



Wydział Inżynierii
Mechanicznej i Robotyki
Katedra Robotyki i
Mechatroniki



Identyfikacja Układów Mechatronicznych
Sprawozdanie

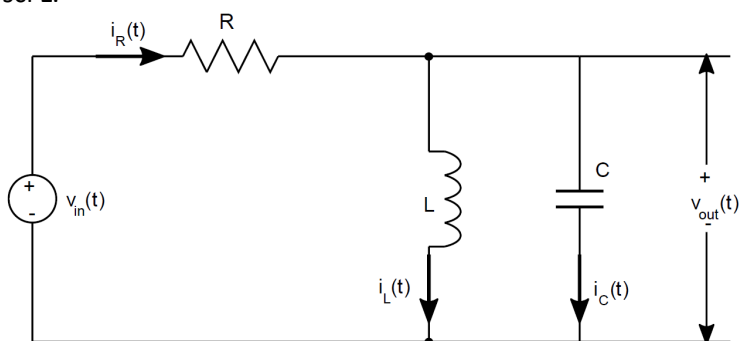
Laboratorium 5: Identyfikacja nieparametryczna

Imię i Nazwisko: Jakub Nowak, Maciej Mazurkiewicz

Nr grupy: 2

Zadanie 1 – Odpowiedź impulsowa układu RLC

W zadaniu należało stworzyć model układu RLC przedstawionego na schemacie poniżej za pomocą transmitancji systemu. Układ składał się z rezystora o rezystancji R , kondensatora o pojemności C oraz cewki o indukcyjności L .



Wejściem do układu jest napięcie zasilania v_{in} , a wyjściem napięcie na kondensatorze v_c , które jest jednakowe na cewce - v_l i zostało oznaczone na schemacie jako v_{out} . Rozpoczęto zatem od wyznaczenia relacji pomiędzy v_{in} , a v_{out} w formie równania analitycznego w dziedzinie czasu. Procedura jego wyznaczania została przedstawiona na następnej stronie.

Równaniem wyjściowy od którego rozpoczęto wyprowadzenie było równanie drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu:

$$v_{in} = v_r + v_{out} \quad (1)$$

Następnie podstawiono do równania (1) za v_r zgodnie z prawem Ohma $v_r = i_r \times R$ i uzyskano:

$$v_{in} = i_r \times R + v_{out} \quad (2)$$

Kolejnym etapem było podstawienie równania pierwszego prawa Kirchhoffa: $i_r = i_l + i_c$ do równania (2) i uzyskano:

$$v_{in} = (i_l + i_c) \times R + v_{out} \quad (3)$$

Aby uzyskać w równaniu jedynie zmienne v_{in} oraz v_{out} podstawiono do równania (3) z własności komponentów elektronicznych: $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$ oraz $i_l = \frac{1}{L} \int v_l dt$ i otrzymano:

$$v_{in} = \left(\frac{1}{L} \int v_l dt + C \frac{dv_c}{dt} \right) \times R + v_{out} \quad (4)$$

Podstawiając teraz v_{out} za v_l i v_c otrzymano ostateczne równanie:

$$v_{in} = \frac{R}{L} \int v_{out} dt + RC \frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} \quad (5)$$

W celu rozwiązania równania i otrzymania transmitancji widmowej modelu, skorzystano z transformaty Laplace'a. Obliczono zatem:

$$U(s) = \frac{R}{L \times s} \times Y(s) + RC \times s \times Y(s) + Y(s) \quad (6)$$

Gdzie $U(s)$ reprezentują v_{in} w przestrzeni Laplace'a i analogicznie $Y(s)$ reprezentuje v_{out} . Wyciągając zatem $Y(s)$ przed nawias i dzieląc, aby uzyskać reprezentację transmitancji $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Uzyskano:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{R}{L \times s} + RC \times s + 1} \quad (7)$$

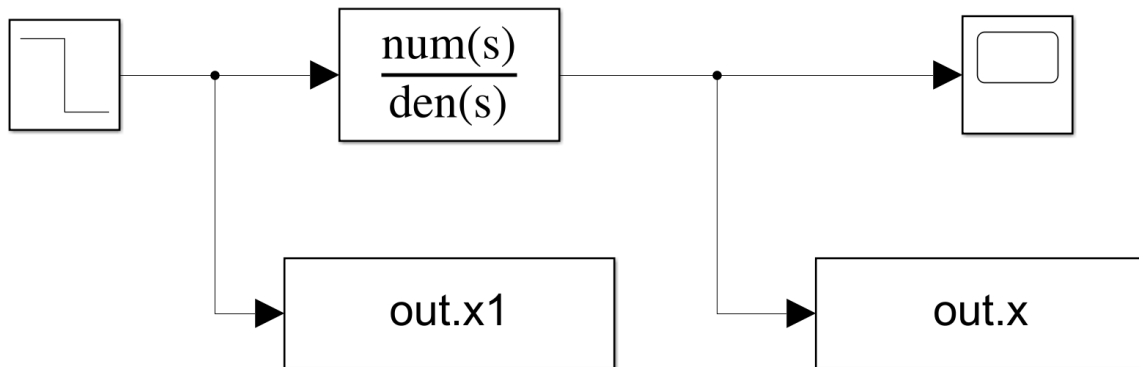
Ostatecznie, aby pozbyć się ułamka w mianowniku przemnożono przez $L \times s$ i otrzymano:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L \times s}{RLC \times s^2 + L \times s + R} \quad (8)$$

Po uzyskaniu transmitancji pozostało przeprowadzić ją w dziedzinę częstotliwości poprzez podstawienie $s \rightarrow i\omega$. Uzyskano:

$$G(i\omega) = \frac{L \times (i\omega)}{RLC \times (i\omega)^2 + L \times (i\omega) + R} \quad (9)$$

Na podstawie uzyskanej transmitancji stworzono model w programie Simulink. Przedstawiono go poniżej na **Rysunku 1.1**. Pod rysunkiem zawarto parametry modelu.



