

Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

Leonardo H. Añez Vladimirovna¹

*Universidad Autónoma Gabriel René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia*

27 de junio de 2018

¹Correo Electrónico: toborochi98@outlook.com

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia **MAT207 (Ecuaciones Diferenciales)**, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período I-2018 en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

1. Conceptos Generales	5
1.1. Formas de Resolución	6
1.1.1. Ecuaciones con Variables Separables	6
1.2. Ecuaciones Homogéneas	6
1.2.1. Método de Solución	6
1.3. Ecuación Lineal de 1er Orden	6
1.3.1. Método de Solución	6
1.4. Ecuación de Bernoulli	7
1.5. Ecuaciones Diferenciales Exactas	7

Capítulo 1

Conceptos Generales

Se dice que una ecuación es Diferencial si contiene una función desconocida y una o mas de sus derivadas. Si las ecuaciones contienen derivadas de funciones que dependen de una sola variable independiente se tiene una *Ecuación Diferencial Ordinaria*. Si la función depende de varias variables independientes se tienen *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*.

Teorema

Si se tiene la Ecuación:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si se logra conseguir una función $\alpha(x)$ tal que, al reemplazar en la Ecuación:

$$F(x, \alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x), \dots, \alpha^{(n)}(x)) = 0$$

Entonces se dice que $\alpha(x)$ es **Solución** de la Ecuación Diferencial.

Familia de Curvas

Una ED en su forma mas simple tiene la siguiente apariencia:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Para resolver esta ED debemos realizar el proceso inverso de la derivada, es decir integrar:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \Rightarrow y = F(x) + C$$

Debe notarse que debido a C esta solución es en realidad un número infinito de soluciones. A esto se le llama **Familia de Curvas**. Una solución particular de esta ecuación, es una sola curva contenida en la familia de curvas.

Orden, Grado y Linealidad de una Ecuación Diferencial

- **Orden:** El Orden de una ED¹ es el orden de la derivada mas alta de la función desconocida (variable dependiente) que aparece en la ecuación.
- **Grado:** El grado se expresa mediante el mayor exponente de la derivada de mayor orden.
- **Linealidad:** Una ED Lineal de orden n es una ecuación de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

Cuyos coeficientes $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ y el segundo miembro $h(x)$ son continuos en un Intervalo I en el que la $a_n(x) \neq 0$. Si $h(x) = 0$ la Ecuación se llama *Ecuación Diferencial de Orden n Homogénea*.

¹ED = Ecuaciones Diferenciales (notación que usaremos de aquí en adelante)

1.1. Formas de Resolución

1.1.1. Ecuaciones con Variables Separables

Una ED de 1er Orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es separable, si la función $f(x, y)$ se puede escribir como un producto de una función de x y una función de y .

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1.2. Ecuaciones Homogéneas

Una función $M(x, y)$ es Homogénea de grado n si la suma de las potencias de x y y en cada termino es n . Esto es:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y)$$

Una ED Homogénea es una ED de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

1.2.1. Método de Solución

Las ED Homogéneas se resuelven haciendo la sustitución:

$$y = Vx \quad V = \frac{y}{x}$$

donde V es una función de x por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = V + x \frac{dV}{dx}$$

El miembro que corresponde a la función se puede expresar en términos de $\frac{y}{x}$. Esto se hace dividiendo todo entre x^n . Donde n es el grado de: N y M .

1.3. Ecuación Lineal de 1er Orden

Recordando la definición de una ED de orden n :

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

tenemos, para 1er Orden:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \quad (1.1)$$

Dividiendo la ED entre el coeficiente de $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{h(x)}{a_1(x)}}_{Q(x)}$$

Con esto tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1.2)$$

1.3.1. Método de Solución

Partimos de:

$$\frac{d}{dx} \left[\mu(x) \cdot y \right] = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x) P(x) \cdot y = \mu(x) Q(x)$$

Tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left[\mu(x) \cdot y \right] = \mu(x) \frac{dy}{dx} + y \overbrace{\frac{d\mu}{dx}}^{\mu(x)P(x)} = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \overbrace{\mu(x)P(x)}^{\mu(x)Q(x)} \cdot y = \mu(x) Q(x)$$

A partir de esta igualdad obtendremos lo que se llama como *Factor Integrando*:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x)$$

Para simplificar, escribiremos $\mu(x)$ simplemente como μ , sobreentenderemos que esta en función de x :

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot P(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu} = \int P(x)dx$$

$$e^{\ln(\mu)} = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \quad (1.3)$$

Una vez hallado el FI, procedemos a reemplazar en la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\mu(x) \cdot y] &= \mu(x) \cdot Q(x) \\ \frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y] &= e^{\int P(x)dx} Q(x) \end{aligned}$$

Integrando:

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

1.4. Ecuación de Bernoulli

Tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

Para poder tratar la ecuación, dividimos entre y^n :

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)$$

1.5. Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.4)$$

Es exacta se se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dx} [f(x, y)] = 0$$

Criterio

La diferencia total:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (1.5)$$

Bibliografía

- [1] Ion Zaballa Tejada, *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Curso 2008-2009*, Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco
http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/