

Bloque 6: Electromiografía

Procesado de Señal en Electromiografía

Luis Bote Curiel
Francisco Manuel Melgarejo Meseguer

DTSC

Curso 24-25



- ① Introducción
- ② Modelos Autoregresivos
- ③ Modelos de Media Móvil
- ④ Modelos Autoregresivos de Media Móvil
- ⑤ Bibliografía

Introducción

Contenido en frecuencia

Caracterización espectral

- Las señales EMG generalmente tienen un contenido de frecuencia que varía entre 0 y 500 Hz.
- Sin embargo, la mayor parte de la *energía útil* de la señal EMG se encuentra en el rango de 50 a 150 Hz.

Baja frecuencia

- Las frecuencias por debajo de 20 Hz suelen estar asociadas con el movimiento de la línea base y el ruido de baja frecuencia.
- Estas componentes pueden ser eliminadas utilizando un filtro paso-alto.
- Cuidado con la interferencia de red (50-60Hz). Hay que filtrarla mediante notch.

Alta frecuencia

- Las frecuencias por encima de 150 Hz pueden contener ruido de alta frecuencia y artefactos no deseados.
- Estos componentes pueden ser eliminados utilizando un filtro pasa-bajos.

Modelos No Paramétricos

- Los métodos no paramétricos requieren series de datos largas para lograr la varianza y resolución en frecuencia deseadas.
- El uso de ventanas afecta la varianza - Fuga espectral.
- Los inconvenientes se deben a suposiciones falsas:
 - $r_{xx}[m] = 0$ para $m \geq N$
 - Los datos son periódicos con período N .

Métodos Paramétricos

- Los métodos paramétricos se basan en suposiciones a priori sobre las señales que permiten extrapolar valores de $r_{xx}[m]$ para $m > N$.
- La varianza y resolución de las estimaciones se mejoran significativamente para registros de datos cortos si el modelo se elige correctamente. De lo contrario, los resultados son inútiles.

Pasos

- 1 Elección de modelo basado en conocimientos previos,
 - Autoregresivo (AR).
 - Media móvil (MA).
 - Autoregresivo de media móvil (ARMA).
- 2 Estimar los parámetros del modelo a partir de los datos proporcionados.
- 3 Estimar el espectro de potencia utilizando los parámetros estimados.

Consideraciones

- Los métodos principales se basan en el modelado paramétrico de la secuencia $x(n)$ como la salida de un sistema lineal con entrada $w(n)$ caracterizado por una función de transferencia, que en su forma general es un sistema IIR.
- La entrada se elige típicamente como una señal que puede ser representada paramétricamente con pocos parámetros.
- En el modelado de procesos estocásticos, se asume que la entrada al filtro es ruido blanco con $\mu = 0$ y varianza (SPD) σ^2 .

Modelos Autoregresivos

Proceso Autoregresivo (AR)

Descripción

Un proceso autoregresivo (AR) x_n puede representarse como la salida de un filtro de todos los polos impulsado por ruido blanco de varianza unitaria:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

El espectro de potencia de un proceso AR de orden p es:

$$P_x(\omega) = \frac{b_0^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

Si los parámetros b_0 y a_k pueden ser estimados a partir de los datos, la estimación del espectro de potencia puede formarse usando:

$$\hat{P}_{AR}(\omega) = \frac{\hat{b}_0^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

La precisión de la estimación dependerá de la exactitud con la que se puedan estimar los parámetros del modelo y de si un modelo AR es aplicable.