Rysunek 1.1 - Model układu w programie Simulink

```

%% Parametry modelu
dt = 1e-8;
t = 0:dt:0.001;
R = 10;
L = 4e-6;
C = 1e-6;

```

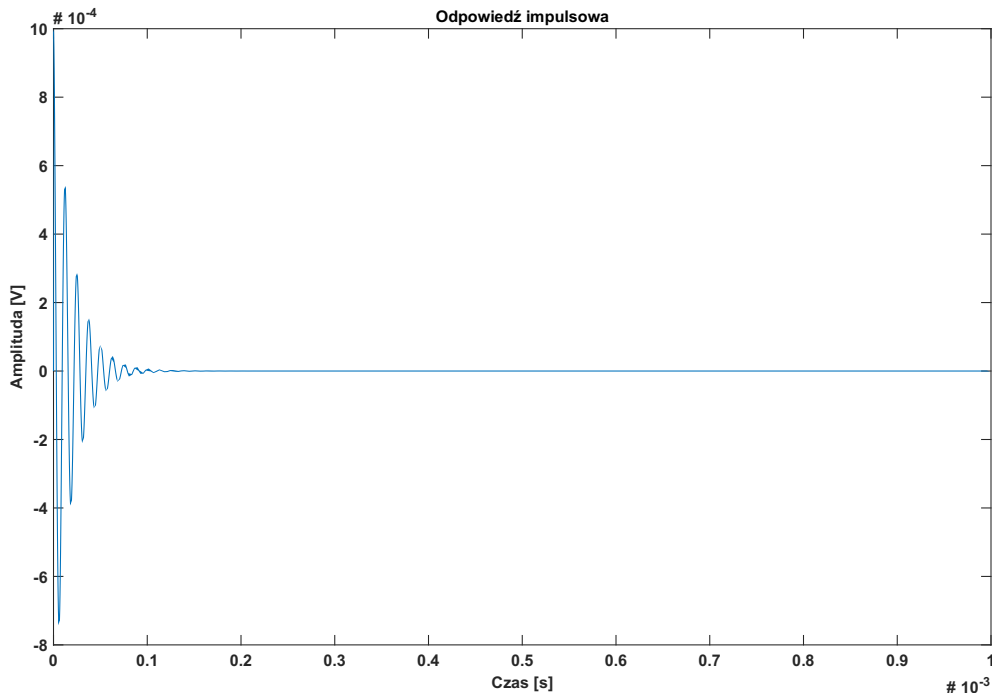
Krok czasowy dt oraz długość symulacji zostały dobrane eksperymentalnie na podstawie analizy uzyskanej odpowiedzi impulsowej. Poniżej przedstawiono kod wykorzystywany do uruchamiania symulacji oraz wyświetlania wyników na wykresie.

Uzyskaną odpowiedź impulsową przedstawiono na **Rysunku 1.2**.

```

%% Obliczenia
out=sim("model.slx");
%% Wyświetlanie odp impulsowej
figure(1)
plot(out.x)
title('Odpowiedź impulsowa')
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Amplituda [V]');

```



Rysunek 1.2 - Odpowiedź impulsowa układu

Jak widać, układ wymuszany impulsem wykazuje drgania o eksponentialnie malejącej amplitudzie. Wygasają one mniej więcej w okolicach chwili 0,00015 s.

Kolejnym etapem było stworzenie wykresów Bodego dla układu. Ponieważ wymuszeniem był impuls transformacja Fouriera z odpowiedzi układu, czyli odpowiedzi impulsowej będzie reprezentować transmitancję widmową w dziedzinie częstotliwości. Można zatem wykreślić charakterystyki Bodego zgodnie ze wzorami:

Charakterystyka amplitudowa: $L(\omega) = 20 \log_{10}|H(i\omega)|$

Charakterystyka fazowa: $\varphi(\omega) = \arg H(i\omega)$

Stworzono zatem skrypt generujący charakterystyki Bodego, skalując oś x logarytmicznie.

```
M = abs(fft(out.y1.data));
P = angle(fft(out.y1.data));
x = linspace(0,1/dt,length(t));

figure(2)
subplot(2,1,1)
semilogx(x,mag2db(M))
xlim([0 1/dt/2])
title('Amplituda')
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [dB]')

subplot(2,1,2)
semilogx(x,rad2deg(P))
xlim([0 1/dt/2])
title('Przesunięcie fazowe')
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Faza [deg]')
```

