Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

29 de junio de 2018

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT207 (Ecuaciones Diferenciales)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Generales

Se dice que una ecuación es Diferencial si contiene una función desconocida y una o mas de sus derivadas. Si las ecuaciones contienen derivadas de funciones que dependen de una sola variable independiente se tiene una *Ecuación Diferencial Ordinaria.* Si la función depende de varias variables independientes se tienen *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.*

Teorema

Si se tiene la Ecuación:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Si se logra conseguir una función $\alpha(x)$ tal que, al reemplazar en la Ecuación:

$$F(x, \alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x), \ldots, \alpha^{(n)}(x)) = 0$$

Entonces se dice que $\alpha(x)$ es **Solución** de la Ecuación Diferencial.

Familia de Curvas

Una ED en su forma mas simple tiene la siguiente apariencia:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Para resolver esta ED debemos realizar el proceso inverso de la derivada, es decir integrar:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \Rightarrow y = F(x) + C$$

Debe notarse que debido a C esta solución es en realidad un número infinito de soluciones. A esto se le llama **Familia de Curvas**. Una solución particular de esta ecuación, es una sola curva contenida en la familia de curvas.

Orden, Grado y Linealidad de una Ecuación Diferencial

- **Orden:** El Orden de una ED[1] es el orden de la derivada mas alta de la función desconocida (variable dependiente) que aparece en la ecuación.

- **Grado:** El grado se expresa mediante el mayor exponente de la derivada de mayor orden.

- **Linealidad:** Una ED Lineal de orden n es una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

  Cuyos coeficientes $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y el segundo miembro $h(x)$ son continuos en un Intervalo I en el que la $a_n(x) \neq 0$. Si $h(x) = 0$ la Ecuación se llama *Ecuación Diferencial de Orden n Homogénea.*

[1]ED = Ecuaciones Diferenciales (notación que usaremos de aquí en adelante)

1.1. Formas de Resolución

1.1.1. Ecuaciones con Variables Separables

Una ED de 1er Orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es separable, si la función $f(x,y)$ se puede escribir como un producto de una función de x y una función de y.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1.2. Ecuaciones Homogéneas

Una función $M(x,y)$ es Homogénea de grado n si la suma de las potencias de x y y en cada termino es n. Esto es:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$$

Una ED Homogénea es una ED de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

1.2.1. Método de Solución

Las ED Homogéneas se resuelven haciendo la sustitución:

$$y = Vx \qquad\qquad V = \frac{y}{x}$$

donde V es una función de x por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

El miembro que corresponde a la función se puede expresar en términos de $\frac{y}{x}$. Esto se hace dividiendo todo entre x^n. Donde n es el grado de: N y M.

Capítulo 2

Ecuación Lineal de Primer Orden

Recordando la definición de una ED de orden n:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

tenemos, para 1er Orden:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \tag{2.1}$$

Dividiendo la ED entre el coeficiente de $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{h(x)}{a_1(x)}}_{Q(x)}$$

Con esto tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.2}$$

Método de Solución

Partimos de:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\cdot y\right] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)\cdot y = \mu(x)P(x)$$

Tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\cdot y\right] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\overbrace{\frac{d\mu}{dx}} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \overbrace{\mu(x)P(x)}\cdot y = \mu(x)Q(x)$$

A partir de esta igualdad obtendremos lo que se llama como *Factor Integrando:*

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x)$$

Para simplificar, escribiremos $\mu(x)$ simplemente como μ, sobreentenderemos que esta en función de x:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\cdot P(x)$$

$$\int\frac{1}{\mu} = \int P(x)dx$$

$$e^{\ln(\mu)} = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \tag{2.3}$$

Una vez hallado el FI, procedemos a reemplazar en la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\cdot y\right] = \mu(x)\cdot Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Integrando:

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx}$$

2.1. Ecuación de Bernoulli

Tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

Para poder tratar la ecuación, dividimos entre y^n:

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)$$

2.2. Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.4}$$

Es exacta se se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x,y)\Big] = 0$$

Criterio

La diferencia total:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.5}$$

Para (1.4) y (1.5) serán lo mismo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = M(x,y) \qquad \wedge \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = N(x,y)$$

Por Clairaut

Si existen las segundas derivadas cruzadas y son continuas entonces estas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\right]dx + C'(y)$$

Recordando 1.6:

2.2.1. Ecuación Diferencial Asociada

El objetivo es obtener la ED de una familia de curvas, mediante el proceso de eliminación de constantes arbitrarias involucradas en la familia de curvas. Es importante recordar que ninguna ED contiene constantes arbitrarias por lo tanto debemos eliminar la constante que aparece en la familia de curvas.

