Apuntes de Estadística y Probabilidad

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

15 de julio de 2018

[1]Correo Electrónico: toborochi98@outlook.com

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT202 (Probabilidad y Estadística)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Aspectos Básicos de las Estadísticas

Concepto de la Estadística

Es una ciencia que proporciona un conjunto de métodos y técnicas que permiten recolectar, clasificar, organizar, analizar y presentar datos de forma adecuada para tomar decisiones frente a una incertidumbre o describir o afirmar algo acerca de la población. Esta definición permite clasificar la Estadística en: Estadística **Descriptiva** y Estadística **Inferencial**.

Estadística Descriptiva

Es la parte de la Estadística que proporciona un conjunto de métodos, con el fin de describir o analizar datos.

Estadística Inferencial

1.1. Conceptos Generales de la Estadística

1.1.1. Generalidades

(I) **Población:** Es el conjunto o totalidad de elementos, sean personas, objetos o cosas que presentan uno o más características que nos interesan acerca de las cuales intentamos obtener conclusiones.

(II) **Tamaño de la Población:** Número de elementos de la población, denotado usualmente por: N.

(III) **Muestra:** Es parte o subconjunto de la población.

(IV) **Tamaño de la Muestra:** Cantidad de elementos de la Muestra. Denotado por: n.

(V) **Parámetro:** Es una medida numérica que describe una característica de la población. Los parámetros mas usados de la población son:

- Media Poblacional $(\mu)^*$
- Varianza Poblacional $(\sigma^2)^*$
- Desviación Estándar Poblacional $(\sigma)^*$
- Proporción Poblacional $(\pi$ ó $p)^*$

(VI) **Estadígrafos:** Es una medida numérica que describe una característica de la muestra. Los estadígrafos mas usados son:

- Media Muestral $(\bar{x}, \bar{y})^*$
- Varianza Muestral $(S^2, \hat{S}^2)^*$
- Desviación Estándar $(S, \hat{S})^*$
- Proporción Muestral $(\hat{\pi}$ ó $\hat{p})^*$

1.1.2. Variables Estadísticas

Se denomina variable estadística a la característica o combinación de características de una población:

Todos los puntos marcados con un * serán explicados mas adelante, o puedes ver el índice

Tipos de Variables Estadísticas

Están clasificadas de la siguiente manera:

- **Cualitativas:**
  - **Variables Nominales:** Es aquella cuyo valor se expresa en categorías sin ningún tipo de orden o clasificación.
  - **Variables Ordinales:** Es aquella cuyo valor se expresa en categorías pero se busca una clasificación de orden.
- **Cuantitativas:**
  - **Variables Discretas:** Se dice cuando es resultado de la operación de contar.
  - **Variables Continuas:** Una variable es continua cuando se encuentra por medición o comparación, y es expresada por cualquier número real.

Nominales	**Ordinales**	**Discretas**	**Continuas**
Sexo	Tamaño	Número de Hijos	Edad
Nacionalidad	Grado de Instrucción	Número de Alumnos	Estatura
Color	Categoría	Número de Accidentes	Peso

Figura 1.1: Tabla con algunos ejemplos de los tipos de Variables

1.2. Representación de la Información en Cuadros o Tablas

Para entender como hacer tablas Estadísticas y Representaciones Gráficas, hay ciertos conceptos que es necesario conocer antes:

1.2.1. Conceptos Iniciales

(i) **Clase:** Es el conjunto de observaciones cualitativas o cuantitativamente iguales o muy próximas.

(ii) **Límite de Clase:** Son los valores de las observaciones, mínimo y máximo que pueden tener los datos, incluidos en la *Clase.*

(iii) **Intervalo de Clase:** Es la distancia entre los límites de la *Clase* expresados de la siguiente manera:

$$y'_{i-1}y'_i$$

(iv) **Marca de Clase:** Es el punto medio de cada uno de los intervalos. Si es constante se puede expresar como c_j, caso contrario y_i. Se tiene la siguiente fórmula para calcularlo:

$$c_j = \frac{y'_{i-1} + y'_i}{2}$$

(v) **Recorrido de la Variable:** Es el valor de la diferencia entre los límites de los datos de la muestra (el máximo y el mínimo), está representado por: R.

- **Datos No Agrupados**[1]**:** $R = y_k - y_i$
- **Datos Agrupados:** $R = y'_k - y'_i$

(vi) **Amplitud de Intervalo:** Expresado por C y C_i, para cuando es constante y variable respectivamente.

$$C_i = y'_i - y'_{i-1}$$

(vii) **Número de Intervalos:**

$$k = \frac{R}{C_i}$$

[1] También llamados **Datos Originales**

1.2.2. Frecuencia

Es la cantidad de Observaciones incluidas en una clase.

Frecuencias

(I) **Frecuencia Absoluta Simple** (f_i)**:** es el numero de veces que se repite cada observación.

(II) **Frecuencia Absoluta Acumulada** (F_i)**:** Expresado como:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

(III) **Frecuencia Relativa Simple** (h_i)**:**

$$h_j = \frac{f_j}{n}$$

(IV) **Frecuencia Relativa Acumulada** (H_i)**:**

$$H_i = \frac{F_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} h_j$$

Propiedades de la Frecuencias

- $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = n$
- $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_k = \sum_{i=1}^{k} h_i = 1$
- $\forall i \in I, \begin{cases} 0 \leq h_i \leq 1 \\ 0 \leq f_i \leq n \end{cases}$
- $f_1 = F_1 \leq F_2 \leq F_3 \leq \cdots \leq F_k = n$
- $h_1 = H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots \leq H_k = 1$
- $H_j = H_{j-1} + h_j$
- $F_j = F_{j-1} + f_j$

1.2.3. Tablas de Distribución de Frecuencia

Distribución de Frecuencia para Datos Agrupados no en Intervalos de Clase

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
x_1	f_1	F_1	h_1	H_1
x_2	f_2	F_2	h_2	H_2
x_3	f_3	F_3	h_3	H_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	$F_k = n$	h_k	$H_k = 1$
$Totales$	n		1	

Distribución de Frecuencias para Datos Agrupados en Intervalo de Clase

$y'_{i-1} - y'_i$	f_i	F_i	h_i	H_i
$y'_0 - y'_1$	f_1	F_1	h_1	H_1
$y'_1 - y'_2$	f_2	F_2	h_2	H_2
$y'_2 - y'_3$	f_3	F_3	h_3	H_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y'_{k-1} - y'_k$	f_k	$F_k = n$	h_k	$H_k = 1$
$Totales$	n		1	

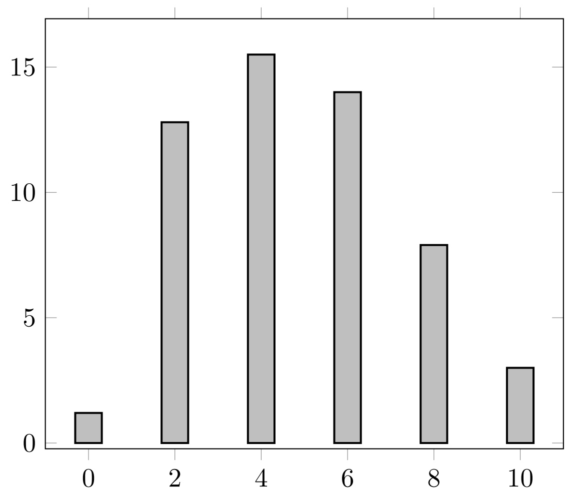
Estructura de una Tabla Estadística

1. **Título**
2. **Cuerpo Propiamente**
   - Encabezamiento
   - Cuerpo
   - Columna Matriz
3. **Indicadores Complementarios**
   - Fuente(s)
   - Nota(s)
   - Comentarios

