 Popis haldy

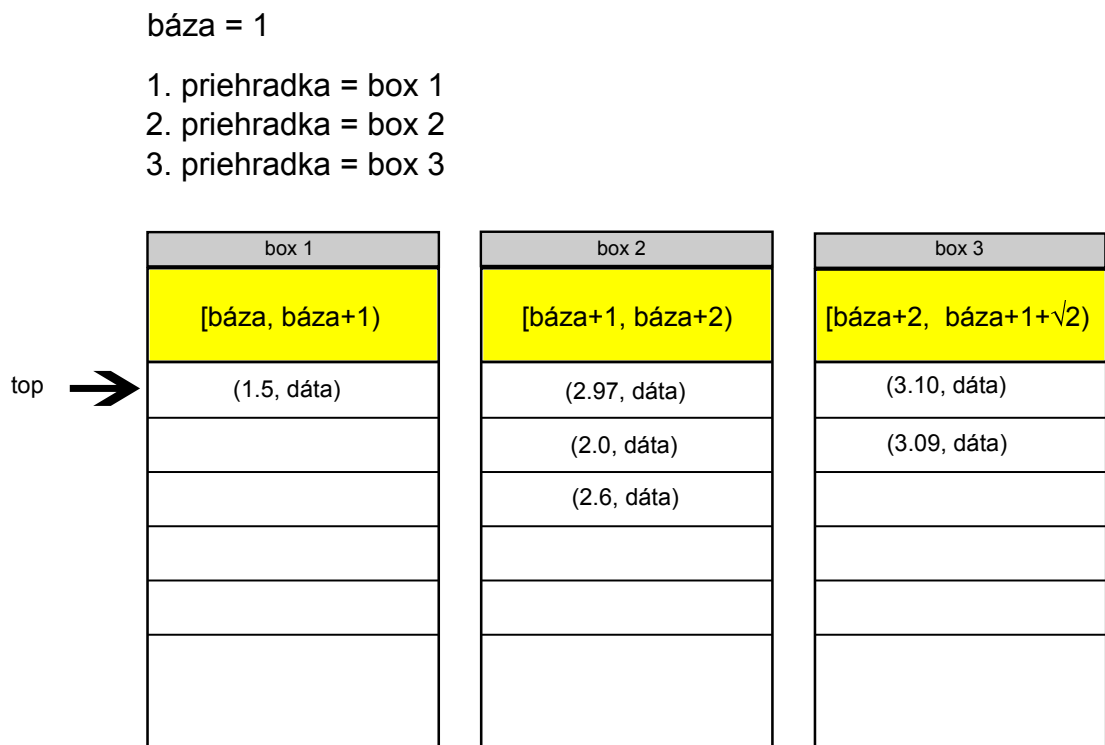
Najprv popíšeme fungovanie haldy a graficky znázorníme jej operácie. Neskôr dokážeme, že keď túto haldu použijeme v Dijkstrovom algoritme, tak nám bude vracaať korektné výsledky.

Majme haldu s tromi priehradkami (nazvime ju *BucketHeap*), pričom rozsah jednej priehradky je ostro menší ako 1. Prvá priehradka uchováva prvky s rozsahom vzdialeností  $[b, b + 1)$ , druhá  $[b + 1, b + 2)$  a tretia  $[b + 2, b + 1 + \sqrt{2})$  pre danú bázu  $b$ . Pre jednoduchšiu implementáciu  $b \in \mathbb{N}$ . Operácia *push*((*dist*, *data*)) vloží



do haldy prvok so vzdialenosťou *dist* s pomocnými dátami *data*. Operácia *pop()* vracia ľubovoľný element z prvej priehradky. Pre jednoduchšiu implementáciu budeme mať na začiatku smerník na prvý prvok prvej priehradky a po vyhození najmenšieho prvku tento smerník jednoducho inkrementujeme, kým to bude možné. Keď už v prvej priehradke nezostane žiaden prvok a zavoláme operáciu *pop()*, vykoná sa nasledujúca operácia: druhú priehradku presunieme na miesto prvej, tretiu na miesto druhej a prvú dáme namiesto tretej.

Ilustrujme si to na obrázkových príkladoch. Príklad troj-priehradkovej haldy vidíme na obrázku 2.1. Halda uchováva premennú *baza* definujúcu bázu, od ktorej sa rozsahy priehradok odvíjajú. Okrem nej, uchováva tri smerníky na tri po sebe idúce priehradky a smerník na vrchol haldy, zvaný *top*.



Obr. 2.1: Priehradková štruktúra s niekoľkými prvkami.

Pridanie dvoch prvkov je znázornené na obrázku 2.2. Priehradka, do ktorej má byť prvok s danou vzdialenosťou vložený sa vypočíta podľa vzorca:  $\lfloor vzdialenosťPrvku - baza + 1 \rfloor$ .

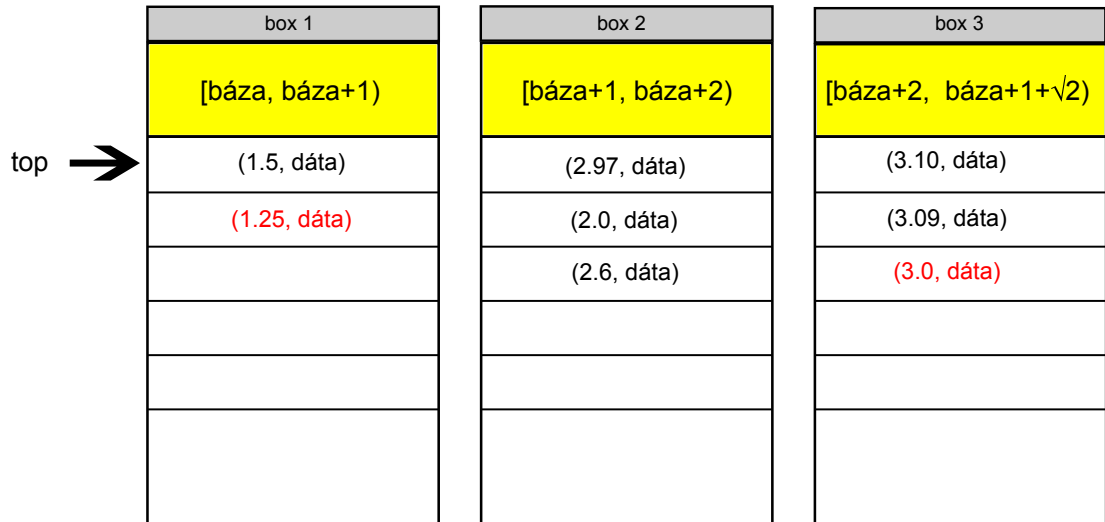
Zmazanie prvku vidíme na obrázku 2.3. Celé zmazanie spočíva v inkrementácii ukazovateľa na vrchol haldy.

