Ejemplo (Lenguajes Formales)

Auxiliar: Leonardo H. Añez Vladimirovna*

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

`I-2020`

Demostrar Formalmente

Construir dos expresiones regulares α y β, tales que $|L(\alpha)| = 3$ y $|L(\beta)| = 4$, construyendo dos autómatas (M_α y M_β) respectivamente y demostrar **formalmente** que:

$$L(M_\alpha) \cap L(M_\beta) = \Sigma^*$$

Respuesta

Primeramente construimos las ER. α y β.

$$\alpha = (a \cup b) \cup bb \qquad \beta = ((a \cup b) \cup aa) \cup bb$$

Evidentemente, la cardinalidad del lenguaje generado por cada una cumple con el enunciado, según lo vemos a continuación:

$$\begin{aligned}
L(\alpha) &= L((a \cup b) \cup bb)\\
&= L(a \cup b) \cup L(bb)\\
&= (L(a) \cup L(b)) \cup L(b)L(b)\\
&= (\{a\} \cup \{b\}) \cup \{b\}\{b\}\\
&= \{a, b\} \cup \{bb\}\\
&= \{a, b, bb\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\beta) &= L(((a \cup b) \cup aa) \cup bb)\\
&= L((a \cup b) \cup aa) \cup L(bb)\\
&= (L(a \cup b) \cup L(aa)) \cup L(bb)\\
&= ((L(a) \cup L(b)) \cup L(a)L(a)) \cup L(b)L(b)\\
&= ((\{a\} \cup \{b\}) \cup \{a\}\{a\}) \cup \{b\}\{b\}\\
&= (\{a, b\} \cup \{aa\}) \cup \{bb\}\\
&= \{a, b, aa\} \cup \{bb\}\\
&= \{a, b, aa, bb\}
\end{aligned}$$

Cardinalidad de α:

$$|L(\alpha)| = 3$$

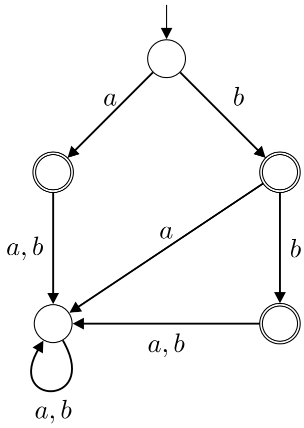
Cardinalidad de β:

$$|L(\beta)| = 4$$

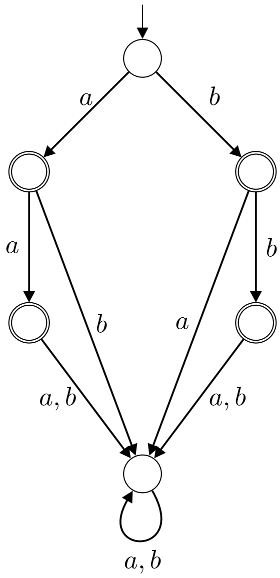
Hasta acá simplemente estamos proponiendo las ER. para demostrar su intersección, no necesariamente tienen que ser estas ER., pero podemos tratar siempre de hacerlas lo mas pequeñas posible.

*Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Como queremos demostrar que $L(M_\alpha) \cap L(M_\beta) = \Sigma^*$ tenemos que construir primeramente los AFDs M_α y M_β, para estos lenguajes finitos (podemos usar el método del árbol):



M_α



M_β

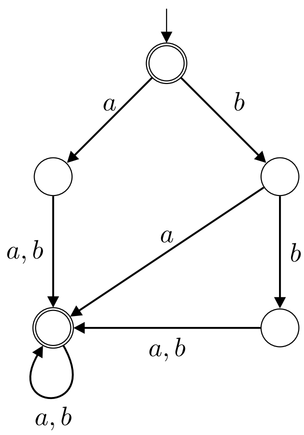
Lo que haremos con estos autómatas es realizar la **intersección** como la conocemos:

$$\Sigma^* - [(\Sigma^* - L(M_\alpha)) \cup (\Sigma^* - L(M_\beta))]$$

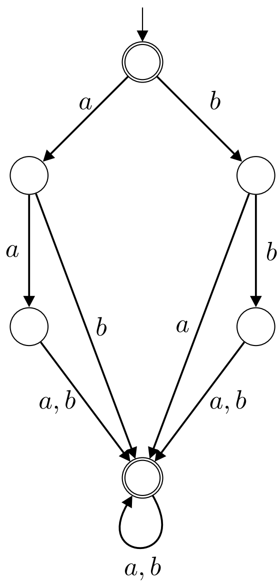
Y vemos si es que el complemento de su **intersección** es $\emptyset$, si fuera el caso, significa que el lenguaje aceptado por el autómata sin el complemento es Σ^* (por lo que quedaría demostrado).

Construyendo la Intersección

Primero, realizamos el complemento de cada autómata M_α y M_β:

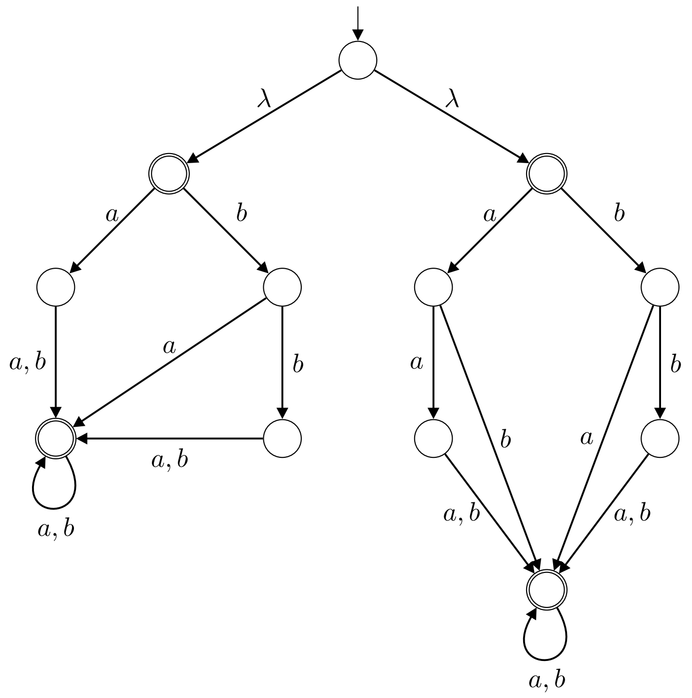


$\overline{M_\alpha}$

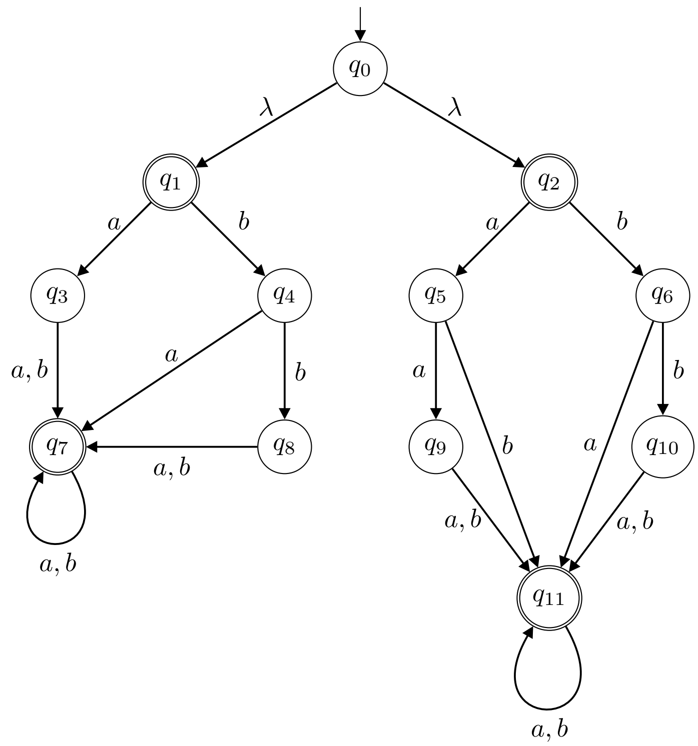


$\overline{M_\beta}$

Luego, realizamos la **unión** de los complementos:



Necesitamos ahora convertirlo a un AFD:

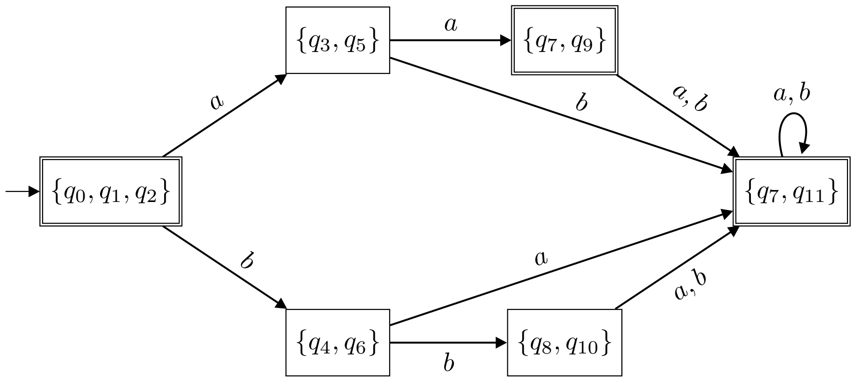


Hasta este paso, solo etiquete los estados para poder realizar la tabla de transición en la conversión.

Realizamos la tabla de transición:

Estados	Entrada λ	Entrada a	Entrada b
$\rightarrow q_0$	q_0, q_1, q_2	q_3, q_5	q_4, q_6
$\underline{q_1}$	q_1	q_3	q_4
$\underline{q_2}$	q_2	q_5	q_6
q_3	q_3	q_7	q_7
q_4	q_4	q_7	q_8
q_5	q_5	q_9	q_{11}
q_6	q_6	q_{11}	q_{10}
$\underline{q_7}$	q_7	q_7	q_7
q_8	q_8	q_7	q_7
q_9	q_9	q_{11}	q_{11}
q_{10}	q_{10}	q_{11}	q_{11}
$\underline{\underline{q_{11}}}$	q_{11}	q_{11}	q_{11}

Finalmente realizamos el AFD con la tabla:



Con este AFD lo unico que nos falta por hacer es el complemento para obtener la intersección que buscabamos: $L(M_\alpha) \cap L(M_\beta)$. Y ver si es que nos da Σ^*.

Recordemos por un momento que doble complemento es el conjunto original:

$$(A^C)^C = A$$

Por lo que podriamos no realizar el complemento ya que obtendriamos el mismo autómata de arriba.

Finalmente teniendo el autómata, podemos afirmar que $L(M_\alpha) \cap L(M_\beta) \neq \Sigma^*$ ya que al ver el complemento de su intersección vemos que existen secuencias de aristas que nos llevan a un estado terminal a partir de $\{q_0, q_1, q_2\}$.

$$\overline{L(M_\alpha) \cap L(M_\beta)} \neq \emptyset$$

Por lo tanto:

$$L(M_\alpha) \cap L(M_\beta) \neq \Sigma^*$$