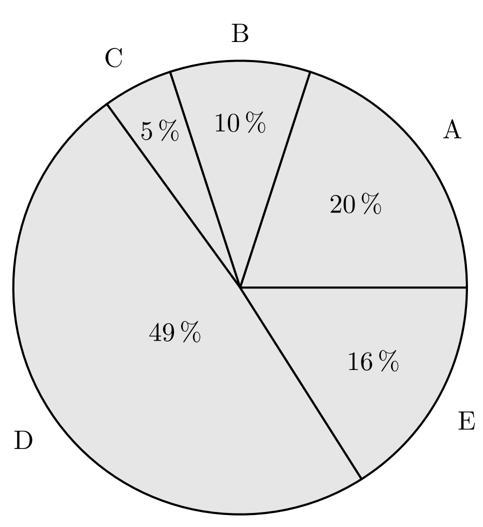
1.3. Representaciones Gráficas

Las gráficas son instrumentos estadísticos muy útiles para dar idea global acerca de una situación estadística:

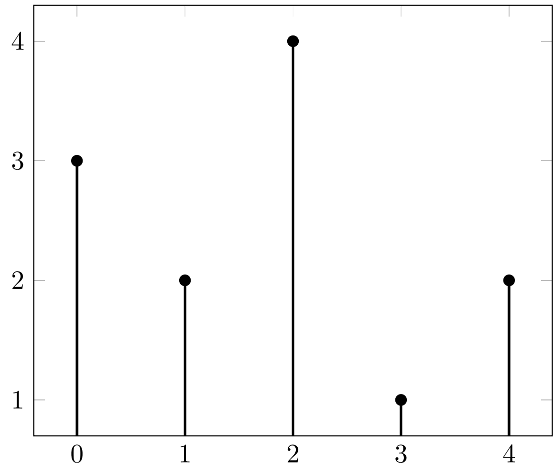
1.3.1. Diagrama de Barras



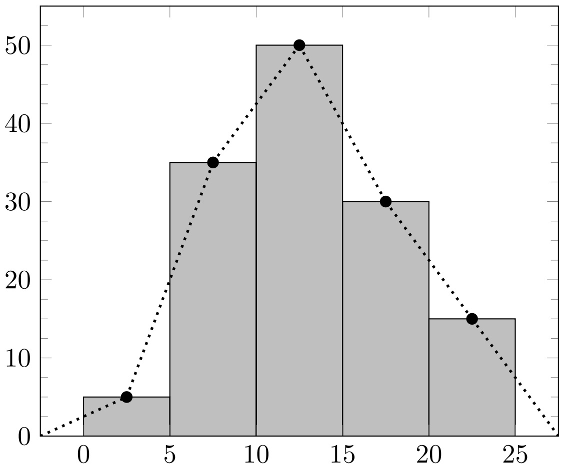
1.3.2. Diagrama de Sectores



1.3.3. Diagrama de Bastones



1.3.4. Histograma y Polígono de Frecuencia



Capítulo 2

Estadígrafos de Tendencia Central

Una *Medida de Tendencia Central* es un índice de localización central, empleado en la descripción de la distribución de frecuencias. Sirve también como base para medir y evaluar datos anormalmente altos o anormalmente bajos, llamados *Valores Extremos.*

Características del Valor Central

1. Debe estar definida en forma objetiva.
2. Debe depender de todas la observación obtenida en lo posible.
3. Debe ser fácil de comprender e interpretar.
4. Debe ser fácil de calcular.
5. Debe ser estable.
6. Debe ser adecuado a cálculos algebraicos posteriores.

2.1. Media Aritmetica Simple ($\bar{X}$)

2.1.1. Cálculo

Para Datos no Agrupados (Originales)

Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ valores de la variable X. La media Arítmetica simple se denota por $M(x), \theta$ o $\bar{X}$ está dada por:

$$M(x) = \bar{X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Para Agrupados

$$M(y) = \bar{Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot f_i}{n}$$

2.1.2. Propiedades

1. En todas las distribuciones de frecuencias, la sumatoria simple de las desviaciones de los valores de la variable respecto a la media aritmética es 0.

   Datos Originales

   $$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

   Datos Agrupados

   $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})f_i = 0$$

2. En toda distribución, la sumatoria de los cuadrados de las desviaciones de los valores de las variables, respecto de la media es mínima

Datos Originales

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - B)^2$$

Datos Agrupados

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(y_i - B)^2 \cdot f_i$$

Para cualquier constante B.

3. $M(ax_i) = a\bar{x}_i = a \cdot M(x_i) = a\bar{x}$, a constante
4. $M(a \pm x_i) = \overline{a \pm x_i} = a \pm M(x_i) = a \pm \bar{x}$, a constante
5. $M(a) = \bar{a} = a$, a constante

2.1.3. Métodos Abreviados para el Cálculo de la Media

Primer Método Abreviado

$$\bar{y} = O_t + \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i' \cdot f_i}{n}$$

Donde: $z_i' = y_i - O_t$

Segundo Método Abreviado

$$\bar{y} = O_t + C \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i'' \cdot f_i}{n}$$

Donde: $z_i'' = \dfrac{y_i - O_t}{C} = \dfrac{z_i'}{C}$

Y para ambos métodos: O_t es el origen del trabajo (cualquier valor de la marca de clase).

Media Aritmética en Distribuciones Simétricas

Si k es impar

$$\bar{y} = y_{\frac{k+1}{2}}$$

Si k es par

$$\bar{y} = y'_{\frac{k}{2}}$$

2.1.4. Ventajas y Desventajas

Ventajas

- Es la medida de tendencia central mas usada.
- El promedio es estable en el muestreo.
- Puede ser usado como un detector de variación en los datos.
- Se emplea en cálculos estadísticos posteriores.

Desventajas

- Es sensible a los valores extremos.
- Si el conjunto de datos es muy grande puede ser tedioso su cálculo.
- No se puede calcular para datos cualitativos.
- No se puede calcular para datos que tengan clases de extremos abiertos, tanto inferior o superior.

2.1.5. Ejemplos

2.2. Media Aritmetica Ponderada ($\bar{X}_p$)

Permite calcular un promedio que toma en cuenta la importancia o peso relativo de cada valor sobre el total.

2.2.1. Cálculo

Si $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ son los pesos asociados a los valores de X.

$$X : x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

La Media Aritmética Ponderada está dada por:

$$\bar{X}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Donde:

- x_i: Valor de las Observaciones Individuales.
- w_i: Peso asignado en cada observación.

2.2.2. Ejemplos

2.3. Mediana (M_e)

Es el valor de la variable que supera a no mas de la mitad de las observaciones y es superado por no mas de la mitad de las observaciones.

2.3.1. Cálculo

Datos no Agrupados

En el cálculo de la mediana para datos no agrupados hay que distinguir 2 observaciones:

- **Número de Observaciones Impares:**

  Si

  $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

  Son los valores de las variables ordenados creciente o decreciente entonces la mediana es el valor de la variable situado en el centro del conjunto de variables, esto es:

  $$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$$

- **Número de Observaciones Par:** En este caso esta definido por:

  $$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Datos Agrupados

- **Agrupados no en Intervalo de Clase:** En este caso bastará con identificar la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor a la mitad de las observaciones. La *Mediana* es aquel valor de la variable que corresponde a dicha frecuencia acumulada.
- **Agrupados en Intervalo de Clase:**

  $$Me = y'_{j-1} + C_j \cdot \frac{\frac{n}{2} - F_{j-1}}{f_j}$$

Mediana en Distribuciones Simétricas

Si k es impar

$$M_e = y_{\frac{k+1}{2}}$$

Si k es par

$$M_e = y'_{\frac{k}{2}}$$

2.3.2. Ejemplos

2.4. Cuantiles

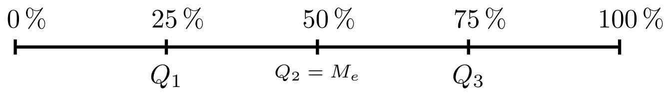
Como consecuencia del estudio de la mediana, surgen otros estadígrafos que dividen a las observaciones en otras proporciones y no solo en mitades como lo hace la media, los estadígrafos mas frecuentes de este tipo en el análisis estadístico son:

- **Cuartiles** (Q_i)
- **Deciles** (D_i)
- **Percentiles** (P_i)

Los cuantiles se emplean para describir el comportamiento de una población y sus resultados se expresan en tanto por ciento.