Proceso Autoregresivo (AR)

- Los modelos AR son simples, rápidos y precisos.
- Existen diferentes formas de resolverlos, aquí presentaremos 4: método de la autocorrelación, método de la covarianza, covarianza modificada y método de Burg.
- Consideremos un modelo AR de orden p

$$\frac{X(z)}{W(z)} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \rightarrow X(z) \left(1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right) = b_0 W(z)$$

$$E\{x(n) \sum_{k=0}^p a_k x(n-k)\} = E\{x(n) b_0 w(n)\}$$

$$r_{xx}(k) + \sum_{i=1}^p a_i r_{xx}[k-i] = |b_0|^2 \delta(k)$$

Método de la Autocorrelación

- Al conjunto de ecuaciones anterior se le conoce como ecuaciones normales de autocorrelación y pueden ser escritos matricialmente como

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b_0|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Si resolvemos el sistema utilizando el estimador sesgado de la autocorrelación $r_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x_{n+k} x_n^*$.
- Hacemos que b_0 tenga este valor $r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p r_{xx}^*$
- Generamos una estimación conocida también como método de Yule-Walker.
- Dado que la matriz de autocorrelación R_{xx} es de Toeplitz, se puede utilizar la recursión de Levinson-Durbin para resolver estas ecuaciones (rápido).
- Las raíces de $A(z)$ estarán dentro del círculo unitario y el modelo será estable.

Método de la Autocorrelación

- Se puede usar el estimador insesgado de la autocorrelación, pero entonces las matrices no son Toeplitz y resolverlas se complica.
- El método es muy simple
- Tiene implícita una ventana rectangular de datos.
- No se utiliza en datos cortos.
- Presenta *Spectral line splitting* (aparición de múltiples picos en el espectro de potencia que deberían corresponder a una sola frecuencia).

Covarianza

- El método de la covarianza requiere encontrar la solución al conjunto de ecuaciones lineales, dadas por una *autocovarianza* donde los valores medios son cero, de manera que minimize la suma del error cuadrático de predicción hacia adelante $f_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}$.

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(1,1) & r_{xx}(2,1) & r_{xx}(3,1) & \cdots & r_{xx}(p,1) \\ r_{xx}(1,2) & r_{xx}(2,2) & r_{xx}(3,2) & \cdots & r_{xx}(p,2) \\ r_{xx}(1,3) & r_{xx}(2,3) & r_{xx}(3,3) & \cdots & r_{xx}(p,3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(1,p) & r_{xx}(2,p) & r_{xx}(3,p) & \cdots & r_{xx}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{xx}(0,1) \\ -r_{xx}(0,2) \\ -r_{xx}(0,3) \\ \vdots \\ -r_{xx}(0,p) \end{bmatrix}$$

donde

$$r_{xx}(k,l) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-l)x(n-k)$$

Método de la Covarianza

- La ventaja del método de la covarianza sobre el método de la autocorrelación es que no se requiere el uso de ventanas en los datos para la formación de las estimaciones de autocorrelación $r_{xx}(k, l)$.
- Para registros de datos cortos, el método de la covarianza generalmente produce estimaciones espectrales de mayor resolución que el método de la autocorrelación.
- Cuando la longitud de los datos es grande en comparación con el orden del modelo, $N \gg p$, el efecto de la ventana de datos se vuelve pequeño y la diferencia entre los dos enfoques se vuelve insignificante.
- La matriz R_x no es Toeplitz por lo que no podemos utilizar el método de Levinson-Durbin, lo que hace que sea más complejo de resolver.
- Presenta *Spectral line splitting*

Método de la Covarianza Modificada

- El método de covarianza modificado es similar al método de covarianza en que no se aplica una ventana a los datos. Sin embargo, en lugar de encontrar un modelo AR que minimice la suma de los cuadrados del error de predicción hacia adelante, el método de covarianza modificado minimiza la suma de los cuadrados de los errores de predicción hacia adelante y hacia atrás.
- El error de predicción hacia adelante se define como:

$$f_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}$$

- El error de predicción hacia atrás se define como:

$$b_n = x_{n-p} - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-p+k}$$

Método de la Covarianza Modificada

- Los parámetros AR en el método de covarianza modificado se encuentran resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales de la forma dada en (9.11.1) con:

$$r_{xx}(k, l) = \sum_{n=p}^{N-1} (x(n-l)x^*(n-k) + x(n-p+l)x^*(n-p+k))$$

- La matriz de autocorrelación no es Toeplitz.
- A diferencia del método autoregresivo, el método de covarianza modificado parece proporcionar estimaciones espectrales estadísticamente estables y de alta resolución.
- Válido para registros cortos.
- La ubicación de los picos tiende a ser menos sensible a la fase.
- A diferencia de los métodos anteriores, el método de covarianza modificado no presenta *Spectral line splitting*.
- Mucho más complicado que los anteriores.

