Formulas de Regresión Potencial y Exponencial

Añez Vladimirovna Leonardo
toborochi98@outlook.com

20 de mayo de 2018

Regresión Potencial

Representada de la siguiente manera:

$$\hat{y} = a \cdot x_i^b$$

Primeramente *Linealizamos* la Ecuación:

$$\log(\hat{y}) = \log(a) + b \cdot \log(x_i)$$

Ahora reemplazamos de la siguiente manera:

$$v = \log(\hat{y}) \qquad a' = \log(a) \qquad u_i = \log(x_i)$$

Quedando de la siguiente manera:

$$v = a' + b \cdot u_i$$

Aplicamos el *Método del Mínimo Múltiplo Cuadrado* para obtener una nueva función que llamaremos z:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - v\Big)^2 \Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b \cdot u_i\Big)^2$$

Derivamos parcialmente respecto de cada uno de los parámetros, se obtiene dos ecuaciones llamadas ecuaciones normales:

Para la primera derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial a'} = 2\sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b \cdot u_i\Big) \cdot (-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(-y_i + a' + b \cdot u_i\Big) = 0$$

Distribuimos la sumatoria:

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + a' \cdot n + b\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$$

Finalmente tenemos la siguiente ecuación para la primera derivada parcial:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a' \cdot n + b\sum_{i=1}^{n} u_i$$

Ahora para el segundo parámetro:

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b \cdot u_i\Big) \cdot (-u_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(-y_i \cdot u_i + a' \cdot u_i + b \cdot u_i^2\Big) = 0$$

Distribuimos la sumatoria:

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i + a'\sum_{i=1}^{n} u_i + b\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$$

Finalmente tenemos la derivada parcial del segundo parámetro:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i = a' \sum_{i=1}^{n} u_i + b \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Luego de obtener las ecuaciones normales, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a' \cdot n + b \sum_{i=1}^{n} u_i \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i = a' \sum_{i=1}^{n} u_i + b \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \end{cases}$$

Ahora encontramos b:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)^2}$$

Reemplazamos los términos:

$$b = \frac{n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \log(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \right)^2}$$

Ahora hallamos a, utilizando la primera ecuación del sistema:

$$a' = \log(a) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)}{n}$$

Aplicamos antilogarítmo:

$$a = antilog \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)}{n} \right)$$

Regresión Exponencial

Tiene la siguiente forma:

$$\hat{y} = a \cdot b^{x_i}$$

Linealizamos la Ecuación:

$$\log(\hat{y}) = \log(a) + x_i \cdot \log(b)$$

Hacemos los siguientes reemplazos:

$$u = \log(\hat{y}) \qquad a' = \log(a) \qquad b' = \log(b)$$

Queda de la siguiente manera:

$$v = a' + b'x_i$$

Aplicamos el *Método del Mínimo Múltiplo Cuadrado* para obtener una nueva función que llamaremos z:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - v\Big)^2 \Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b'x_i\Big)^2$$

Derivamos parcialmente respecto a los parámetros:

$$\frac{\partial z}{\partial a'} = 2\sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b' \cdot x_i\Big) \cdot (-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(-y_i + a' + b' \cdot x_i\Big) = 0$$

Distribuimos la sumatoria:

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + a' \cdot n + b' \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Finalmente tenemos la siguiente ecuación para la primera derivada parcial:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a' \cdot n + b' \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando la segunda ecuación normal: Ahora para el segundo parámetro:

$$\frac{\partial z}{\partial b'} = 2\sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a' - b' \cdot x_i\Big) \cdot (-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(-y_i \cdot x_i + a' \cdot x_i + b' \cdot x_i^2\Big) = 0$$

Finalmente tenemos la derivada parcial del segundo parámetro:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = a' \sum_{i=1}^{n} x_i + b' \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Luego de hallar las ecuaciones normales hacemos el sistema:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a' \cdot n + b' \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = a' \sum_{i=1}^{n} x_i + b' \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Encontramos b':

$$b' = \log(b) = \frac{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Aplicamos el antilogarítmo:

$$b = antilog\left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\right)$$

Hallamos a' de la primera ecuación del sistema:

$$a' = \log(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b' \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - b'\bar{x}$$

Aplicando antilogaritmo:

$$a = antilog(\bar{y} - b'\bar{x})$$