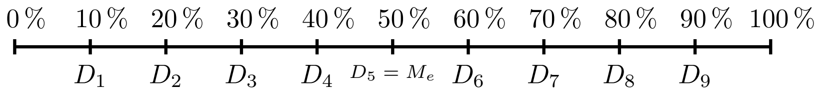
2.4.1. Cuartiles (Q_i)

Son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados de forma ascendente o descendente en cuatro partes iguales:



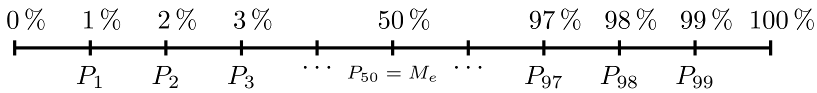
2.4.2. Deciles (D_i)

Son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados de forma ascendente o descendente en diez partes iguales:



2.4.3. Percentiles (P_i)

Son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados de forma ascendente o descendente en cien partes iguales:



2.4.4. Cálculo de Cuantiles

Para datos Originales

- **Cuartiles:**

$$Q_i = x_{\frac{i(n+1)}{4}}$$

- **Deciles:**

$$D_i = x_{\frac{i(n+1)}{10}}$$

- **Percentiles:**

$$P_i = x_{\frac{i(n+1)}{100}}$$

Para datos Agrupados

- **Cuartiles:**

$$Q_i = y'_{j-1} + C_j \frac{i\frac{n}{4} - F_{j-1}}{f_j}$$

- **Deciles:**

$$D_i = y'_{j-1} + C_j \frac{i\frac{n}{10} - F_{j-1}}{f_j}$$

- **Percentiles:**

$$P_i = y'_{j-1} + C_j \frac{i\frac{n}{100} - F_{j-1}}{f_j}$$

2.4.5. Ejemplos

2.5. Moda o Modo (M_o)

La Moda de una Muestra:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Es aquel valor de la variable que representa la mayor frecuencia, es decir, el valor de la variable que mas veces se repite. En términos sociológicos la moda es aquella de mayor aceptación popular, la moda es usada generalmente para representar y describir una tendencia en la economía.

Observación

La moda no siempre existe y no siempre es única. Como ejemplo podemos tener los siguientes conjuntos:

1. $\{2, 4, 5, 6, 3, 7, 3, 8, 3\}$
2. $\{5, 7, 4, 5, 8, 4, 5, 9, 4\}$
3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Para el primer conjunto, la moda es $M_o = 3$ ya que es el dato que mas se repite de las observaciones. Del segundo ejemplo, la moda es $M_o = 4$ y $M_o = 5$, ya que ambos datos son los que mas se repiten. Finalmente, en el tercer ejemplo, no hay moda.

2.5.1. Cálculo

En Intervalo de Clase

- **De Amplitud Constante:**

$$M_o = y'_{j-1} + C_j \cdot \frac{f_j - f_{j-1}}{(f_j - f_{j-1}) + (f_j - f_{j+1})}$$

- **De Amplitud Variable:**

$$M_o = y'_{j-1} + C_j \cdot \frac{\frac{f_{j+1}}{a_{j+1}}}{\frac{f_{j+1}}{a_{j+1}} + \frac{f_{j-1}}{a_{j-1}}}$$

esto es:

$$M_o = y'_{j-1} + C_j \cdot \frac{h_{j+1}}{h_{j+1} + h_{j-1}}$$

2.5.2. Ventajas y Desventajas

Ventajas

- El valor de la moda es totalmente independiente de los valores extremos.
- La moda se puede utilizar como una localización para datos cualitativos como cuantitativos.
- La moda es posible calcular aun en distribuciones que tienen intervalo de clase abierto.

Desventajas

- Es una medida inestable porque varía cuando se combina el intervalo de clase.
- Su significación es limitada, cuando no se dispone de una gran número de valores.
- La moda no se presta a manipulaciones algebraicos posteriores.
- Cuando el conjunto de observaciones contiene mas de una moda es difícil interpretar y de comprender.

2.6. Media Geométrica (M_g)

2.6.1. Cálculo

Para datos no Agrupados

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

En notación:

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Usando logarítmos:

$$\log(M_g) = \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

$$\log(M_g) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Aplicando propiedades de logaritmos:

$$M_g = antilog\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right]$$

Para datos Agrupados

$$M_g = \sqrt[n]{y_1^{f_1} \cdot y_2^{f_2} \cdot y_3^{f_3} \cdot \ldots \cdot y_n^{f_k}}$$

En notación:

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} y_i^{f_i}}$$

Usando logaritmos[1]

$$M_g = antilog\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \log(y_i)\right]$$

2.6.2. Propiedades y Usos

1. Los promedios geométricos dan menos importancia a las desviaciones extremas que los promedios aritméticos.
2. No se puede deducir, cuando la serie presenta un valor 0 o valores negativos.
3. Es apropiado cuando hay que promediar razones y proporciones.
4. La aplicación mas útil es para promediar tazas de cambio.

Cuando el cálculo de la taza media de cambio abarca un número considerable de años se lo hace usando la siguiente formula:

$$P_n = P_o(1+i)^n$$

Donde:

[1] El procedimiento es el mismo que para datos Originales

- P_o: Cantidad al Principio del periodo.
- P_n: Cantidad al final del periodo.
- i: Tasa de cambio expresada en tanto por uno.
- n: Número de periodos.

2.6.3. Ejemplos

2.7. Media Armónica (M_h)

Es la media aritmética recíproca de los recíprocos de las variables:

2.7.1. Cálculo

Para datos Originales

$$M_h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

Para datos Agrupados

$$M_h = \frac{1}{\frac{\frac{f_1}{y_1}+\frac{f_2}{y_2}+\frac{f_3}{y_3}+\ldots+\frac{f_k}{y_k}}{n}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{x_i}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{y_i}}$$

2.7.2. Usos de la Media Armónica

1. Es apropiado para promediar velocidades.
2. En economía se usa en los índices de precio.
3. Se usa para promediar precio cuando la cantidad es variable y el monto gastado igual.

2.7.3. Ventajas y Desventajas

Ventajas

- Esta basada en todas las observaciones.
- Es capaz de un tratamiento algebraico.
- No se ve significativamente afectado por la fluctuación del muestreo.
- Es un promedio apropiado para promediar tasas.
- No le da mucho peso a los artículos grandes.

Desventajas

- No se puede calcular si alguno de los elementos es cero.
- En ciertas situaciones es difícil de calcular.
- Por lo general, es un valor que no existe en los datos proporcionados.