Método de Burg

Al igual que el método de covarianza modificado, el algoritmo de Burg encuentra un conjunto de parámetros AR que minimiza la suma de los cuadrados de los errores de predicción hacia adelante y hacia atrás. Sin embargo, para asegurar que el modelo sea estable, esta minimización se realiza secuencialmente con respecto a los coeficientes de reflexión.

Consideraciones

- **Ventajas:**
 - No se requiere ventana → Mayor resolución en frecuencia
 - Modelo estable
 - Método computacionalmente eficiente
- **Desventajas:**
 - División de líneas espectrales a alta relación señal-ruido (SNR)
 - Para órdenes altos introduce picos espectrales espurios
 - Las ubicaciones de los picos son muy sensibles a la fase
 - Sesgo en frecuencia

Problemas con el Orden del Modelo

- Orden demasiado pequeño: La estimación espectral se suaviza.
- Orden demasiado grande: La estimación espectral contiene picos espurios y conduce a la división de líneas espectrales, además de una mayor carga computacional.

Aproximación

- Aumentar el orden hasta que el error de modelado se minimice.
- Inconveniente El error es una función monótonamente no decreciente del orden del modelo p . Este problema puede mitigarse incorporando una función de penalización que aumente con el orden del modelo.

Penalización lineal

Varios criterios propuestos incluyen un término de penalización que aumenta linealmente con p :

$$C(p) = \log(\epsilon_p) + p \cdot f(N)$$

Donde ϵ_p es el error de modelado, N es la longitud del registro de datos y $f(N)$ es una constante que puede depender de N . Por tanto, deberemos seleccionar p que minimice $C(p)$.

Criterios

- Criterio de Información de Akaike: tiende a sobreestimar el orden p a medida que N aumenta.

$$AIC(p) = N \log \epsilon_p + 2p$$

- Criterio de Longitud Mínima de Descripción: converge al valor verdadero de p a medida que N aumenta (consistente).

$$C(p) = N \log \epsilon_p + p \log N$$

Criterios

- Error de Predicción Final de Akaike.

$$FPE(p) = \epsilon_p \frac{N + p + 1}{N - p - 1}$$

- Criterio de Transferencia Autoregresiva de Parzen.

$$CAT(p) = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^p \frac{N-j}{N\epsilon_j} \right] - \frac{N-p}{N\epsilon_p}$$

Inconvenientes

- Ninguno de ellos funciona bien con registros de datos cortos.
- Un buen criterio para el modelo AR puede no ser bueno para otro.

Modelos de Media Móvil

Generación de un Proceso de Media Móvil

Un proceso de media móvil (MA) puede generarse filtrando ruido blanco de varianza unitaria w_n con un filtro FIR como sigue:

$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k]$$

Espectro de Potencia de un Proceso MA

El espectro de potencia de un proceso MA es:

$$P_x(\omega) = \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\omega k}$$

El espectro de potencia también puede escribirse en términos de la función de autocorrelación:

$$P_x(\omega) = \sum_{k=-q}^q r_{xx}(k) e^{-j\omega k}$$

Relación con los Coeficientes del Filtro

La función de autocorrelación $r_x(k)$ está relacionada con los coeficientes del filtro b_k a través de las ecuaciones de Yule-Walker:

$$r_{xx}(k) = \sum_{l=0}^q b_l b_{k-l}^* \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, q$$

con $r_{xx}(-k) = r_{xx}(k)^*$ y $r_{xx}(k) = 0$ para $k > q$.

Estimación del Espectro

Con un modelo MA, el espectro puede estimarse de dos maneras:

- 1 Método Directo.
- 2 Método de Durbin.

Método Directo

Dado que la autocorrelación de un proceso MA es de longitud finita:

$$P_x(\omega) = \sum_{k=-q}^q r_{xx}(k) e^{-j\omega k}$$

donde $r_{xx}(k)$ es el estimador sesgado o no sesgado de r_{xx} .

