Apuntes de

CALCULO I

Semestre I-2017

Universidad Autónoma Gabriel René Moreno

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones

Añez Vladimirovna Leonardo

Última Revisión:

18 de noviembre de 2017

Esta obra está compuesta por mis apuntes en clase de Cálculo I con el Ms.C. Carlos Miranda, algunos conceptos, ejemplos y referencias fueron obtenidas de libros utilizados a lo largo del semestre y al escribir este libro.

Consultas, sugerencias y/o errores: vlada98@yahoo.com

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se llevan temas introductorios como la noción de conjuntos, conjuntos numéricos, operaciones con conjuntos y desigualdades.

1.1. Conjuntos

1.1.1. Concepto

Un conjunto es simplemente una colección de objetos. En ocasiones se hace referencia a los objetos como elementos o miembros.

Matemáticas Discretas, Sexta Edición, Richard Johnsonbaugh - Capítulo 2

1.1.2. Conjuntos Numéricos

Números Naturales

Son aquellos que utilizamos para ordenar y contar, se representan con el símbolo: $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Números Enteros

Es el conjunto de números formados por los Números Naturales, el Cero y los números Naturales con signo negativo, se representan con el símbolo: $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Números Racionales

Son los números que pueden ser expresados como la división de dos números enteros donde el divisor puede ser cualquier número entero *excepto* el cero. Se representa con el símbolo: $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x/x = \frac{a}{b} \quad \wedge \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad b \neq 0 \right\}$$

Números Irracionales

Son los números que no pueden ser expresados como la división de dos números enteros. Se representa con el símbolo: $\mathbb{I}$. Algunos ejemplos de estos números son: π, $\sqrt{2}$ y e

Números Reales

Es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. Se representa con el símbolo: $\mathbb{R}$

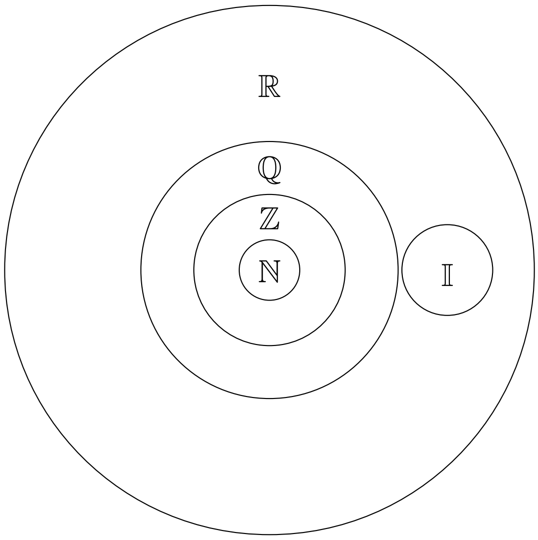


Figura 1.1: Conjunto de los Número Reales

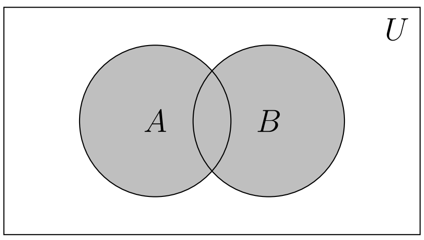
1.2. Operaciones con Conjuntos

1.2.1. Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

Álgebra I, Armando Rojo - Capitulo 2

Diagrama de Venn



Definición Formal

$$A \cup B \Leftrightarrow \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplos

1. Dado el conjunto A y el conjunto B, donde: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 13, 17\}$.
La unión de estos dos conjuntos será:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 17\}$$

2. Dado el conjunto M y el conjunto N, donde: $M = \{a, b, c\}$ y $N = \{x, y, z\}$.
La unión de estos dos conjuntos será:

$$M \cup N = \{a, b, c, x, y, z\}$$

3. Dado los conjuntos A, B y C, donde: $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{p, q\}$
La unión de estos conjuntos será:

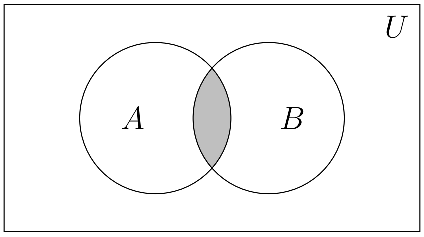
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, a, b, p, q\}$$

1.2.2. Intersección

La Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

Álgebra I, Armando Rojo - Capitulo 2

Diagrama de Venn



Definición Formal

$$A \wedge B \Leftrightarrow \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplos

1. Dado el conjunto A y el conjunto B, donde: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d\}$.
La intersección de estos dos conjuntos será:

$$A \cap B = \{b, c\}$$

2. Dado los conjuntos A, B y C, donde: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{2, 3, 4, 5\}$
La intersección de estos conjuntos será:

$$A \cap B \cap C = \{2, 4\}$$

3. Dado los conjuntos P y Q, donde: $P = \{gatos, perros\}$ y $Q = \{gatos, loros\}$.
La intersección de estos conjuntos será:

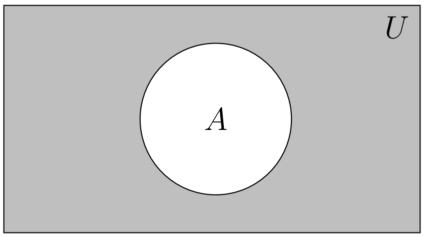
$$P \cap Q = \{gatos\}$$

1.2.3. Complemento

Se define como el complemento de A al conjunto formado por los elementos de U, que no pertenecen a A.

Álgebra I, Armando Rojo - Capitulo 2

Diagrama de Venn



Definición Formal

$$A^c \Leftrightarrow \{x/x \notin A\}$$

Ejemplos

1. Dado el conjunto A y el Universo U, donde: $A = \{1, 2, 3\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
El complemento de A será:

$$A^c = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

2. Dado el conjunto Q y el Universo U, donde: $Q = \{a, x\}$ y $U = \{a, b, c, x, y, z\}$.
El complemento de Q será:

$$Q^c = \{b, c, y, z\}$$

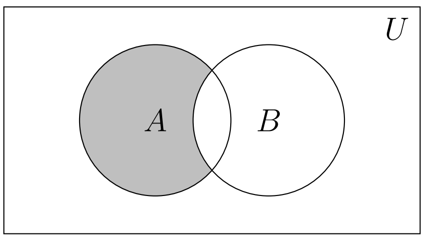
3. Dado el conjunto P, el cual es parte del conjunto $\mathbb{N}$ (Conjunto de Números Naturales), donde: $P = \{x/x \text{ es par}\}$. El complemento del conjunto P, serán todos los números naturales que sean impares.

1.2.4. Diferencia

La Diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Álgebra I, Armando Rojo - Capitulo 2

Diagrama de Venn



Definición Formal

$$A - B \Leftrightarrow \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplos

1. Dado el conjunto A y el conjunto B, donde: $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, c, d\}$.
La diferencia de estos dos conjuntos será:

$$A - B = \{b, e\}$$

2. Dado el conjunto M y el conjunto N, donde: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $N = \{4, 5, 6, 7\}$.
La diferencia de estos dos conjuntos será:

$$M - N = \{1, 2, 3\}$$

3. Con los anteriores conjuntos M y N, la diferencia $N - M$ será:

$$N - M = \{7\}$$

1.3. Desigualdades

Es una declaración matemática que define un rango de números; las desigualdades contienen los símbolos $<, >, \leq$ o $\geq$.

Álgebra I - www.montereyinstitute.org

1.3.1. Reglas

(I). Si a ambos lados de una desigualdad se suma el mismo número, la desigualdad no cambia.

(II). Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica por un número positivo, la desigualdad no cambia.

(III). Si a ambos lados de una desigualdad se multiplican por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplos

1. Hallar el Conjunto Solución en la siguiente desigualdad:

$$2x > 5 - x$$

Resolución

P1. $2x > 5 - x$
P2. $2x + x > 5 - x + x$
P3. $3x > 5$

P4. $x > \dfrac{5}{3}$
Entonces el Conjunto Solución para la desigualdad será: $\left(\dfrac{5}{3}, \infty\right)$

2. Hallar el Conjunto Solución en la siguiente desigualdad:

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

Resolución

P1. $x^2 - 7x + 6 \leq 0$
P2. $(x - 6)(x - 1) \leq 0$

P3. Si separamos tendremos $x - 6 \leq 0$ y $x - 1 \leq 0$
P4. Entonces podremos decir que $x \leq 6$ y $x \leq 1$

Entonces el Conjunto Solución para la desigualdad será: $[1, 6]$

3. Hallar el Conjunto Solución en la siguiente desigualdad:

$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

Resolución

P1. $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$
P2. $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \leq 0$
P3. $\dfrac{x-3}{2(x+1)} \leq 0$
P4. Tomando como puntos de referencia tenemos $x - 3 \leq 0$ y $2(x+1) < 0$

Obsérvese que $2(x+1) < 0$ no tiene $\leq$ ya que como es el denominador no puede ser igual a cero.

El Conjunto Solución es: $(-1, 3]$.