2.7.4. Ejemplos

2.8. Media Cuadrática ($\overline{X_c}$)

2.8.1. Cálculo

Datos Originales

$$\overline{X_c} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Datos Agrupados

$$\overline{Y_c} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \cdot f_i}{n}}$$

Relación entre los Promedios Computados

$$M_h \leq M_g \leq \overline{x} \leq \overline{x}_c$$

2.8.2. Ejemplos

Capítulo 3

Estadígrafos de Dispersión

Son los que cuantifican el grado de dispersión de los valores de la variable, en torno a un promedio o valor central de la distribución. Los estadígrafos de dispersión se necesitan para dos propósitos básicos:

1. Para verificar la confiabilidad de los promedios.
2. Para que sirva como base para el control de la variación.

3.1. Recorridos

3.1.1. Recorrido (R)

Datos Originales

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Datos Agrupados

$$R = y_k - y_0$$

3.1.2. Recorrido Intercuartílico (R_I)

$$R_I = Q_3 - Q_1$$

3.2. Desviación Media (D_M)

Datos Originales

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Datos Agrupados

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{k} |y_i - \overline{y}| \cdot f_i}{n}$$

3.3. Varianza $(S^2, \hat{S})$

3.3.1. Cálculo

Datos Originales

- **Muestras Grandes:**

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} \qquad n \geq 30$$

- **Muestras Pequeñas:**

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} \qquad n < 30$$

3.3.2. Propiedades

1. $\hat{S} \geq 0$
2. $V(a) = 0$, a constante.
3. $V(x \pm a) = V(x)$
4. $V(ax) = a^2 V(x)$
5. $V(ax + b) = a^2 V(x)$, b constante.

Observaciones

- La diferencia entre S^2 y $\hat{S}$ es grande para muestras pequeñas y es mínima para muestras grandes, casi son iguales.
- La Varianza siempre viene expresada en unidades al cuadrado.

3.3.3. Componentes de la Varianza

Si un conjunto de datos se divide en subconjuntos por categoría o estratos, es posible descomponer la Varianza en dos componentes.

Intervarianza

Es un estadígrafo que representa la variabilidad entre los estratos y se define como la varianza de la media de los estratos:

$$S_b^2 = V(\overline{y}_h) = \frac{\sum_{h=1}^{L} (\overline{y}_h - \overline{y})^2 \cdot f_h}{n}$$

Donde:

- $\overline{y}_h$: Media de los estratos
- $\overline{y}$: Media General
- f_h: Frecuencia
- L: Número de Estratos

Intravarianza

Presenta la variabilidad dentro de los estratos definida como la media de la varianza de los estratos:

$$S_w^2 = M(S_h^2) = \frac{\sum_{h=1}^{L} S_h^2 \cdot f_h}{n}$$

- S_h^2: Varianza de los estratos.

Como ambos componen la Varianza, se cumple la siguiente igualdad:

$$S^2 = S_b^2 + S_w^2$$

3.3.4. Métodos Abreviados para el Cálculo de la Varianza

Primer Método Abreviado

Se sabe que:

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Si desarrollamos el Binomio y distribuimos la sumatoria:

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2}{n}$$

Separamos el denominador:

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\overline{x}^2}{n} \qquad \text{Recordemos que: } \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

Reemplazamos y simplificamos:

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

Finalmente tendremos:

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

Segundo Método Abreviado

$$\hat{S} = \frac{\sum_{i=1}^{k} z_i'^2 f_i}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} z_i' f_i\right)^2}{n^2}$$

Tercer Método Abreviado

$$\hat{S} = C^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} z_i''^2 f_i}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} z_i'' f_i\right)^2}{n^2}\right]$$

3.3.5. Ejemplos

3.4. Desviación Estándar

Es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$D(x) = \sigma = \sqrt{V(x)}$$

3.4.1. Propiedades

1. $D(x) \geq 0$
2. $D(a) = 0$, a constante.
3. $D(x \pm a) = D(x)$

3.4.2. Ejemplos

3.5. Medidas de Dispersión Relativa

Se utilizan para comparar dos o mas distribuciones en torno a la media.

3.5.1. Coeficiente de Variación (C_v)

Es una medida de dispersión relativa muy útil cuando:

- Los datos están en unidades diferentes.
- Los datos están en las mismas unidades, pero las medias muy distantes.

Cálculo del Coeficiente de Variación

$$C_v = \frac{S}{\overline{x}} \qquad \vee \qquad C_v = \frac{S}{\overline{x}}100 \qquad \text{Tanto Porciento}$$

3.5.2. Momentos

Son de uso frecuente los promedios de las series de potencias de las variables estos promedios reciben el nombre de *Momentos.* Pueden definirse respecto a cualquier punto:

- Momentos Respecto a un punto
- Momentos Respecto del Origen
- Momentos Respecto a la Media o Momentos Centrales

Momentos Respecto a un Punto $(M_{r,A})$

Datos Originales

$$M_{r,A} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^r}{n}$$

Datos Agrupados

$$M_{r,A} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - A)^r \cdot f_i}{n}$$

Momentos Respecto del Origen (M'_r)

Datos Originales

$$M'_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^r}{n}$$

Datos Agrupados

$$M'_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^r \cdot f_i}{n}$$

Momentos Respecto a la Media (M_r)

Datos Originales

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r}{n}$$

Datos Agrupados

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^r \cdot f_i}{n}$$

3.6. Medidas de Forma

3.6.1. Coeficientes de Asimetría

- **Primer Coeficiente de Pearson** (S_p)

$$S_p = \frac{\overline{x} - M_o}{S} \qquad \text{en distribuciones Unimodales}$$

- **Segundo Coeficiente de Pearson** (S_p)

$$S_p = \frac{3(\overline{x} - M_e)}{S}$$

- **Coeficiente de Asimetría de Bowley** (S_q)

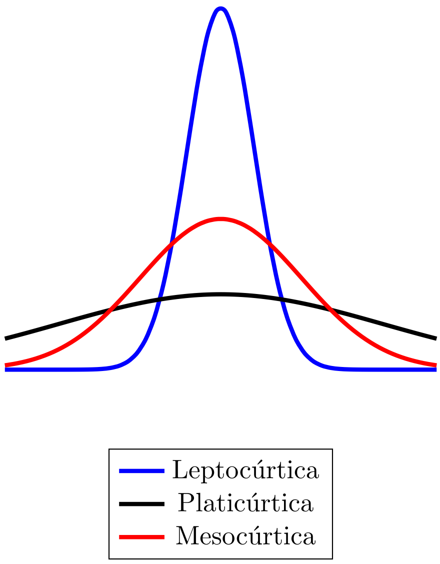
$$S_q = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

- **Coeficiente de Asimetria de Fisher** (S_m)

$$S_m = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}}$$

3.6.2. Curtosis o Apuntalamiento

Se entiende como el grado de deformación vertical a la curva de frecuencia, con relación al grado de apuntalamiento tenemos:



Curtosis en función del Momento

$$a_4 = \frac{M_4}{S^4} = \frac{M_4}{M_2^2}$$

Interpretación

- $a_4 = 3 \Rightarrow$ la Curva es Mesocúrtica.
- $a_4 > 3 \Rightarrow$ la Curva es Leptocúrtica.
- $a_4 < 3 \Rightarrow$ la Curva es Platicúrtica.

3.7. Medidas de Concentración

Las medidas de concentración sirven para estimar el grado de igualdad en el reparto o grado de desigualdad de la distribución de cantidades económicas, riquezas, sueldos, etc. También sirve para analizar la concentración poblacional de un terriorio.

3.7.1. Indice de Gini (G)

Mide el grado de concentración a través de la diferencia entre p_i y q_i correspondientes, donde p_i y q_i son porcentajes acumulados de la distribución.

La sumatoria es desde $i = 1$ a $k - 1$ porque resultaría en cero.

