Apuntes de Lenguajes Formales

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

16 de mayo de 2019

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Agradecimiento a marmot

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `INF319 (Lenguajes Formales)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2019` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Preliminares Formales

1.1. Conjuntos

1.1.1. Conjunto Finito e Infinito

Equivalencia

Dado A y B (conjuntos) los llamamos *equivalentes* si existe una biyección: $f : A \to B$

Conjunto Finito

Un conjunto A es finito si es equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Conjunto Infinito

Un conjunto es infinito si no es finito. Si no es equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ es decir no hay biyección. Sin embargo no todos los conjuntos finitos son equivalentes.

- **Conjunto Contablemente Infinito:** Se dice que un conjunto es contablemente infinito si es equivalente con $\mathbb{N}$.
- **Conjunto Contable:** Es contable si es finito o contablemente infinito.
- **Conjunto Incontable:** Se dice que es incontable si no es contable.

Principio de las Casillas

Si A y B son conjuntos finitos no vacíos y $|A| > |B|$ entonces no existe una función inyectiva de: $A \to B$.

1.2. Preliminares

1.2.1. Alfabeto

Un alfabeto Σ es cualquier conjunto finito no vacío.

Ejemplo(s)

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 =& \{Leo, Martha\} \\
\Sigma_2 =& \{0, 1, 2, 3, \ldots, 13\} \\
\Sigma_3 =& \{a, b\} \\
\Sigma_4 =& \{R, G, B, A\}
\end{aligned}$$

1.2.2. Palabra

Una palabra sobre Σ es una sucesión finita de símbolos de Σ. Es decir:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n); \sigma \in \Sigma \qquad \text{ó} \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \ldots \sigma_n; \sigma \in \Sigma$$

Ejemplo(s)

Sobre Σ_1	**Sobre Σ_2**	**Sobre Σ_3**	**Sobre Σ_4**
$w_1 =$*LeoLeo*	$w_1 =$1111110	$w_1 =$*bababababa*	$w_1 =ABGR$
$w_2 = MarthaLeoMartha$	$w_2 =$11235813	$w_2 =$*abba*	$w_2 = RRRA$

Denotamos por Σ^* el conjunto de todas las palabras sobre Σ.

Longitud de una Palabra

Sea w una palabra sobre Σ, es decir $w = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n; \sigma \in \Sigma$. La longitud de w es n y se denota por: $|w| = n$.

Palabra vacía

Es la sucesión vacía de símbolos de Σ y se denota por: λ.

1.2.3. Notaciones

- $\Sigma^+ = \{w \in \Sigma^* / |w| > 0\}$
- $\Sigma^k = \{w \in \Sigma^* / |w| = k\}$
- $\Sigma^0 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 0\} = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 1\} = \Sigma$
- $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$
- $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

1.2.4. Cantidad de Ocurrencias

Sea $w \in \Sigma^*$, denotamos por $|w|_\sigma$ al número de ocurrencias del símbolo σ en la palabra w.

Ejemplo(s)

$$\Sigma = \{a, b\}$$

- $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, \dots\}$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma_1 = \Sigma = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{ab, aa, ba, bb\}$

1.2.5. Concatenación

Sea $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n, v = \epsilon_1\epsilon_2 \dots \epsilon_n$. La concatenación de u y v se define por:

$$uv = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n\epsilon_1\epsilon_2 \dots \epsilon_n$$

Definición de Recurrencia

$$|\ | : \Sigma^* \to \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} |\lambda| = 0 \\ |wa| = |w| + 1 \end{cases}$$

Ejemplo(s)

$$u = abab \qquad uv = ababbba$$
$$v = bba \qquad vu = bbaabab$$

Propiedades

- $uv \neq vu$
- $(uv)w = u(vw)$
- $u\lambda = \lambda u = u$
- $|uv| = |u| + |v|$
- $|uv|_a = |u|_a + |v|_a$

1.2.6. Inversa

Si $w = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma^n$ entonces $w' = \sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1$ se llama inversa o transpuesta de w.

Definición de Recurrencia

$$' : \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ (wa)' = aw' \end{cases}$$

1.2.7. Potencia de una Palabra

$$w^n = \underbrace{ww\ldots w}_{n-veces}$$

Definición de Recurrencia

$$' : \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$\begin{cases} w^0 = \lambda \\ w^{n+1} = ww^n \end{cases}$$

Propiedades

- $|w^n| = n|w|$
- $w^m w^n = w^{m+n}$
- $(w^n)^m = w^{mn}$
- $\lambda^n = \lambda$

1.2.8. Principio de Inducción para Σ^*

Sea L un conjunto de palabras sobre Σ con las propiedades:

i.) $\lambda \in L$

ii.) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

Entonces

$L = \Sigma^*$, (es decir, todas las palabras sobre Σ están en L.)

1.2.9. Lenguajes

Un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*

Operaciones

Recordemos que ya conocemos otras operaciones (Unión, Intersección, Diferencia y Complemento), para esta materia tenemos las siguientes:

- Concatenación

  Sea $A, B \subseteq \Sigma^*$

$$AB = \{w \in \Sigma^* / w = xy, x \in A, y \in B\}$$

- Transposición

  Sea $A \subseteq \Sigma^*$

$$A' = \{w' \in \Sigma^* / w \in A\}$$

- Estrella de Kleene

  Sea $A \subseteq \Sigma^*$

$$A^* = \{w \in \Sigma^* / w = w_1 w_2 \dots w_n \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \text{ y para algunas } w_1, w_2, \dots, w_k \in A\}$$

1.2.10. Expresiones Regulares

Las expresiones regulares (ER) sobre un alfabeto (Σ) son las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \cup \{), (, \emptyset, \cup, *\}$ tal que cumple lo siguiente:

1.) $\emptyset$ y cada símbolo de Σ es una ER.

2.) Si α y β son ER entonces $(\alpha\beta)$ es una ER.

3.) Si α y β son ER entonces $(\alpha\cup\beta)$ es una ER.

4.) Si α es una ER entonces α^* es una ER.

5.) Nada mas es una ER a menos que provenga de **(1.)** a **(4.)**

1.2.11. Módulos

1.2.12. Máquinas