4. Hallar el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$14 - x > 4x - 1$$

Resolución:

P1. $14 - x > 4x - 1$
P2. $-x - 4x > -1 - 14$
P3. $-5x > -15$
P4. $-x > -3 \cdot (-1)$
P5. $x < 3$

El Conjunto Solución para esta desigualdad será: $(-\infty, 3)$. Hasta el paso **4.** la desigualdad se trabaja como una ecuación cualquiera. En el quinto paso lo que hacemos es multiplicar cada extremo por -1, para deshacernos del signo negativo del lado de la x. Una vez hecho esto la desigualdad cambia de sentido (ver regla **III.**), cambiamos $>$ por $<$.

5. Hallar el Conjunto Solución en la siguiente desigualdad:

$$x^2 > -(2x + 1)$$

Resolución:

P1. $x^2 > -(2x+1)$
P2. $x^2 > -2x - 1$

P3. $x^2 + 2x + 1 > 0$
P4. $(x + 1)^2 > 0$

En esta desigualdad podemos ver que el único valor que no puede estar en x es el -1.

Entonces el Conjunto Solución serán todos los números Reales ($\mathbb{R}$) excepto el -1.

1.3.2. Desigualdades con Valor Absoluto

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real es su distancia al cero. Puesto que un número real puede ser positivo, negativo o cero, se tiene:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Desigualdades y Valor Absoluto, CIMAT - Capítulo 2

Teoremas

T1. $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

T2. $|a| > b \Leftrightarrow a > b \quad \vee \quad a < -b$

Ejemplos

1. Dada la siguiente desigualdad, encontrar su Conjunto Solución:

$$|5 + x| < 17$$

Resolución

P1. $|5 + x| < 17$
P2. $-17 < 5 + x < 17$
P3. $-17 - 5 < 5 + x - 5 < 17 - 5$
P4. $-22 < x < 12$

El Conjunto Solución de la desigualdad se encuentra en el intervalo: $(-22, 12)$.

2. Dada la siguiente desigualdad, encontrar su Conjunto Solución:

$$|2x| > 4$$

Resolución

P1. $|2x| > 4$
P2. $2x > 4 \quad \vee \quad 2x < -4$
P3. $x > 2 \quad \vee \quad x < -2$

El Conjunto Solución de la desigualdad será: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

3. Dada la siguiente desigualdad, encontrar su Conjunto Solución:

$$|2x| < 16$$

Resolución

P1. $|2x| < 16$
P2. $-16 < 2x < 16$
P3. $-8 < x < 8$

El Conjunto Solución de la desigualdad se encuentra en el intervalo: $(-22, 12)$.

Capítulo 2

Relaciones y Funciones

2.1. Relaciones

2.1.1. Par Ordenado

Un par ordenado, es una pareja de elementos (a, b) que guardan cierto orden. Donde a es la primer componente y b la segunda componente.

Propiedad

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d$$

Esto quiere decir que dos pares ordenados son iguales si sus primeras y segundas componentes son iguales respectivamente.

2.1.2. Producto Cartesiano

El Producto Cartesiano $A \times B$ de los conjuntos A, B; es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b); donde $a \in A$, $b \in B$. Simbólicamente se tiene:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$$

Cálculo I, Víctor Chungara - Capítulo 2

Ejemplos

1. Si se tiene dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$. El producto cartesiano $A \times B$ será:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

Nótese que las primeras componentes son todos partes del primer conjunto A y las segundas componentes del conjunto B.

2. Si se tiene el conjunto $A = \{a, b, c\}$. El producto cartesiano $A \times A$ será:

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

3. Si $M = \{x, y\}$ y $N = \{p, q\}$, entonces $N \times M = \{(p, x), (p, y), (q, x), (q, y)\}$.

2.1.3. Relación

Una relación de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Ejemplos

Utilizando los productos cartesianos del anterior ejemplo, algunas relaciones posibles pueden ser:

1. $S = \{(1,4),(1,5),(2,4)\} \subset A \times B$

2. $K = \{(p,x),(q,y)\} \subset N \times M$

3. $W = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \subset A \times A$

2.2. Funciones

Una función f consiste en un conjunto de entrada, un conjunto de salida, y una regla que asigna a cada entrada exactamente una salida. El conjunto de entrada es llamado **Dominio.** El conjunto de salida es llamado **Rango** de la función.

Calculus Volume 1, Edwin Herman & Gilbert Strang - Capitulo 1 (Traducido)

Criterios de Funciones

Los siguientes puntos son criterios que determinan si una relación es una función:

Totalidad: Todos los elementos del primer conjunto están emparejados con otro elemento del segundo conjunto.

Unicidad: Cada elemento de del primer conjunto está relacionado con solo un elemento del segundo conjunto.

Ejemplos

La primera relación cumple con la condición de **Totalidad**, es decir, ningún elemento del primer conjunto está sin pareja, pero no cumple en la **Unicidad** ya que de un elemento de partida salen dos flechas hacia el conjunto de llegada, así que este no es una función. El segundo ejemplo cumple con ambas condiciones, entonces decimos que es una función.

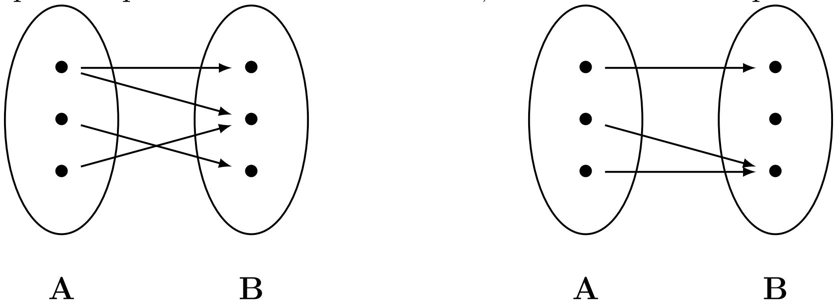


Figura 2.1: Relaciones representadas por Diagramas.

2.2.1. Dominio y Rango

Dominio: Es el conjunto de Primeras Componentes de los pares ordenados de una función.

Rango: También llamado Codominio, es el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados de una función.

Cálculo I, Víctor Chungara - Capítulo 2

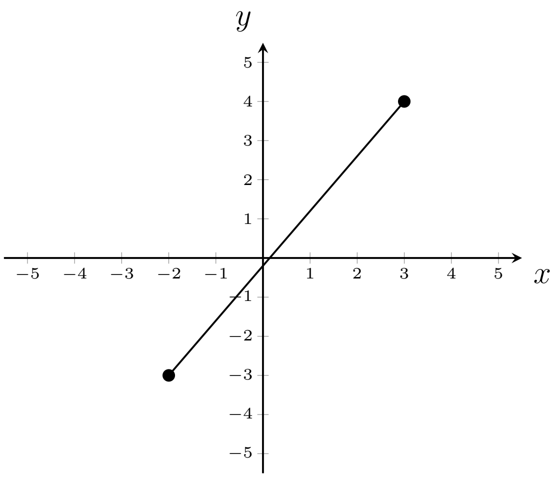
Ejemplos

1. Dada la función f, donde $f = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ su Dominio y Rango serán:

Dominio: $D_f = \{1,2,3,4\}$ **Rango:** $R_f = \{2,4,6,8\}$

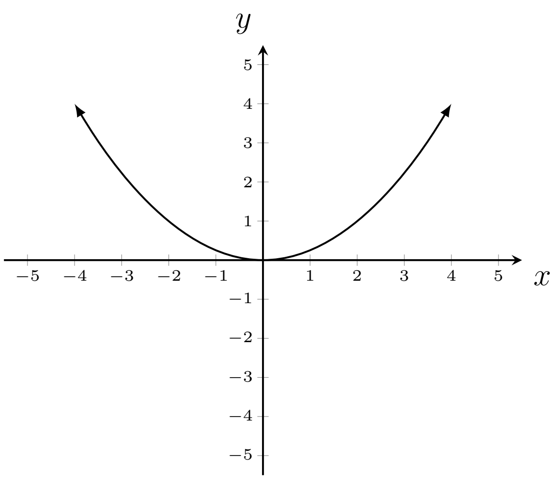
En el Dominio tenemos las primeras componentes de los pares ordenados de f y en el Rango las segundas componentes.

2. Se tiene la siguiente gráfica que describe una función f:



Su Dominio estará extendido sobre el eje x, y será $D_f = [-2,3]$ y su Rango sobre el eje y y será $R_f = [-3,4]$

3. Se tiene la siguiente gráfica que describe una función f tal que $D_f = \mathbb{R}$ (Es decir, el Dominio está compuesto por todos los números Reales) y $R_f = [0,\infty]$.



2.2.2. Restricciones

(I.) Evitar la división entre cero.

(II.) Evitar números negativos bajo raíz par.

(III.) Evitar números negativos como argumentos de logaritmos.

(IV.) En una función exponencial la base debe ser mayor a cero.

Ejemplos

1. Hallar el Dominio de la siguiente función:

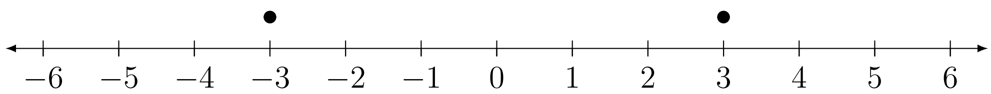
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Viendo esta función, rápidamente podemos afirmar que lo que está dentro de la raíz no puede ser negativo. Entonces: $x^2 - 9 \geq 0$

Podemos reescribir $x^2 - 9 \geq 0$ de la siguiente manera: $(x-3)(x+3) \geq 0$. Con esta desigualdad, podemos decir:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$$

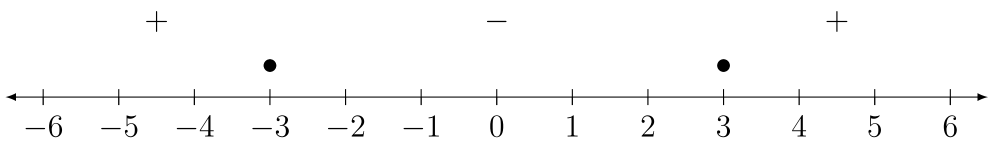
Estos valores son **referencias** que utilizaremos para hallar el Dominio.