Cálculo

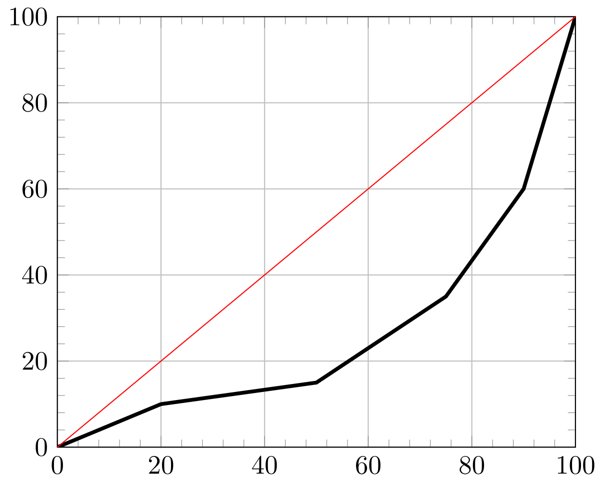
$$G = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}$$

Observar que $0 \leq G \leq 1$ y $0 \leq \frac{G}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Interpretación de $\frac{G}{2}$

Si $\frac{G}{2} > 10\,\%$ se considera que la distribución es alta.

3.7.2. Curva de Lorenz



3.8. Distribución Bivariante

Cuando se observan 2 características conjuntamente surgen las estadísticas de 2 variables, entonces los resultados numéricos de las observaciones vienen dado por parejas, es decir de forma conjunta e inseparable. Las veces que se repite cada pareja de valores es la frecuencia absoluta conjunta.

Paralelamente a los conceptos de frecuencia acumulada y relativa para distribuciones de una sola variable podrían también definirse los correspondientes o frecuencias acumuladas conjuntas y frecuencias relativas conjuntas.

3.8.1. Distribución de Frecuencias Absolutas Conjuntas

	$y'_{j-1} - y'_j$	$y'_0 - y'_1$	$y'_1 - y'_2$	$y'_2 - y'_3$	$\cdots$	$y'_{q-1} - y'_q$	Totales
$x'_{i-1} - x'_i$	y_i \ x_i	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_q	$\sum_{j=1}^{q} f_{ij} = f_{i.}$
$x'_0 - x'_1$	x_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	$\cdots$	f_{1q}	$f_{1.}$
$x'_1 - x'_2$	x_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	$\cdots$	f_{2q}	$f_{2.}$
$x'_2 - x'_3$	x_3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	$\cdots$	f_{3q}	$f_{3.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x'_{p-1} - x'_p$	x_p	f_{p1}	f_{p2}	f_{p3}	$\cdots$	f_{pq}	$f_{p.}$
Totales	$\sum_{j=1}^{p} f_{ij} = f_{.j}$	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$f_{.3}$	$\cdots$	$f_{.q}$	$n = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} f_{ij}$

3.8.2. Distribución de Frecuencias Relativas Conjuntas

	$y'_{j-1} - y'_j$	$y'_0 - y'_1$	$y'_1 - y'_2$	$y'_2 - y'_3$	$\dots$	$y'_{q-1} - y'_q$	Totales
$x'_{i-1} - x'_i$	y_i \ x_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_q	$\sum_{j=1}^{q} h_{ij} = h_{i.}$
$x'_0 - x'_1$	x_1	h_{11}	h_{12}	h_{13}	$\dots$	h_{1q}	$h_{1.}$
$x'_1 - x'_2$	x_2	h_{21}	h_{22}	h_{23}	$\dots$	h_{2q}	$h_{2.}$
$x'_2 - x'_3$	x_3	h_{31}	h_{32}	h_{33}	$\dots$	h_{3q}	$h_{3.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x'_{p-1} - x'_p$	x_p	h_{p1}	h_{p2}	h_{p3}	$\dots$	h_{pq}	$h_{p.}$
Totales	$\sum_{j=1}^{p} h_{ij} = h_{.j}$	$h_{.1}$	$h_{.2}$	$h_{.3}$	$\dots$	$h_{.q}$	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} h_{ij} = 1$

3.8.3. Distribución de Frecuencias Absolutas Acumuladas Conjuntas

	$y'_{j-1} - y'_j$	$y'_0 - y'_1$	$y'_1 - y'_2$	$y'_2 - y'_3$	$\dots$	$y'_{q-1} - y'_q$
$x'_{i-1} - x'_i$	y_i \ x_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_q
$x'_0 - x'_1$	x_1	F_{11}	F_{12}	F_{13}	$\dots$	F_{1q}
$x'_1 - x'_2$	x_2	F_{21}	F_{22}	F_{23}	$\dots$	F_{2q}
$x'_2 - x'_3$	x_3	F_{31}	F_{32}	F_{33}	$\dots$	F_{3q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x'_{p-1} - x'_p$	x_p	F_{p1}	F_{p2}	F_{p3}	$\dots$	$F_{pq} = n$

3.8.4. Distribución de Frecuencias Relativa Acumuladas Conjuntas

	$y'_{j-1} - y'_j$	$y'_0 - y'_1$	$y'_1 - y'_2$	$y'_2 - y'_3$	$\dots$	$y'_{q-1} - y'_q$
$x'_{i-1} - x'_i$	y_i \ x_i	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_q
$x'_0 - x'_1$	x_1	H_{11}	H_{12}	H_{13}	$\dots$	H_{1q}
$x'_1 - x'_2$	x_2	H_{21}	H_{22}	H_{23}	$\dots$	H_{2q}
$x'_2 - x'_3$	x_3	H_{31}	H_{32}	H_{33}	$\dots$	H_{3q}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x'_{p-1} - x'_p$	x_p	H_{p1}	H_{p2}	H_{p3}	$\dots$	$H_{pq} = 1$

3.8.5. Distribuciones Marginales

Distribución Marginal de X

X	$f_{i.}$	$h_{i.}$
x_1	$f_{1.}$	$h_{1.}$
x_2	$f_{2.}$	$h_{2.}$
x_3	$f_{3.}$	$h_{3.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	$f_{p.}$	$h_{p.}$

Distribución Marginal de Y

Y	$f_{.j}$	$h_{.j}$
y_1	$f_{.1}$	$h_{.1}$
y_2	$f_{.2}$	$h_{.2}$
y_3	$f_{.3}$	$h_{.3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_p	$f_{.p}$	$h_{.q}$

Son las distribuciones correspondientes a cada una de las filas o columnas de la tabla de doble entrada, si la variable x toma p valores y y toma q valores, entonces existen: $p+q$ distribuciones condicionadas.

3.9. Covarianza (S_{xy})

La Covarianza de la estadística de 2 variables se define como: La media aritmética de los productos de las desviaciones de cada una de las variables respecto a su media aritmética.

3.9.1. Cálculo

Para datos Originales

$$S_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})}{n}$$

Para datos Agrupados

$$S_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})f_{ij}}{n}$$

3.9.2. Propiedades

1. $Cov(ax+b, cy+d) = acCov(x,y)$
2. $V(x \pm y) = V(x) + [V(y) \pm 2Cov(x,y)]$
3. $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2abCov(x,y)$

3.9.3. Interpretación

- Si $S_{xy} > 0$, entonces existe relación directa entre x y y.
- Si $S_{xy} < 0$, entonces existe relación inversa entre x y y.
- Si $S_{xy} = 0$, **no** existe relación entre x y y (no necesariamente independientes).
- x y y son independientes entonces $S_{xy} = 0$

Capítulo 4

Análisis de Regresión y Correlación

Frecuentemente se presentan situaciones en las que es necesario estudiar las relaciones entre variables, esto se puede estudiar por análisis de regresión y/o correlación.

El análisis de regresión se refiere a la naturaleza de las relaciones entre las variables. El análisis de correlación tiene que ver con la fuerza o intensidad de las variables. Cuando el estudio de las relaciones está limitado a dos variables se denomina *Análisis de Regresión Simple* y *Análisis de Correlación Simple*, respectivamente.