Pokiaľ sa v priehradke nachádza jediný prvok a ten chceme vybrať, tak nám inkrementácia premennej *top* v priehradke nepostačí. Musíme prehodiť priehradky. Druhú priehradku presunúť na miesto prvej, tretiu na miesto druhej a prvú umiestniť nakoniec. Viď obrázok 2.4. Nakoniec musíme zvýšiť základnú vzdialenosť. Zmena poradia týchto priehradok sa samozrejme uskutočňuje cez prehodenie smerníkov. Keďže máme konštantný počet priehradok, tak aj táto operácia trvá konštantný čas.

báza = 1

1. priehradka = box 1
2. priehradka = box 2
3. priehradka = box 3

element1 = (3.0, dáta)  
 element2 = (1.25, dáta)  
 insert (element1)  
 insert (element2)

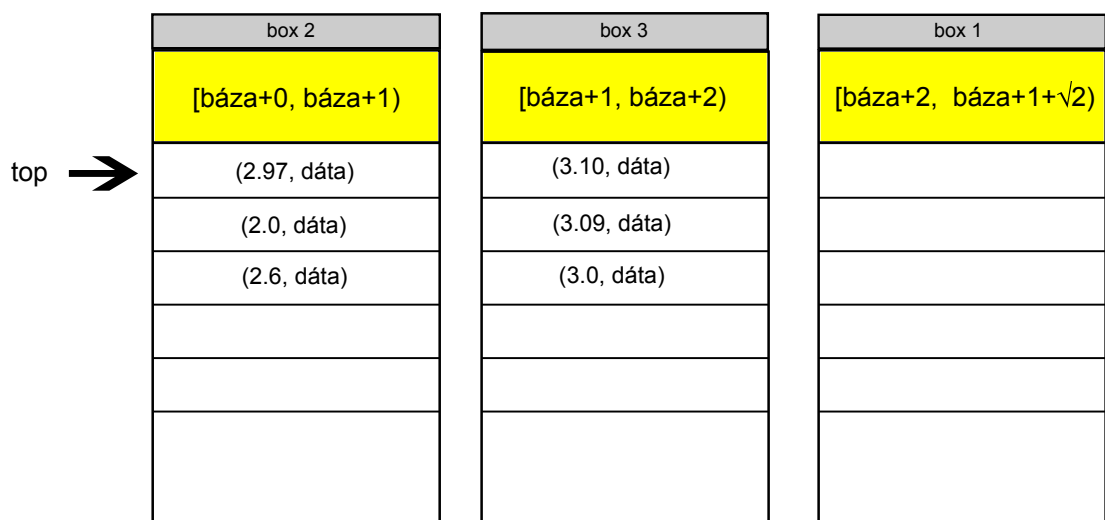


Obr. 2.2: Priehradková štruktúra po vložení dvoch vrcholov so vzdialenosťami 1.25 a 3.0. Prvky sa vkladajú stále na koniec priehradok.

báza = 2 (báza + 1)

1. priehradka = box 2
2. priehradka = box 3
3. priehradka = box 1

pop()



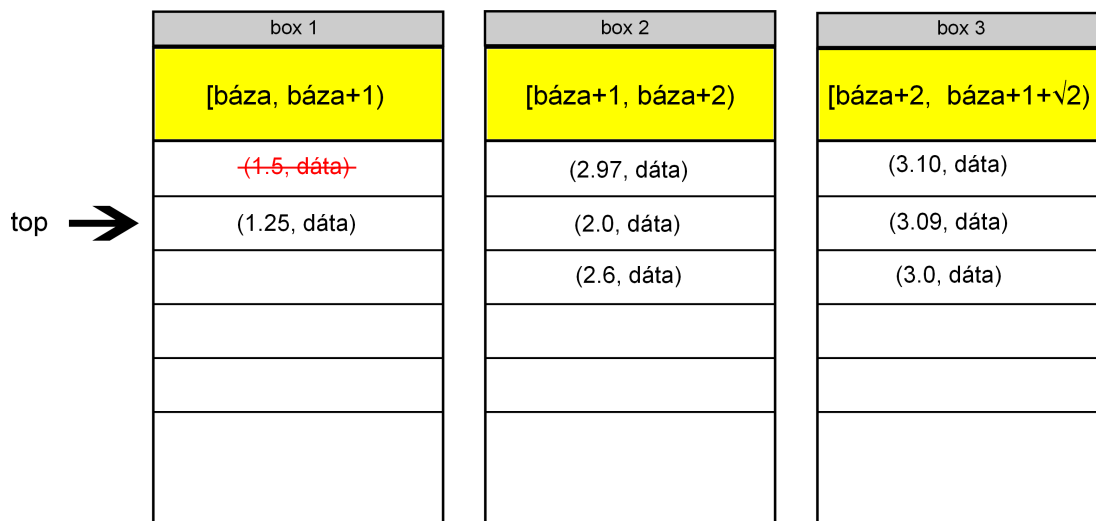
Obr. 2.4: Zmazanie posledného prvku prvej priehradky vedie k zmene poradia priehradok

**Veta 3** (korektnosť priehradkovej štruktúry). *Dijkstrov algoritmus používajúci haldu BucketHeap vráti korektné najkratšie vzdialenosti do vrcholov grafu.*

báza = 1

1. priehradka = box 1
2. priehradka = box 2
3. priehradka = box 3

pop()



Obr. 2.3: Vybranie prvku — Inkrementujeme smerník na vrchol priehradky.

*Dôkaz.* Rozsah každej priehradky je ostro menší ako 1. To znamená, že podľa vety 2 a príkladu 2 operácia *pop()* vracia prvky v poradí, ktoré nepokazí chod algoritmu.

Treba ešte dokázať, že tri priehradky postačujú. To je zrejmé, pretože keď vyberieme vrchol z prvej priehradky, tak jeho vzdialenosť je v rozsahu  $[b, b + 1)$ . Keď prechádzame jeho susedné vrcholy, tak najdlhšia hrana je  $\sqrt{2}$  a teda vzdialenosť k najvzdialenejšiemu susednému vrcholu je ostro menšia, ako  $b + 1 + \sqrt{2}$ , čo sa zmestí do intervalu poslednej priehradky.  $\square$

## 2.3 A\*

Ďalší algoritmus, ktorým sa budeme zaoberať, je algoritmus A\* [5] prvýkrát popísaný v roku 1968.

Tento algoritmus vychádza z Dijkstrovho algoritmu a je mu veľmi podobný. Hlavný rozdiel medzi týmito algoritmami je, že kým Dijkstrov algoritmus vyberá z haldy vrcholy s neklesajúcou vzdialenosťou  $d(v)$  od počiatku, tak algoritmus A\* vyberá prvky s neklesajúcou vzdialenosťou  $f(v) := d(s, v) + h(v, t)$ , kde  $h(v, t)$  značí heuristickú funkciu, ktorá je dolným odhadom vzdialenosti od vrcholu  $v$  do cieľa  $t$ . Obrátene, Dijkstrov algoritmus si vieme predstaviť ako algoritmus A\*, kde  $\forall v \in G : h(v, t) = 0$ .

Použitá heuristická funkcia má dopad na počet prehľadaných vrcholov a teda do zásadnej miery ovplyvňuje výkon algoritmu.

