

	<p style="text-align: center;">Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki</p> <p style="text-align: center;">Katedra Robotyki i Mechatroniki</p>	
<p style="text-align: center;">Identyfikacja Układów Mechatronicznych</p> <p style="text-align: center;">Sprawozdanie</p>		
<p>Laboratorium 1: Podstawy przetwarzania sygnałów</p>		
<p>Imię i Nazwisko: Jakub Nowak, Maciej Mazurkiewicz</p>		
<p>Nr grupy: 2</p>		

Zadanie 1 – Przeciek widma i okienkowanie

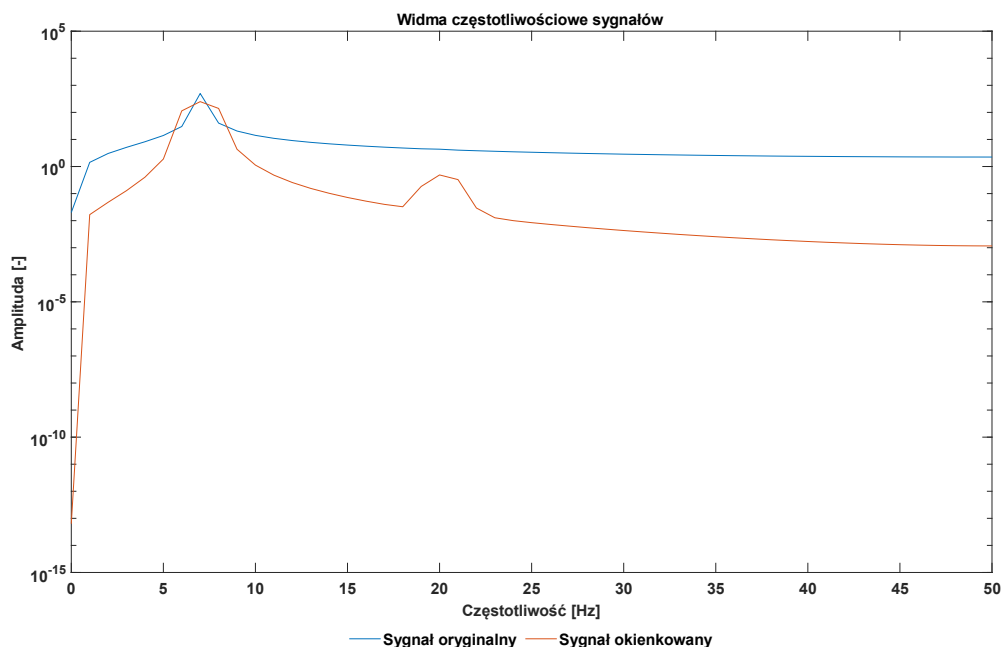
W zadaniu przetwarzano sygnał o długości 101 próbek, będący sumą sinusoidy o częstotliwości 7 Hz i amplitudzie 10 oraz cosinusoidy o częstotliwości 20 Hz i amplitudzie 0.02. Zastosowano częstotliwość próbkowania 100Hz. Zadanie ma na celu porównanie otrzymanych widm sygnałów w dwóch konfiguracjach: podstawowej oraz po zastosowaniu okna Hanninga. Rozpoczęto więc od stworzenia sygnału, obliczenia transformaty Fouriera i wyświetlenia widma na wykresie o skali logarytmicznej w zakresie od 0 do częstotliwości Nyquista. Następnie zastosowano okno Hann'a poprzez użycie funkcji `hann` aby je utworzyć, a następnie wymnożono sygnał przez okno w dziedzinie czasu. Ostatecznie obliczono ponownie transformatę Fouriera, a widmo naniesiono na uprzednio stworzony wykres. Efekt widoczny jest na **Rysunku 1.1**. Poniżej przedstawiono kod wykorzystany do wykonania czynności opisanych wcześniej.

```
clear all
close all
clc
%Sygnał - fs = 100Hz, t: 0s - 1s
fs = 100;
t_start = 0;
t_end = 1;
%Rozdzielczość
dt = 1/ fs;
%Wektor czasu
t = t_start:dt:t_end;
l = length(t);
```

```

%Sinus 7Hz, Amplituda 10
x1 = 10*sin(2*pi*7*t);
%Cosinus 20 Hz, Amplituda 0.02)
x2 = 0.02.*cos(2*pi*20*t);
%Zlozenie
y = x1 + x2;
%Transformata Fouriera
yf = abs(fft(y));
%Wektor czestotliwosci
f = linspace(0,fs,1);
%Wyswietlenie wykresu
figure(1)
semilogy(f,yf)
xlim([0,fs/2]);
%Okno Hanna
H = hann(1).';
%Sygnal po okienkowaniu
y2 = H.*y;
%Transformata Fouriera
y2f = abs(fft(y2));
hold on
semilogy(f,y2f)
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [-]')
legend('Sygnał oryginalny','Sygnał okienkowany','location','southoutside','orientation',...
'horizontal','box','off')
title('Widma transformat Fouriera sygnałów')

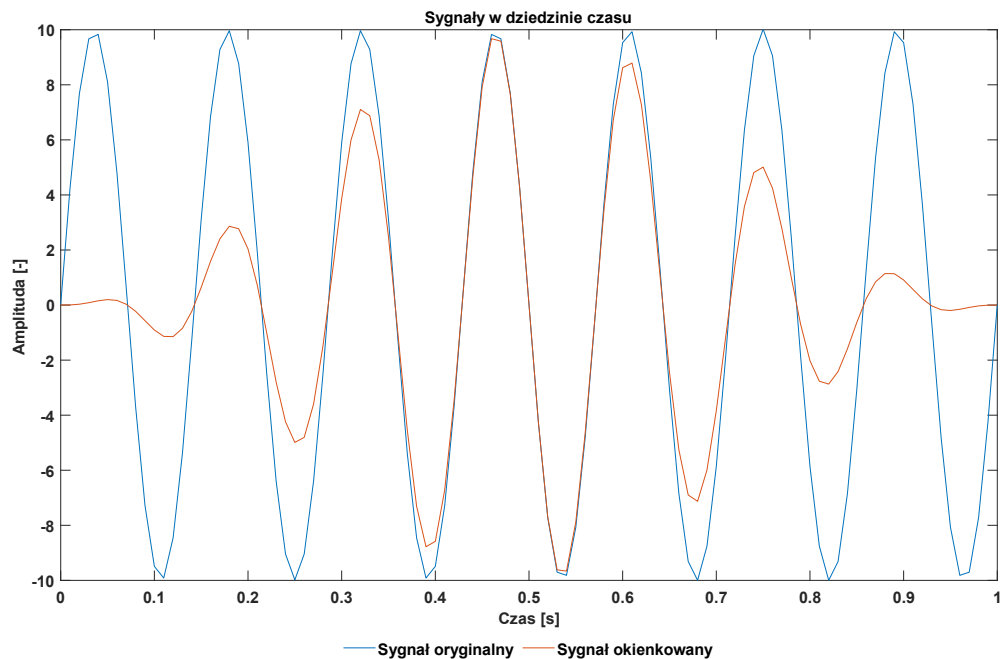
```



