算法基础

第九次作业参考答案（DDL：2024 年 12 月 12 日 23:59）

Q1.（25 分）

小赵计划本周末自驾出游，从合肥驱车前往六安万佛湖，路线全长 n 公里。为了降低用车成本，小赵决定沿途接单顺风车。当前网约车平台上提供了一系列网约车订单 $L = \{(s_i, e_i, f_i)\}$，其中 (s_i, e_i, f_i) 表示第 i 位乘客计划在路上第 s_i 公里处上车，第 e_i 公里处下车，小赵将获得收益 f_i。平台不允许车上同时有多个订单的乘客。因此，小赵需要从中选取一些订单，以最大化收益。请为小赵设计一个选取订单的算法，并给出伪代码。

例：$n = 10$，$L = \{(1, 5, 7)\ (3, 9, 8)\ (5, 9, 3)\}$。有两种选取方案，1）选取 $(1, 5, 7)$ 和 $(5, 9, 3)$，收益为 10；2）选取 $(3, 9, 8)$，收益为 8。

解：

1. 将订单按照 e_i 从小到大进行排序（尽可能多地选择早结束的订单，为后续订单留出空间，以下讨论中的 i 为排序后的结果）；
2. 定义 $dp[i]$ 为在第 i 个订单为止所能获得的最大收益：
   - 如果不选择第 i 个订单：$dp[i] = dp[i-1]$;
   - 如果选择第 i 个订单：找到第 i 个订单之前与之不冲突的最近订单 j，即 $e_j \leq s_i$，收益为 $dp[j] + f_i$。（可以用二分查找优化对 j 的查找）；
   - 递推公式：
   $$dp[i] = \max(dp[i-1], dp[j] + f_i)$$
3. 复杂度分析：排序部分 $O(n \log n)$；动态规划 $O(n \log n)$。

Q2.（25 分）

小安和小浩组成一队参加 2024 年大别山混合越野接力赛。主办方在参赛手册中给出了所有站点（起点 s、终点 t、补给站 $d_i (1 \leq i \leq n)$）以及所有可能的路径（E）。该赛事的规则为，从起点出发，两名选手交替完成一个赛段（从一个站点至另一个站点，$e \in E$），最终到达终点（不要求经过所有站点），总用时最短的队伍获胜。因为两名选手的身体素质存在差异、对各个赛段的熟悉程度不同，小安和小浩完成同一赛段所需时间也不相同。

现在已知站点的有向图 $G=(V,E)$，以及小安和小浩跑完各个赛段所需的时间 $p_{a,e}$ 和 $p_{h,e}$ $(e \in E)$。请设计算法帮小安和小浩找到最快的完赛方案。

例: $V=\{s,t,d_1,d_2\}$, $E=\{(s,d_1),(s,d_2),(d_1,d_2),(d_1,t),(d_2,t)\}$, $P_a=\{p_{a,e}|e \in E\}$，$P_h=\{p_{h,e}|e \in E\}$。一种可行的完赛方案，小安完成赛段 (s,d_1)，小浩完成赛段 (d_1,t)，完赛时间为 $p_{a,(s,d_1)}+p_{h,(d_1,t)}$。另一种可行的完赛方案, 小浩完成赛段 (s,d_2), 小安完成赛段 (d_2,t), 完赛时间为 $p_{a,(s,d_2)}+p_{h,(d_2,t)}$。

解:

构建新图 G'，s,t 保持不变，将每个补给站 d_i 用两个节点 $d_{i,a}$、$d_{i,h}$ 分别表示由小安、小浩到达补给站 d_i。

引入对应的边 E' 将，E 中的每条边，根据由小安、小浩该赛段分别引入边。

例如，对于赛段 (s,d_i)，引入边 $(s,d_{i,a})$ 权重为 $p_{a,(s,d_i)}$，边 $(s,d_{i,h})$ 权重为 $p_{h,(s,d_i)}$。

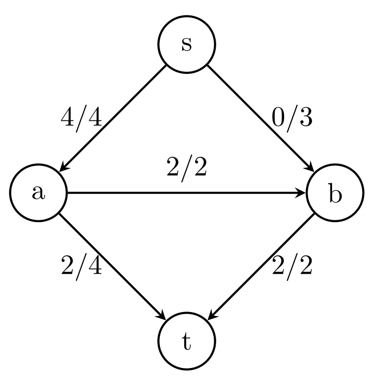
对于赛段 (d_i,d_j)，引入边 $(d_{i,a},d_{j,h})$ 权重为 $p_{h,(d_i,d_j)}$，边 $(d_{i,h},d_{j,a})$ 权重为 $p_{a,(d_i,d_j)}$。

对于赛段 (d_i,t)，引入边 $(d_{i,a},t)$ 权重为 $p_{h,(d_i,t)}$，边 $(d_{i,h},t)$ 权重为 $p_{a,(d_i,t}$。

在新的图 $G'=(V',E')$，使用 Dijkstra 算法求 s 到 t 的最短路径即可。

Q3.（20 分）

请看下面的流网络图，根据 Ford-Fulkerson 方法求解该图从 s 到 t 的最大流（画出残存网络和网络流图，标明增广路径）。



解: 增广路径：$s \to b \to a \to t$。流量增加 2。

Q4.（30 分）

假设给定一个 $m \times n$ 的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其行和分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_m$，列和分别为 $c_1, c_2, \ldots, c_n$，且所有行和和列和均为整数（即 $r_i, c_j \in \mathbb{Z}$）。矩阵 A 中的一些元素可能不是整数，但其行和和列和是整数。

设计一个多项式时间算法并给出时间复杂度 (用 m, n 表示)，构造一个新的矩阵 A'，使得：

- A' 的行和和列和与 A 相同。
- 对于每个元素 a'_{ij} 都满足 $a'_{ij} = \lceil a_{ij} \rceil$ 或 $a'_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor$（即 a_{ij} 向下/向上取整）。

解:

1. **初始化矩阵：**对于给定矩阵 A，定义 $\hat{A}$ 为每个元素的小数部分，即 $\hat{A}_{ij} = A_{ij} - \lfloor A_{ij} \rfloor$。
2. **构建流图：**
   - 创建节点：对于每个行 i，创建节点 R_i；对于每列 j，创建节点 C_j。
   - 添加源节点 s 和汇节点 t。
   - 设置边和容量：
     - 从源节点 s 向每个行节点 R_i 添加一条边，容量为 $\sum_j \hat{A}_{ij}$（即行和）。
     - 从每个列节点 C_j 向汇节点 t 添加一条边，容量为 $\sum_i \hat{A}_{ij}$（即列和）。
     - 从每个行节点 R_i 向每个列节点 C_j 添加一条边，容量为 1。
3. **运行最大流算法：**在构建好的流图上，使用 Ford-Fulkerson 算法来计算最大流 (稠密图)。
4. **构造矩阵 A'：**
   - 对于每个 i, j，如果流图中的边 (R_i, C_j) 中有流量通过（流量为 1），则令 $a'_{ij} = \lceil a_{ij} \rceil$；否则，令 $a'_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor$。

时间复杂度：构建流图的时间复杂度为 $O(mn)$，最大流计算的时间复杂度为 $O(m^2n^2)$，故总时间复杂度为 $O(m^2n^2)$。