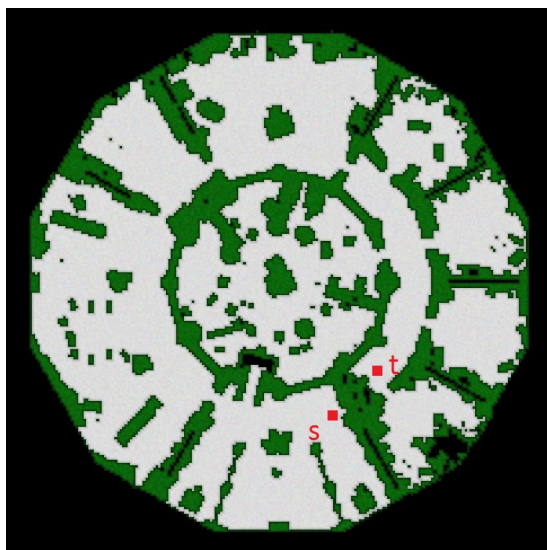
### 2.3.1 Heuristická funkcia

Heuristická funkcia nemôže byť ľubovoľná. Funkcia musí predstavovať tzv. *prípustný potenciál*. Podrobnejší popis sa nachádza napr. v [4] [6] [7]. Ďalej sa budeme venovať len funkciám, ktoré túto podmienku splňujú.

Najčastejšie heuristické funkcie sú tieto:

- Euklidovská vzdialenosť.
- Trojuholníková nerovnosť, tzv. *landmarks*.

**Euklidovská vzdialenosť** je najjednoduchšie implementovateľná heuristická funkcia. Na jednoduchých grafoch s malým počtom prekážok vracia relatívne dobré výsledky. Problém nastáva na grafoch, kde začiatok a koniec cesty sú geometricky blízko seba, hoci ich skutočná vzdialenosť je veľká. Príklad vidíme na obrázku 2.5.

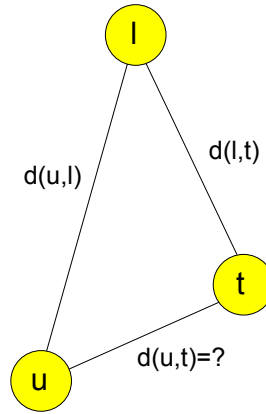


Obr. 2.5: Mapa, na ktorej euklidovská heuristika zlyhá.

**Landmarks a trojuholníková nerovnosť** Nevýhoda použitia euklidovskej heuristickkej funkcie je na obecných mriežkových grafoch zjavná. To motivovalo vymyslieť heuristiku, ktorá lepšie odráža vzdialenosti v grafe.

Jednou z týchto heuristík je počítanie dolného odhadu pomocou tzv. *landmarks*. Landmarks sú vybrané vrcholy v grafe, z ktorých je následne prepočítaná najkratšia vzdialenosť do všetkých ostatných vrcholov grafu. Keďže jeden prechod grafu vieme Dijkstrovým algoritmom s priehradkami vykonať za lineárny čas, predpočítanie  $k$  landmarkov trvá  $O(kn)$ , kde  $n$  značí počet vrcholov grafu.

Na výpočet dolného odhadu vzdialenosti z vrcholu  $u$  do vrcholu  $t$  cez landmark  $l$  využijeme trojuholníkovú nerovnosť. Vďaka nej platí  $d(u, l) + d(l, t) > d(u, t)$  a taktiež  $d(l, t) + d(u, t) > d(u, l)$ . Z toho vyplýva  $d(u, t) > \max\{d(l, t) - d(l, u), d(l, u) - d(l, t)\}$ , kde  $d(x, y)$  označuje najkratšiu vzdialenosť z bodu  $x$  do bodu  $y$ . Pre väčšiu prehľadnosť označme dolný odhad vzdialenosti  $d(u, t)$  získaný výpočtom cez landmark  $l$ , ako  $d_l(u, t)$ . Túto skutočnosť zobrazuje obrázok 2.6.



Obr. 2.6: Hľadáme dolný odhad najkratšej cesty z  $u$  do  $t$ , použijúc landmark  $l$

Pri použití viacerých landmarkov (nazvime ich  $l_1, \dots, l_k$ ) vieme zistiť kvalitnejší dolný odhad vzdialenosti, ktorý získame ako maximum dolných odhadov cez tieto landmarky. Konkrétne  $d(u, t) > \max_{i \in 1, \dots, k} \{d_{l_i}(u, t)\}$ .

**Možnosti voľby landmarkov** Pri voľbe landmarkov zvažujeme dva faktory: počet a rozmiestnenie.

**Príklad 3** (na počte záleží). *Pokiaľ zvolíme málo landmarkov, tak dolný odhad nebude presný. Pokiaľ ich zvolíme priveľa, tak prepočet vzdialenosti cez každý landmark pre každý vrchol zaberie veľa času.*

**Príklad 4** (na rozmiestnení záleží). *Pokiaľ zvolíme všetky landmarky hneď pri sebe, tak heuristika nám nebude vracať dostatočne presné dolné odhady na vzdialenosť vrcholov, ktoré sú ďaleko od landmarkov.*

**Poznámka 5.** *Experimentálne sme zistili, že algoritmus funguje najrýchlejšie, keď používame 6 landmarkov. Aby landmarky dávali kvalitné dolné odhady (a teda aby nanastal problém popísaný v poznámke 4), získali sme ich pomocou tohto algoritmu: náhodne sme zvolili 3 vrcholy grafu a prehlásili sme ich za landmarky. Potom sme v týchto vrcholoch spustili Dijkstrov algoritmus, ktorým sme našli 3 najvzdialenejšie body od týchto landmarkov. Tie sme tiež prehlásili za landmarky.*

# Časť II

## Implementácia

## 3. Súťažný algoritmus

Súťažný algoritmus bude využívať poznatky popísané v predošlej kapitole. Navyše zavedieme koncept tzv. *mriežkového grafu bez prekážok*, ktorý umožní mierne zrýchliť výkon algoritmu v mnohých prípadoch, väčšinou však pri trasách, kde počiatočný a koncový bod ležia relatívne „blízko seba“.

### 3.1 Mriežkový graf bez prekážok

Nie všetky najkratšie cesty musia obchádzať veľa prekážok. V mnohých prípadoch neleží medzi počiatočným a koncovým bodom žiadna prekážka, a teda cesty sú veľmi priamočiare. To sa pokúsime využiť na zlepšenie výkonu algoritmu. Pre ľahšie vyjadrovanie si zavedme definíciu *mriežkového grafu bez prekážok*.

**Definícia 7.** *Mriežkový graf je bez prekážok, pokiaľ medzi každými dvoma susednými vrcholmi existuje hrana.*

Kvôli lepšej prehľadnosti a stručnosti budeme mriežkový graf bez prekážok nazývať aj *obdĺžnik*. Intuitívne, kvôli jeho vizuálnej predstave. Jeho obsahom bude počet vrcholov patriacich do tohto obdĺžniku.

