Universidad Autónoma
Gabriel René Moreno

Métodos Numéricos

Una Introducción al Método de Steffensen

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones

Alejandra Gabriela Rossel Ríos
`Reg: 217045499`

Leonardo H. Añez Vladimirovna
`Reg: 217002498`

Pablo Michael Tardío Ventura
`Reg: 217064957`

Javier Selaya Melgar
`Reg: 217048137`

Liz Dara Choque Coca
`Reg: 217011810`

Maikol Bryan Sanchez Castro
`Reg: 217064531`

Cristian Terceros Coca
`Reg: 217050662`

27 de Noviembre 2018

Tabla de Contenidos

Objetivo

En esta monografia queremos dar a conocer el Método de Steffensen para la resolucion de Ecuaciones, ademas de comprender como funciona el algoritmo de este método.

Introducción

En análisis numérico, el Método de Steffensen es una técnica para hallar la raíz de una ecuación, similar al método de Newton, llamado así por Johan Frederik Steffensen. Este método también logra una convergencia cuadrática pero sin usar las derivadas como lo hace el método de Newton. Para ser mas precisos, el Método de Steffensen es una combinación del método del punto fijo y el método Δ^2 de Aitken.

Johan Frederik Steffensen

(28 de Febrero 1873 (Copenhagen) - 20 de Diciembre 1961) Fue un Matemático Danes, estadísta y actuario que realizo investigaciones en los campos de calculo de diferencias infinitesimales e interpolación. Fue profesor de Ciencias Actuarias en la Universidad de Copenhagen desde 1923 hasta 1943. Se le atribuyen principalmente la *Desigualdad de Steffensen* y el *Método de Steffensen.*

Método del Punto Fijo

Es un método iterativo que permite resolver ecuaciones no necesariamente lineales. En particular se pueden utilizar para determinar raíces de una función de la forma $f(x) = 0$ transformandola algebraicamente a la forma $x = g(x)$ y utilizando un punto p_0 como punto de partida.

Teorema

Sea $g \in [a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$. Suponga ademas que g' existe en (a, b), (es decir es continua en ese intervalo) y que una constante $0 < k < 1$ existe con:

$$|g'(x)| \leq k \forall x \in (a, b)$$

Entonces, para cualquier numero p_0 en $[a, b]$ la secuencia

$$p_n = g(p_{n-1})$$

converge a un unico punto p en el intervalo.

Algoritmo 1: Método del Punto Fijo

Con: p_0
para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**
  Calcular: $\boxed{p = g(p_0)}$
  si $|p - p_0| < Tolerancia$ **entonces**
    Detener
  en otro caso
    $p_0 = p$

Ejemplo

Tenemos la siguiente función y queremos hallar su raíz:

$$f(x) = sin^2(x) - x^2 + 1$$

Si realizamos la grafica utilizando *Geogebra* tendremos la siguiente figura: Si despejamos modifica-

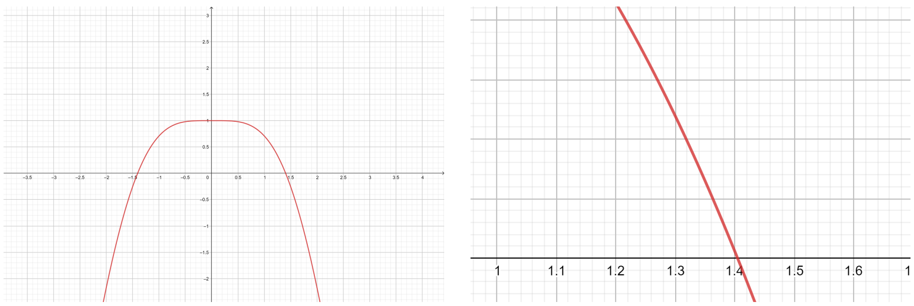


Figura 1: Grafica realizada en Geogebra, la grafica de la derecha es una parte con zoom de la función.

mos la funcion algebraicamente a la forma $x = g(x)$, tendremos:

$$g(x) = \sqrt{sin^2(x) + 1}$$

Con esto procedemos a realizar el metodo del punto fijo, como primera aproximacion tendremos $p_0 = 1$.