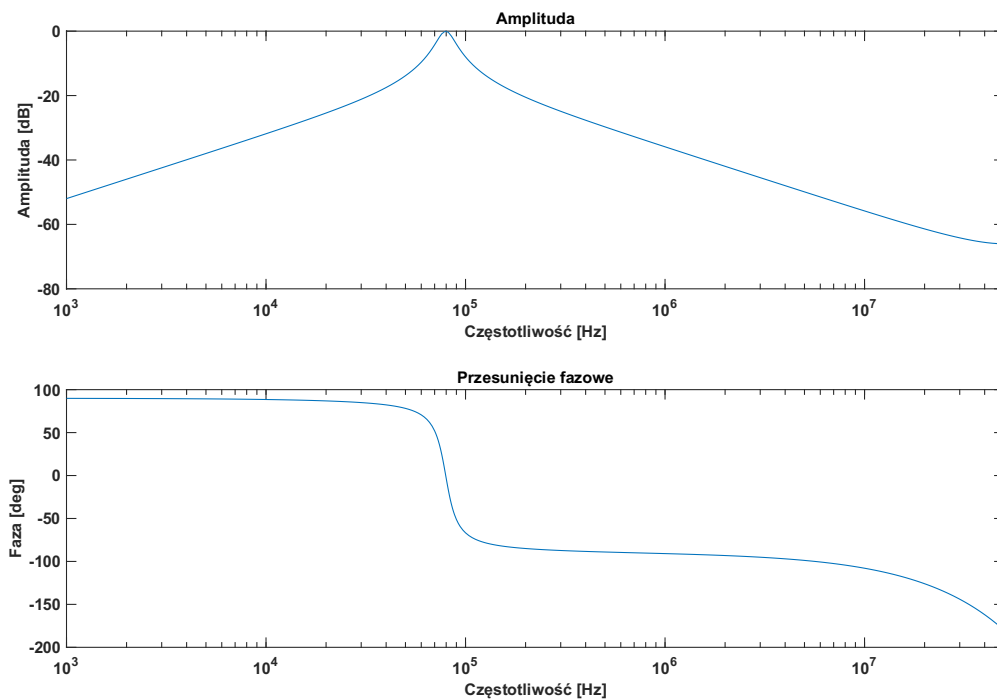
```

x = x.*(2*pi);
figure(3)
subplot(2,1,1)
semilogx(x,mag2db(M))
xlim([1e4,1e8]);
title('Amplituda')
xlabel('Częstotliwość [rad/s]')
ylabel('Amplituda [dB]')

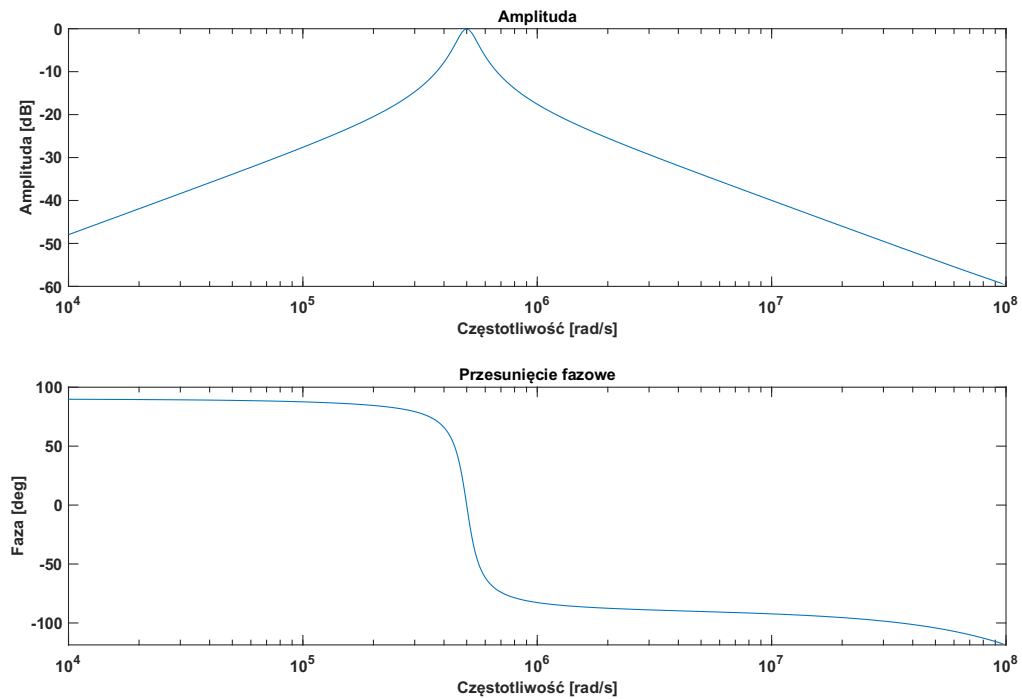
subplot(2,1,2)
semilogx(x,rad2deg(P))
xlim([1e4,1e8]);
title('Przesunięcie fazowe')
xlabel('Częstotliwość [rad/s]')
ylabel('Faza [deg]')

```

W rezultacie wykonania skryptu uzyskują się dwa wykresy, różniące się od siebie skalą osi poziomych: pierwszy z nich wyskalowany jest w Hz , a drugi w $\frac{rad}{s}$. Uzyskane wykresy przedstawiono na **Rysunkach 1.3** oraz **1.4**.