Majme mriežkový graf bez prekážok a hľadáme najkratšiu cestu medzi bodmi  $s = (x_s, y_s), t = (x_t, y_t)$ . V tomto prípade vieme nájsť najkratšiu cestu veľmi jednoducho.

---

**Algoritmus 2** Nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma bodmi  $s$  a  $t$  na mriežkovom grafe bez prekážok

---

**Vstup:**  $s = (x_s, y_s), t = (x_t, y_t)$

**Výstup:** *path*

```
1: path.append(( $x_s, y_s$ )) {pridám počiatočok}
2: while  $x_s \neq x_t \vee y_s \neq y_t$  do
3:   if  $x_s < x_t$  then
4:      $x_s \leftarrow x_s + 1$ 
5:   else if  $x_s > x_t$  then
6:      $x_s \leftarrow x_s - 1$ 
7:   end if
8:   if  $y_s < y_t$  then
9:      $y_s \leftarrow y_s + 1$ 
10:  else if  $y_s > y_t$  then
11:     $y_s \leftarrow y_s - 1$ 
12:  end if
13:  path.append(( $x_s, y_s$ ))
14: end while
```

---

Jednoducho povedané: keď sa počiatočný a koncový bod líšia v jednej súradnici, tak sa posúvame priamočiaro, keď sa líšia v oboch, tak sa posúvame šikmo.

Pokiaľ si zadefinujeme  $dx := |x_t - x_s|$  a  $dy := |y_t - y_s|$ , tak počet vrcholov, ktorými cesta prechádza vieme zhora odhadnúť, ako  $\max(dx, dy)$ . Jej vzdialenosť

vieme zistiť v čase  $O(\max(dx, dy))$ . Na zistenie vzdialenosti v každom kroku nám postačí konštantná pamäť.

Pokiaľ sa počiatočný a koncový bod cesty nachádza v jednom obdĺžniku, tak vieme pomocou tohto algoritmu veľmi rýchlo nájsť najkratšiu cestu. Jediným problémom ostalo rozdeliť mriežkový graf na tieto obdĺžniky.

## 3.2 Hľadáme obdĺžniky

Našou snahou je dekomponovať mriežkový graf do obdĺžnikov tak, aby bola čo najväčšia pravdepodobnosť toho, že dva náhodne zvolené body (začiatok a koniec) ležia v jednom obdĺžniku. Čiže aby sa dalo toto zrýchlené hľadanie najkratšej cesty použiť v najväčšom možnom počte prípadov.

### 3.2.1 Proporcie obdĺžnikov

Dôležitou otázkou je, na akých vlastnostiach obdĺžnikov záleží. Uvažujme nasledujúci motivačný príklad.

**Príklad 5.** *Majme na mriežkovom grafe nájsť dva obdĺžniky, ktoré dovedna pokrývajú 10 vrcholov. Predstavme si tieto dva prípady. V prvom prípade prvý pokrýva 9 vrcholov, druhý 1. V druhom prípade obdĺžniky pokrývajú 6 vrcholov a 4 vrcholy. Chceme maximalizovať pravdepodobnosť toho, aby pri voľbe dvoch náhodných bodov boli oba body v rovnakom obdĺžniku.*

Úlohu vieme zobecniť na klasickú pravdepodobnostno-optimalizačnú úlohu.

**Príklad 6.** *Máme  $k$  ekvivalenčných tried na množine s  $n$  prvkami. Ako zvoliť ekvivalenčné triedy tak, aby pri voľbe dvoch náhodných prvkov bola pravdepodobnosť toho, že oba prvky budú v tej istej ekvivalenčnej triede čo najvyššia?*

**Poznámka 6.** *Ekvivalenčnú triedu predstavuje obdĺžnik a množinu predstavuje množina vrcholov grafu. Alternatívne sa môžeme na úlohu pozerať ako na problém farbenia  $n$  guľčiek pomocou  $k$  farieb.*

Zapišme túto úlohu formálne. Majme  $n$ -prvkovú množinu

$$Prv = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$k$ -prvkovú množinu ekvivalenčných tried

$$Ek = \{ek_1, \dots, ek_k\}.$$

veľkosť triedy  $\|ek_i\|$  označme  $k_i$  a zavedme funkciu  $f: Prv \rightarrow Ek$  ktorá roztriedi prvky do ekvivalenčných tried.

Označme výberový priestor

$$\Omega = \{(x_a, x_b) | x_a, x_b \in Prv, a \neq b\}.$$

Udalosťou  $A_i$  nazveme jav, v ktorom oba prvky patria do tej istej ekvivalenčnej triedy  $ek_i$ , teda

$$A_i = \{(x_a, x_b) | x_a, x_b \in Prv, a \neq b, f(x_a) = f(x_b) = ek_i\}.$$



Jav

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

teda nastáva práve vtedy, keď oba vybrané prvky patria do rovnakej triedy.

Úlohou je navrhnúť funkciu  $f$  tak, aby pravdepodobnosť  $P[A]$  bola čo najvyššia. Keďže udalosti  $A_i$  sú nezlučiteľné, môžeme písať

$$P[A] = P\left[\bigcup_{i \in Ek} A_i\right] = \sum_{i \in Ek} P[A_i].$$

Ak si pravdepodobnosť každého javu rozpíšeme, dostaneme

$$\sum_{i \in Ek} P[A_i] = \sum_{i=1}^k \frac{\binom{k_i}{2}}{\binom{|Prv|}{2}}.$$

Keďže chceme nejak rozvrhnúť prvky v triedach  $ek_i$ , a menovateľ je konštanta, môžeme ho vynechať.

Maximalizujeme hodnotu výrazu

$$\sum_{i=1}^k \binom{k_i}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{k_i!}{(k_i-2)!2!} = \sum_{i=1}^k \frac{k_i(k_i-1)}{2}.$$

Po vyškrtnutí konštanty a roznásobením sme dostali nasledujúcu optimalizačnú úlohu: maximalizovať

$$\sum_{i=1}^k k_i^2 - k_i$$

za podmienok

$$\sum_{k=1}^k k_i = n, k_i \in \mathbb{N}_0.$$

Sumu si vieme rozpísať ako

$$\sum_{i=1}^k k_i^2 - k_i = \sum_{i=1}^k k_i^2 + \sum_{i=1}^k -k_i.$$

Druhá suma sa nasčíta na  $-n$ , čo je konštanta, takže nám stačí maximalizovať

$$\sum_{i=1}^k k_i^2.$$

Teraz nám už len zostáva použiť nerovnosť

$$(a+b)^2 \geq a^2 + b^2,$$

ktorá platí pre  $a, b \geq 0$ , z ktorej jasne vyplýva, že potrebujeme spraviť ľubovoľné  $k_i$  čo najväčšie a teda aj ekvivalenčné triedy musia byť čo najväčšie.

Potrebujeme teda nájsť obdĺžniky s najväčším možným obsahom. V programe tento problém rieši trieda Colorizator. Tá v grafe nájde najväčší obdĺžnik a „ofarbí“ ho jednou farbou. Na zvyšnom neofarbenom grafe znovu hľadá najväčší obdĺžnik a ofarbí ho inou farbou, atď. Farbenie skončí, keď obsah najväčšieho obdĺžnika je menší ako 500.