Rysunek 1.1 - Widma transformat Fouriera sygnałów

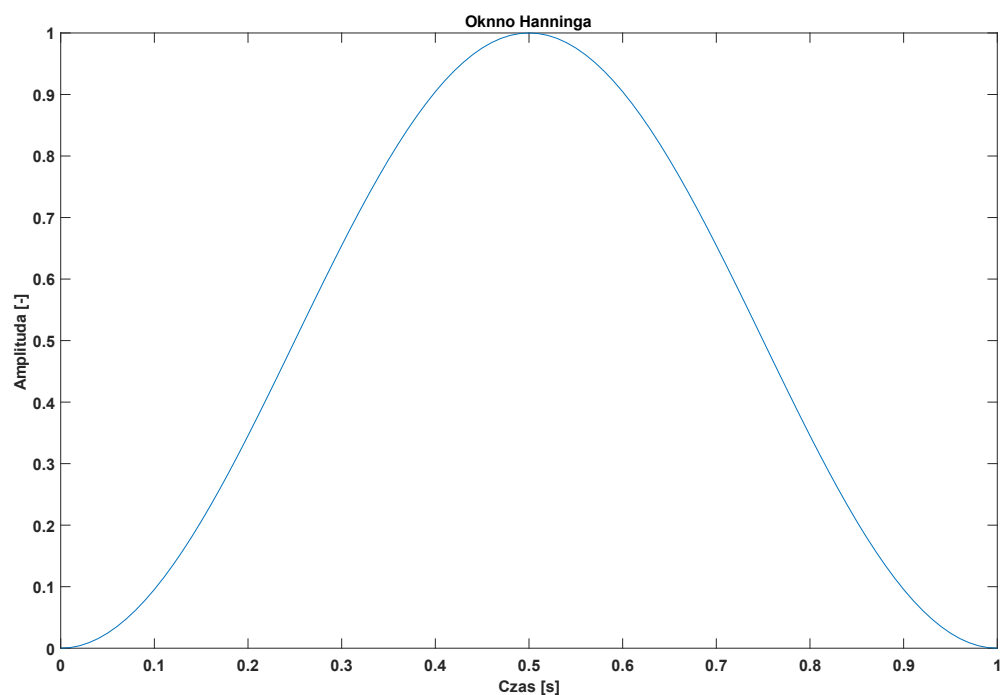
Można zaobserwować, że dla widma oryginalnego sygnału widoczny jest jedynie jeden pik w częstotliwości 7 Hz, natomiast informacja o składowej o częstotliwości 20 Hz została utracona. Zastosowane okno pomogło uzyskać informację o tej składowej, jednak piki nie są wystarczająco ostre, aby móc dokładnie określić te częstotliwości.

Taka sytuacja jest wynikiem wystąpienia przecieku widma, przez próbkę numer 101, która nie należy do pełnego okresu funkcji, a rozpoczyna już kolejny. Ten efekt jest zniwelowany przez zastosowanie okna Hanninga, ponieważ ze względu na kształt okna, ta próбка nie jest brana pod uwagę przy obliczaniu transformaty, zaprezentowano to na **Rysunku 1.2**. W oryginalnym sygnale próбка 101 ma wartość 0.02, a w sygnale po wymnożeniu przez okno 0. Warto zauważyć, że domyślnie zastosowane okno prostokątne pozwoliło na wystąpienie przecieku.



Rysunek 1.2 - Sygnały w dziedzinie czasu: oryginalny i okienkowany

Taka zmiana sygnału wynika, z kształtu zastosowanego okna – **Rysunek 1.3**.



Rysunek 1.3 - Zastosowane okno Hanninga

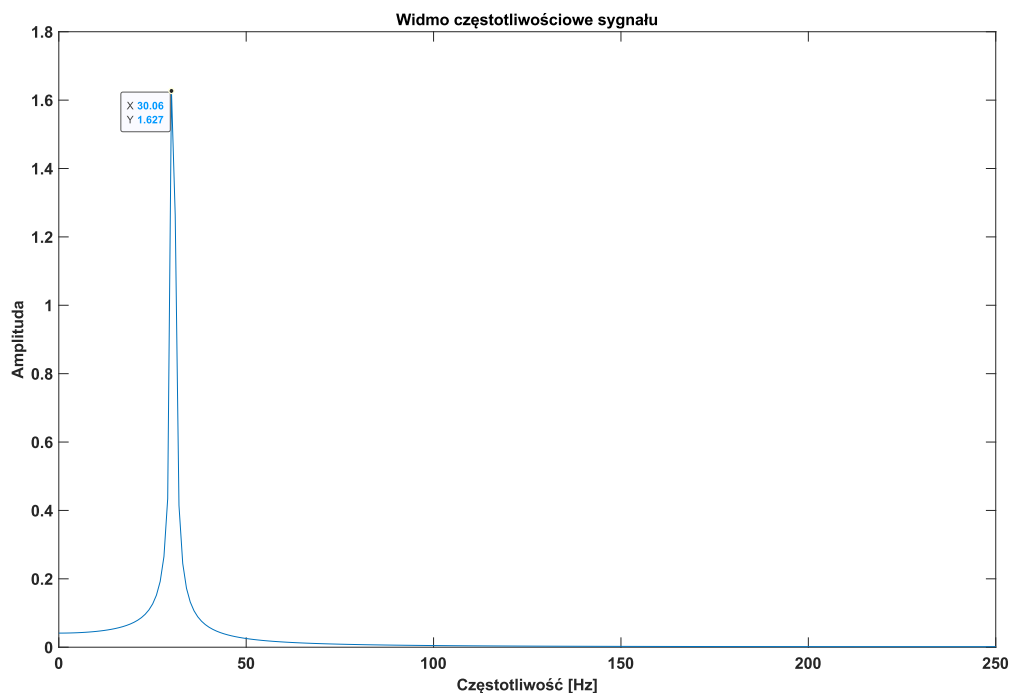
Podsumowując, zastosowanie różnych okien może pozwolić na niwelację efektu przecieku widma. Charakterystyka okna Hanninga tłumiąca sygnał na krańcach okna w tym przypadku pozwoliła ograniczyć analizowany fragment do pełnego okresu i prawidłowo odwzorować składowe wewnątrz sygnału.

Zadanie 2 – Rozdzielczość częstotliwościowa

Celem zadania było utworzenie sygnału, który składał się z sumy sinusoid o częstotliwościach 30 Hz oraz 30,5 Hz. Miał on długość 500 próbek, a jego częstotliwość próbkowania wynosiła 500 Hz. Oznacza to, że rozdzielczość częstotliwościowa powyższego sygnału wynosi:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N} = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{500} = 1 \text{ Hz}$$

Skutkiem powyższej wartości rozdzielczości częstotliwościowej jest brak piku odpowiadającego za komponent sygnału o częstotliwości 30,5 Hz na widmie częstotliwościowym:

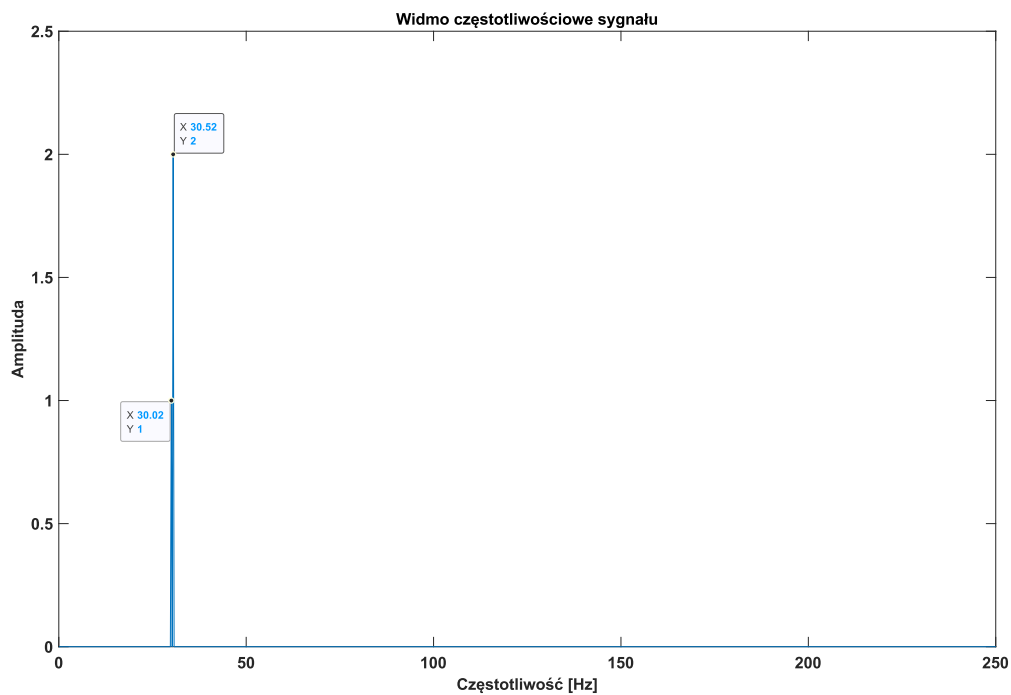


Rysunek 2.1 - Widmo transformaty Fouriera sygnału o liczbie próbek równej 500

Widoczne jest także, że pik odpowiadający za składową częstotliwość 30 Hz posiada większą amplitudę niż na zadanym sygnale. Aby częstotliwości składowe były od siebie rozróżniane na widmie należy dobrać taką liczbę próbek, aby pomiędzy ich częstotliwościami znajdowała się co najmniej jedna wartość. Ponieważ ich odległość na widmie wynosi 0,5 Hz, to największą wartością rozdzielczości częstotliwościowej, która może spowodować pożądany efekt jest 0,25 Hz. Zatem najniższa liczba wymaganych do tego celu próbek wynosi:

$$N = \frac{f_s}{\Delta f_s} = \frac{500}{0,25} = 2000$$

Efekt widoczny dla tej wartości:



Rysunek 2.2 - Widmo transformaty Fouriera sygnału o liczbie próbek równej 500

Poza odróżnialnymi pikami widoczne są także prawidłowe wartości amplitud danych składowych częstotliwościowych.

Kod służący do przeprowadzenia zadania:

```
fs = 500;
N = 2000;
t = 0:1/fs:(N-1)/fs;
s = length(t);

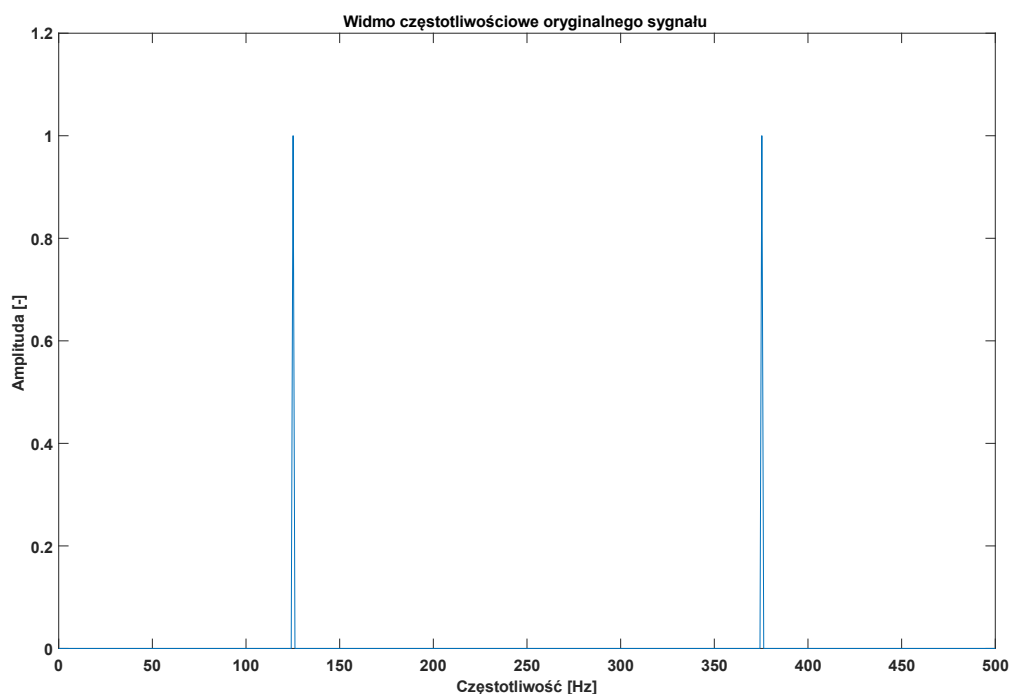
Y = sin(2*pi*30*t) + 2*sin(2*pi*30.5*t);

f1 = abs(fft(Y))/s*2;
x = linspace(0,fs,s);

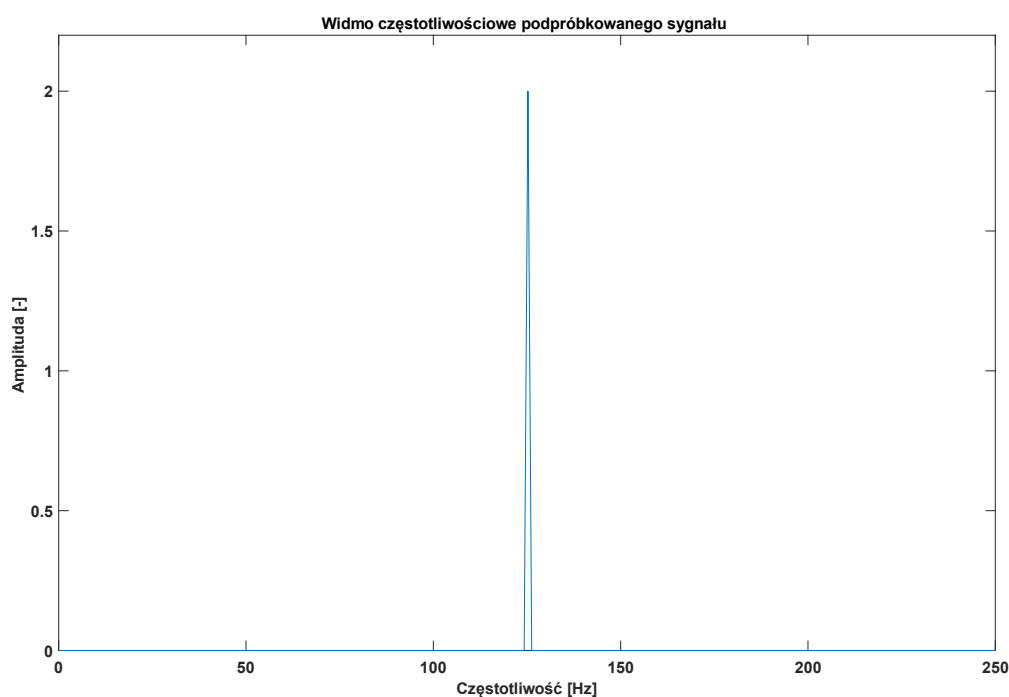
figure(1)
plot(x,f1)
xlim([0 fs/2])
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda')
title('Widmo częstotliwościowe sygnału')
```

Zadanie 3 – Zmiana częstotliwości próbkowania sygnału

W zadaniu utworzono sygnał będący sumą dwóch cosinusoid o częstotliwościach 125 Hz i 375 Hz o amplitudzie 1 każda, o częstotliwości próbkowania równej 1000 Hz. Następnie wykonano podpróbkowanie sygnału zachowując co drugą próbkę oryginalnego sygnału. Otrzymany w ten sposób sygnał posiada częstotliwość próbkowania równą 500 Hz. Obliczono transformaty Fouriera dla obu sygnałów i wyświetlono je na osobnych wykresach. Przedstawione są one na **Rysunkach 3.1, 3.2**.