Rysunek 1.3 - Charakterystyki Bodego. Pozioma oś w Hz

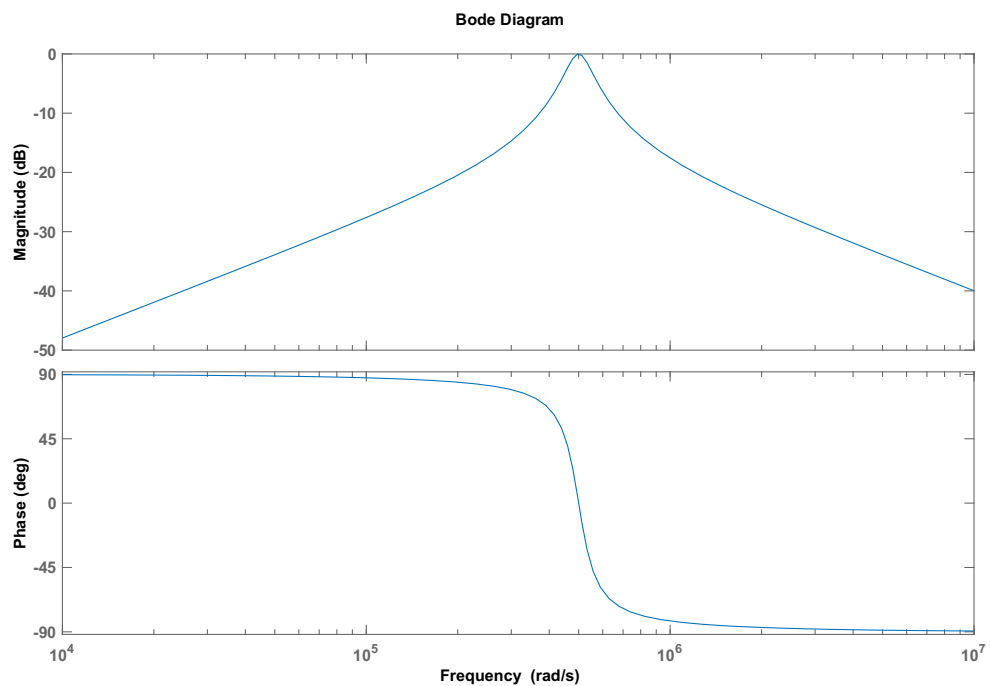


Rysunek 1.4 - Charakterystyki Bodego. Pozioma oś w rad/s

Aby sprawdzić poprawność wykreślonych charakterystyk stworzono skrypt przedstawiony poniżej.

```
%% Funkcja Bodego
figure(4)
SYS=tf([L 0],[R*L*C L R]);
bode(SYS)
```

W rezultacie jego uruchomienia otrzymano charakterystyki zawarte na **Rysunku 1.5**.



Rysunek 1.5 - Charakterystyki Bodego wykreślone korzystając z wbudowanej funkcji

Porównując charakterystykę Bodego otrzymaną przez wbudowaną funkcję oraz otrzymaną własnym skryptem widoczne jest zgaszając się one pod względem otrzymanych wartości.

Obwód RLC – filtr pasmowo-przepustowy

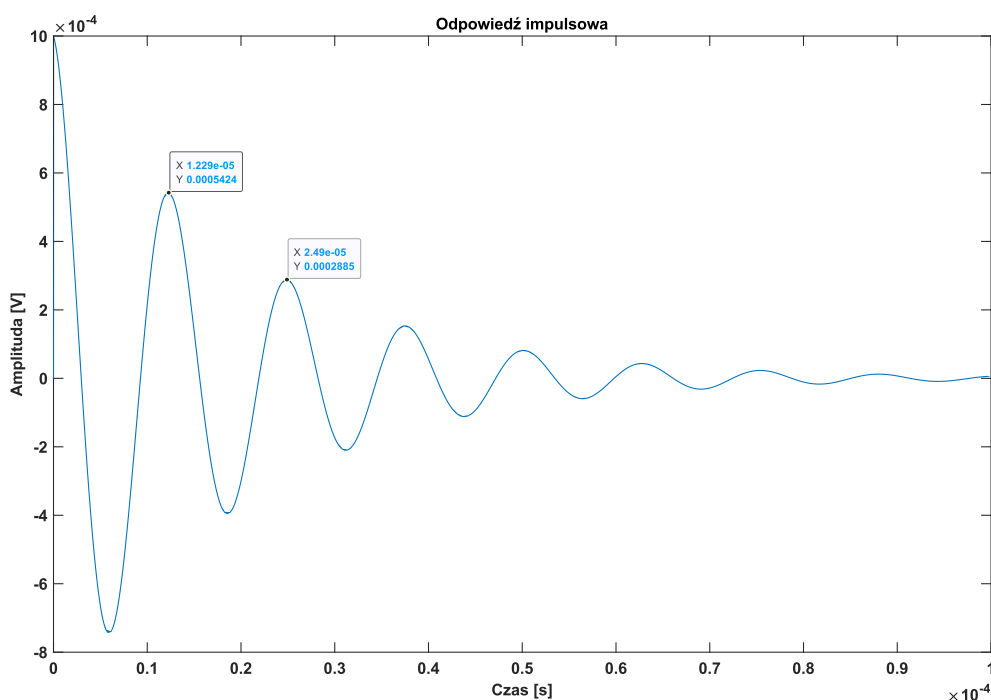
Obserwując charakterystyki Bodego, widać, że analizowany układ jest filtrem pasmowo-przepustowym, którego pasmo przenoszenia wyznaczone korzystając z wykresu amplitudowo-częstotliwościowego i obliczenia spadku o 3dB względem maksymalnej wartości wynosi około 16 kHz z najmniejszym zniekształceniem amplitudy dla wartości około 80 kHz. Wykres fazowo-częstotliwościowy daje natomiast informację o zniekształceniu fazy sygnału wejściowego. Takie charakterystyki były spodziewane, ze względu na znajomość filtrów z elektroniki, które składają się z pasywnych elementów takich jak rezystory (R), cewki (L) i kondensatory (C) w różnych konfiguracjach. Dzięki wiedzy zdobytej na tych laboratoriach można sprawdzić charakterystyki dowolnego filtra poprzez wyznaczenie transmitancji i dokonania analogicznych obliczeń jak powyżej.