### 3.2.2 Nájdenie najväčšej jednotkovej podmatice

Ako sme si v úvode povedali, mriežkovú mapu vieme reprezentovať ako maticu, čiže problém môžeme ekvivalentne zapísať ako problém hľadania najväčšej jednotkovej podmatice. Tento problém má riešenie v čase lineárnom od počtu vrcholov, takže nájdenie  $k$  najväčších jednotkových matíc trvá  $O(k \cdot n)$ , kde  $n$  je počet vrcholov matice.

Algoritmus je popísaný v blogposte od A. Agrawala [13]. Slovný popis algoritmu 3: V prvom prechode maticou si u každého vrcholu zapamätáme počet jedničiek naľavo od neho, vrátane daného vrcholu. Tento počet jedničiek môžeme nazvať aj výškou riadku vzhľadom k danému vrcholu. Výšku riadku vzhľadom k  $p$  označujeme v programe *nalavoOdPrvku(p)*. Tento prechod trvá lineárny čas.

V druhom prechode algoritmus prechádza zaradom všetky stĺpce zľava doprava. V prechádzanom stĺpci prejde každý vrchol  $v$  a zisťuje počet vrcholov nad (uloží do *DlзкаSekvencieNahor*) a pod (*DlзкаSekvencieNadol*) vrcholom  $v$ , ktoré majú výšku riadku aspoň *nalavoOdPrvku(v)*.

Obsah najväčšej podmatice vzhľadom k  $v$  teda vypočítame ako *nalavoOdPrvku(v) · (sequenceSizeUp + 1 + sequenceSizeDown)*.

---

**Algoritmus 3** Nájdenie najväčšej jednotkovej podmatice v matici  $m \times n$ 

---

**Vstup:** matica  $M$  rozmerov  $m \times n$  nad telesom  $\mathbb{Z}_2$

**Výstup:** polia  $DlзкаSекvencieNadol$  a  $DlзкаSекvencieNahor$ , z ktorých vieme vypočítať veľkosť podmatice

```
1: for all prvok  $p$ ,  $p \in M$  do
2:   if  $p = 0$  then
3:      $nalavoOdPrvku(p) \leftarrow 0$ 
4:   else
5:      $nalavoOdPrvku(p) \leftarrow$  najdlhšia súvislá postupnosť jednotiek končiaca
       prvkom  $p$ 
6:   end if
7: end for
8: for stĺpec  $s$ ,  $s \in M$  do
9:   Vytvor nový zásobník na dvojice čísel (riadok,  $nalavoOdPrvku$ )
10:  // prejdeme stĺpec zhora nadol
11:  for riadok  $r$ ,  $r \in M$ , prechádzaný zhora nadol do
12:     $p \leftarrow (s, r)$ 
13:    while Zásobník je neprázdny do
14:      vyberiem prvok  $top$  z vrcholu zásobníka
15:      if  $top.nalavoOdPrvku > nalavoOdPrvku(p)$  then
16:         $prvokZoZasobnika \leftarrow (top.r, s)$ 
17:         $DlзкаSекvencieNadol(prvokZoZasobnika) = r - prvokZoZasobnika.r$ 
           -1
18:      else
19:        Vložím prvok  $prvokZoZasobnika$  do zásobníka
20:        break
21:      end if
22:    end while
23:    Do zásobníka vložím dvojicu  $(r, nalavoOdPrvku(p))$ 
24:  end for
25:  // prešli sme stĺpec, teda skončíme
26:  while Zásobník je neprázdny do
27:    vyberiem prvok  $top$  z vrcholu zásobníka
28:     $prvokZoZasobnika \leftarrow (top.r, s)$ 
29:     $DlзкаSекvencieNadol(prvokZoZasobnika) = m - prvokZoZasobnika.r - 1$ 
30:  end while
31: end for
```

---

---

**Algoritmus 4** pokračovanie

---

```
// prejdem stĺpec zdola nahor
for riadok  $r$ ,  $r \in M$ , prechádzaný zdola nahor do
   $p \leftarrow (s, r)$ 
  while Zásobník je neprázdny do
    vyberiem prvok  $top$  z vrcholu zásobníka
    if  $top.nalavoOdPrvku > nalavoOdPrvku(p)$  then
       $prvokZoZasobnika \leftarrow (top.r, s)$ 
       $DlзкаSекvencieNahor(prvokZoZasobnika) = prvokZoZasobnika.r - r - 1$ 
    else
      Vložíм prvok  $prvokZoZasobnika$  do zásobníka
      break
    end if
  end while
  Do zásobníka vložíм dvojicu  $(r, nalavoOdPrvku(p))$ 
end for
// prešli sme stĺpec, teda skončíme
while Zásobník je neprázdny do
  vyberiem prvok  $top$  z vrcholu zásobníka
   $prvokZoZasobnika \leftarrow (top.r, s)$ 
   $DlзкаSекvencieNahor(prvokZoZasobnika) = prvokZoZasobnika.r$ 
end while
```

---

## 4. Testovanie a výsledky

### 4.1 Kritériá a popis testovania

#### 4.1.1 Vstupné dáta

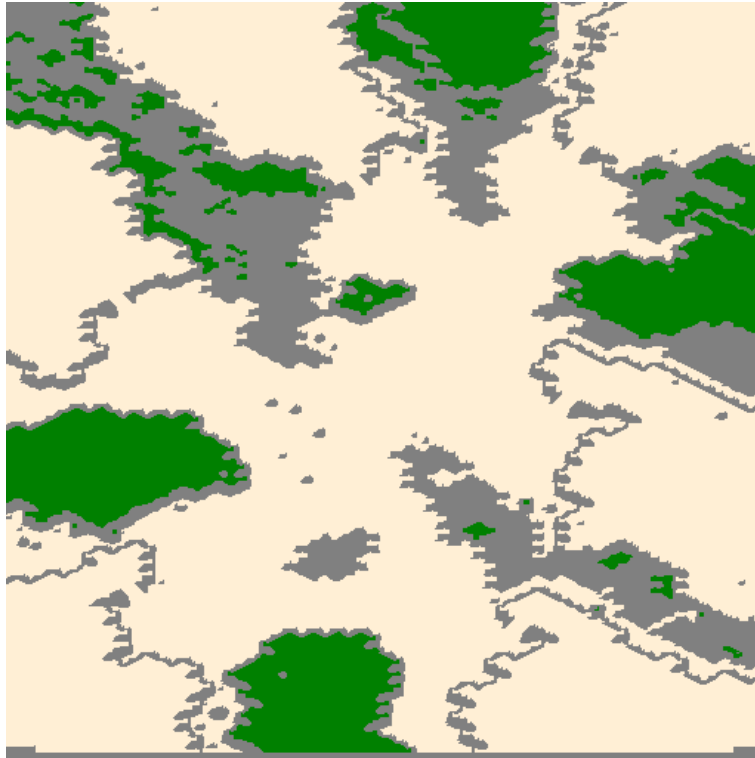
Častým problémom pri vzájomnom porovnávaní algoritmov je nájsť testovaciu vzorku, ktorá by otestovala beh algoritmu na širokej škále grafov. Ako bolo v úvode spomenuté, súťaž *Grid-Based Path Planning Competition* poskytuje množstvo máp rôznych typov a rozmerov, na ktorých sa algoritmy dajú testovať. Formát máp popisuje článok [10].