Procedimiento

Dada la familia de curvas:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

Para obtener la ED asociada a la familia de Curvas se deben utilizar las constantes en el sistema:

$$\begin{aligned}
F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left[F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)\right] &= 0 \\
\frac{d^2}{dx^2}\left[F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)\right] &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{dx^n}\left[F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)\right] &= 0
\end{aligned}$$

2.3. Trayectorias Ortogonales

2.3.1. Determinación

Primer Paso

Dada una familia de curvas con parámetro C se encuentra su ED de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Segundo Paso

Se encuentra las trayectorias ortogonales resolviendo la ED:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

3.1. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con Coeficientes Constantes

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.1}$$

Donde a, b y c son constantes.

Ecuaciones de este tipo tienen dos soluciones independientes.

3.1.1. Solución General

En general, si $y = y_1(x)$ y $y = y_2(x)$ son ambas soluciones de 1.8 entonces, cualquier combinación lineal de y_1 y y_2 es también solución de 1.8. Esto quiere decir:

$$\begin{aligned} ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) = 0 \\ ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) = 0 \end{aligned}$$

Sea: $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ una combinación lineal de y_1 y y_2.

3.2. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con Coeficientes Constantes de Orden n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Donde: a_i son constantes y $a_n \neq 0$

El procedimiento es similar al de orden 2.

Si $y = e^{mx}$ es una solución, entonces m es una raíz de la Ecuación Característica.

$$\boxed{a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0}$$

El polinomio de grado n tiene n raíces, pero no necesitan ser distinas, la multiplicidad de una raíz es el número de veces que se repite. La suma de todas las multiplicidades de todas las raíces distintas es igual al grado del polinomio.

3.2.1. Procedimiento

Capítulo 4

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

4.1. Sistemas no Homogéneos

Capítulo 5

Otros Métodos de Solución

5.1. Transformada de Laplace

Definición

Sea $F(t)$ definida para $t > 0$. Entonces la Integral:

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t)dt$$

Es la *Transformada de Laplace* siempre que la Integral Converja. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Se tiene $F(t) = 1$, hallar $\mathscr{L}\{F(t)\}$, comenzamos reemplazando en la integral:

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1dt$$

Expresamos la integral en forma de límite:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}dt$$

Realizamos la Integral:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \left[\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Bigg|_0^b \right]$$

Evaluando la Integral en b y 0:

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(e^{-sb} - e^{0} \right) \right] = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right]$$

Aplicamos el límite:

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right] = -\frac{1}{s} \cdot (0 - 1) = \boxed{\frac{1}{s}}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}\{1\} = f(s) = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace de algunas Funciones Elementales

De igual manera que el ejemplo del anterior punto, estas Transformadas se pueden obtener:

$F(t)$	$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$
1) 1	$\frac{1}{s}$; $s > 0$
2) t	$\frac{1}{s^2}$; $s > 0$
3) t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$
4) e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5) $sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6) $cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7) $senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$; $s > \lvert a \rvert$
8) $cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$; $s > \lvert a \rvert$

Propiedades

Teorema

Si C_1, C_2 son constantes y $F_1(t), F_2(t)$ funciones con transformadas de Laplace: $f_1(s), f_2(s)$ respectivamente, entonces:

$$\mathscr{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1\mathscr{L}\{F_1(t)\} + C_2\mathscr{L}\{F_2(t)\}$$

Esto es:

$$\mathscr{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1f_1(s) + C_2f_2(s)$$

Transformadas de Laplace de la Derivadas

T.1.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = s \cdot f(s) - F(0)$$

Asumiendo:

$$e^{-st} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty$$

T.2.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F''(t)\} = s^2 \cdot f(s) - s \cdot F(0) - F'(0)$$

T.3.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F'''(t)\} = s^3 \cdot f(s) - s^2 \cdot F(0) - s \cdot F'(0) - F''(0)$$

Generalizando

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = s^n \cdot f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - s \cdot F^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

Transformada Inversa

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces $f(s)$ es la transformada inversa de Laplace. Esto es:

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

Para la inversa se pueden utilizar las transformadas normales, teniendo en cuenta que ahora trabajamos con las inversas.

Bibliografía

[1] Ion Zaballa Tejada, *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Curso 2008-2009,* Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco
`http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/`

[2] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicación de Modelado, Séptima Edición*, Thomson Learning, 2005.