Bezwymiarowy współczynnik tłumienia

W pierwszej kolejności obliczono współczynnik tłumienia metodą logarymiczną na podstawie odpowiedzi impulsowej. Skorzystano ze wzoru:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)}{2\pi}$$

Oraz z odczytanych wartości z wykresu odpowiedzi impulsowej. Przedstawiono je na **Rysunku 1.6**.



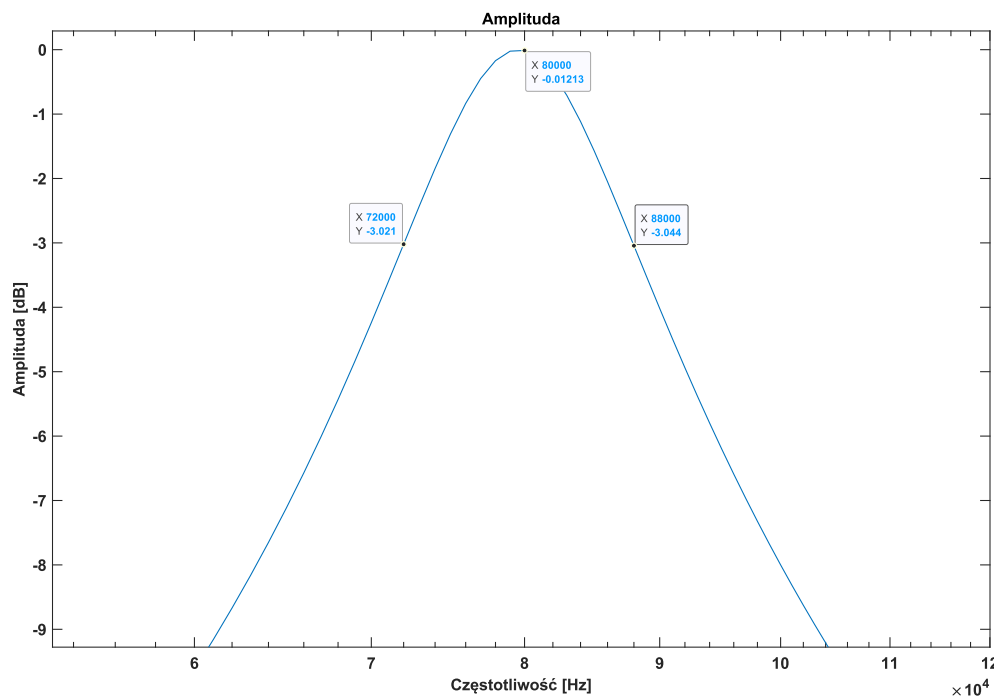
Rysunek 1.6 - Odczytywanie wartości kolejnych amplitud

Podstawiono i obliczono więc:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)}{2\pi} = \frac{\ln\left(\frac{0.0005425}{0.0002885}\right)}{2\pi} = 0.1005$$

Widać, że współczynnik jest mniejszy od 1 co odpowiada charakterystyce impulsowej – tłumienie podkrytyczne.

W drugiej kolejności obliczono ten sam współczynnik metodą połowy mocy. Na następnej stronie przedstawiono **Rysunek 1.7** przedstawiający przybliżoną amplitudowo-częstotliwościową charakterystykę Bodego.



Rysunek 1.7 Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

Korzystając z odczytanych wartości zostaje obliczony współczynnik tłumienia:

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r} = \frac{8000 \text{ Hz} - 72000 \text{ Hz}}{2 * 80000 \text{ Hz}} = 0,1$$

Otrzymana wartość zgadza się z wynikiem poprzedniej metody. Ostatnim sprawdzeniem wartości jest użycie funkcji `damp()`, która oblicza współczynnik tłumienia systemu:

`damp(SYS)`

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-5.00e+04 + 4.97e+05i	1.00e-01	5.00e+05	2.00e-05
-5.00e+04 - 4.97e+05i	1.00e-01	5.00e+05	2.00e-05

Zwrócone wartości pokrywają się z otrzymanymi wynikami obu metod estymacji mocy.