4.1. Modelo de Regresión Lineal Simple

Vamos a rotular las dos variables implícitas x, y: x denominado variable independiente, predictora, o explicativa ya que puede ser controlada por el investigador. La variable y se la denomina, variable dependiente, predictoria o expectando.

4.2. Regresión Lineal

Si al representar los puntos de un gráfica, estos muestran un comportamiento rectilíneo, como en la siguiente figura:

Es necesario calcular los parámetros o coeficientes de la recta:

$$\hat{y} = a + bx$$

Para determinar a y b, que es la tarea principal de la estimación de la ecuación de regresión, recurrimos al *Método de Mínimos Cuadrados (MMC)*:

$$z = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2 \Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

Derivando parcialmente respecto a cada uno de los parámetros se obtienen dos ecuaciones llamadas, *Ecuaciones Normales:*

Derivamos respecto de a:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$

Multiplicamos todo por -1 y dejamos igualado a cero:

$$\sum_{i=1}^{n}(-y_i + a + bx_i) = 0$$

Distribuimos la sumatoria:

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} a + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Derivamos respecto de b:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

Multiplicamos todo por $-x_i$ y dejamos igualado a cero:

$$\sum_{i=1}^{n}(-y_i x_i + a x_i + b x_i^2) = 0$$

Distribuimos la sumatoria:

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Dejamos de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \cdot n + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dejamos de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Hacemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a \cdot n + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Hallamos b mediante la determinante:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Para hallar a tomamos la primera ecuación del sistema y despejamos a:

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \frac{b\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Con esto, reemplazamos luego de hallar sus valores utilizando los datos, en:

$$\hat{y} = a + bx$$

4.3. Regresión Potencial

4.4. Regresión Exponencial

Tiene la siguiente forma:

4.5. Regresión Parabólica

4.6. Coeficiente de Correlación Rectilíneo

4.6.1. Propiedades

1. $-1 \leq r \leq 1$
2. Si $r > 0$, entonces existe correlación directa positiva.
3. Si $r < 0$, entonces existe correlación inversa negativa.
4. $r^2 = 0$, los datos forman una línea recta, en caso de correlación rectilínea.
5. Si $r = 1$, entonces existe correlación perfecta positiva.
6. Si $r = -1$, entonces existe correlación perfecta negativa.
7. Si $r = 0$, los datos son incorrelacionados.

Observaciones

- El signo de r es el mismo signo de b de la ecuación de regresión: $\hat{y} = a + bx$
- En la interpretación clásica se sostiene:
  1. Si $0{,}00 \leq r < 0{,}20$, existe correlación no significativa.
  2. Si $0{,}20 \leq r < 0{,}40$, existe baja correlación.
  3. Si $0{,}40 \leq r < 0{,}70$, existe correlación significativa.
  4. Si $0{,}70 \leq r < 1{,}00$, existe alto grado de asociación.

4.6.2. Cálculo

Mediante Fórmula propuesta por Pearson

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

En términos de Covarianza y Desviación Estándar

$$r = \frac{Cov(x,y)}{S_x \cdot S_y}$$

Error Estándar de Estimación

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - b \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{n}}$$

Capítulo 5

Probabilidad

Es una disciplina abstracta que se usa como modelo para hacer deducciones acerca de eventos que posiblemente puedan suceder, por tanto la probabilidad no proporciona la base para construir medidas exactas de incertidumbre, para su estudio es necesario conocer los siguientes conceptos:

Experimentos

Experimentos Determinísticos

Un experimento es deterministico cuando el resultado de la observación es determinado en forma precisa, bajo las condiciones por las cuales se realiza dicho experimento. Algunos ejemplos son:

- Observar el color de una ficha extraída de una urna que solo contiene fichas rojas.
- Observar el resultado de la suma de dos números naturales impares.

Experimentos no Determinísticos

5.1. Eventos

Evento es un subconjunto del espacio muestral. Existen los siguientes tipos de eventos:

- **Evento Imposible:** es el evento que nunca ocurre y se denota por: ϕ.
- **Evento Seguro:** es el evento que siempre ocurre, denotado por: S o Ω.
- **Evento Elemental:** es el evento que esta compuesto por un elemento, se lo denota como conjunto *Unitario.*
- **Evento Compuesto:** formado por varios Eventos.
- **Eventos Incompatibles:** también llamados mutuamente excluyentes.

$$\left(\underset{\text{Son Eventos Excuyentes}}{A \text{ y } B}\right) \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

- **Eventos Compatibles:**

$$\left(\underset{\text{Son Eventos Compatibles}}{A \text{ y } B}\right) \Leftrightarrow A \cap B \neq \phi$$

- **Eventos Colectivamente Exhaustivos:**

$$\left(\underset{\text{Son E.C.E.}}{A \text{ y } B}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = \Omega \\ A \cap B = \phi \end{cases}$$

5.1.1. Operaciones con Eventos

Unión

Sea A y B eventos cualquiera; la unión de estos eventos es el evento que ocurre, si A ocurre y B ocurre, o ambos ocurren.

- **Formalmente**

$$A \cup B = \{w \in S / w \in A \vee w \in B\}$$

- **Generalización**

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{w \in S / \exists i \in I : w \in A_i\}$$

Intersección

- **Formalmente**

$$A \cap B = \{w \in S / w \in A \wedge w \in B\}$$

- **Generalización**

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{w \in S / \exists i \in I : w \in A_i\}$$

Diferencia Relativa

- **Formalmente**

$$A - B = \{w \in S / w \in A \wedge w \notin B\}$$

Diferencia Simétrica

- **Formalmente**

$$A \vartriangle B = \{w \in S / w \in A \veebar w \in B\}$$

Complemento

- **Formalmente**

$$A^c = \{w \in S / w \notin A\}$$

Inclusión

- **Formalmente**

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall w \in S, (w \in A \to w \in B)$$

Igualdad de Eventos

- **Formalmente**

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

5.2. σ-álgebra de Eventos

Se dice que la clase de subconjuntos del espacio muestral S, denotado por:

$$\Gamma = \{A \subset S / A \text{ es un Evento}\}$$

es un σ-álgebra de eventos si:

(I) $S \in \Gamma$

(II) $A \in \Rightarrow A^c \in \Gamma$

(III) $\forall i \in I, \left(A_i \in \Gamma \Rightarrow \bigcup_{i=1} A_i \in \Gamma \right)$

5.3. Definición Axiomática de Probabilidad

Sea S un espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio y sea Γ σ-algebra de eventos subconjunto de S.

$$\begin{aligned} P\colon \Gamma &\to [0,1] \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

Tal que satisface los siguientes axiomas:

(I) $0 \leq P(A) \leq 1$

(II) $P(S) = 1$

(III) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ $\qquad$ $A_i$son eventos mutuamente excluyentes

Una consecuencia inmediata del axioma (III) es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Esto es si A y BB son eventos mutuamente excluyentes.