Rysunek 3.1 - Widmo transformaty Fouriera oryginalnego sygnału



Rysunek 3.2 - Widmo transformaty Fouriera podpróbkowanego sygnału

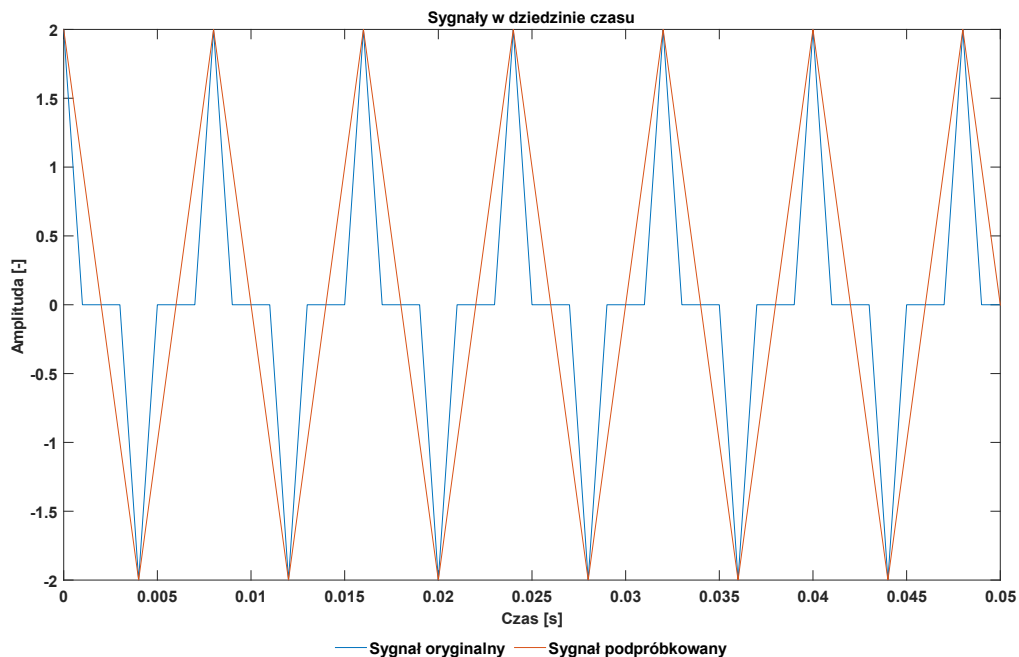
Zaobserwowano, że w przypadku sygnału o częstotliwości próbkowania 1000 Hz, prawidłowo odwzorowane zostały częstotliwości 125 Hz oraz 375 Hz. W przypadku sygnału o częstotliwości próbkowania 500 Hz, na wykresie widma widoczny jest jedynie jeden pik dla 125 Hz. Wynika to z niespełnienia twierdzenia Nyquista-Shannona, mówiącego że częstotliwość próbkowana musi być co najmniej dwukrotnością największej składowej częstotliwościowej występującej w sygnale.

$$f_s \geq 2 \times f_{max}$$

W przypadku podpróbkowanego sygnału:

$$f_s = 500 \text{ Hz} < 2 \times 375 \text{ Hz}$$

W efekcie częstotliwość 375 Hz znajduje się o 125 Hz na prawo od częstotliwości Nyquista ($\frac{f_s}{2}$), co powoduje, że częstotliwość 375 Hz odbija się symetrycznie do osi wyznaczonej przez częstotliwość Nyquista i nakłada się na częstotliwość 125 Hz powodując wzrost amplitudy do dwóch. Konsekwencję niespełnienia twierdzenia Nyquista-Shannona można dobrze zaobserwować spoglądając na wykres sygnałów w dziedzinie czasu – **Rysunek 3.3**.



Rysunek 3.3 - Sygnały w dziedzinie czasu

Jak widać zmniejszenie częstotliwości próbkowania do 500 Hz spowodowało uzyskaniem rozdzielczości czasowej dt równej 0.004, przez co próbkowanie odbywało się jedynie w ekstremach lokalnych błędnie odwzorowując sygnał jako pojedynczą częstotliwość 125 Hz – okres 0.008s co widać na **Rysunku 3.3**.

Kod służący do wygenerowania wykresów zawarto poniżej.

```
%% Obliczenia
clear all
close all
clc
%Sygnał - fs = 1000Hz, t: 0s - 1s
fs = 1000;
t_start = 0;
t_end = 1;
%Rozdzielczość
dt = 1/ fs;
%Wektor czasu
```

```

t = t_start:dt:t_end-dt;
l = length(t);
%Sygnaly
x1 = cos(2*pi*125*t);
x2 = cos(2*pi*375*t);
y = x1+x2;
%Transformata Fouriera
yf = abs(fft(y));
%Wektor czestotliwosci
f = linspace(0,fs,l);
y2 = y(1:2:end);
t2 = t(1:2:end);
l2 = l/2;
fs2 = fs/2;
%Transformata Fouriera
y2f = abs(fft(y2));
f2 = linspace(0,fs2,l2);
%% Wyświetlanie - dziedzina czasu
figure(1)
plot(t,y)
xlim([0,0.05]);
hold on
plot(t2,y2)
xlim([0,0.05]);
xlabel('Czas [s]')
ylabel('Amplituda [-]')
legend('Sygnał oryginalny','Sygnał
podpróbkowany','location','southoutside','orientation',...
'horizontal','box','off')
title('Sygnały w dziedzinie czasu')

%% Wyświetlanie - dziedzina częstotliwości oryginalny
figure(2)
plot(f,yf/l*2)
xlim([0,fs/2]);
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [-]')
title('Widmo częstotliwościowe oryginalnego sygnału')

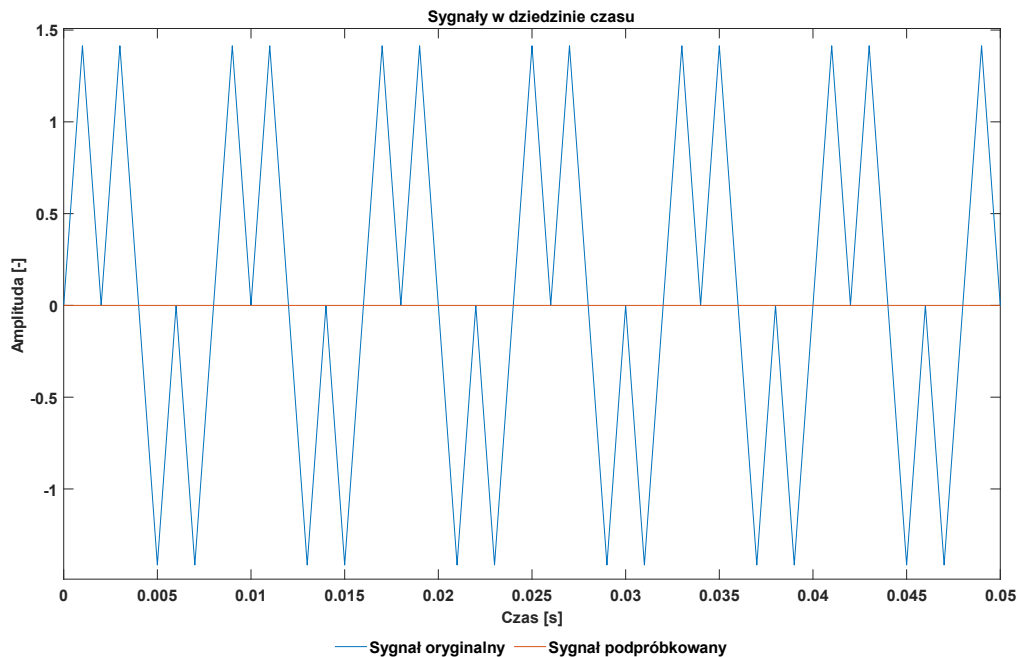
%% Wyświetlanie - dziedzina częstotliwości podpróbkowany
figure(3)
plot(f2,y2f/l2*2)
xlim([0,fs2/2]);
ylim([0,2.2])
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [-]')
title('Widmo częstotliwościowe podpróbkowanego sygnału')