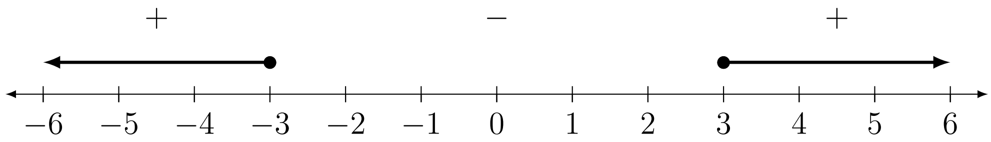
Tomando estas dos referencias, la recta se divide en tres intervalos. Para hallar el Dominio reemplazamos en la desigualdad cualquier valor que se encuentre en los intervalos. Por comodidad utilizar el intervalo donde esté el cero es mas conveniente ya que es mas fácil de operar cuando reemplazamos en la desigualdad. El cero se encuentra en el intervalo entre -3 y 3. Reemplazando en la desigualdad:

P1. $(x-3)(x+3)$
P2. $(0-3)(0+3)$
P3. $(-3)(3)$
P4. -9

Con este resultado, sabemos que cualquier número entre -3 y 3 que reemplacemos en la desigualdad, nos dará un número negativo. Para saber el signo que tendrán los otros intervalos intervalos basta colocarlos de manera intercalada.



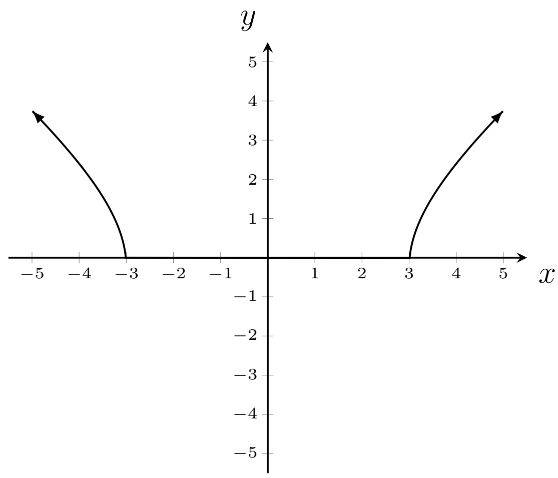
Por último, la desigualdad nos dice que los valores que tome $x^2 - 9$ tienen que ser positivos, entonces tomamos los intervalos con signo positivo.



El Dominio se encuentra desde el -3 hacia la izquierda, y desde el 3 hacia la derecha, Lo escribimos de la siguiente manera:

$$D_f = (\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

Gráfica de la función



2. Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$$

Para hallar el Dominio de esta función, primeramente veremos que parte de ella nos presenta alguna restricción, en este caso, el denominador no puede ser cero. Igualaremos el denominador a cero, y así sabremos que valores no puede tener x:

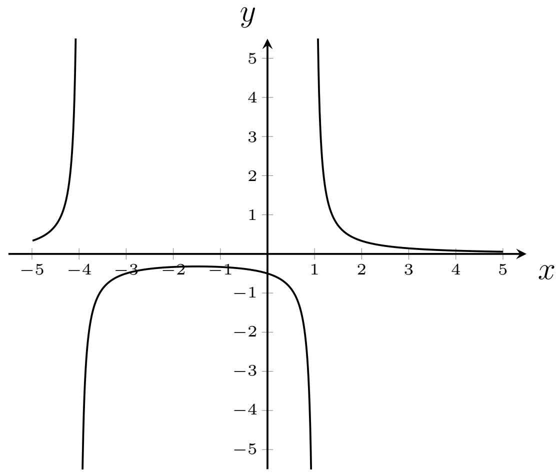
P1. $x^2 + 3x - 4 = 0$
P2. $(x + 4)(x - 1) = 0$
P3. $x_1 = -4 \qquad x_2 = 1$

Entonces el Dominio de la función será:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$$

Esto significa que el Dominio son todos los Reales excepto el número -4 y 1.

Gráfica de la función



3. Hallar el Dominio de la siguiente función:

$$m(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-5}}$$

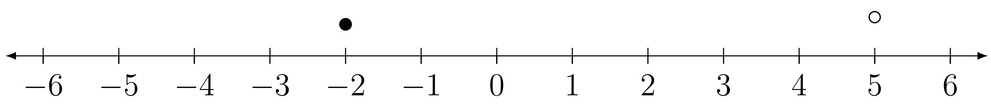
Igual que los anteriores ejemplos, hay que analizar las restricciones de la función. Primero vemos que tenemos una raíz, esto nos indica que cualquier expresión dentro de esta debe ser mayor o igual a cero, además la expresión dentro de la raíz es una fracción y el denominador de esta debe ser diferente de cero.

$$\frac{x+2}{x-5} \geq 0$$

Como en el primer ejemplo, tomaremos $(x+2)$ y $(x-5)$, despejando x de cada uno. Estos puntos son **referencias** para hallar el Dominio.

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 5$$

La recta Real quedará dividida en tres intervalos.



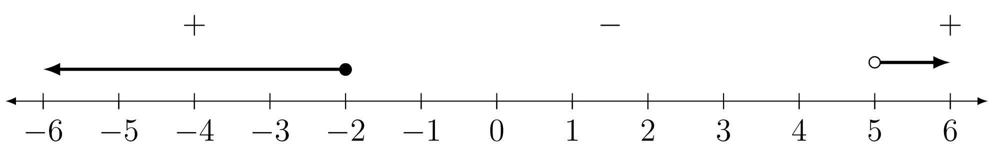
Ahora, podemos reemplazar con cualquier valor que este en los intervalos, pero nos conviene tomar aquel en el que se encuentra el cero. Si reemplazamos:

P1. $\dfrac{x+2}{x-5}$

P2. $\dfrac{0+2}{0-5}$

P3. $-\dfrac{2}{5}$

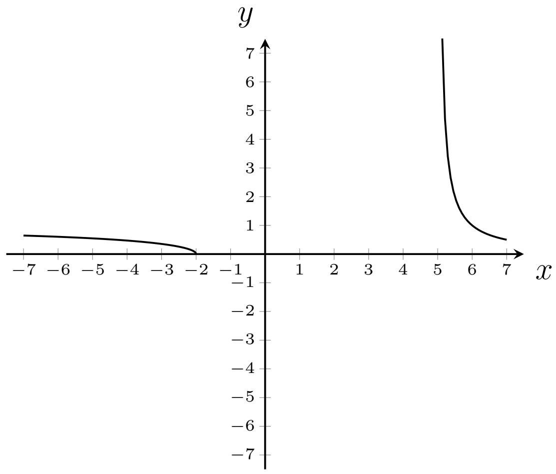
El intervalo donde se encuentra el cero tendrá signo negativo, el resto de los intervalos se los coloca de manera intercalada.



El Dominio de la función será:

$$D_m = (\infty, -2] \cup (5, \infty)$$

Gráfica de la función



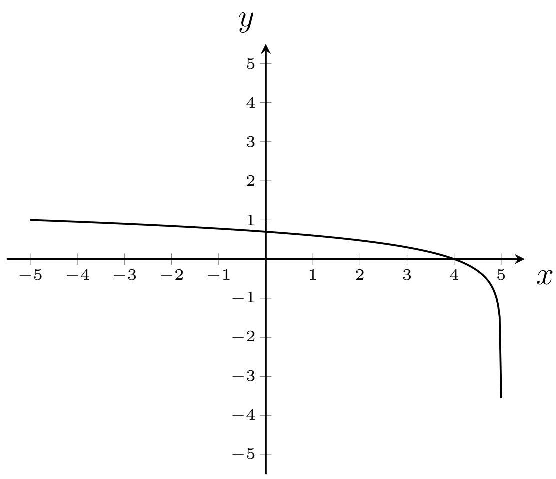
4. Hallar el Dominio de la siguiente función:

$$g(x) = \log(5 - x)$$

Primeramente debemos notar que el argumento del logaritmo no debe ser cero o negativo: $5 - x > 0$. Resolviendo la desigualdad obtenemos que x debe ser menor a 5. El Dominio de la función será:

$$D_g = (-\infty, 5)$$

Gráfica de la función



2.3. Tipos de Funciones

2.3.1. Función Lineal

Una función lineal se define por:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta cuya pendiente es m y su intercepción y ordenada al origen es b.

El Cálculo, 7ma Edición, Luis Leithold - Capítulo I

Casos

(I.) $f(x) = x$

(II.) $f(x) = mx$

(III.) $f(x) = mx + b$

Gráficas

En la gráfica izquierda se tiene la función $f(x) = x$. La derecha corresponde a $f(x) = -x$.