Programy boli testované na troch mapách. Ich grafická reprezentácia bola vytvorená pomocou programu T-map (popis programu a významu farieb sa nachádza v prílohe A) a môžeme ju vidieť na obrázkoch Obr. 4.1, Obr. 4.2 a Obr. 4.3. Pripomeňme si, že žltou farbou je označená priechodná oblasť; ostatné oblasti sú nepriechodné.

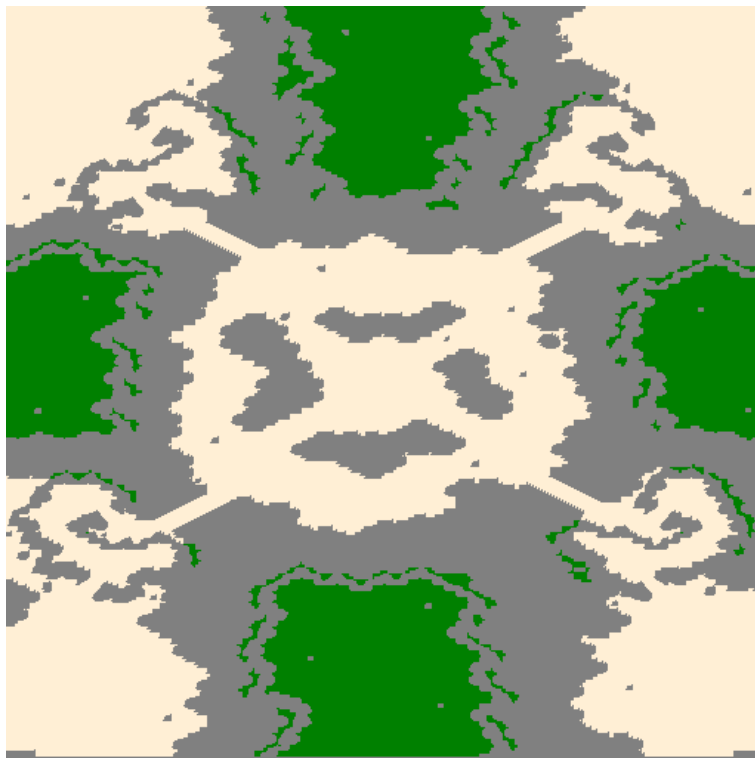
Každá mapa bola testovaná oproti dvom množinám vstupov. Každá z týchto množín obsahuje približne 200 dopytov na najkratšiu vzdialenosť medzi dvojicou zadaných bodov. Jedna z tých dvoch množín obsahuje dvojice bodov, ktoré ležia relatívne „blízko“ seba, druhá množina obsahuje dvojice bodov, medzi ktorými je vzdialenosť väčšia.

Konkrétne máme tieto 4 vstupné súbory:

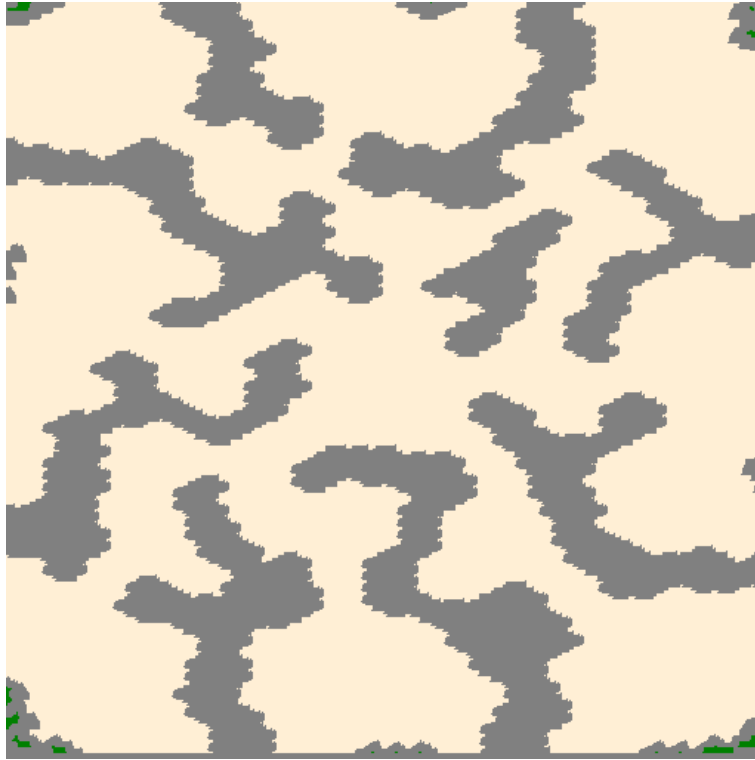
- AS — vstupný súbor k mape Aftershock obsahujúci „blízke“ body.
- AL — vstupný súbor k mape Aftershock obsahujúci vzdialenejšie body.
- BS — vstupný súbor k mape Brushfire obsahujúci „blízke“ body.
- BL — vstupný súbor k mape Brushfire obsahujúci vzdialenejšie body.
- GS — vstupný súbor k mape BigGameHunters obsahujúci „blízke“ body.
- GL — vstupný súbor k mape BigGameHunters obsahujúci vzdialenejšie body.



Obr. 4.1: Graf „Aftershock“ má rozmery  $512 \times 512$



Obr. 4.2: Graf „Brushfire“ má rozmery  $512 \times 512$



Obr. 4.3: Graf „BigGameHunters“ má rozmery  $512 \times 512$

#### 4.1.2 Testovacie kritériá

Algoritmy testujeme podľa nasledovných kritérií:

- Rýchlosť nájdenia cesty.
- Dĺžka trasy.
- Počet prehľadaných vrcholov.

#### 4.1.3 Testované algoritmy

Testovať budeme nasledujúce algoritmy:

- Dijkstrov algoritmus nad binárnou haldou (označíme DH).
- Dijkstrov algoritmus nad priehradkovou haldou (označíme DBQ).
- A\* používajúci 6 landmarkov (označíme A\*).
- A\* používajúci 6 landmarkov a taktiež obdĺžnikovú dekompozíciu, popísanú v kapitole 3 (označíme A\*+).
- Anderson – s prehľadom najrýchlejší algoritmus, ktorý vyhral súťaž (označíme And).

#### 4.1.4 Kompilácia

Kód bude kompilovaný kompilátorom g++ s direktívou `-O3`, čo zaručuje maximálnu rýchlosť a efektivitu behu programu.