```


W kolejnej części zadania sygnał uległ zmianie – składa się teraz z sumy dwóch sinusoid o częstotliwościach 125 Hz i 375 Hz:

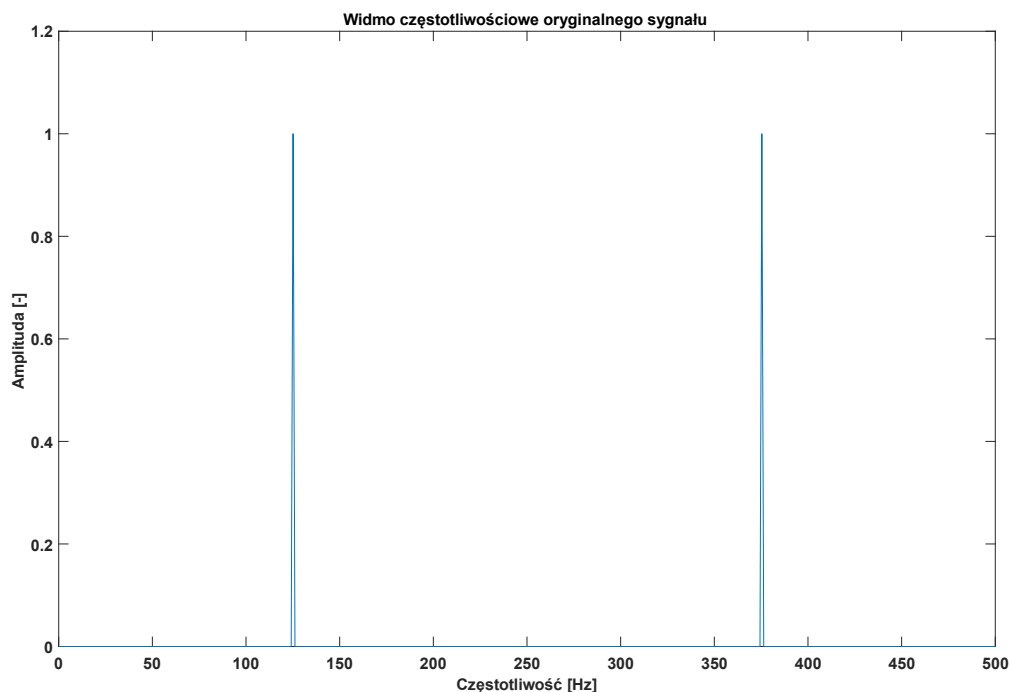
$$y(t) = \sin(125 \times 2\pi t) + \sin(375 \times 2\pi t)$$

Tym razem rozpoczęto od wyświetlenia dwóch cyfrowych reprezentacji sygnałów w dziedzinie czasu – **Rysunek 3.4.**

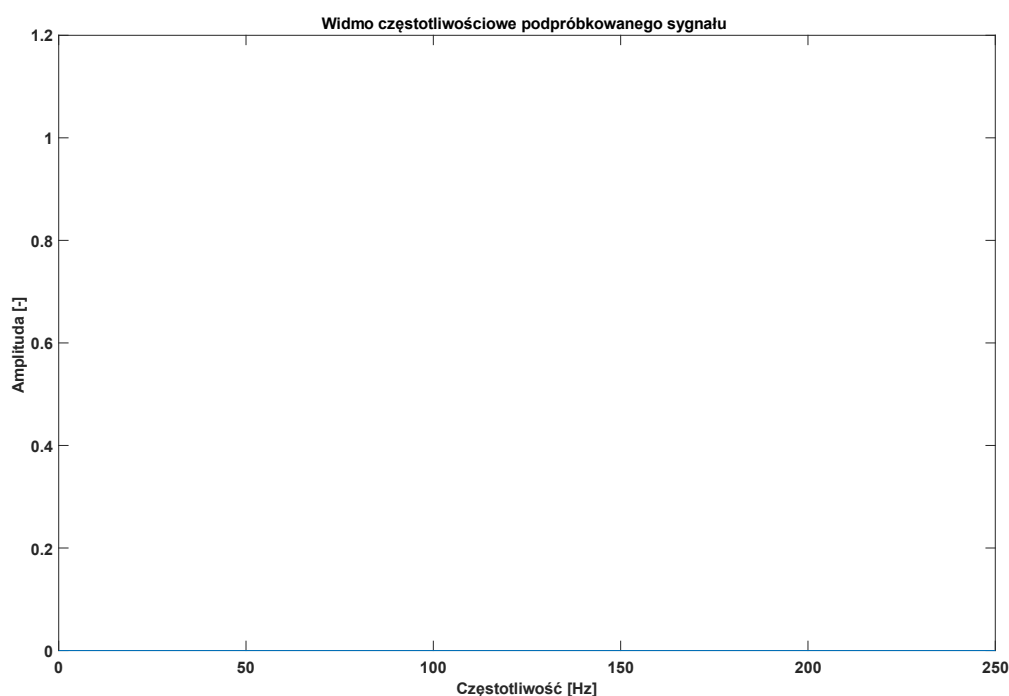


Rysunek 3.4 - Sygnały w dziedzinie czasu

Zauważono, że sygnał po przepróbkowaniu składa się wyłącznie z próbek o wartości przybliżanej do zera. Wynika to z charakterystyki sygnału bazowego – wartość 0 powtarza się co 0.002 s co odpowiada częstotliwości próbkowania sygnału po przepróbkowaniu – 500 Hz, a faza sygnału i rozpoczęcia próbkowania zbiega się z wartością sygnału równą zero. Taka sytuacja wynika z faktu obecności w sygnale składowych większych niż połowa częstotliwości próbkowania – niespełnienia twierdzenia Nyquista-Shannona. Można się spodziewać, że dla sygnału o przybliżanej wartości stałej równej zero widmo częstotliwości nie będzie posiadać żadnego piku. Widma dla sygnału o prawidłowej częstotliwości próbkowania 1000 Hz i błędnej 500 Hz, zawarto na następnej stronie na **Rysunkach 3.5, 3.6.**