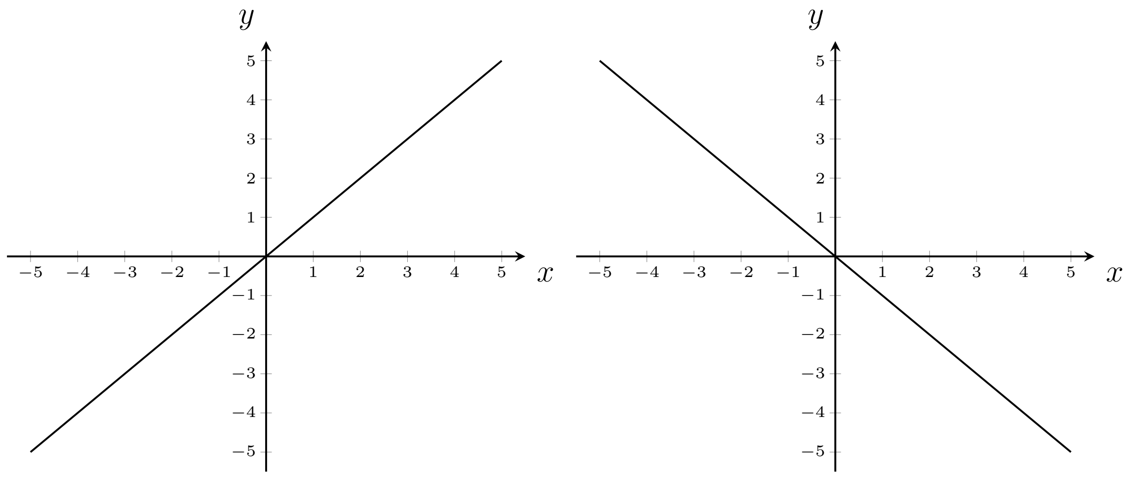


Figura 2.2: Gráfica de la Función Lineal: $f(x) = x$

La primera gráfica corresponde a la función $f(x) = 3x$ y la segunda a $f(x) = \frac{1}{2}x$.

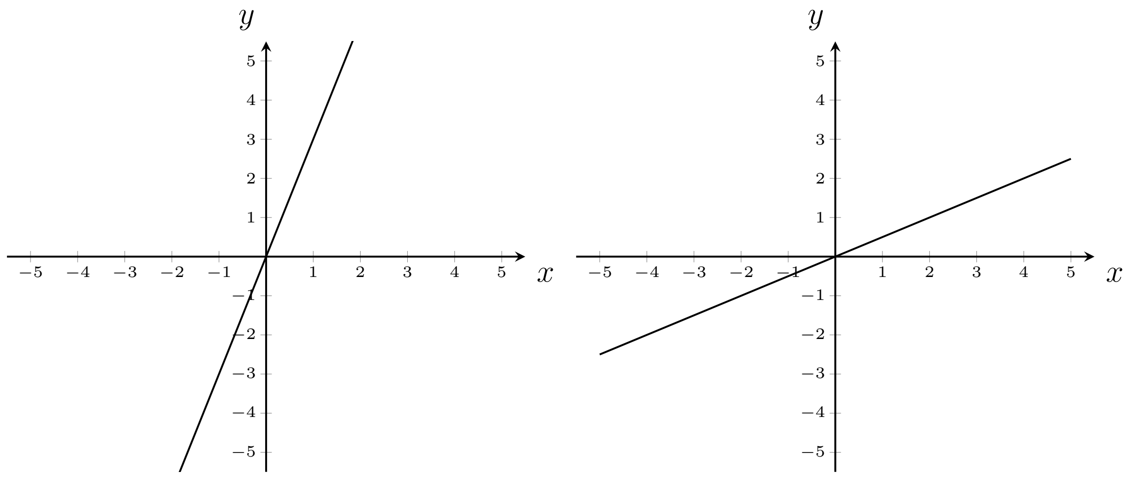


Figura 2.3: Gráfica de la Función Lineal: $f(x) = mx$

Esta gráfica no pasa por el origen, y esto es debido a que la variable b hace que se desplace hacia arriba o hacia abajo. Para la izquierda le corresponde la función $f(x) = -x - 2$. Para la derecha $f(x) = 2x + 3$.

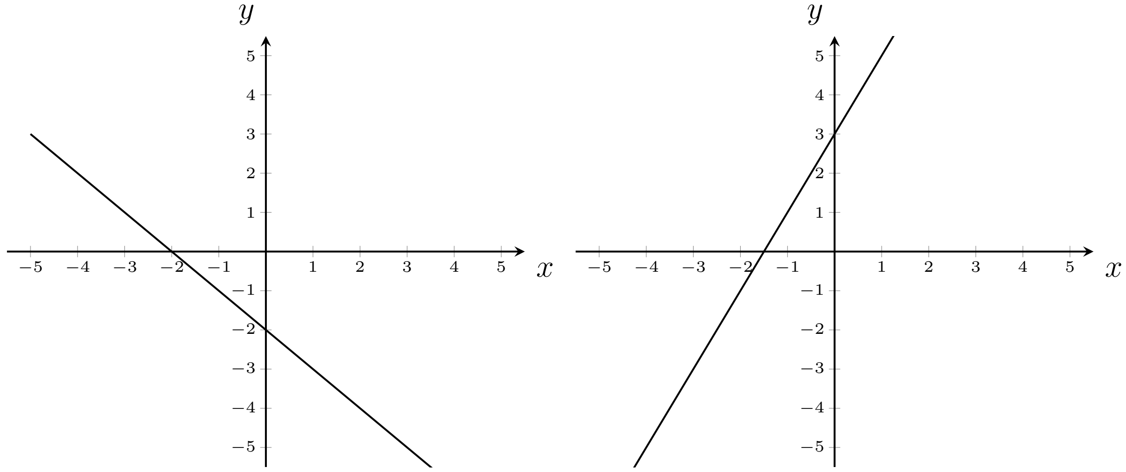


Figura 2.4: Gráfica de la Función Lineal: $f(x) = mx + b$

2.3.2. Función Polinómica de Grado 2

Las funciones polinómicas de segundo grado se llaman *funciones cuadráticas* y son del tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde $a \neq 0$ y su gráfica es una parábola.

Artículo, Funciones - calculo.cc

Casos

(I.) $f(x) = ax^2$

(II.) $f(x) = ax^2 + c$

(III.) $f(x) = a(x - h)^2$

(IV.) $f(x) = a(x - h)^2 + k$

(V.) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Gráficas

En la gráfica izquierda tenemos dos funciones la primera está dada por $f(x) = x^2$ (función punteada), la segunda corresponde a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, como se puede ver, el valor de a determina que tan abierta o cerrada será la función. El plano de la derecha tiene las funciones con signos contrarios.

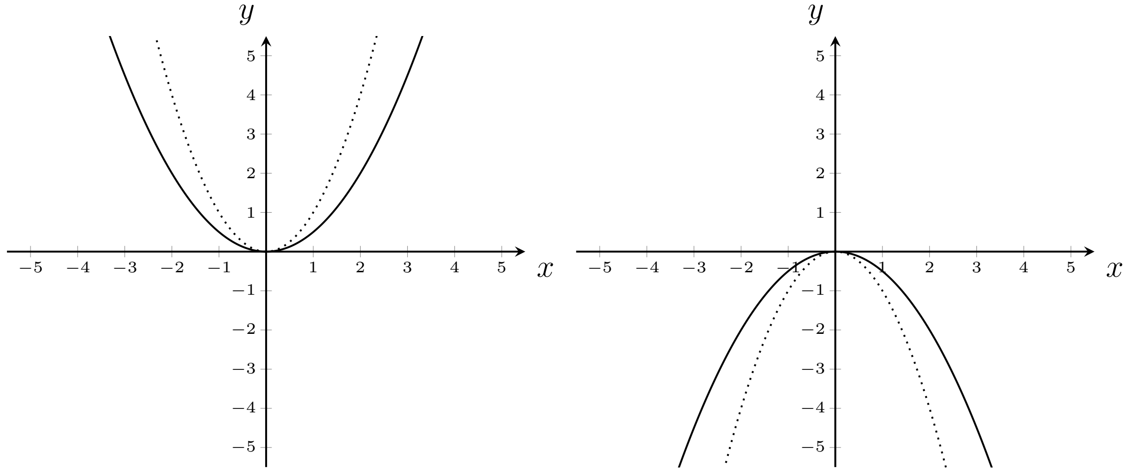


Figura 2.5: Gráfica de la Función Polinómica de Grado 2: $f(x) = ax^2$

Ambas gráficas tienen como base la forma $f(x) = x^2$ las funciones de derecha a izquierda son $f(x) = x^2 + 2$ y $f(x) = x^2 - 1$. Se puede ver que c causa un desplazamiento en el eje y.

