

Fórmulas de Probabilidad y Estadística II (MAT302)

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones

Universidad Autónoma Gabriel René Moreno

Leonardo H. Añez Vladimirovna

toborochi98@outlook.com

4 de marzo de 2019

1. Variables Aleatorias

1.1. Definiciones

1.1.1. Discretas

Notación: $P(A), P(X = x), f(x)$.

1. $p(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{x_i \in \text{Rec}_x} p(x_i) = 1$

3. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

4. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

1.1.2. Continuas

Notación: $F(x), P(X \leq x)$.

1. $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = 1$

1.2. Propiedades

1.2.1. Discreta

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $F(-\infty) = 0$

3. $F(+\infty) = 1$

4. $P(X \leq a) = F(a)$

5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1); a \in \mathbb{Z} \\ F(\lfloor x \rfloor); a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

7. $P(X \leq -a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F(a)$

8. $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$

9. $P(X \leq x \leq) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

10. $P(a < x < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

1.2.2. Continua

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $F(-\infty) = 0$

3. $F(+\infty) = 1$

4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$

7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

9. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

1.3. Esperanza

1.3.1. V.A.s Discretas

$$E(x) = \mu = \mu_x = \sum_x x \cdot p(x)$$

X v.a. con función f :

$$E(g(x)) = \mu_{g(x)} = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$

1.3.2. V.A.s Continua

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

X v.a. con función f :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

1.3.3. Propiedades

★ a y b constantes.

1. $E(a) = a$
2. $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3. $E(ax) = aE(x)$
4. $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

1.4. Varianza

1.4.1. V.A.s Discretas

$$\begin{aligned} V(x) &= \sigma^2 = E(x - \mu)^2 \\ &= \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \end{aligned}$$

1.4.2. V.A.s Continua

$$\begin{aligned} V(x) &= \sigma^2 = E(x - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \end{aligned}$$

1.4.3. Propiedades

1. $V(x) \geq 0$
2. $V(a) = 0$
3. $V(ax) = aV(x)$
4. $V(ax \pm b) = a^2V(x) \pm b$
5. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

1.5. Función de Probabilidad Conjunta

1.5.1. Función de Cuantía Conjunta (Discreta)

1. $P(x, y) = P(X = x, Y = y) \geq 0$
2. $\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$
3. $P((x, y) \in A) = \sum_A P(x, y)$

1.5.2. Función de Densidad Conjunta (Continua)

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3. $P((x, y) \in A) = \int_A \int f(x, y) dx dy$

1.6. Distribuciones Marginales

1.6.1. Caso Discreto

■ Distribución Marginal de X :

$$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

■ Distribución Marginal de Y :

$$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

1.6.2. Caso Continuo

■ Distribución Marginal de X :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

■ Distribución Marginal de Y :

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

1.7. Covarianza

1.7.1. Caso Discreto

$$\begin{aligned} Cov(x, y) &= \sigma_{xy} = E((x - \mu_x)(y - \mu_y)) \\ &= \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) \end{aligned}$$

1.7.2. Caso Continuo

$$\begin{aligned} Cov(x, y) &= \sigma_{xy} = E((x - \mu_x)(y - \mu_y)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

1.8. Resultados Importantes

1. $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
2. $Cov(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$
3. $V(x \pm y) = V(x) + V(y) \pm 2Cov(x, y)$
4. $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2ab \cdot Cov(x, y)$
5. Si x y y son estadísticamente independientes:
 - a) $E(x, y) = E(x) \cdot E(y)$
 - b) $Cov(x, y) = 0$
 - c) $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$
 - d) $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y)$
6. Si x_1, x_2, x_3, \dots son variables aleatorias independientes 2 a 2:

$$V\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \sum_{i=1}^m V(x_i)$$

2. Distribuciones

2.1. Distribuciones Discretas

2.1.1. Distribución de Bernoulli (*Ber*)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & ; x = 0, 1 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q = 1 - p & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$X \sim Ber(x; p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{p \cdot q} \end{cases}$$

2.1.2. Distribución Binomial (*b*)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} & ; x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & ; 0 \leq x < n \\ 1 & ; x \geq n \end{cases}$$

$$X \sim b(x; n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = npq \\ D(x) = \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$$

★ Manejo de la Tabla:

1. $\begin{pmatrix} p \leq 0,50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x; n, p) = B(x; n, p) - B(x-1; n, p)$
2. $\begin{pmatrix} p > 0,50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} & b(x; n, p) = B(n-x; n, 1-p) - B(n-x-1; n, 1-p) \\ \text{(ii)} & b(x; n, p) = b(n-x, n, 1-p) \text{ luego (i)} \\ \text{(iii)} & B(x; n, p) = 1 - B(n-x; n, 1-p) \end{cases}$

2.1.3. Distribución de Poisson (*Poisson*)

■ Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & ; x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

■ Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{x=0}^{\llbracket x \rrbracket} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim Poisson(x; \lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \lambda = np \\ V(x) = \sigma^2 = \lambda = np \\ D(x) = \sigma = \sqrt{np} \end{cases}$$

2.2. Distribuciones Continuas

2.2.1. Distribución Uniforme o Regular (*U*)

■ Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

■ Función Acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} & ; a \leq x < b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

$$X \sim U(x; a, b) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{a+b}{2} \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \\ D(x) = \sigma = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