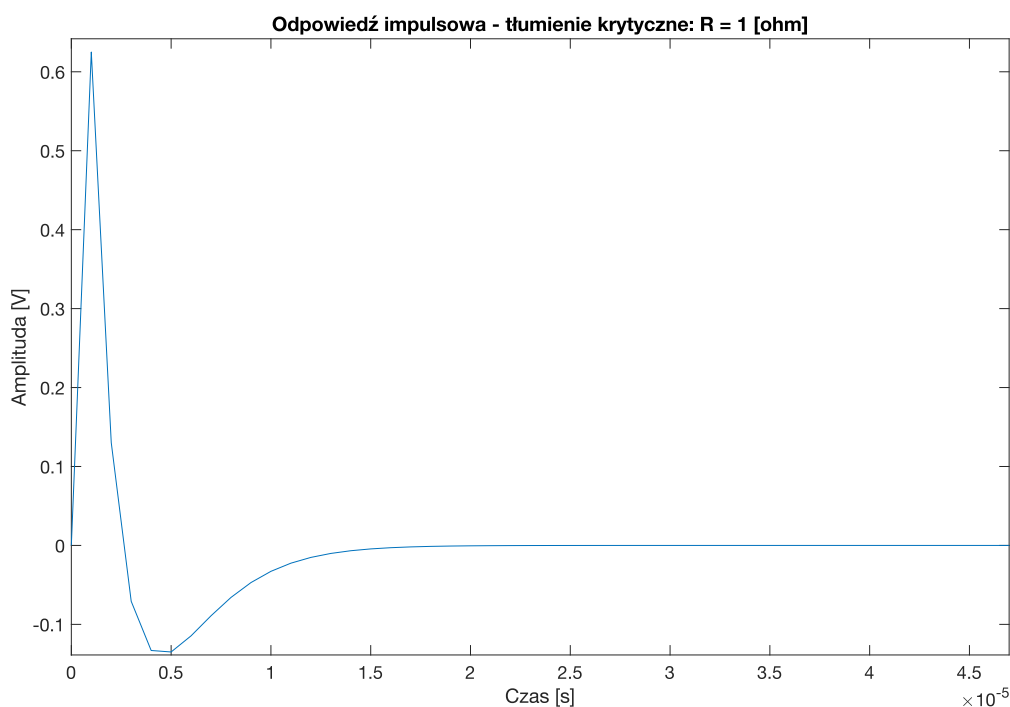
Zad. 1.3

Poprzednie zadanie zostało powtórzone dla przypadków wartości rezystancji równych $5\ \Omega$ oraz $100\ \Omega$. Korzystając z metody połowy mocy zostało odczytane pasmo przenoszenia dla każdego z przypadków oraz został obliczony współczynnik tłumienia.

Wartość rezystancji [Ω]	Współczynnik tłumienia ζ	Pasmo przenoszenia [Hz]
10	0.1	16000
5	0.2	32000
100	0.01	1600

Analizując otrzymane wartości widoczne jest, że współczynnik tłumienia oraz pasmo przenoszenia są odwrotnie proporcjonalne do wartości rezystancji.

Tłumienie krytyczne zachodzi, gdy wartość współczynnika tłumienia ζ jest równa 1. Ponieważ współczynnik ten jest odwrotnie proporcjonalny do rezystancji R , może zostać obliczony. Ponieważ dla rezystancji $R = 10\ \Omega$, współczynnik tłumienia wynosi 0,1, to dla dziesięciokrotnie większego współczynnika tłumienia, rezystancja musi być 10 razy mniejsza. Dlatego tłumienie krytyczne zachodzi dla $R = 1\ \Omega$. Poniżej na **Rysunku 1.8** przedstawiono odpowiedź impulsową dla modelu o wartości rezystancji $R = 1\ \Omega$. Pod rysunkiem zawarto obliczony teoretycznie dla układu współczynnik tłumienia.



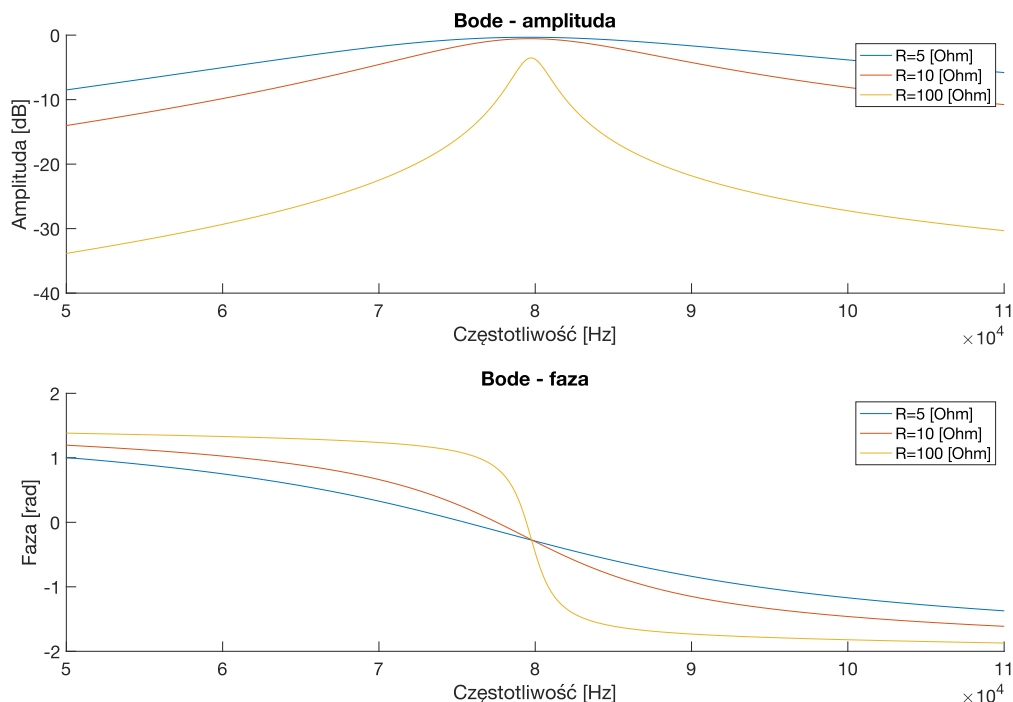
Rysunek 1.8 - Odpowiedź impulsowa dla tłumienia krytycznego

```
>> damp(SYS)
```