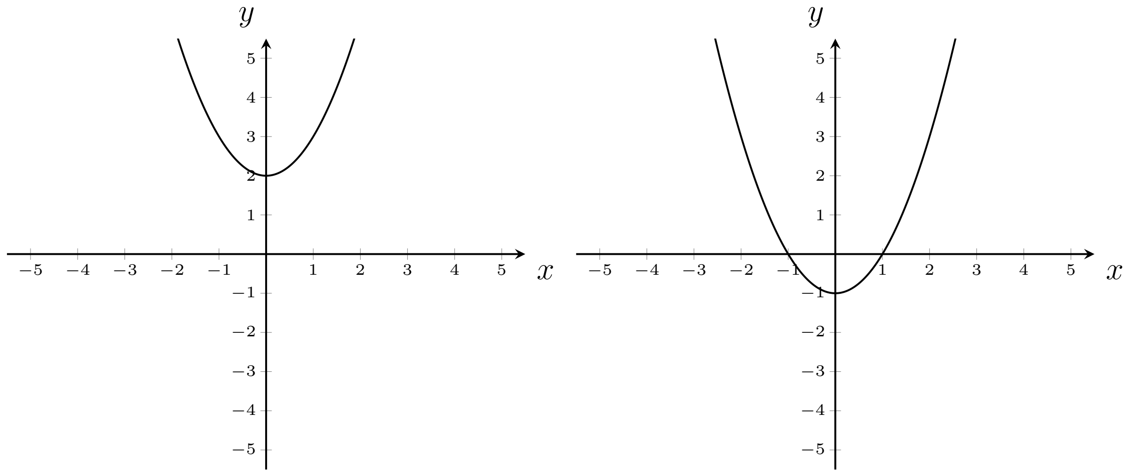


Figura 2.6: Gráfica de la Función Polinómica de Grado 2: $f(x) = ax^2 + c$

Ambas figuras corresponden a las funciones $f(x) = 2(x-2)^2$ y $f(x) = 3(x+1)^2$. Como se puede ver, en ambos casos la constante h determina hacia donde se desplaza horizontalmente.

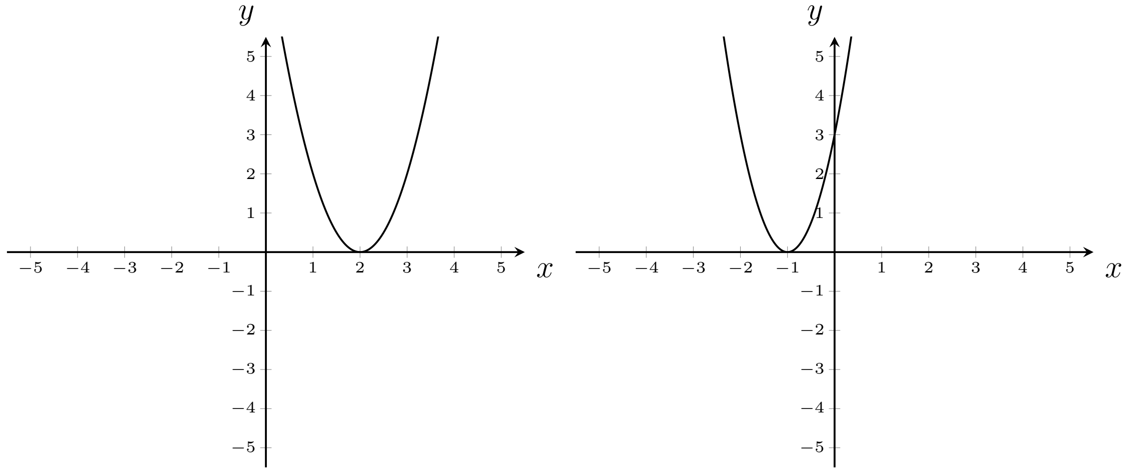


Figura 2.7: Gráfica de la Función Polinómica de Grado 2: $f(x) = a(x-h)^2$

En ambas gráficas las constantes h y k indican donde se encuentra el vértice de la parábola. Las gráficas (de izquierda a derecha) corresponden a $f(x) = 2(x+2)^2 - 3$ y $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ respectivamente.

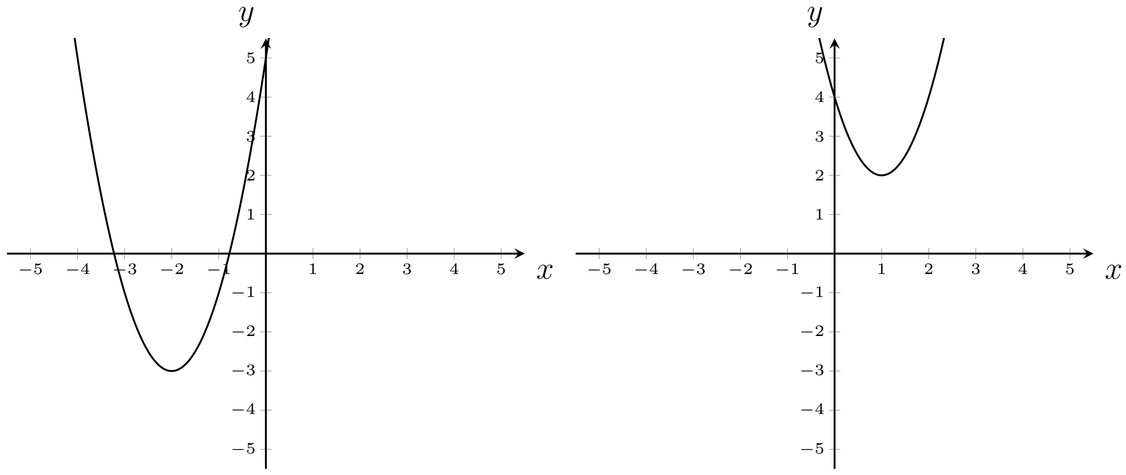


Figura 2.8: Gráfica de la Función Polinómica de Grado 2: $f(x) = a(x-h)^2 + k$

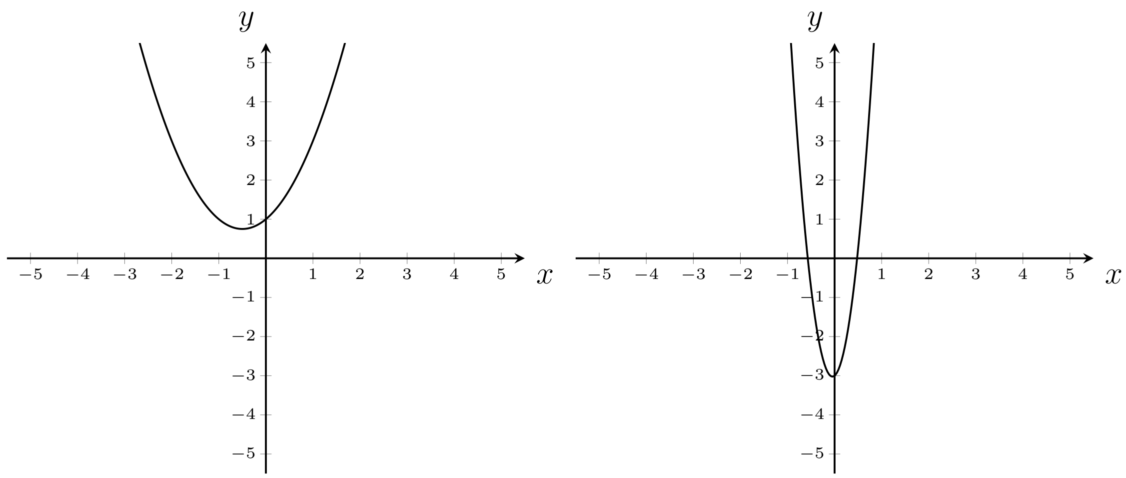


Figura 2.9: Gráfica de la Función Polinómica de Grado 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.3.3. Función de Proporcionalidad Inversa

Una función de proporcionalidad inversa es una función que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. Su expresión algebraica es del tipo:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Artículo, Funciones - calculo.cc

La gráfica de la izquierda corresponde a la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y la derecha a $f(x) = \dfrac{1}{x}$

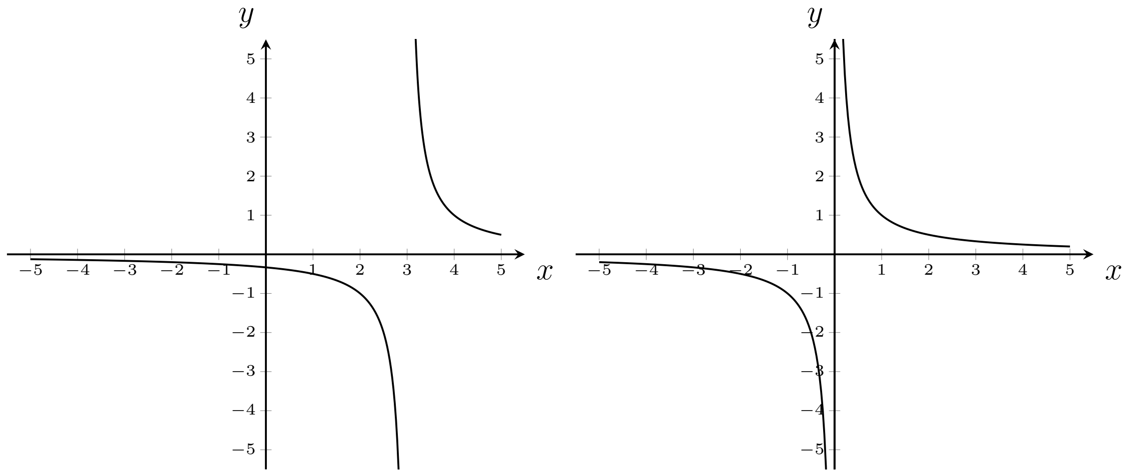


Figura 2.10: Gráfica de la Función de Proporcionalidad Inversa

2.3.4. Función Logarítmica

Una función logarítmica es aquella que genéricamente se expresa como:

$$f(x) = \log_a(x)$$

Siendo a la base de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1.