2.2.2. Distribución Exponencial (*exp*)

■ Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

■ Función Acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \int_{-\infty}^x \lambda \cdot e^{-\lambda x} dt = 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim \exp(x; \lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda} \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ D(x) = \sigma = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

★ Propiedad Amnésica

$$P(X > s + t/x > s) = P(X > t)$$

2.2.3. Distribución Normal (N)

■ Función de Cuantía

$$f(x) = N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; x \in \mathbb{R}$$

■ Función Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Distribución Normal Estándar

■ Función de Cuantía

$$f(z) = N(z; 0, 1) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad z \in \mathbb{R}$$

■ Función Acumulada

$$F(z) = P(Z \leq z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}r} dr$$

Transformación

$$X \sim N(x; \mu, \sigma^2) \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(z; 0, 1) \text{ ó } N(0, 1)$$

★ Manejo de la Tabla:

1. $P(X < a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
2. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
3. $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P\left(z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
4. $P(x \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
5. $P(|X| < a) = P(|X| \leq a) = P(-a \leq X \leq a) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{-a-\mu}{\sigma}\right)$
6. $P(|x| > a) = 1 - P(|x| \leq a) = 1 - P(-a \leq x \leq a) = 1 - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{-a-\mu}{\sigma}\right)$

Distribución Normal como aproximación Binomial

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(x; n, p) \approx N(x; np, npq) \approx N(x; \mu, \sigma^2)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x=x_1}^{x_2} b(x; n, p) \simeq \int_{x_1 - \frac{1}{2}}^{x_2 + \frac{1}{2}} N(x; np, npq) dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z; 0, 1) dz$$

Donde:

$$\blacksquare z_1 = \frac{(x_1 - \frac{1}{2}) - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\blacksquare z_2 = \frac{(x_2 + \frac{1}{2}) - np}{\sqrt{npq}}$$

2.2.4. Distribución Chi-Cuadrado (χ^2)

■ Función de Densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{x}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} \cdot x^{\frac{x}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

$$X \sim \chi^2(r) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = r \\ V(x) = \sigma^2 = 2r \\ D(x) = \sigma = \sqrt{2r} \end{cases}$$

2.2.5. Distribución Fisher-Snedecor (F)

■ Función de Densidad

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} \Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{r_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{r_1}{r_2}x\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Corolario

$$X \sim F(r_1, r_2) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{r_2}{r_2 - 2} & \forall r_2 > 2 \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{2r^2(r_1 + r_2 - 2)}{r_2(r_2 - 2)^2(r_2 - 4)} \end{cases}$$

★ Manejo de la Tabla:

$$P(X \leq c) = 1 - \alpha \text{ ó } P(X \leq F_{1-\alpha}(r_1, r_2)) = 1 - \alpha$$

2.2.6. Distribución T-Student (t)

3. Muestreo

3.1. Distribuciones de Muestreo

Algunas distribuciones de Muestreo:

$$\blacksquare \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\blacksquare \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = S^2$$

$$\blacksquare \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \hat{S}^2$$

3.2. Estadístico

3.2.1. Desigualdad de Chebyshev

$$P(|x - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad ; k \in \mathbb{R}^+$$

4. Estimación Estadística

Parámetros	Estadísticos
μ	\bar{x}
σ^2	S^2 ó \hat{S}^2
p, π	$\hat{p}, \hat{\pi}$

4.1. Estimación Puntual

4.1.1. Propiedades

■ Estimador Insesgado: $E(\hat{\theta}) = \theta$

■ Estimador Eficiente:

$$\hat{\theta}_1 \text{ es mas eficiente que } \hat{\theta}_2 \Leftrightarrow V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$$

■ Estimador Consistente:

$$\begin{cases} \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta \\ \text{(ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0 \end{cases}$$

■ Estimador Suficiente: $\hat{\theta}$ es un suficiente de θ ssi: Aporta tanta información acerca de los parámetros que se estiman a partir de una muestra de θ .

4.2. Sesgo y Error Cuadrático Medio de un Estimador (ECM)

Sesgo

ECM

$$Sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$ECM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = V(\hat{\theta}) + [Sesgo(\hat{\theta})]^2$$

4.3. Estimación por Intervalo

4.3.1. Estimación por Intervalo de la Media Poblacional

$$(I) P \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

$$(II) P \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Donde:

■ $r = n - 1$ g.l.

¹ $Sesgo(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado.

4.3.2. Estimación por Intervalo de la diferencia o suma de Medias

$$(I) \ P \left((\bar{x} \pm \bar{y}) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}} \leq \mu_x \pm \mu_y \leq (\bar{x} \pm \bar{y}) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$(II) \ P \left((\bar{x} \pm \bar{y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \beta \leq \mu_x \pm \mu_y \leq (\bar{x} \pm \bar{y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \beta \right) = 1 - \alpha$$

Donde:

$$\begin{aligned} \blacksquare \beta &= \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_x^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \\ \blacksquare r &= n_1 + n_2 - 2 \text{ g.l.} \end{aligned}$$

4.3.3. Estimación por Intervalo para Proporciones

$$(I) \ P \left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = 1 - \alpha$$

$$(II) \ P \left((\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \beta \leq p_1 \pm p_2 \leq (\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \beta \right) = 1 - \alpha$$

Donde:

$$\blacksquare \beta = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

5. Misceláneo

5.1. Interpolación

$\phi(z)$	z
a	x
b	λ
c	y

 $\rightarrow \frac{a-c}{b-c} = \frac{x-y}{\lambda-y}$

5.2. Desigualdades