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
$-5.00\text{e}+05$	$1.00\text{e}+00$	$5.00\text{e}+05$	$2.00\text{e}-06$
$-5.00\text{e}+05$	$1.00\text{e}+00$	$5.00\text{e}+05$	$2.00\text{e}-06$

Zgodnie z teorią, odpowiedź impulsowa przechodzi raz przez położenie równowagi, a następnie oscylacje znikają, a odpowiedź stabilizuje się.

Poniżej przedstawiono na **Rysunku 1.9** złożenie wykresów Bodego utworzonych za pomocą własnego skryptu dla zmiennej rezystancji R w zbiorze: $5\ \Omega$, $10\ \Omega$ i $100\ \Omega$.



Rysunek 1.9 - Złożenie wykresów Bodego dla zmiennej rezystancji R

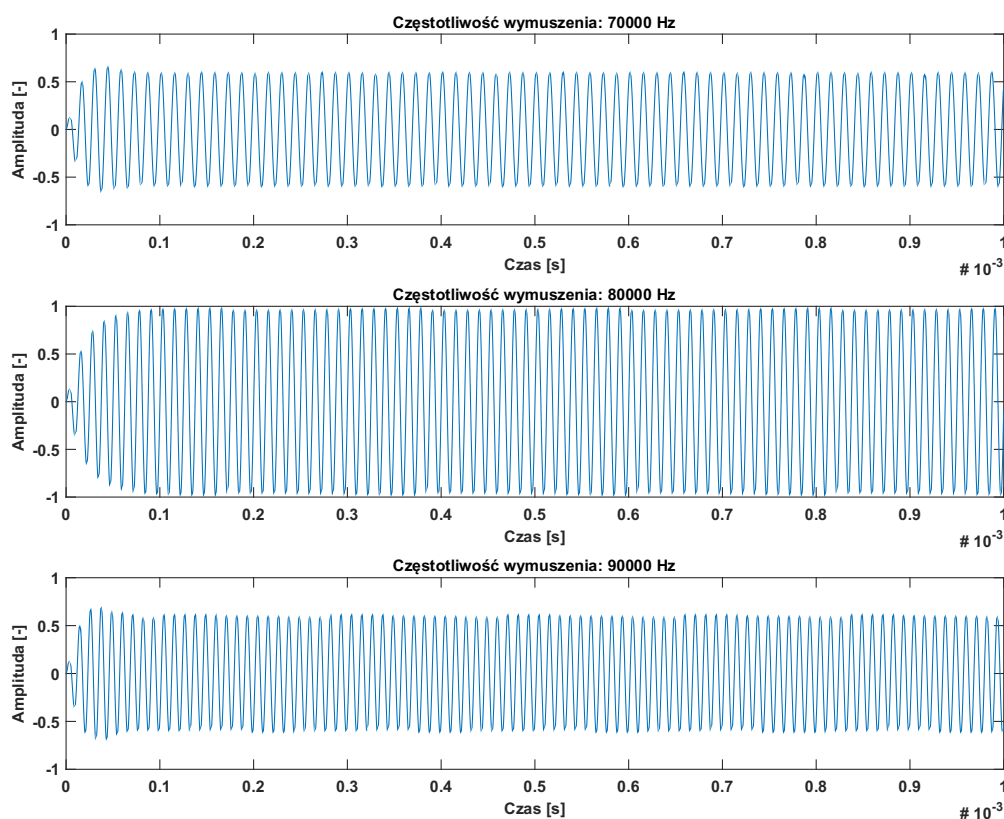
Zgodnie z danymi przedstawionymi w tabelce na poprzedniej stronie można zaobserwować, że dla wzrostu rezystancji charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa staje się bardziej stroma tj. posiada większe nachylenie dążąc i odchodząc od lokalnego maksimum. Pasma przenoszenia zmniejsza się zatem, ponieważ wyznaczane jest jako spadek o 3 dB względem maksimum. Ponieważ tłumienie wyznacza się również korzystając z metody połowy mocy, to współczynnik tłumienia maleje wraz z pasmem przenoszenia, bo wartość w mianowniku jest stała, a licznik maleje. Dodatkowo widać, że dla rezystancji $R = 100\ \Omega$ zwiększyło się zniekształcenie amplitudy dla maksymalnej jej wartości.

Na wykresie fazowo-częstotliwościowym, widać, że wraz ze wzrostem rezystancji nagła zmiana przesunięcia fazowego odbywa się w węższym zakresie częstotliwości.

Zadanie 2 – Wymuszenie sinusoidalne

Zad 2.1

W modelu układu RLC utworzonym w poprzednim zadaniu zostało zmienione wymuszenie na sinusoidalne o częstotliwościach: 70 kHz, 80 kHz oraz 90 kHz. Na rysunku 2.1 zostały przedstawione odpowiedzi systemu na powyższe wymuszenia.