5.3.1. Propiedades de la Probabilidad de Eventos

1. Si ϕ es un evento imposible entonces: $P(\phi) = 0$

2. Si A^c es el evento complementario de A, entonces:

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{ó} \quad P(A) = 1 - P(A^c)$$

3. Si A y B son eventos tales que: $A \subset B$ entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

4. Si A y B son eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

6. Si A, B y C son eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

7. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son eventos cualesquiera:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

5.4. Definición Clásica de Probabilidad

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\#\text{ de casos favorables del Evento } A}{\#\text{ total de casos posibles}}$$

5.4.1. Probabilidad Condicionada

Sean A y B eventos tal que $P(B) > 0$ la probabilidad condicional de que ocurra A dado que ha ocurrido el evento B se denota por: $P(A/B)$. Se define como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si B es un evento tal que $P(B) > 0$, entonces $P(\bullet/B)$ satisface los siguientes axiomas:

(i) $0 \leq P(A/B) \leq 1$

(ii) $P(S/B) = 1$

(iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i/B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i/B) \qquad A_i$son eventos mutuamente excluyentes

Propiedades

Si B es un evento tal que $P(B) > 0$, entonces $P(\bullet/B)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $P(\phi/B) = 0$
2. $P(A^c/B) = 1 - P(A/B) \quad \vee \quad P(A/B) = 1 - P(A^c/B)$
3. $P((A \cup C)/B) = P(A/B) + P(C/B) - P((A \cap C)/B)$
4. $A \in C \Rightarrow P(A/B) \leq P(C/B)$

5.4.2. Eventos Dependientes

Se dice que los eventos A y B son estadísticamente dependientes, si:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \end{array}\right\} \text{Regla General de la Multiplicación}$$

5.4.3. Eventos Independientes

Se dice que los eventos A y B son estadísticamente independientes, si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observaciones

1. $\left.\begin{array}{l} P(A) \\ P(B) \end{array}\right\}$ Probabilidades Marginales
2. $\left.\begin{array}{l} P(A/B) \\ P(B/A) \end{array}\right\}$ Probabilidades Condicionales
3. $P(A/B) \neq P(B/A)$
4. $P(A \cap B)$ Probabilidades Condicionales
5. Decir *'Eventos Independientes'* no es lo mismo que decir *'Evento Mutuamente Excluyente'*.

Teorema

Si A y B son eventos mutuamente independientes, entonces:

1. $P(A/B) = P(A)$
2. $P(B/A) = P(B)$
3. A^c y B son independientes.
4. A y B^c son independientes.
5. A^c y B^c son independientes.

En $P(\bullet/B)$ el símbolo $\bullet$ significa *cualesquiera*

Demostración de los Teoremas

- Demostración de 1. :

$$\begin{aligned} P(A/B) &\overset{1}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &\overset{2}{=} \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} \\ &\overset{3}{=} P(A) \end{aligned}$$

- Demostración de 2. :

$$\begin{aligned} P(B/A) &\overset{1}{=} \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &\overset{2}{=} \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} \\ &\overset{3}{=} P(B) \end{aligned}$$

- Demostración de 3. :

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$$

Formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\ \phi = (A \cap B) \cap (A^c \cap B) \end{cases}$$

Ya que son excluyentes:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

Despejamos $P(A^c \cap B)$ ya que es lo que nos interesa demostrar:

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Como A y B son independientes, según la hipótesis, tenemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Reemplazando en el anterior paso:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &\overset{1}{=} P(B) - P(A)P(B) \\ &\overset{2}{=} P(B) \cdot [1 - P(A)] \\ &\overset{3}{=} P(B) \cdot P(A^c) \end{aligned}$$

Con esto que demostrado 3.

- Demostración de 4. :

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$$

Formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ \phi = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) \end{cases}$$

Ya que son excluyentes:

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$$

Despejamos $P(A \cap B^c)$ ya que es lo que nos interesa demostrar:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Como A y B son independientes, según la hipótesis, tenemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Reemplazando en el anterior paso:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &\overset{1}{=} P(A) - P(A)P(B) \\ &\overset{2}{=} P(A) \cdot [1 - P(B)] \\ &\overset{3}{=} P(A) \cdot P(B^c) \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado 4.

- Demostración de 5. : En este punto, lo que tratamos de demostrar es:

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

Comenzamos aplicando D'Morgan:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &\overset{1}{=} P[(A \cup B)^c] \\
&\overset{2}{=} 1 - P(A \cup B) \\
&\overset{3}{=} 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
&\overset{4}{=} 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
&\overset{5}{=} [1 - P(A)] - [P(B) - P(A \cap B)] \\
&\overset{6}{=} [1 - P(A)] - [P(B) - P(A)P(B)] \\
&\overset{7}{=} [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] \\
&\overset{8}{=} [1 - P(A)][1 - P(B)] \\
&\overset{9}{=} P(A^c)P(B^c)
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado 5.

5.4.4. Teorema de la Probabilidad Total

También llamada *Regla de Eliminación*. Si los eventos mutuamente excluyentes:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$$

Constituyen una partición del espacio muestral S, de tal manera que $\forall i \in I, P(B_i) > 0$. Entonces para cualquier evento A de S se cumple:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
P(A) &\overset{1}{=} [(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A)] \\
&\overset{2}{=} P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A) \\
&\overset{3}{=} \sum_{i=1}^{n} (B_i \cap A) \\
&\overset{4}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)
\end{aligned}$$

5.4.5. Teorema de Bayes

Si los eventos: $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, constituyen una partición del espacio muestral S, de tal modo que; $\forall i \in I, P(B_i) > 0$, entonces para cualquier evento A de S, tal que $P(A) > 0$ se cumple:

$$P(A) = \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
P(B_r/A) &\overset{1}{=} \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} \\
&\overset{2}{=} \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{P(A)} \\
&\overset{3}{=} \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}
\end{aligned}
$$

5.5. Ejemplos

1. Un inversionista planea escoger dos de las cinco oportunidades de inversión que le han recomendado. Describa el espacio muestral que represeta las opciones posibles.

   Solución

   Diremos que las cinco oportunidades serán: A, B, C, D y E. Como tiene que escoger dos oportunidades, el orden de las parejas no importa, por lo tanto, el espacio muestral será:

$$
S = \left\{ \begin{array}{r} (A,B),(A,C),(A,D),(A,E), \\ (B,C),(B,D),(B,E), \\ (C,D),(C,E), \\ (D,E) \end{array} \right\}
$$

2. Tres artículos son extraídos con reposición de un lote de mercancías, cada artículo ha de ser identificado como defectuoso (D) y no defectuoso (N). Describir todos los puntos posibles del espacio muestral para este experimento.

   Solución

$$
S = \left\{ \begin{array}{c} (D,D,D),(N,D,D), \\ (D,D,N),(N,D,N), \\ (D,N,D),(N,N,D), \\ (D,N,N),(N,N,N) \end{array} \right\}
$$

3. Una moneda se lanza tres veces. Describir los siguientes eventos:

   - A : *Ocurre por lo menos dos caras.*
   - B : *Ocurre, sello en el tercer lanzamiento.*
   - C : *Ocurre a lo mas, una cara.*

   Luego hallar:

   a) $A \cup B$

   b) $B - C$

   c) $A^c \cap B^c$

   d) $A \triangle C$

Solución

Describiendo los eventos A, B y C:

4. Sea el experimento, *Lanzar una moneda hasta que ocurra cara y contar el número de lanzamientos de la moneda.* Considerando:

   - A : *Se necesita un número par de lanzamientos*
   - B : *Se necesitan mas de diez lanzamientos.*

   Hallar:

   a) $A \cap B$
   b) $A - B$
   c) $B - A$
   d) A^c
   e) B^c
   f) $A^c \cap B^c$

   Solución

5. Demostrar que: $P(A/B) + P(A^c/B) = 1$

   Solución

$$\begin{aligned}
P(A/B) + P(A^c/B) &\overset{1}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \\
&\overset{2}{=} \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} \\
&\overset{3}{=} \frac{P[(A \cap B) \cup (A^c \cap B)]}{P(B)} \\
&\overset{4}{=} \frac{P[(A \cup A^c) \cap B]}{P(B)} \\
&\overset{5}{=} \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\
&\overset{6}{=} \frac{P(B)}{P(B)} \\
&\overset{7}{=} 1
\end{aligned}$$

   $\therefore P(A/B) + P(A^c/B) = 1$

6. Demostrar que: $P(A/B^c) + P(A^c/B) = 1$

   Solución

$$\begin{aligned}
P(A/B^c) + P(A^c/B) &\overset{1}{=} \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \\
&\overset{2}{=} \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} + \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}
\end{aligned}$$

7. La probabilidad de que llueva en Santa Cruz el 10 de Junio es de 40 %, de que truene es 5 % y de que, llueve y truene es de 3 %. ¿Cual es la probabilidad de que llueva o truene ese día?