Rysunek 3.5 - Widmo częstotliwościowe oryginalnego sygnału



Rysunek 3.6 - Widmo częstotliwościowe zmodyfikowanego sygnału

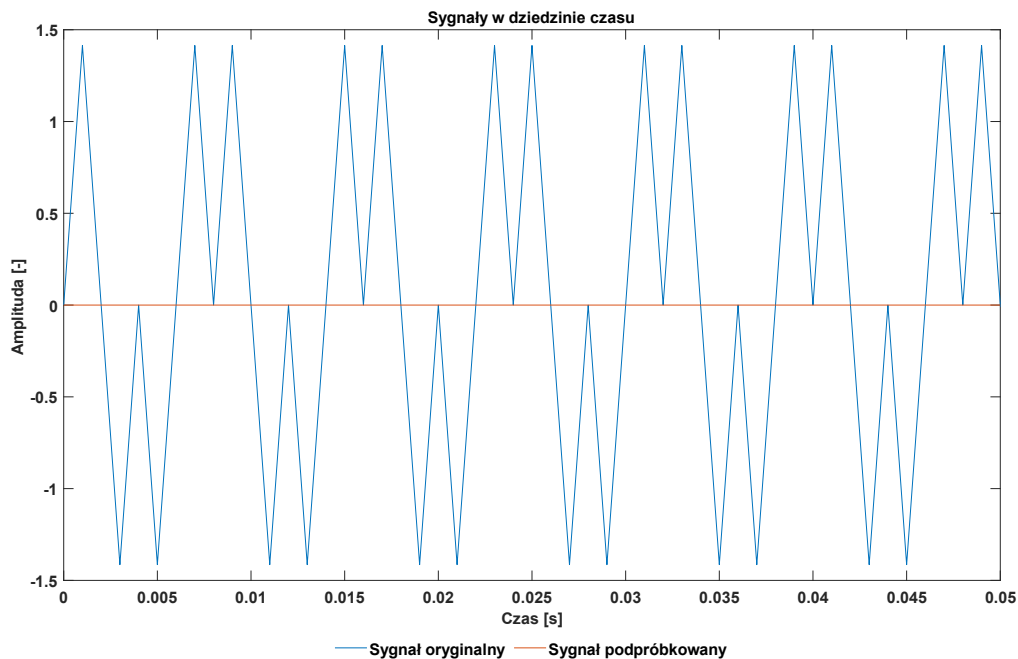
Zgodnie z przewidywaniami po analizie sygnałów w dziedzinie czasu, dla sygnału o częstotliwości próbkowania 1000 Hz, prawidłowo odwzorowane zostały składowe częstotliwościowe. Natomiast w przypadku przepróbkowanego sygnału o częstotliwości próbkowania 500 Hz, ze względu na wektor wartości stałych w czasie, na wykresie nie ma żadnego piku. Można wywnioskować, że przy błędnej częstotliwości próbkowania możliwe jest nie odkrycie częstotliwości, które gdyby odosobnione występowały w sygnale możliwe byłyby wykrywane. Dlatego ważne jest odpowiednie dobranie

częstotliwości próbkowania i opcjonalnie zastosowanie filtracji analogowej dolnoprzepustowej, aby odseparować tę część sygnału, która jest dla nas interesująca i nie narażać się na błędy związane z występowaniem w sygnale innych wyższych częstotliwości.

W kolejnej części zadania sygnał ponownie uległ zmianie – składa się teraz z różnicy dwóch cosinusoid o częstotliwościach 125 Hz i 375 Hz:

$$y(t) = \cos(125 \times 2\pi t) - \cos(375 \times 2\pi t)$$

Ponownie rozpoczęto od wyświetlenia dwóch cyfrowych reprezentacji sygnałów w dziedzinie czasu – **Rysunek 3.7.**



Rysunek 3.7 - Sygnały w dziedzinie czasu

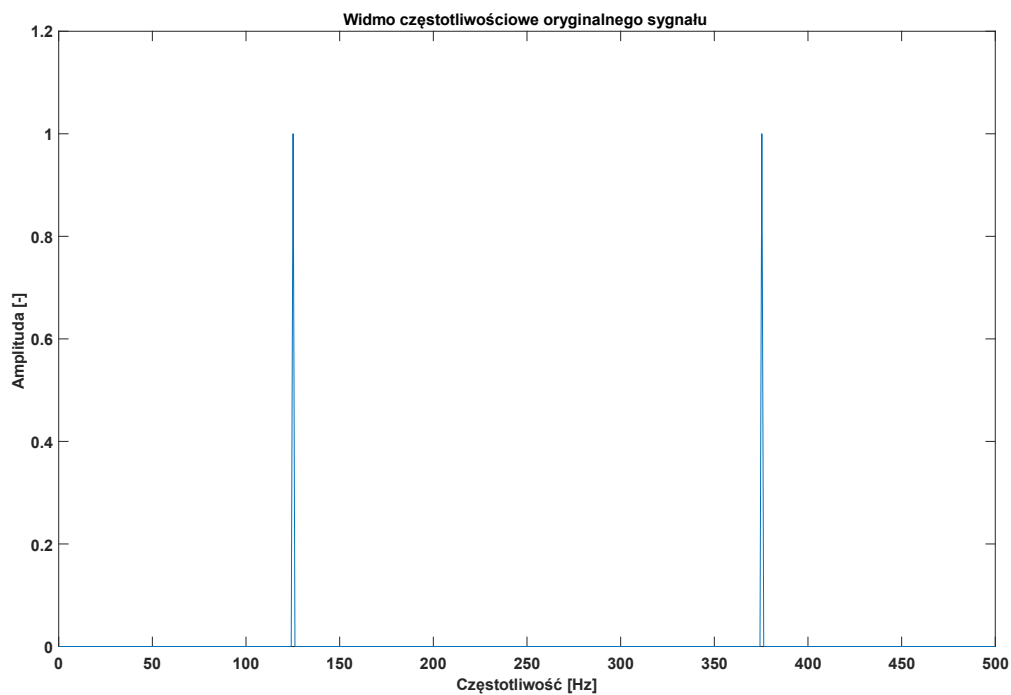
Zauważono, że sygnał próbkowany 1000 razy na sekundę jest analogiczny jak poprzednio lecz przesunięty w fazie o $\frac{1}{4}T$ – w tym wypadku dla okresu 0.008 s jest to 0.002 s co odpowiada częstotliwości próbkowania drugiego sygnału. Po uproszczeniu dwóch sygnałów tutaj rozpatrywanych można zauważyć, że są to funkcje analogiczne, różniące się jedynie typem występujących w nich funkcji trygonometrycznych – stąd przesunięcie w fazie.

```
syms t
simplify(sin(2*pi*t*125)+sin(2*pi*t*375))
simplify(cos(2*pi*t*125)-cos(2*pi*t*375))
```

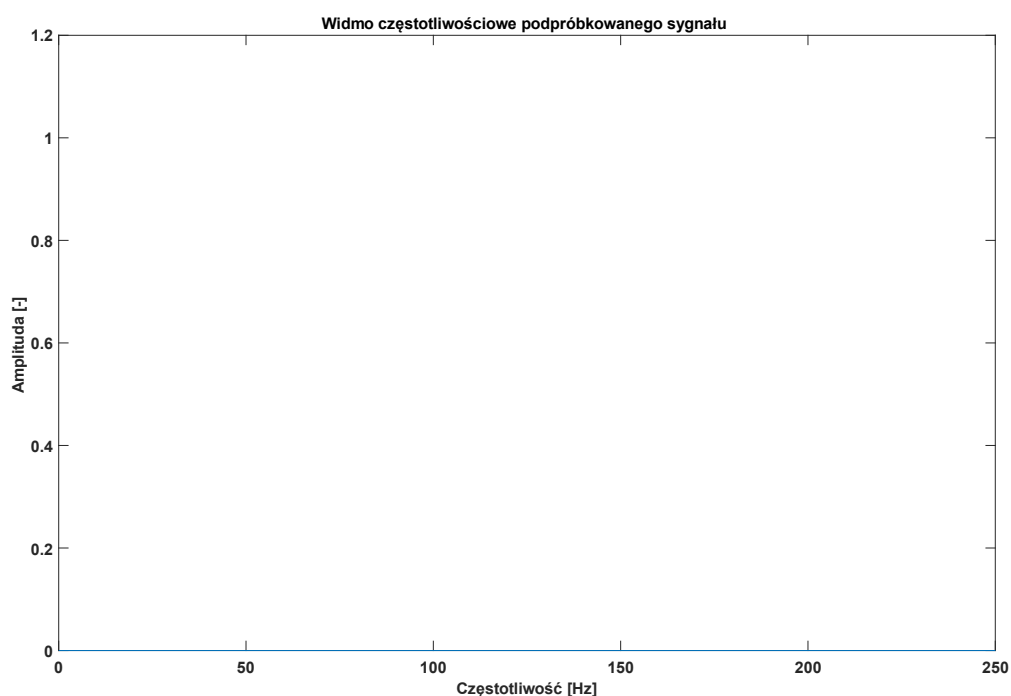
$$y(t) = \sin(125 \times 2\pi t) + \sin(375 \times 2\pi t) = -4 \times \sin(250\pi t) \times (\sin^2(250\pi t) - 1)$$