Artículo, Función Logarítmica - www.hiru.eus

Propiedades de los Logaritmos

(I). $\log_a a = 1$

(II). $\log_a 1 = 0$

(III). $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$

(IV). $\log\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log A - \log B$

(V). $\log a^n = n \cdot \log a$

Ejemplos

La gráfica de la izquierda corresponde a la función $f(x) = \log x$ y la derecha a $f(x) = \log(x-2)$

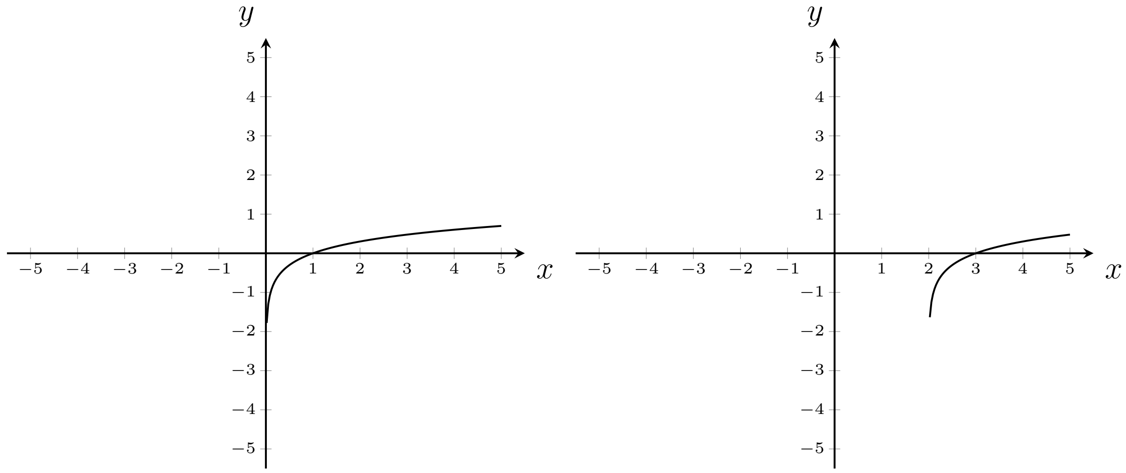


Figura 2.11: Gráfica de la Función Logarítmica

2.3.5. Función Exponencial

Las funciones exponenciales son las funciones que tienen la variable independiente x en el exponente, es decir, son de la forma:

$$f(x) = a^x$$

Siendo $a > 0$ y $a \neq 1$

Artículo, Funciones - calculo.cc

Ejemplos

La gráfica de la izquierda corresponde a la función $f(x) = 2^(x+1)$ y la derecha a $f(x) = 3^x$

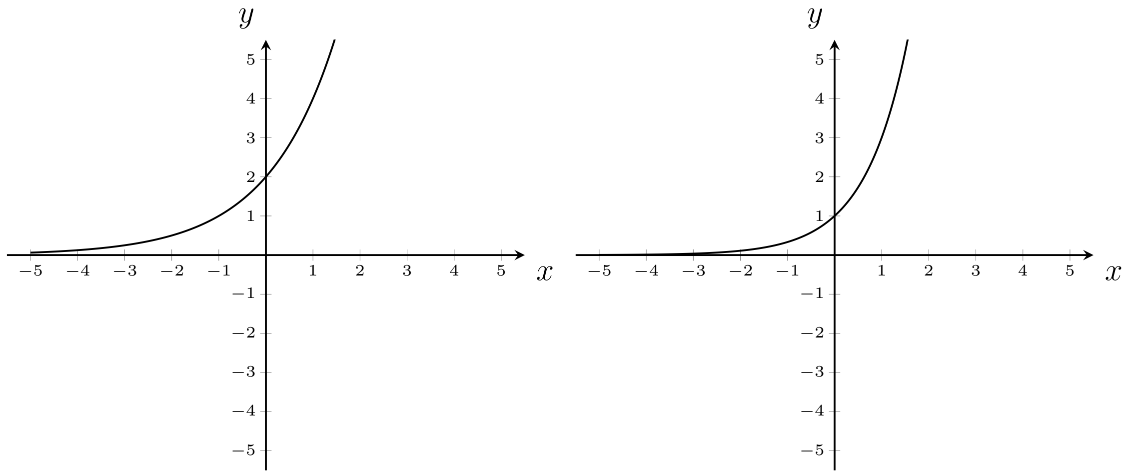


Figura 2.12: Gráfica de la Función Exponencial

2.4. Composición de Funciones

La composición es una operación entre funciones que se establece de la siguiente manera:

Dadas dos funciones f y g, se define como la composición de la función f con la función g, a la función denotada:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Artículo, Composición de Funciones, Alejandra Vargas y Sergio Crail - UNAM

Ejemplo

1. Hallar:

a) $(f \circ g)(x)$
b) $(g \circ f)(x)$

Donde $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = \dfrac{5}{x}$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \qquad (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{5}{x}\right) \qquad (g \circ f)(x) = g(3x - 7)$$

$$(f \circ g)(x) = 3\left(\frac{5}{x}\right) - 7 \qquad (g \circ f)(x) = \frac{5}{3x - 7} \quad \textbf{(b)}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{15}{x} - 7 \quad \textbf{(a)}$$

2.5. Álgebra de Funciones

Las operaciones entre funciones Reales de variable Real, se definen únicamente en dominios comunes, es decir sobre la intersección de sus respectivos Dominios. Las operaciones entre éstas funciones se efectúan de acuerdo a las Clásicas Reglas Algebraicas.

Operaciones

Suma: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ **Dominio** $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ **Dominio** $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

División: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Dominio** $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x/g(x) = 0\}$

Ejemplos

1. Hallar el Dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + ln(x^2 - 1)$$

Entonces:

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad f_2(x) = ln(x^2 - 1)$$

El Dominio de de f_1 será $[-2, 2]$ y el Dominio de f_2 será $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Por lo tanto, el Dominio de la función f será la intersección de las funciones respectivas:

$$D_f = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

2. Hallar el Dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \log(x)$$

En esta función ls podemos separar en dos partes por un lado $f_1(x) = \sqrt{1-x}$ y por el otro $f_2(x) = log(x)$. Para cada función tenemos los Dominios respectivamente:

$$D_{f_1} = (-\infty, 1] \qquad D_{f_2} = (0, \infty)$$

Finalmente el Dominio de la función f resulta de la intersección de los anteriores:

$$D_f = (0, 1]$$

3. Hallar el Dominio de la siguiente función:

$$f(w) = \frac{\sqrt{w^2-1}}{w^2 - 3w + 2}$$

Si decimos que $f_1(w) = \sqrt{w^2-1}$ y $f_2(w) = w^2 - 3w + 2$ debemos hallar el dominio de cada función independientemente, teniendo en cuenta todas sus restricciones, para f_1 tenemos que: $w^2 - 1 \geq 0$. Para f_2 tenemos que: $w^2 - 3w + 2 \neq 0$.

Para f_1 el Dominio es:

$$D_{f_1} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Para f_2 el Dominio son todos los Reales ($\mathbb{R}$) pero como está en el denominador, hay que excluir los puntos en el que es cero, ya que tendríamos una indeterminación.

Igualando a cero y factorizando:

$$w^2 - 3w + 2 = (w-2)(w-1) = 0$$

Sabemos que los puntos donde será cero son $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$. Con esto solo queda hacer la intersección de los Dominios para la función:

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$$

Resulta:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$$

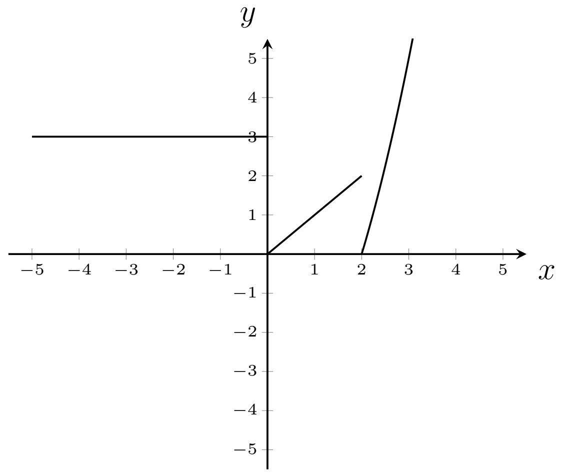
2.6. Funciones definidas por secciones

Una función se puede definir por diferentes reglas de correspondencia para diferentes secciones de su dominio.

Ejemplo

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & x \geq 2 \end{cases}}$$

Gráfica de la función



2.7. Función Implícita

Se dice que una función está de forma implícita si se puede escribir como:

$$f(x, y) = 0$$

Capítulo 3

Límites

3.1. Introducción

La idea de límite en Cálculo, se refiere al estudio del comportamiento de una función cuando su variable independiente tiende a un valor determinado.