Solución

Conociendo los siguientes eventos:

- A : Llueva
- B : Truene
- $A \cap B$: Llueva y truene

Sabemos los valores de las probabilidades de cada uno, de acuerdo al enunciado:

- $P(A) = 40\,\%$
- $P(B) = 5\,\%$
- $P(A \cap B) = 3\,\%$

Con estos datos nos queda hallar $A \cup B$, por lo tanto calculamos simplemente reemplazando en la igualdad:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 40\,\% + 5\,\% - 3\,\% \\ &= 42\,\% \end{aligned}$$

8. Sea A y B dos eventos, tal que: $P(A) = 0{,}20\,\%; P(B) = 0{,}30\,\%; P(A \cup B) = 0{,}10\,\%$
Hallar:

   a) $P(A^c \cap B^c)$
   b) $P(A^c \cap B)$
   c) $P(A \cap B^c)$
   d) $P(A^c \cup B)$

   Solución

9. Con 7 ingenieros y 4 médicos se formaron comités de 6 miembros. ¿Cuál es la probabilidad que el comité incluya: ?

   a) Exactamente 2 médicos.
   b) Al menos 2 ingenieros.

   Solución

10. En la UAGRM el 30 % de los estudiantes son cruceños, el 10 % estudia Ingeniería Informática, y el 1 % son cruceños y estudian Informática. Si se selecciona al azar un estudiante de la UAGRM. Hallar las siguientes probabilidades:

    a) El estudiante no es cruceño.
    b) Sea cruceño o pertenezca a Ingeniería Informática.
    c) Sea cruceño y no estudie Ingeniería Informática.
    d) No sea cruceño ni estudie Ingeniería Informática.

    Solución

11. En una encuesta pública se determina que la probabilidad que una persona consuma A es 0,50 que consuma B es 0,37, que consuma C es 0,30, que consuma A y B es 0,12 que consuma solamente A y C es 0,08 que consuma solamente B y C es 0,05 y que consuma solamente C es 0,15.

    - Calcular la probabilidad que de que alguien consuma A o B pero no C.

Solución

12. Se lanza un dado legal sobre una mesa y se observa el número que aparece en la cara superior.

    a) ¿Cual es la probabilidad de obtener un número par?

    b) ¿Cual es la probabilidad de obtener un número impar?

    c) Los eventos *"Obtener número par"* y *"Obtener número impar"* son mutuamente excluyentes?¿Son Independientes?

Solución

a) Primeramente definamos el espacio muestral, que sería $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de este e.m. tomamos en cuenta todos los casos que sean favorables al enunciado, *"Obtener Número Par"*, estos son un evento $A = \{2, 4, 6\}$. Finalmente:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}(50\,\%)$$

b) Bajo la misma lógica anterior realizamos para los números impares, teniendo: $B = \{1, 3, 5\}$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}(50\,\%)$$

13. Una urna contiene 6 fichas blancas y 4 negras. Se extraen 2 fichas sucesivamente y sin restitución.

    a) ¿Cual es la probabilidad de que ambas sean negras?

    b) ¿Cual es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra?

    c) ¿Cual es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda blanca?

    d) ¿Cual es la probabilidad de que ambas sean blancas?

14. En un grupo de personas hay 3 mujeres y 4 hombres varones. Si se elige una persona al azar ¿Cual es la probabilidad que sea varón?

15. Si A y B son eventos cualesquiera, demostrar:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C)$$

Solución

16. La probabilidad de que un estudiante apruebe matemáticas es $\frac{2}{3}$ y que apruebe física es $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de aprobar al menos una de estas materias es $\frac{4}{5}$. ¿ Cual es la probabilidad de aprobar ambas materias?

Solución

El problema nos plantea los siguientes datos:

- A : *Aprobar Matemáticas.*
- B : *Aprobar Física.*
- $A \cup B$: *Aprobar al menos una de estas materias.* (Es decir, aprobar Física o Matemáticas)

Por lo tanto, las probabilidades ya están dadas:

- $P(A) = \frac{2}{3}$
- $P(B) = \frac{4}{9}$
- $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

Como el problema pide la probabilidad de aprobar ambas materias, esto es: $P(A \cap B)$. Si partimos de la siguiente igualdad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Luego, despejamos $P(A \cap B)$ y reemplazamos:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} \\ &= \frac{14}{45} \approx 31{,}11\,\% \end{aligned}$$

Obtenemos que la probabilidad de aprobar ambas materias es de 31,11 %.

17. En los últimos años la Universidad **ABC** ha estado llevando un registro de sus egresados, en la actualidad tienen empleo, anotando el número de años que utilizaron para terminar su carrera y su posición (alta, media o baja) que tienen como profesionales.

Tiempo / Posición	Alta	Media	Baja	Total
5 Años	30	70	20	120
+5 Años	20	30	30	80
Total	50	100	50	200

a) Basados en la información anterior. ¿ Cual es la probabilidad de que si la duración de sus estudios fue de 5 años, tenga una alta posición profesional en su empleo actual?

b) Si el empleado tiene baja posición ¿Cual es la probabilidad de que tal persona haya realizado sus estudios en +5 años?

c) Si el egresado tiene posición profesional media, ¿ Cual es la probabilidad de que tal persona haya realizado la cerrera en 5 años?

18. La urna A contiene 6 fichas grises y 4 rojas, y la urna B contiene 2 fichas grises y 7 rojas. Se saca una ficha de A y se coloca en la B, en seguida se saca una ficha de B. Dado que la ficha extraída de B es gris. ¿Cual es la probabilidad de que la ficha sacada de A sea gris?

19. La urna A_1 contiene 8 fichas blancas y 2 negras. La urna A_2 contiene 3 fichas blancas y 7 negras, finalmente, la urna A_3 contiene 5 fichas blancas y 5 negras. Se lanza un dado no cargado, si resulta $\{1, 2, 3\}$ se saca una ficha de la urna A_1; si resulta $\{4, 5\}$ se saca una ficha de A_2, si resulta $\{6\}$ se saca de la urna A_3.

    Dado que la ficha extraída es blanca. ¿ Cual es la probabilidad de que venga de A_2?

Capítulo 6

Series Cronológicas

Una serie cronologica es un conjunto de observaciones x_i, cada una tomada en un especifico momento t.

6.1. Generalidades

6.2. Componentes de las Series Cronológicas

6.2.1. Tendencia o Movimiento Secular

6.2.2. Variaciones Estacionales

6.2.3. Variaciones Cíclicas

6.2.4. Variaciones Irregulares

Bibliografía

[1] Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, Keying Ye, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, Novena Edición*, Pearson, 2012.

[2] Braulio Cáceres Chacón, Cindy Elisa Cáceres Antelo, *Problemas Resueltos y Propuestos de Estadística Descriptiva, Primera Edición*, Editorial e Imprenta Universitaria (U.A.G.R.M.), 2016.

[3] Carlos Véliz Cupañay, *Estadística para la Administración y Negocios, Primera Edición*, Pearson, 2011.

[4] Juan Martínez de Lejarza: Series Temporales
`https://www.uv.es/ceaces/pdf/series.pdf`

[5] Series Temporales, Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid.
`http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/EDescrip/tema7.pdf`

[6] Manuel Córdova Zamora, *Estadística Descriptiva e Inferencial, Quinta Edición*, Editorial Moshera, 2003.