## 4.2 Výsledky

Tabuľka 4.1 popisuje čas v sekundách, ktorý strávil daný algoritmus hľadaním cesty medzi všetkými dvojicami daného vstupu. Z tabuľky môžeme vypočítavať zaujímavé správanie algoritmov. Najrýchlejší je algoritmus Anderson, ktorý je zatiaľ najrýchlejším algoritmom v tejto súťaži. Ďalej vidíme, že dijkstrov algoritmus je na niektorých mapách a vstupoch niekoľkonásobne rýchlejší ako  $A^*$  a na niektorých zasa pomalší. Dekompozícia mapy na obdĺžniky zrýchlila algoritmus  $A^*$  len keď bola vzdialenosť medzi počiatočným a koncovým bodom dostatočne malá.

	AS	AL	BS	BL	GS	GL
DH	0.372839	9.978722	0.356326	5.425334	0.485236	14.354057
DBQ	0.506893	11.505914	0.329444	4.315670	0.467251	11.990992
$A^*$	0.263951	7.481771	0.283890	15.599357	0.393476	9.667814
$A^*+$	0.182731	7.502437	0.197504	15.670339	0.257229	9.694499
And	0.000543	0.002659	0.000359	0.001747	0.000673	0.002197

Tabuľka 4.1: Časy behu algoritmov nad zadanými množinami vstupov. Uvedené v sekundách

Tabuľka 4.2 uvádza súčet dĺžok najkratších ciest pre danú testovanú množinu. Vyplýva z nej, že rýchly algoritmus Anderson zďaleka nie je optimálny a táto neoptimalita sa prejavuje najmä keď je vzdialenosť medzi počiatkom a koncom malá. Ostatné algoritmy vykazujú podobne dobré výsledky.

	AS	AL	BS	BL	GS	GL
DH	8710.17	144046	8731.65	152185	8744.62	128398
DBQ	8710.17	144046	8731.65	152185	8744.62	128398
$A^*$	8743.7	144527	8762.74	153288	8774.98	128885
$A^*+$	8738.43	144527	8758.98	153288	8769.46	128885
And	22057.2	144854	22010	156927	27717.8	135411

Tabuľka 4.2: Súčet dĺžok ciest pre dané dvojice počiatkov a koncov

Posledná tabuľka 4.3 popisuje počet vrcholov grafu, ktoré algoritmus prehľadal, keď hľadal najkratšiu cestu. Táto veličina bola zisťovaná len z algoritmov autora. Z tabuľky vyplýva, že algoritmus  $A^*$  prehľadáva menej vrcholov, ako dijkstrov algoritmus. Taktiež z nej vyplýva, že dekompozícia grafu na obdĺžniky je pri vzdialených vrchoch zbytočná.

	AS	AL	BS	BL	GS	GL
DH	1067195	35126970	926032	19103546	986303	35325535
DBQ	1347329	39028967	1176089	20528587	1255147	40707226
$A^*$	350839	13854096	624561	41883515	637189	17936238
$A^*+$	250022	13854096	465311	41883515	407731	17936238

Tabuľka 4.3: Výsledky obsahujúce počet navštívených vrcholov



# Záver

Práca sa zaoberala hľadaním ciest na mriežkových grafoch s dôrazom na rýchlosť nájdenia cesty a dĺžku nájdenej cesty.

V prvej časti práca podala prehľad najdôležitejších algoritmov používaných pri hľadaní ciest. Kľúčovým algoritmom je Dijkstrov algoritmus. Postupnými zlepšeniami a optimalizáciami na mriežkové grafy bol následne skonštruovaný vylepšený Dijkstrov algoritmus bežiaci v lineárnom čase. Ďalším dôležitým algoritmom je algoritmus  $A^*$ . V práci bol popísaný a naprogramovaný s rôznymi heuristikami.

V druhej časti bol zavedený nový pohľad na analýzu mriežkového grafu — jeho dekompozícia na obdĺžniky. Pomocou nej bolo možné na grafoch s veľkým počtom hrán vyhľadávať cestu efektívnejšie, ako doterajšími spôsobmi. Algoritmus navrhnutý v tejto časti vychádza z Algoritmu  $A^*$ , používa landmarky a taktiež túto dekompozíciu na obdĺžniky.

Vo štvrtej kapitole sme spravili porovnanie doterajších algoritmov s týmto novým algoritmom. Vo výsledkoch sme zistili, že tento algoritmus poskytuje viditeľné zrýchlenie, pri vyhľadávaní cesty medzi vrcholmi, ktorých vzdialenosť je malá. Z tohto dôvodu navrhujeme začleniť túto metódu do ostatných vyhľadávacích algoritmov, ktoré často hľadajú cestu medzi blízkymi bodmi v mriežkových grafoch s veľkým množstvom hrán.

Práca taktiež ukázala, že nižšia asymptotická zložitosť neznamená vyššiu reálnu rýchlosť behu. Taktiež poukázala na to, že hoci algoritmus  $A^*$  vie orezať počet prehľadaných vrcholov až na tretinu, neznamená to ešte aj vyššiu celkovú rýchlosť behu.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 8:128–140, 1741.
- [2] E. W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with graphs*. Numerische Mathematik, 1(1):269–271, 1959.
- [3] R. W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Commun. ACM*, 5(6):345–, June 1962.
- [4] M. Mareš. *Krajinou grafových algoritmuů*. ITI Series, Prague 2007 [ONLINE]. [CIT. 2013-7-21]. Dostupné z <http://mj.ucw.cz/vyuka/ga/>.
- [5] P. E. Hart, N. J. Nilsson, B. Raphael. Correction to a formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *SIGART Bull.*, (37):28–29, December 1972.
- [6] A. V. Goldberg. *Shortest Path Algorithms: Engineering Aspects*. In Proc. ESAAC '01, Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2001.
- [7] A. V. Goldberg, C. Harrelson. *Computing the Shortest Path: A\* Search Meets Graph Theory*. In Proc. 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 156–165, 2005.
- [8] J. Hartmanis, R. Stearns. *On the computational complexity of algorithms*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 117, 285–306, 1965.
- [9] N. Sturtevant. *GPPC: Grid-Based Path Planning Competition* [ONLINE] 2013. [CIT. 2013-7-21]. Dostupné z: <http://movingai.com/GPPC/>.
- [10] N. Sturtevant. Benchmarks for grid-based pathfinding. *Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, 4(2):144 – 148, 2012.
- [11] A. Goldberg, C. Silverstein. *Implementations of Dijkstra's Algorithm Based on Multi-Level Buckets*. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [12] G. Krasner, S. Pope. A description of the Model-View-Controller user interface paradigm in the smalltalk-80 system. *Journal of Object Oriented Programming*, 1(3):26–49, 1988.
- [13] A. Agrawal. *Find largest sub-matrix with all 1s (not necessarily square)* [ONLINE] 2011. [CIT. 2013-7-21]. Dostupné z <http://tech-queries.blogspot.cz/2011/09/find-largest-sub-matrix-with-all-1s-not.html>

# Prílohy

# A. T-maps — užívateľská dokumentácia

## A.1 Popis programu T-maps

Program T-maps načíta mriežkový graf vo forme znakovej matice a vykreslí ho. K danému grafu môže voliteľne načítať dátový súbor, ktorý obsahuje informácie o behu algoritmu: informáciu o navštívených vrchoch a o najkratšej ceste. Túto maticu aj s dátami vykreslí na obrazovku. Výstup pripomína mapu používanú v počítačových hrách. Zvláda niekoľko ďalších operácií, ako je priblíženie a oddialenie mapy, posúvanie sa po mape a uloženie aktuálne prehliadaného úseku mapy.