Ejemplos

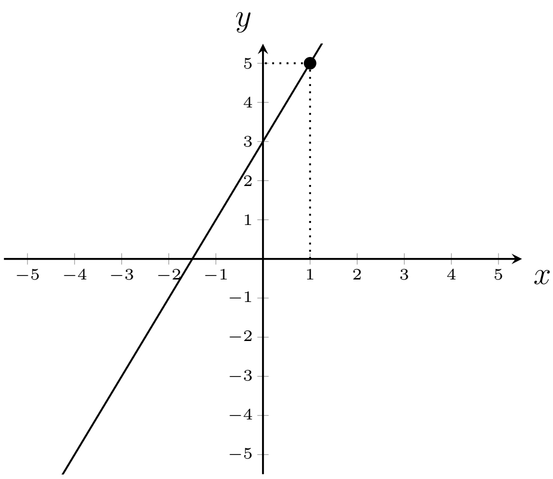
1. Para la función f el límite cuando su variable independiente x tienda a 1 puede ser visualizado en una tabla de datos con los valores que se aproximan (x) y su correspondiente (y).

$$f(x) = 2x + 3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

x	y
0.96	4.92
0.97	4.94
0.98	4.96
0.99	4.98
1.01	5.02
1.02	5.04
1.03	5.06

Podemos ver que cuando la variable independiente x, tiende a acercarse a 1, la variable dependiente y se aproxima a 5. Gráficamente podemos apreciarlo:

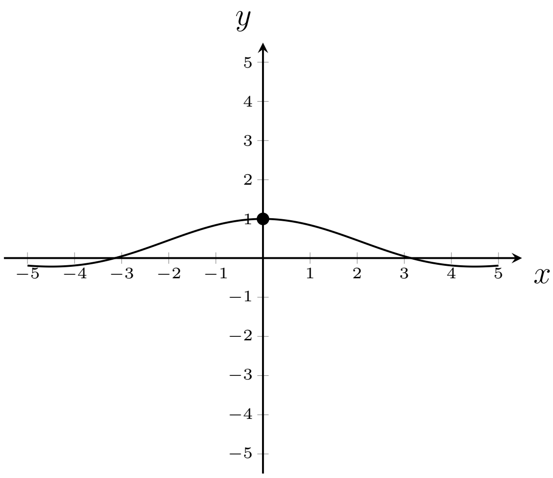


2. Para la función g el límite cuando su variable independiente x tienda a 0 puede ser visualizado en una tabla de datos con los valores que se aproximan (x) y su correspondiente (y). Si graficamos podemos apreciar el límite:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

x	y
0.1	0.9983...
0.01	0.9999...
0.001	0.9999...
0.0001	0.9999...
-0.0001	0.9999...
-0.001	0.9999...
-0.01	0.9999...



3.1.1. Definición Intuitiva

Si $f(x)$ es acerca al número L cuando x se acerca al número c, se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tienda a c:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

3.1.2. Teoremas Fundamentales sobre Límites

(I.) $\lim_{x\to c} k = k$

(II.) $\lim_{x\to c} x = c$

(III.) $\lim_{x\to c} k \cdot f(x) \;= k \cdot \lim_{x\to c} f(x)$

(IV.) $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) \;= \lim_{x\to c} f(x) \;\pm \lim_{x\to c} g(x)$

(V.) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) \;= \lim_{x\to c} f(x) \cdot \;\lim_{x\to c} g(x)$

(VI.) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} \;= \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} ; \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

(VII.) $\lim_{x\to c} [f(x)]^n \;= [\lim_{x\to c} f(x)]^n$

(VIII.) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{\frac{1}{n}} \;= [\lim_{x\to c} f(x)]^{\frac{1}{n}} ; \lim_{x\to c} f(x) > 0$ Cuando n es par.

3.2. Límites Laterales

3.2.1. Definición Intuitiva

Si $f(x)$ se hacerca a L cuando x se acerca a c por la derecha se dice que L es el límite lateral derecho cuando x tiende a c por la derecha. Se escribe:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Si $f(x)$ se acerca a L cuando x se acerca a c por la izquierda, se dice que L es el límite lateral izquierdo cuando x tiende a c por la izquierda. Se escribe:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Teorema

El $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existen y son iguales a L, esto es:

$$\exists \lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

3.3. Límites al Infinito

3.3.1. Definición Intuitiva

Límite a Infinito Positivo

Sea f una función definida en un intervalo $(a, +\infty)$. Si $f(x)$ se acerca a L cuando x crece sin medida, se dice que L es el limite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$. Se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Límite a Infinito Negativo

Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Si $f(x)$ se acerca a L cuando x decrece sin medida, se dice que L es el limite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$. Se escribe:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Teorema

Si $r \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Ejemplo

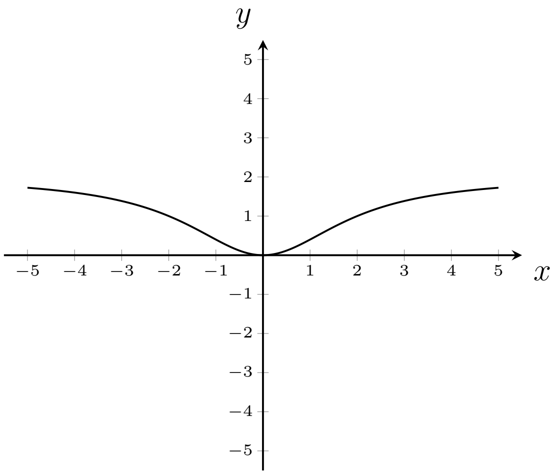
1. Hallar el límite de la siguiente función cuando su variable independiente tiende a ∞ y $-\infty$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+4}$$

Aplicando ambos límites tenemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

La resolución es dejada al lector por considerarse simple.



Viendo la función notamos que en $y = 2$ no continúa en ambos lados y lo hace hacia cada extremo siempre acercandose a 2.

3.4. Límites Infinitos

Teorema

Si $r \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^r} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \infty$

Definición

Sea f una función definida en un intervalo que contenga al punto c, posiblemente no el mismo. Si $f(x)$ crece sin medidad cuando x tiende a c, se dice que $+\infty$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c. Si $f(x)$ decrece sin medida cuando x tiende a c se dice que $-\infty$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c.

3.5. Cálculo de Límites

3.5.1. Límites de Polinomios

3.5.2. Límites de Funciones Racionales

De la forma:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios.

Límites con Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolver límites con esta indeterminación se divide numerador y denominador entre la variable independiente elevada a la potencia del polinomio del mayor grado.

Ejemplos

1. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 7x + 6}{6x^2 + 5x + 9}$$

Podemos ver que reemplazando directamente tendriamos $\frac{\infty}{\infty}$, para deshacer esto dividimos en el numerador y denominador entre x^2 y simplificando:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2}}{\frac{6x^2 + 5x + 9}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2}}{6 + \frac{5}{x} + \frac{9}{x^2}}$$

Aplicando límite a cada elemento de la función (en el numerador):

$$\lim_{x \to \infty} (2) = 2 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{7}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{6}{x^2} = 0$$

Aplicando límite a cada elemento de la función (en el denominador):

$$\lim_{x \to \infty} (6) = 6 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

Reemplazando en la fracción:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2}}{6 + \frac{5}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{6 + 0 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}$$

Expresando la función de otra manera:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}$$

Dividiendo numerador y denominador entre x^3 y simplificando:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}$$

Aplicando límite:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{1+0} = 1$$

Límites con Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Para resolver este tipo de indeterminaciones es necesario aplicar ciertas tecnicas algebraicas, como factorización, conjugadas, etc...

Ejemplos

1. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-27}{x-3}$$

Aplicando diferencia de cubos y simplificando $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-3)(x^2+x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 0} x^2+x+9$$

Reemplazando:

$$\lim_{x\to 0} x^2+x+9 = 0+0+9 = 9$$

2. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-5x}{3x^2+7x}$$

Factorizando y simplificando x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x^2+3x-5)}{x(3x+7)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-5}{3x+7}$$

Reemplazando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-5}{3x+7} = \frac{0+0-5}{0+7} = -\frac{5}{7}$$

3.5.3. Límites de Funciones Irracionales

Son funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$$

Donde $R(x)$ es una función polinómica o una función racional y n un número natural mayor que 1.

Math Quick Reference Card - Tipos de Funciones

Se presentan 2 casos:

1. Cuando x tiende a c y todos los subradicales tienen la misma forma.

2. Cuando x tiende a c y los subradicales son diferentes.

Ejemplos

1. Hallar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

Primeramente procederemos a realizar un cambio de variable, elevando la variable a la que asignamos el cambio el Mínimo Común Múltiplo[1] de los radicales del numerador y denominador:

$$1 + x = y^6$$

Ahora tenemos a que valor tiende y cuando x tiende a 0:

$$y^6 = 1 + x = 1 + 0 = 1$$

$$y^6 = 1$$

$$\sqrt[6]{y^6} = \sqrt[6]{1}$$

$$y = 1$$

Vemos que y tiende a 1, ahora podemos cambiar nuestra expresión original:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \Rightarrow \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y^6}-1}{\sqrt[3]{y^6}-1} = \lim_{y \to 1} \frac{2}{2} y^3 - 1y^2 - 1$$

Ahora con este nuevo límite podemos aplicar diferencia de cubos en el numerador y diferencia de cuadrados en el denominador:

$$\lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}$$

3.5.4. Límites Trigonométricos

Para estos límites se tienen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$ **2.** $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$

Y los siguientes límites característicos:

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ **4.** $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

Además de las identidades trigonometricas *(ver tablas al final del libro).*

[1]El menor número natural que es múltiplo común de todos los números de un conjunto.