Rysunek 2.0.1 Odpowiedzi systemu na wymuszenia sinusoidalne o określonych częstotliwościach

W tabeli poniżej zostały przedstawione amplitudy, przesunięcia fazowe pomiędzy sygnałem wejściowym oraz wyjściowym, a także przesunięcie fazowe odczytane z charakterystyki Bodego uzyskanej w poprzednim ćwiczeniu.

Częstotliwość wymuszenia	Amplituda odpowiedzi	Amplituda odczytana z charakterystyki Bodego	Przesunięcie fazowe odpowiedzi	Przesunięcie fazowe odczytane z charakterystyki Bodego
70000 Hz	0,6139	0,6139	52°	52,92°
80000 Hz	0,9986	0,9986	-3,17°	-2,02°
90000 Hz	0,6297	0,6296	-51,14°	-51,84°

Analizując powyższe wartości widoczne jest, iż amplitudy oraz przesunięcia fazowe otrzymane z odpowiedzi systemu wymuszonego sinusoidalnym sygnałem niemal pokrywają się z wartościami odczytanymi w charakterystyki Bodego. Poniżej skrypt wykorzystany do wykonania zadania.

```
dt = 1e-8;  
t = 0:dt:0.001;  
R = 10;
```

```

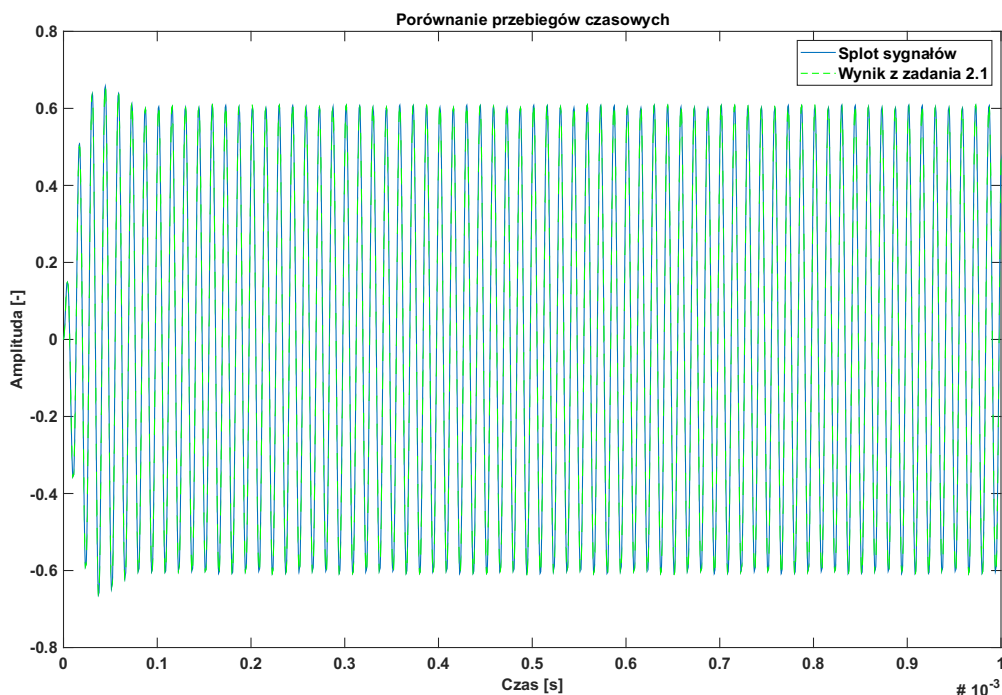
L = 4e-6;
C = 1e-6;
num = [L 0];
den = [R*L*C L R];
F = [70000 80000 90000];

for i=1:3
    freq = 2*pi*F(i);
    out=sim('RLC19_2.slx');
    figure(1)
    subplot(3,1,i)
    plot(t,out.y1.data)
    title(sprintf("Częstotliwość wymuszenia: %d Hz", F(i)))
    xlabel("Czas [s]")
    ylabel("Amplituda [-]")
    hold on
    plot(t,out.x1.data)
end

```

Zad 2.2

Na rysunku 2.2 przedstawiono splot odpowiedzi impulsowej z *Zadania 1* oraz sinusoidy o częstotliwości 70 kHz. Wynik został porównany z odpowiedzią systemu z *Zadania 2.1* o wymuszeniu z tą samą częstotliwością.



Rysunek 2.0.2 Porównanie otrzymanych odpowiedzi

Otrzymane wykresy pokrywają się. Przyczyną tego jest to, że odpowiedź impulsowa jest funkcją przejścia systemu w dziedzinie czasu. Ponieważ wzór na sygnał wyjściowy systemu w dziedzinie czasu wynosi:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

To znając odpowiedź impulsową $x(t)$ jesteśmy w stanie obliczyć odpowiedź systemu na każde wymuszenie poprzez wykonanie splotu obu sygnałów.

```

load("odp70khz.mat")
load("odp_imp.mat")
dt = 1e-8;
t = 0:dt:0.001;

S = sin(2*pi*t*70000);
SP = conv(S,out.y1.data);

plot(t,SP(1:100001))
ylim([-0.8 0.8])
hold on
plot(t,odp,'g--')
title("Porównanie przebiegów czasowych")
xlabel("Czas [s]")
ylabel("Amplituda [-]")
legend("Splot sygnałów","Wynik z zadania 2.1")

```