или после проведения простейших преобразований

$$\begin{cases} \alpha_{11}a + \alpha_{12}b = \beta_1, & \alpha_{11} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^2, \quad \alpha_{12} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i, \quad \beta_1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i y_i, \\ \alpha_{21}a + \alpha_{22}b = \beta_2, & \alpha_{21} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i, \quad \alpha_{22} = n, \qquad \beta_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i. \end{cases}$$

Теперь значения a и b можно легко определить, выписав решение этой системы в явном виде.

Задача 2.3-7. Выпишите систему уравнений для определения коэффициентов многочлена наилучшего приближения $P_{n-1}^{(0)}(x)$ для функции $f(x)$ в пространстве $L_2(0,1)$.

Решение. Наилучшее приближение ищется в виде $P_{n-1}^{(0)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$ с неизвестными коэффициентами a_j, которые определяются из условия минимума функционала $\int\limits_0^1 \left(f(x) - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \right)^2 dx$. Дифференцируя функционал по a_i и приравнивания производные к нулю, получим уравнения

$$\int\limits_0^1 \left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \right) x^{i-1} dx = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{i+j-1} = \int\limits_0^1 f(x)\, x^{i-1} dx\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Это приводит к системе уравнений с *матрицей Гильберта*: $H_{ij} = 1/(i+j-1)$, $1 \le i, j \le n$, $\|H^{-1}\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{n}}(1+\sqrt{2})^{4n}$. Это означает, что задача некорректна при больших значениях n.

Задача 2.3-8. С учетом задачи 2.3-7, численно найдите коэффициенты многочлена наилучшего приближения $P_{n-1}^{(0)}(x)$ для функции $f(x) = x^n$ в пространстве $L_2(0,1)$. Оценить качество приближения (например, графически) при $n = 5, 10, 100$.

2.4 Численное интегрирование

Для приближенного вычисления определенных интегралов обычно применяется метод квадратурных формул:

$$I^{[a,b]}(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \approx S_n^{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

При этом узлы $\{x_i\}$ и коэффициенты $\{c_i\}$ выбираются специальным образом так, что для погрешности $R_n(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)|$ верна оценка вида $R_n(f) \le C(b-a)^k$. К наиболее известным квадратурам относятся

формула прямоугольников по левой точке
$(b-a)f(a)$ с погрешностью $\|f'\|\frac{(b-a)^2}{4}$,
формула прямоугольников по центральной точке
$(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ с погрешностью $\|f''\|\frac{(b-a)^3}{24}$,
формула трапеций
$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ с погрешностью $\|f''\|\frac{(b-a)^3}{12}$,
формула Симпсона
$\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ с погрешностью $\|f^{(4)}\|\frac{(b-a)^5}{2880}$,
формула Гаусса по трем узлам
$\frac{b-a}{18}(5f(x_-)+8f(x_0)+5f(x_+))$ с погрешностью $\|f^{(6)}\|\frac{(b-a)^7}{737280}$,
где $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_\pm = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

В данном случае $\|g\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$.
Задача 2.4-1. Реализуйте каждый из описанных выше методов интегрирования в виде функции с прототипом

```
double  Integral (double a, double b, double (*f)(double));
```

где `f` — указатель на подинтегральную функцию. Проверьте выполнение указанных оценок погрешности для явно интегрируемых f. Например, $f(x) = e^x, \sin(x), x^n$.

Если значение погрешности $R_n(f)$ для конкретной задачи получается недопустимо велико, то обычно используют следующий прием. Область интегрирования $[a,b]$ разбивается на N подотрезков $[a,b] = \cup_{k=1}^N [a_k,b_k]$, и на каждом подотрезке $[a_k,b_k]$ значение интеграла $I^{[a_k,b_k]}(f)$ заменяется на значение квадратуры $S_n^{[a_k,b_k]}(f)$. В результате для вычисления интеграла $I^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} I^{[a_k,b_k]}(f)$ получается так называемая составная квадратурная формула $S_{N,n}^{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{N} S_n^{[a_k,b_k]}(f)$ с оценкой погрешности $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \le \sum_{k=1}^{N} R_n^{[a_k,b_k]}(f)$.
Задача 2.4-2. Для каждого из описанных выше методов интегрирования реализуйте составную квадратуру в виде функции

```
double Integral (double a, double b, double (*f)(double), int N);
```

где `N` — число разбиений отрезка интегрирования $[a,b]$ на равные подотрезки. Возьмите несколько функций, интегрируемых в элементарных функциях, и сравните приближенные значения интегралов, полученные при разных

N, с точными значениями. Например

$$\int\limits_0^{100\pi} \cos 1000x\, dx = 0, \quad \int\limits_0^{100} \exp^{-1000x}\, dx \sim 10^{-3}, \quad \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi;$$

Задача 2.4-3. Аналитически и численно проверьте, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx =$ 0,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \pi,\ m = n \neq 0, \end{cases} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \pi,\ m = n \neq 0, \\ 2\pi,\ m = n = 0. \end{cases} .$$

Здесь m, n — неотрицательные целые числа. Отметим, что такие свойства тригонометрических функций по определению означают ортогональность семейства $\{1, \sin(mx), \cos(mx), m = 1, 2, \ldots\}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ относительно скалярного произведения $(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx$.

Задача 2.4-4. Для составной квадратурной формулы Гаусса по трем узлам численно найдите константы C и p в ценке погрешности $R(N) = |I^{[-\pi,\pi]}(f) - S_{N,3}^{[-\pi,\pi]}(f)| \sim C/N^p$ при $N \gg 1$ и $f(x) = \sin^2 mx$, $m = 1, 10^3$.

Указание. Для достаточно больших значений N исследуйте график $F(\ln N) = \ln R^{-1}(N) \sim \ln C^{-1} + p \ln N$.

Задача 2.4-5. Реализуйте функцию с прототипом

```
double Integral_e(double a, double b, double (*f)(double), double eps);
```

для вычисления значения интеграла по выбранной составной квадратурной формуле с перемнным шагом и локальным ε–контролем точности.

Идеи реализации. Пусть мы имеем некоторое значение шага h и уже вычисленное значение интеграла $I^{[a,\tilde{a}]}(f)$ на отрезке $[a, \tilde{a}]$, $a \leq \tilde{a} < b$. Вычислим $I_1 = I^{[\tilde{a},\tilde{a}+h]}(f)$, $I_2 = I^{[\tilde{a},\tilde{a}+h/2]}(f) + I_1^{[\tilde{a}+h/2,\tilde{a}+h]}(f)$. Если $|I_1 - I_2| \leq \varepsilon h$, то считаем, что требуемая точность на шаге достигнута и полагаем $I^{[a,\tilde{a}+h]} = I_1 + I_2$. Если $|I_1 - I_2| > \varepsilon h$, то уменьшим шаг h в два раза, т.е. положим $h = h/2$, и повторим вычисление I_1 и I_2, начиная с точки $\tilde{a}$ (при необходимости будем уменьшать шаг и далее, пока не добьемся выполнения неравенства $|I_1 - I_2| \leq \varepsilon h$). Следующий шаг от точки $\tilde{a} + h$ будем выполнять с полученным значением h. Если же мы получим неравенство $|I_1 - I_2| \leq \delta h$, где $\delta \ll \varepsilon$, то выбранный шаг h обеспечивает "слишком высокую" точность и с целью сокращения вычислительных затрат для вычисления интеграла по следующему частичному отрезку этот шаг можно увеличить в два раза, т.е. положить $h = 2h$. На практике величину δ нужно выбирать в пределах от 0.1ε до 0.01ε, а также установить минимальное и максимальное значение для величины шага.