Estimación No Sesgada

Aunque equivalente a Blackman-Tukey, dado que la verdadera autocorrelación de un proceso MA es finita (por ejemplo, $2q-1$), si se utiliza un estimador no sesgado de $r_{xx}(k)$, la estimación de P_x es no sesgada.

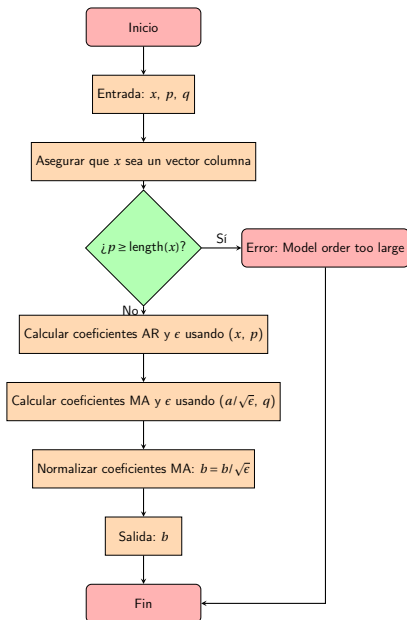
Estimación de Parámetros

- Estima los parámetros MA b_k a partir de $x(n)$.
- Estimación de los parámetros usando el método de Durbin:
 - 1 Encontrar un modelo de todo polos (AR) de orden alto $A_p(z)$ para el proceso MA.
 - 2 Considerar los coeficientes a_k como un nuevo conjunto de datos y encontrar los coeficientes de un modelo MA de orden q como un proceso AR de orden q para la secuencia a_k .

Modelos de Media Móvil

- Sea $x(n)$ un proceso MA de orden q generado a partir de un ruido blanco $w(n)$. $x(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$
- Supongamos que encontramos un modelo de todo polos de orden p para $x(n)$ y que p es lo suficientemente grande para que: $B_q(z) = \frac{1}{a_0 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$
- Por lo tanto, $A_p(z) = \frac{1}{B_p(z)}$ representa un modelo de todo polos (AR) de orden q para los datos a_k . $A_q(z) \approx \frac{1}{B_q(z)} = \frac{1}{b_0 + \sum_{k=1}^p b_k z^{-k}}$

Diagrama



Modelos Autoregresivos de Media Móvil

Generación de un Proceso ARMA

Un proceso ARMA puede generarse filtrando ruido blanco de varianza unitaria $w(n)$ con un filtro IIR generalizado:

$$x(n) = \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{j=0}^q b_j w(n-j)$$

Estimación del PSD

La estimación de la densidad espectral de potencia (PSD) del proceso ARMA es:

$$P_x(\omega) = \frac{|B(e^{j\omega})|^2}{|A(e^{j\omega})|^2}$$

donde $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$ y $B(z) = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j}$.

Estimación de Parámetros

Los parámetros del modelo AR pueden estimarse a partir de las ecuaciones de Yule-Walker modificadas. Luego, los parámetros MA pueden estimarse usando el método de Durbin, por ejemplo.

Ecuaciones de Yule-Walker Modificadas

La autocorrelación de un proceso ARMA satisface las ecuaciones de Yule-Walker:

$$r_{xx}(k) + \sum_{i=1}^p a_i r_{xx}[k-i] = c_k$$

donde c_k es la convolución de b_k y h_{-k}^* , y $r_{xx}(k)$ es la autocorrelación de $x(n)$.

$$c_k = b_k * h^*(-k) = \sum_{i=1}^{q-k} b_{i+k} h^*(i) \quad r_{xx}(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\}$$