$$y(t) = \cos(125 \times 2\pi t) - \cos(375 \times 2\pi t) = -4 \times \cos(250\pi t) \times (\cos^2(250\pi t) - 1)$$

Ze względu na zbieżność przesunięcia z częstotliwością próbkowania ponownie wystąpiła sytuacja, gdzie wektor wartości sygnału drugiego ma w przybliżeniu stałą wartość równą zero. Na następnej stronie przedstawiono wykresy widm dla obu sygnałów – **Rysunek 3.8, 3.9.**



Rysunek 3.8 - Widmo częstotliwościowe oryginalnego sygnału



Rysunek 3.9 - Widmo częstotliwościowe sygnału podpróbkowanego sygnału

Analogicznie jak w poprzednim przypadku dla f_s równego 1000 Hz częstotliwości zostały odwzorowane prawidłowo, a w drugim przypadku ze względu na stałą wartość sygnału nie występują żaden pik. Wnioski i komentarze zawarto na poprzedniej stronie, a na kolejnej zawarto kod wykorzystany do dwóch ostatnich części tego zadania. Kod dla obu części różni się jedynie definicją sygnału, więc podany jest on tylko dla części a.

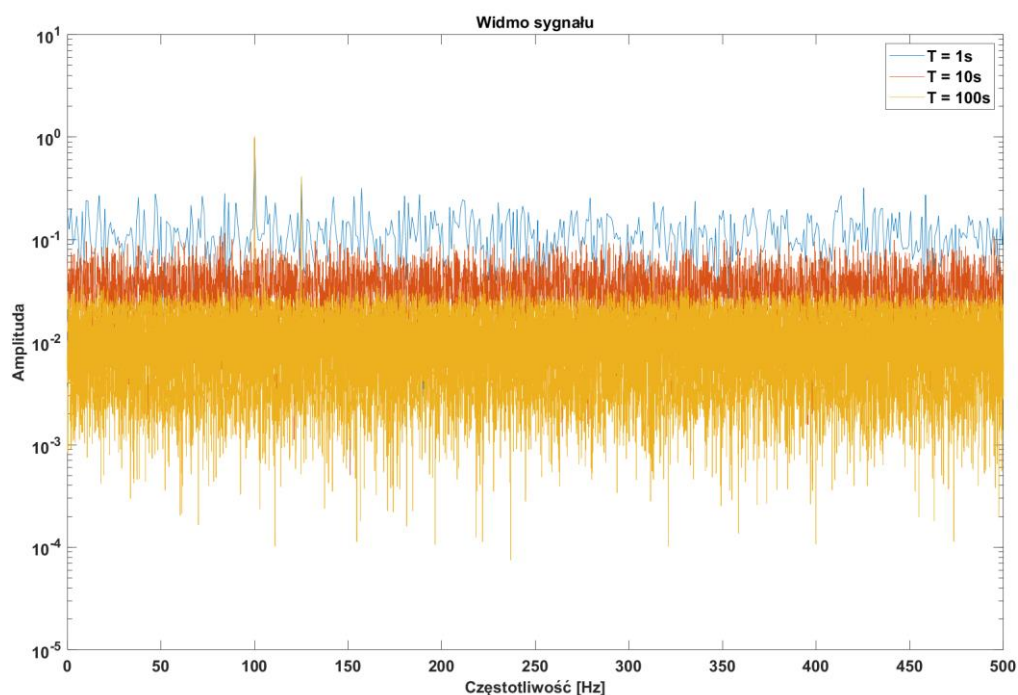
```

%% Obliczenia
clear all
close all
clc
%Czesc 2 - a)
%Sygnal - fs = 1000Hz, t: 0s - 1s
fs = 1000;
t_start = 0;
t_end = 1;
%Rozdzielczosc
dt = 1/ fs;
%Wektor czasu
t = t_start:dt:t_end-dt;
l = length(t);
%Sygnaly
x1 = sin(2*pi*125*t);
x2 = sin(2*pi*375*t);
y = x1+x2;
%Transformata Fouriera
yf = abs(fft(y));
%Wektor czestotliwosci
f = linspace(0,fs,l);
y2 = y(1:2:end);
t2 = t(1:2:end);
l2 = l/2;
fs2 = fs/2;
%Transformata Fouriera
y2f = abs(fft(y2));
f2 = linspace(0,fs2,l2);
%% Wyświetlanie - sygnały w dziedzinie czasu
figure(1)
plot(t,y)
xlim([0,0.05]);
hold on
plot(t2,y2)
xlim([0,0.05]);
ylim([-1.5,1.5]);
xlabel('Czas [s]')
ylabel('Amplituda [-]')
legend('Sygnał oryginalny','Sygnał podpróbkowany','location','southoutside','orientation',...
'horizontal','box','off')
title('Sygnały w dziedzinie czasu')
%% Wyświetlanie - sygnały w dziedzinie częstotliwości - oryginalny
figure(2)
plot(f,yf/l*2)
xlim([0,fs/2]);
ylim([0,1.2]);
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [-]')
title('Widmo częstotliwościowe oryginalnego sygnału')
%% Wyświetlanie - sygnały w dziedzinie częstotliwości - podpróbkowany
%Wyświetlenie wykresu
figure(3)
plot(f2,y2f/l2*2)
xlim([0,fs2/2]);
ylim([0,1.2]);
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda [-]')
title('Widmo częstotliwościowe podpróbkowanego sygnału')