- **Iteración:** 0
$$p_0 = 1 \qquad g(p_0) = 1{,}306932828523934$$
- **Iteración:** 1
$$p_1 = 1{,}306932828523934 \qquad g(p_1) = 1{,}3899557402473888$$
- **Iteración:** 2
$$p_2 = 1{,}3899557402473888 \qquad g(p_2) = 1{,}4027300644478016$$
- **Iteración:** 3
$$p_3 = 1{,}4027300644478016 \qquad g(p_3) = 1{,}404285826470638$$

Realizando el algoritmo del Punto Fijo, obtenemos la siguiente tabla para una tolerancia de 0,0005.

Iteración	p_i	p_{i+1}	Error
0	1	1.306932828523934	0.3069328285239341
1	1.306932828523934	1.3899557402473888	0.08302291172345466
2	1.3899557402473888	1.4027300644478016	0.012774324200412801
3	1.4027300644478016	1.4042858264706382	0.001555762022836582

Método Δ^2 de Aitken

En analisis numerico el Método de Aitken, Proceso Δ^2 de Aitken o *Extrapolación de Aitken* es una forma de acelerar la razón de convergencia de una secuencia (obtenidas de metodos iterativos). Veamos un poco de este método para entender como es que ayuda a la convergencia:
Si $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia linealmente convergente a un límite q, entonces:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{q_{n+1} - q}{q_n - q} \right| < 1$$

y si los signos de $q_n - q$,$q_{n+1} - q$, y $q_{n+2} - q$ son los mismos para n suficientemente grande, la siguiente derivación del Método de Aitken es dada para acelerar la razón de convergencia:

$$\frac{q_{n+1} - q}{q_n - q} \approx \frac{q_{n+2} - q}{q_{n+1} - q}$$

Resolviendo para q:

$$q = q_n - \frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{q_{n+2} - 2q_{n+1} + q_n}$$

Este resultado es lo que denotamos como $\widehat{q_n}$ y es definida como:

$$\widehat{q} \equiv q_n - \frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{q_{n+2} - 2q_{n+1} + q_n}$$

Aplicando el Método de Steffensen

Como ya hemos mencionado previamente el Método de Steffensen se puede considerar como una combinación del metodo del punto fijo y el Método de Aitken. Para construir las aproximaciones $\{x_n\}$ en todo tercer paso se usa la formula de Aitken y en las demas $x_n = g(x_{n-1})$.

Algoritmo 2: Método de Steffensen

Con: p_0
para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**
  Calcular:
  $p_{i+1} = g(p_i)$
  $p_{i+2} = g(p_{i+1})$
  $\widehat{p_i} = p_i - \dfrac{(p_{i+1} - p_i)^2}{p_{i+2} - 2p_{i+1} - p_i}$
  si $|\widehat{p_i} - p_i| < Tolerancia$ **entonces**
    Detener
  en otro caso
    $p_i = \widehat{p_i}$

Y es gracias al acelerador de Aitken que el método tiene una convergencia mas rapida es por eso que si tomamos el ejemplo anterior: $f(x) = sin^2(x) - x^2 + 1$ y aplicando el Método de Steffensen. Podemos ver que la convergencia toma menos iteraciones.

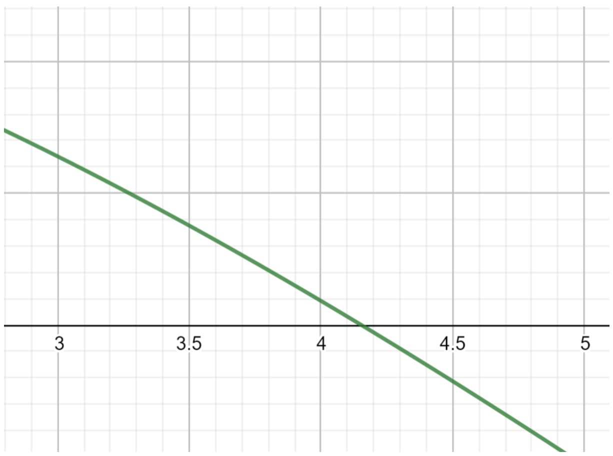
Iteración	p_i	p_{i+1}	p_{i+2}	$\widehat{p}_{i+1}$	Error
0	1	1.30693282852	1.389955740247	1.420739566035	0.420739566035
1	1.420739566035	1.40628996566	1.404699576935	1.404502882426	0.0162366836090
2	1.404502882426	1.40449295401	1.404491799998	1.404491648221	$1.123420552096\times10^{-5}$