## A.2 Formát vstupu a výstupu

Presný formát vstupného súboru s mriežkovým grafom je popísaný v [10] a je zhodný s formátom, ktorý používa algoritmus. Znaková matica obsahuje rôzne znaky reprezentujúce rôzne herné prvky. Strom je reprezentovaný znakom „T“ (tree), voda znakom „W“ (water), priechodná oblasť (a teda znak, ktorý reprezentuje vrchol grafu) znakom „.“, prípadne „S“ (swamp).

Dátový súbor obsahuje dva riadky. Prvý riadok obsahuje medzerou oddelené čísla vrcholov, ktoré ležia na najkratšej ceste. Druhý riadok obsahuje čísla vrcholov, ktoré boli navštívené počas behu algoritmu. Vrcholy sú popísané jedným číslom tak, ako to bolo popísané v poznámke 4.

Výstup môže byť exportovaný do viacerých grafických formátov, medzi ktorými sú GIF, PNG, BMP a JPEG.

## A.3 Vykreslenie znakovej matice

Znaky v matici môžu byť vykreslené dvomi spôsobmi. V takzvanom bichromatickom móde sa na vykreslenie matice použijú dve farby. Svetlejšou farbou sú vykreslené znaky reprezentujúce vrcholy matice (v hrách ide o priechodný terén), tmavšou farbou sú vykreslené znaky, ktoré nerepresentujú žiaden vrchol. Ide o stromy, vodu a podobne.

Pri plnofarebnom vykreslení sú znaky vykreslené nasledovnými farbami:

- Strom - zelená.
- Voda - modrá.
- Bažina a defaultná priechodná oblasť - papájovožltá.
- Defaultná nepriechodná oblasť - sivá.

## A.4 Vykreslenie dátového súboru

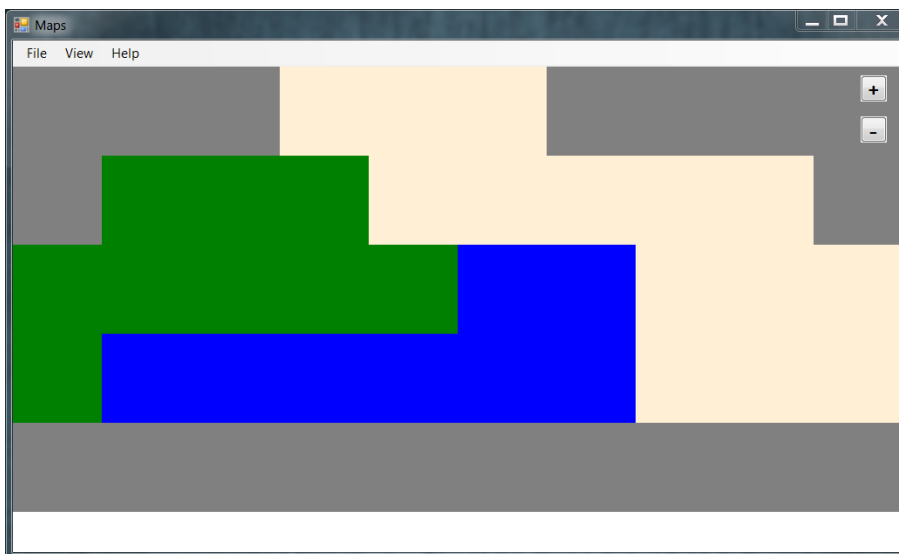
Pokiaľ bol vrchol prehľadávaný počas hľadania najkratšej cesty, jeho farba bude oranžová. Ak je dokonca súčasťou najkratšej cesty, tak bude červený.

## A.5 Ukážky programu

Na obrázkoch nižšie sa nachádza znaková matica veľmi malého mriežkového grafu (Obr. A.1) a ukážky z programu: screenshot programu pri načítanej znakovkej matici vo farebnom móde (Obr. A.2), a screenshot programu aj s vyznačenou najkratšou cestou a prehľadanými vrcholmi v bichromatickom móde (Obr. A.3).

@	@	@	.	.	.	@	@	@	@
@	T	T	T	.	.	.	.	.	@
T	T	T	T	T	W	W	S	S	.
T	W	W	W	W	W	W	.	.	.
@	@	@	@	@	@	@	@	@	@

Obr. A.1: Maticová reprezentácia mriežkového grafu



Obr. A.2: Screenshot programu



Obr. A.3: Vyexportovaný výstup v bichromatickom móde aj s označenou najkratšou cestou a prehľadanými vrcholmi

# B. T-maps — programátorská dokumentácia

## B.1 Architektúra aplikácie

Architektúra programu *T-maps* je inšpirovaná konceptom MVC [12]. Model tvoria dve triedy: *Map* (Obr. B.1) a *CachedBitmap* (Obr. B.2). View a Controller sú spojené triede *Form1*.

Aplikácia bola navrhnutá s dôrazom na nízke systémové nároky aj pri operáciách, ako je nekonečný zoom. Ten je riešený tak, že v triede *CachedBitmap* je uložená bitmapa odpovedajúca výseku znakovkej matice, ktorá sa v prípade potreby prepočíta. Rozmery tejto bitmapy odpovedajú dvojnásobku rozmerov zobrazovacieho okna aplikácie.

## B.2 Kľúčové funkcie aplikácie

```
class Map
{
    char[] [] data;
    char[] [] map;
    public void Load(string filename);
    public void LoadData(string filename);
}
```

Obr. B.1: Kľúčové funkcie triedy *Map*. Obsahuje dvojrozmerné polia reprezentujúce znakovú maticu a taktiež dáta z dátového súboru

```

class CachedBitmap
{
    private Bitmap cachedBitmap;
    private bool isBichromatic;

    // dalsie premenne viazane na vlastnosti cachedBitmap
    // ...

    private Map map;
    public void setMap(Map m);
    public void DrawBitmapInto(Graphics g, Point TLPoint, Size
        ViewPortSize, int squareS, bool isBichrom, bool
        forcePrecomputing = false);

    private void PrecomputeBitmap(Point TLPoint, Size
        viewPortSize);
}

```

Obr. B.2: Kľúčové funkcie triedy CachedBitmap. Obsahuje v sebe referenciu na triedu Map a úsek veľkej mapy cachedBitmap. Jej hlavnou metódou je DrawBitmapInto, ktorej parametre špecifikujú úsek, ktorý sa má vykresliť. Metóda ho vykreslí pomocou grafického objektu *g* a v prípade nutnosti zavolá funkciu PrecomputeBitmap na predpočítanie mapy.