```

Zadanie 4 – Gęstość widmowa mocy

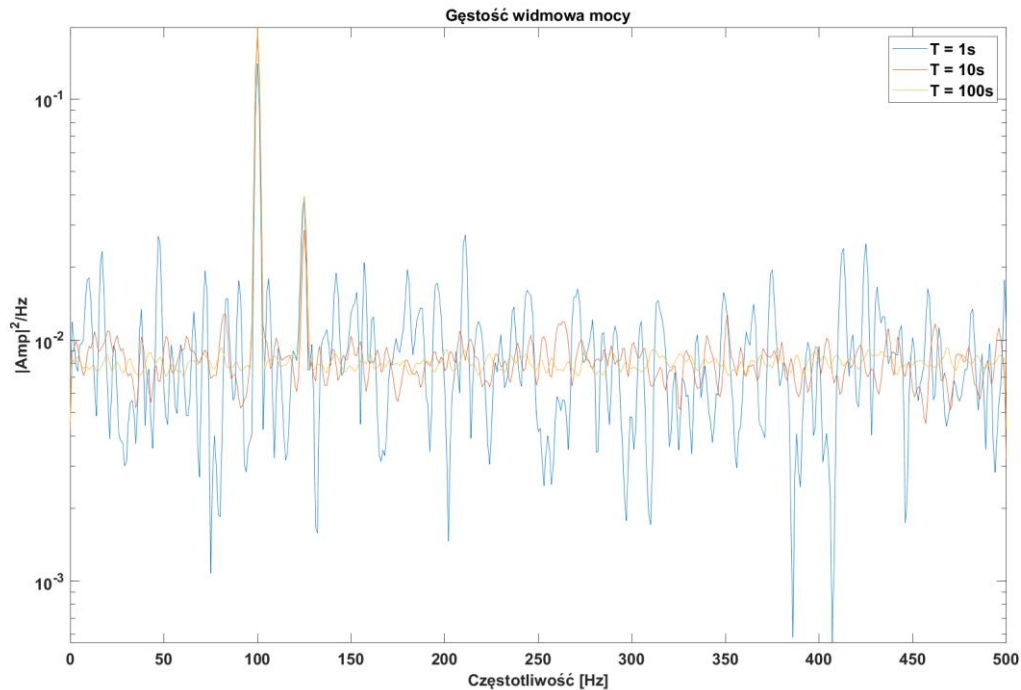
W podpunkcie a) zmienianą wartością jest długość sygnału. Dla długości 1 sekundy zarówno dla wykresu FFT jak i PSD składowa o amplitudzie 0,4 może być potraktowana jako komponent szumu białego, ponieważ amplitudy tych komponentów osiągają podobne wartości. W przypadku widma sygnału (rys. 4.1), wraz ze wzrostem jego długości, amplitudy składowych sinusoidalnych nie zmieniają swoich wartości, zaś amplitudy częstotliwości pochodzących z szumu białego posiadają niższe amplitudy, dzięki czemu powyższy problem staje się mniej uciążliwy.



Rysunek 4.1 Widmo transformaty Fouriera sygnałów o zmiennej długości

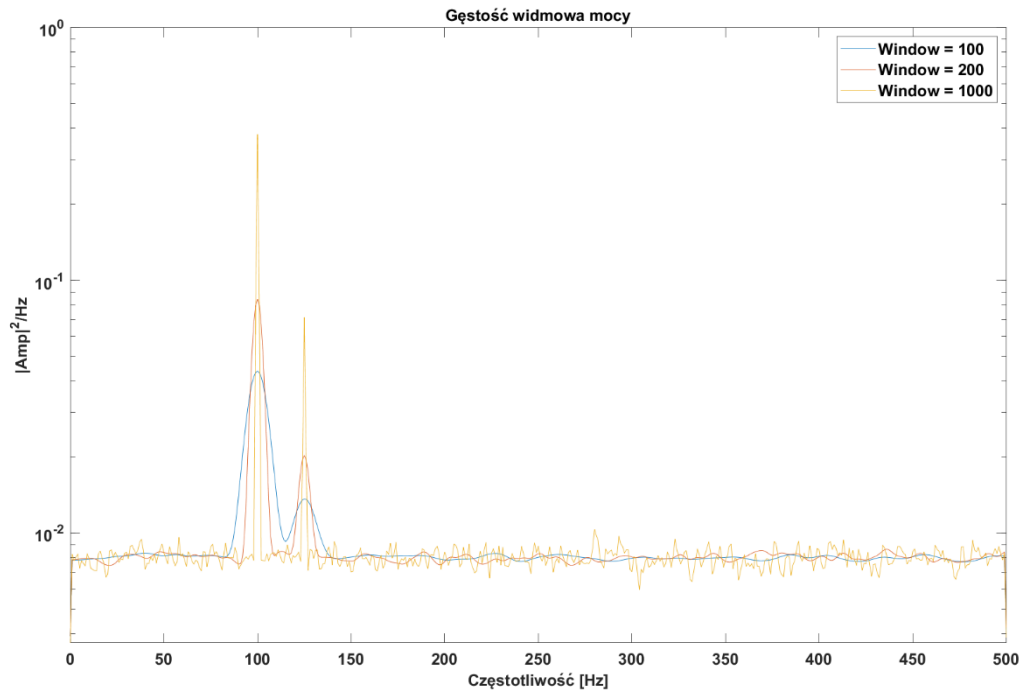
W przypadku widmowej gęstości mocy (rys. 4.2), wraz ze wzrostem długości sygnału rośnie wartość kwadratu amplitudy nad Hz dla składowych sinusoidalnych, a jednocześnie te wartości maleją dla szumu białego. Świadczy to o wzroście jakości estymacji PSD.

Wykres FFT przedstawia rozkład poszczególnych składowych częstotliwościowych, natomiast widmowa gęstość mocy ukazuje rozkład mocy na częstotliwości. Ponieważ moc sygnału białego szumu jest niewielka w stosunku do sygnałów sinusoidalnych, wykres ten bardziej nadaje się do analizowania sygnałów stochastycznych.



Rysunek 4.2 Gęstość widmowa mocy sygnałów o zmiennej długości

W podpunkcie b) zmieniane były długości okien wykorzystywanych przez funkcję **pwelch**. W przypadku okna o długości 100 widoczne jest wygładzenie częstotliwości pochodzących z szumu białego. Jednocześnie piki częstotliwości pochodzących ze składowych sinusoidalnych są szerokie co może utrudniać analizę wykresu w przypadku, gdy te częstotliwości są sobie bliskie (np. 1 Hz), choć w przypadku częstotliwości zadanych w poleceniu są one dobrze rozróżnialne. Wraz ze wzrostem długości okna, wartości kwadratu amplitudy nad Hz dla częstotliwości składowych sinusoidalnych są większe, zaś piki są węższe co umożliwia dokładniejszą analizę wykresu.



Rysunek 4.3 Gęstość widmowa mocy sygnałów o zmiennej długości okna

Kod wykorzystany do wykonania zadania:

```
clear all
close all

% Wybór podpunktu
% C = 1 --> A
% C = 2 --> B
C = 1;

for i=1:3
    T = [1, 10, 100];
    W = [100 200 1000];

    if C == 1
        tmax = T(i);
        WINDOW = 500;
    else
        tmax = 100;
        WINDOW = W(i);
    end

    fs = 1000;
    t = 0:1/fs:tmax-1/fs;
    s = length(t);
    NFFT = 1000;
    NOVERLAP = WINDOW/2;

    yn = 2*randn(1,s);
    Y = sin(2*pi*100*t) + 0.4*sin(2*pi*125*t) + yn;

    f1 = abs(fft(Y))/s*2;
    x = linspace(0,fs,s);
```



```

figure(1)
semilogy(x,f1)
if C == 1
    legend('T = 1s', 'T = 10s', 'T = 100s')
else
    legend('Window = 100', 'Window = 200', 'Window = 1000')
end
hold on
xlim([0 fs/2])
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('Amplituda')
title('Widmo sygnału')

[Pxx,F] = pwelch(Y,WINDOW,NOVERLAP,NFFT,fs);

figure(2)
semilogy(F,Pxx)
if C == 1
    legend('T = 1s', 'T = 10s', 'T = 100s')
else
    legend('Window = 100', 'Window = 200', 'Window = 1000')
end
hold on
xlim([0 fs/2])
xlabel('Częstotliwość [Hz]')
ylabel('|Amp|^2/Hz')
title('Gęstość widmowa mocy')
end

```