Ejemplo

Sea la función:

$$f(x) = ln(x^2 + x + 2) - x + 1$$

Si realizamos la grafica:



Si despejamos x en la función y la llevamos a la forma $x = g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = ln(x^2 + x + 2) + 1$$

Tomando el punto de partida $p_0 = 1$ y utilizando una tolerancia de 0.0005 obtenemos la siguiente tabla:

Iteración	p_i	p_{i+1}	p_{i+2}	$\widehat{p}_i$	Error
0	1	2.38629436111	3.31062222247	5.160068006305	4.160068006305
1	5.160068006305	4.52005746186	4.29401954606	4.17059800597	0.989470000327
2	4.17059800597	4.1597407368	4.15543254306	4.15259847380	0.017999532
3	4.15259847380	4.15259381389	4.15259196058	4.15259073675	7.7370422×10^{-6}

Procedimiento

- **Iteracion:** 0

  $p_0 = 1 \qquad p_1 = g(p_0) = 2{,}38629436111 \qquad p_2 = g(p_1) = 5{,}160068006305$

  Reemplazando en el acelerador de Aitken:

$$\widehat{p}_0 = 1 - \frac{(2{,}38629436111 - 1)^2}{5{,}160068006305 - 2 \cdot 2{,}38629436111 + 1} = 5{,}160068006305$$

- **Iteracion:** 1

  $p_3 = 5{,}160068006305 \qquad p_4 = g(p_3) = 4{,}52005746186 \qquad p_5 = g(p_4) = 4{,}29401954606$

  $$\widehat{p}_5 = 5{,}160068006305 - \frac{(,5200574618611 - 5{,}160068006305)^2}{4{,}29401954606 - 2 \cdot 4{,}52005746186 + 5{,}160068006305} = 4{,}17059800597$$

- **Iteracion:** 2

  $p_6 = 4{,}17059800597 \qquad p_7 = g(p_6) = 4{,}1597407368 \qquad p_8 = g(p_7) = 4{,}15543254306$

  $$\widehat{p}_5 = 4{,}17059800597 - \frac{(4{,}1597407368 - 4{,}170598005975)^2}{4{,}15543254306 - 2 \cdot 4{,}1597407368 + 4{,}17059800597} = 4{,}15259847380$$

- **Iteracion:** 3

  $p_9 = 4{,}15259847380 \qquad p_{10} = g(p_9) = 4{,}15259381389 \qquad p_{11} = g(p_{10}) = 4{,}15259196058$

  $$\widehat{p}_5 = 5{,}160068006305 - \frac{(4{,}15259196058 - 4{,}15259847380)^2}{4{,}15259196058 - 2 \cdot 4{,}15259381389 + 4{,}15259847380} = 4{,}15259073675$$

Si este ejercicio hubieramos realizado por el método de Punto Fijo, tendriamos 11 iteraciones. Y es por esto que el método de Steffensen resulta util.

Conclusión

Hemos mostrado las bases del Método de Steffensen, proveyendo una explicación de este algoritmo iterativo y los métodos que lo componen, proveyendo ejemplos.

Bibliografía

[1] Shirley B. Pomeranz, *Aitken's* Δ^2 *method Extended*, University of York, UK, 2017.

[2] Cedrick Collomb, *A tutorial on the Aitken convergence accelerator*, nf.

[3] Jaiswal J. P. *Numerical Test*, University of Princeton, nf.

[4] Patricia M. Fernandez, Graciela Molina, Leonardo Albarracin, *Métodos NUmericos*, FACET-UNT, 2017.