Modelos ARMA

Suposición

Dado que h_n se asume causal, entonces $c_k = 0$ para $k > q$ y las ecuaciones de Yule-Walker para $k > q$ son una función solo de los coeficientes a_k :

$$r_x(k) + \sum_{l=1}^p a_l r_x(k-l) = 0 \quad \text{para } k > q$$

Forma Matricial

En forma matricial, para $k = q+1, q+2, \dots, q+p$, es:

$$\begin{bmatrix} r_x(q+1) & r_x(q) & \cdots & r_x(q-p+1) \\ r_x(q+2) & r_x(q+1) & \cdots & r_x(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q+p) & r_x(q+p-1) & \cdots & r_x(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(q+1) \\ -r_x(q+2) \\ \vdots \\ -r_x(q+p) \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se llaman las ecuaciones de Yule-Walker Modificadas y permiten encontrar los coeficientes a_k en el filtro $H(z)$ a partir de la secuencia de autocorrelación $r_x(k)$ para $k = q, q+1, \dots, q+p$.

Modelos ARMA

Estimación de b_k

Una vez que los coeficientes AR a_k son estimados, los parámetros MA b_k pueden ser encontrados usando uno de varios enfoques:

Enfoque 1

Si x_n es un proceso ARMA (p, q) con espectro de potencia

$$P_x(z) = \frac{B_q(z)B_q^*(z)}{A_p(z)A_p^*(z)}$$

Entonces, filtrando x_n con un filtro LTI que tiene una función de sistema $A_p(z)$ produce un proceso MA (q) y_n con un espectro de potencia

$$P_y(z) = B_q(z)B_q^*(z)$$

Método de Durbin

Por lo tanto, los parámetros MA b_k pueden ser estimados a partir de y_n , por ejemplo, mediante el método de Durbin.

Enfoque 2

Alternativamente, se puede evitar el filtrado explícito y los b_k pueden encontrarse de la siguiente manera:

Dado a_k , las ecuaciones de Yule-Walker pueden usarse para encontrar los valores de la secuencia c_k para $k = 0, 1, \dots, q$:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(q) & r_x(q-1) & \cdots & r_x(q-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(q) \\ r_x(q-1) \\ \vdots \\ r_x(0) \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

Esto puede escribirse en forma matricial como:

$$R_{x,p+q} \mathbf{a} = \mathbf{c}$$

Dado que $c_k = 0$ para $k > q$, la secuencia c_k es conocida para todos $k \geq 0$. Denotaremos la transformada z de esta parte causal o de tiempo positivo de c_k por $[C(z)]_+$.

Parte Anticausal

De manera similar, denotaremos la parte anticausal o de tiempo negativo por $[C(z)]_-$:

$$[C(z)]_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k$$

Convolución

Recordemos que c_k es la convolución de b_k con h_{-k}^* . Por lo tanto:

$$C(z) = B(z)H^*(1/z^*)$$

Multiplicación

Multiplicando $C_q(z)$ por $A_p^*(1/z^*)$, llegamos a:

$$P_y(z) \equiv C(z)A_p^*(1/z^*) = B_q(z)B_q^*(z)$$

Parte Causal

Dado que a_k es cero para $k < 0$, entonces $A_p^*(1/z^*)$ contiene solo potencias positivas de z . Por lo tanto, la parte causal de $P_y(z)$ es:

$$[P_y(z)]_+ = [C(z)A_p^*(1/z^*)]_+$$

Simetría Conjugada

Usando la simetría conjugada de $P_y(z)$, podemos determinar $P_y(z)$ para todos los z . Finalmente, realizando una factorización espectral de $P_y(z)$:

$$P_y(z) = B_q(z)B_q^*(z)$$


Polinomio $B_q(z)$

Esto produce el polinomio $B_q(z)$. Alternativamente, se puede formar y evaluar un conjunto de ecuaciones de Yule-Walker extendidas.

Conclusión

Sin embargo, no existen recetas simples para el cálculo de los parámetros del modelo ARMA, especialmente para órdenes de modelo relativamente grandes.

Bibliografía

- Agradecimiento a los profesores Javier Gimeno Blanes y Alberto Rodríguez Martínez.
 - Spectrum estimation: parametric methods, Advanced DSP and Modelling Course, Dr. Gleb V. Tcheslavski, Lamar University, Texas state University.
-  L. Sörnmo and P. Laguna, *Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications*.
Academic Press series in biomedical engineering, Elsevier Science, 2005.