

算法基础

第七次作业参考答案 (DDL: 2024 年 11 月 28 日 23:59)

Q1. (15 + 25 = 35 分)

给定三组整数列表 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$, 判断是否存在 i, j, k 使得 $a_i + b_j + c_k = 0$, 若存在, 请给出一组解。

1. 设计一个最坏时间复杂度尽可能优的算法解决题干中问题。
2. 假设列表中所有元素都在 $[-M, M]$ 的范围内 ($M > n$)。设计一个最坏时间复杂度为 $O(M \log M)$ 的算法解决题干中问题。
提示: 第二问可能需要使用快速多项式乘法。

Q2. (15 分)

当 n 个字符组成的字符集对应的出现次数恰为前 n 个斐波那契数 (第 $i(0 \leq i \leq n-1)$ 个字符的出现次数为 F_i) 时, 求最优前缀编码。

注: $F_0 = F_1 = 1, F_j = F_{j-1} + F_{j-2}(j \geq 2)$

Q3. (10 + 5 + 20 = 35 分)

假设在科大超算中心有一系列计算任务 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, 每个任务 s_i 分别需要执行 d_i 分钟。同时, 这些计算任务之间存在着无环的依赖关系 $P = \{(s_i, s_j) | s_i, s_j \in S\}$, 其中每条依赖关系 (s_i, s_j) 表示任务 s_j 需要在任务 s_i 完成之后才能开始执行。请为超算中心设计一套计算任务调度算法, 输入为 $S, \{d_i\}$, 和 P , 输出为 $\{x_i\}$, 其中 x_i 表示任务 s_i 的开始时间。算法的设计目标是 minimized 系统运行时间跨度 (即从第一个任务开始至最后一个任务结束的时间跨度)。

1. 该问题是一个典型的规划问题, 请用数学语言表示该线形规划问题 (包括优化目标以及约束条件)。
2. 简要分析利用单纯形法解决前一问所给出的线形规划的时间复杂度。
3. 请给出一个线性时间复杂度的贪心算法, 且保证其输出的结果为最优解, 并证明其时间复杂度以及最优性。

Q4. (15 分)

在课程中我们讨论了用于计算有向无环图 (DAG) 的拓扑排序。在输入图确实是 DAG 的前提下, 这个过程将最终生成一个拓扑排序。但是, 假设我们给定的图是一个任意的有向图。请扩展拓扑排序算法, 使得在给定一

个输入有向图 G 时，它输出以下两种情况之一：(a) 一个拓扑排序，从而确定 G 是一个 DAG；或 (b) G 中的一个环，从而确定 G 不是一个 DAG。你给出的算法的运行时间应为 $O(m + n)$ ，其中 n 表示图中的节点数， m 表示图中的边数。