

# 算法基础

第九次作业 (DDL: 2024 年 12 月 12 日 23:59)

## Q1. (25 分)

小赵计划本周末自驾出游, 从合肥驱车前往六安万佛湖, 路线全长  $n$  公里。为了降低用车成本, 小赵决定沿途接单顺风车。当前网约车平台上提供了一系列网约车订单  $L = \{(s_i, e_i, f_i)\}$ , 其中  $(s_i, e_i, f_i)$  表示第  $i$  位乘客计划在路上第  $s_i$  公里处上车, 第  $e_i$  公里处下车, 小赵将获得收益  $f_i$ 。平台不允许车上同时有多个订单的乘客。因此, 小赵需要从中选取一些订单, 以最大化收益。请为小赵设计一个选取订单的算法, 并给出伪代码。

例:  $n = 10$ ,  $L = \{(1, 5, 7) (3, 9, 8) (5, 9, 3)\}$ 。有两种选取方案, 1) 选取  $(1, 5, 7)$  和  $(5, 9, 3)$ , 收益为 10; 2) 选取  $(3, 9, 8)$ , 收益为 8。

## Q2. (25 分)

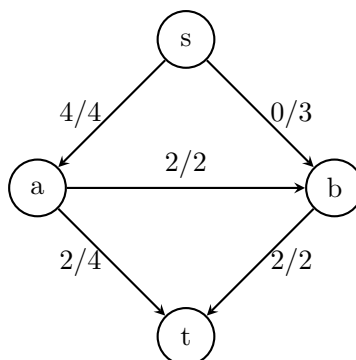
小安和小浩组成一队参加 2024 年大别山混合越野接力赛。主办方在参赛手册中给出了所有站点 (起点  $s$ 、终点  $t$ 、补给站  $d_i (1 \leq i \leq n)$ ) 以及所有可能的路径 ( $E$ )。该赛事的规则为, 从起点出发, 两名选手交替完成一个赛段 (从一个站点至另一个站点,  $e \in E$ ), 最终到达终点 (不要求经过所有站点), 总用时最短的队伍获胜。因为两名选手的身体素质存在差异、对各个赛段的熟悉程度不同, 小安和小浩完成同一赛段所需时间也不相同。

现在已知站点的有向图  $G = (V, E)$ , 以及小安和小浩跑完各个赛段所需的时间  $p_{a,e}$  和  $p_{h,e}$  ( $e \in E$ )。请设计算法帮小安和小浩找到最快的完赛方案。

例:  $V = \{s, t, d_1, d_2\}$ ,  $E = \{(s, d_1), (s, d_2), (d_1, d_2), (d_2, t), (d_1, t)\}$ ,  $P_a = \{p_{a,e} | e \in E\}$ ,  $P_h = \{p_{h,e} | e \in E\}$ 。一种可行的完赛方案, 小安完成赛段  $(s, d_1)$ , 小浩完成赛段  $(d_1, t)$ , 完赛时间为  $p_{a,(s,d_1)} + p_{h,(d_1,t)}$ 。另一种可行的完赛方案, 小浩完成赛段  $(s, d_2)$ , 小安完成赛段  $(d_2, t)$ , 完赛时间为  $p_{h,(s,d_2)} + p_{a,(d_2,t)}$ 。

## Q3. (20 分)

请看下面的流网络图, 根据 FORD-FULKERSON 方法求解该图从  $s$  到  $t$  的最大流 (画出残存网络和网络流图, 标明增广路径)。



**Q4.** (30 分)

假设给定一个  $m \times n$  的矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 其行和分别为  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , 列和分别为  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , 且所有行和和列和均为整数 (即  $r_i, c_j \in \mathbb{Z}$ )。矩阵  $A$  中的一些元素可能不是整数, 但其行和和列和是整数。

设计一个多项式时间算法并给出时间复杂度 (用  $m, n$  表示), 构造一个新的矩阵  $A'$ , 使得:

- $A'$  的行和和列和与  $A$  相同。
- 对于每个元素  $a'_{ij}$  都满足  $a'_{ij} = \lceil a_{ij} \rceil$  或  $a'_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor$  (即  $a_{ij}$  向下/向上取整)。