Ejemplo

1. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Multiplicando por su conjugada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x[1+\cos(x)]}$$

Recordando que $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$ y despejando, tenemos: $\operatorname{sen}^2(x) = 1-\cos^2(x)$; finalmente reemplazando en la función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x[1+\cos(x)]} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$$

Si aplicamos límite de un producto de funciones tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$$

En el anterior paso, el límite de la izquierda es un límite característico conocido (**4.**), finalmente, reemplazamos en cada límite:

$$1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} = \frac{0}{1+1} = 0$$

3.5.5. Límites Exponenciales

1. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ **2.** $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Límites con la indeterminación 1^∞

Se resuelven llevando la función a la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} [f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Ejemplo

1. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} [\cos(x)]^{\frac{1}{x}}$$

Si aplicamos límite a cada parte y analizamos vemos que la indeterminación queda 1^∞. Ahora tenemos:

Base: $\cos(x)$ **Exponente:** $\frac{1}{x}$

Pasando a la forma anterior, para resolver el límite, tenemos:

$$e^{\lim_{x\to 0} [\cos(x)-1]\cdot\frac{1}{x}}$$

Si multiplicamos tendremos:

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}}$$

Si recordamos en el anterior punto (**3.4.4.**) sabemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Tendremos:

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}} = e^0 = 1$$

3.5.6. Límites Logarítmicos

Si $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ entonces: $\lim_{x\to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x\to a} f(x)]$

Ejemplo

1. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Si cambiamos un poco como se ve la función, podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$$

Aplicando propiedades de logaritmos tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$

Aplicando limites logarítmicos::

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Recordando el siguiente límite característico:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Finalmente:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln(e) = 1$$

3.6. Continuidad

Informalmente decimos que una función es continua en un intervalo su su gráfica puede ser hecha en el intervalo sin levantar el lápiz del papel.

Formalmente

Una función es continua en un punto c sí:

(I.) $F(c)$ está definida (existe).

(II.) $\lim\limits_{x\to c} F(x)$ existe.

(III.) $\lim\limits_{x\to c} F(x) \; = F(x)$

Si una de condiciones falla, se dice que la función es discontínua en ese punto. Una función es contínua en un intervalo si ésta es contínua en cada punto del intervalo. Para entender mejor este punto veamos las siguientes gráficas:

La función de la izquierda corresponde a $f(x) = x^2$, si intentáramos dibujarla con el lápiz no habría problemas, en ese caso esta función es continua, por el otro lado la función de la derecha corresponde a $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si intentáramos dibujarla con el lápiz de izquierda a derecha tenemos que en el centro no es posible graficar y tendríamos que levantar el lápiz para continuar es decir, la función es discontinua.

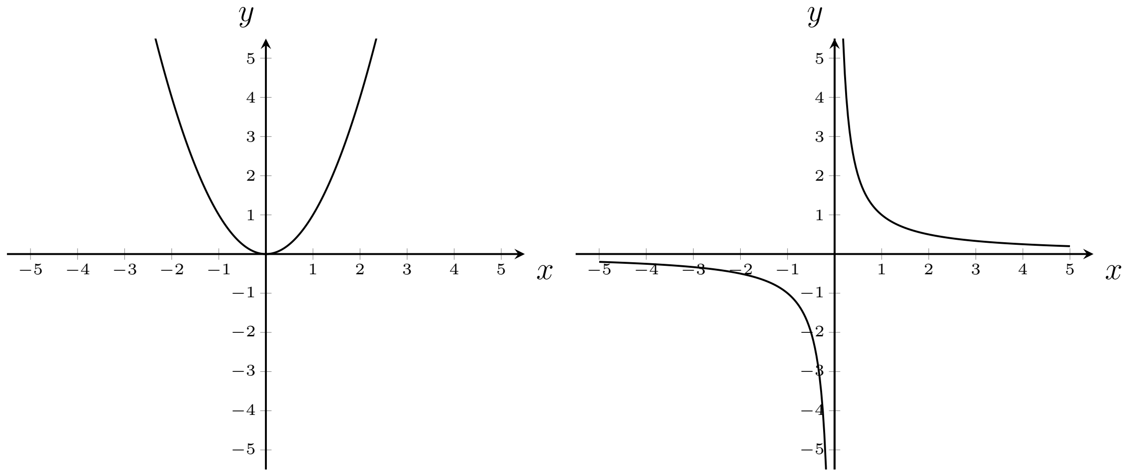


Figura 3.1: Ejemplos de Continuidad

Ejemplos

1. Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 1$:

$$f(x) = 3x^2 - 7$$

Veamos por partes, de acuerdo a los anteriores puntos.

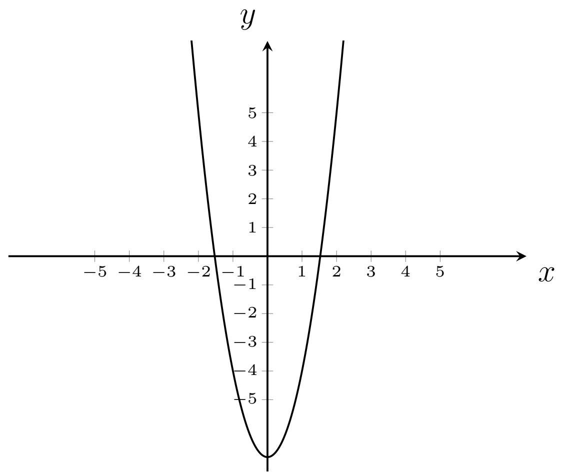
(I.) $f(1) = -4$

(II.) $\lim\limits_{x\to 1} f(1) = -4$

(III.) $\lim\limits_{x\to 1} f(1) = f(1)$

Con todo esto, podemos decir que la función f es contínua en $x = 1$.

Gráfica de la función



2. Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

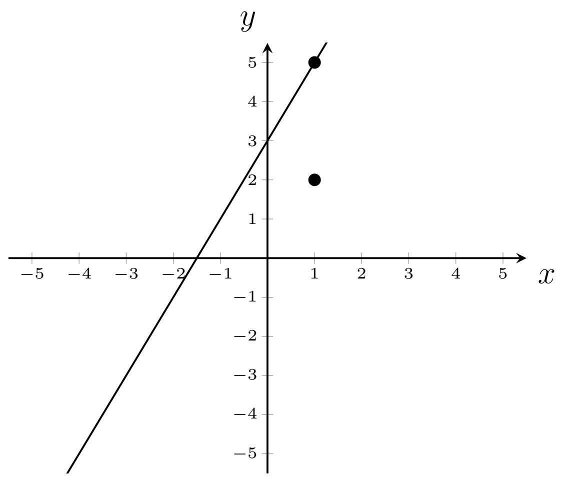
Realizando el análisis de la función para verificar su continuidad:

(I.) $f(1) = 2$

(II.) $\lim_{x \to 1} f(1) = 5$

(III.) $\lim_{x \to 1} f(1) \neq f(1)$

Gráfica de la función



En esta gráfica, el punto $(1, 2)$ forma parte de la función, el punto $(1, 5)$ no; esto hace que si quisiéramos graficar la función con un lápiz, tendríamos que levantarlo en $(1, 5)$, bajar, dibujar el punto $(1, 2)$ y luego seguir arriba volviendo a levantar el lápiz. Haciendo que esta función sea discontinua.

3. Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 2$:

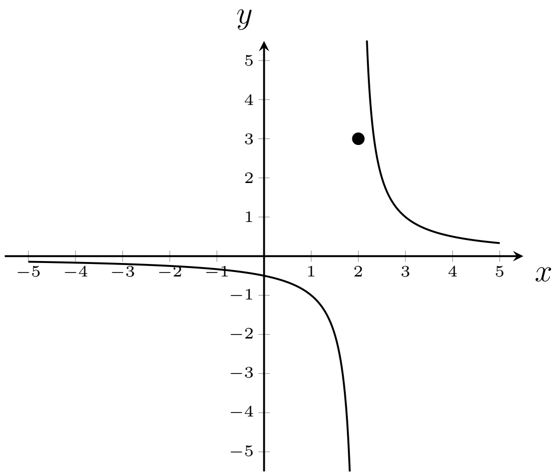
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Realizando el analisis de la función:

(I.) $f(2) = 3$

(II.) $\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$

Sabiendo que la función no tiene límite podemos decir que no es contínua en el punto $x = 2$.



Gráfica de la función

3.6.1. Clasificación de Discontinuidades

a) Removibles: Si el límite existe

b) Esenciales: Si el límite no existe.

Ejemplos

Del anterior ejemplo, tenemos el ejemplo **2.** que posee una discontinuidad removible ya que si redefinimos la función, tendremos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

Ahora si analizamos, según los criterios **(I.)**, **(II.)** y **(III.)** tendremos que la función es contínua, por lo cual ya removimos la discontinuidad. Es decir, la función tiene una discontinuidad **removible.**

Si tomamos la función del punto **3.** podríamos intentar redefinir la función, pero vemos que para el punto $x = 2$ la función se dispara hacia $-\infty$ y ∞ lo cual hace nunca puedan coincidir en algún punto. A esta función por lo tanto se la clasifica con una discontinuidad **esencial.**

3.7. Asíntotas

Una función tiene una asíntota vertical en $x = a$ si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k$$

Ejemplos

1. Hallar las asíntotas verticales y horizontales (si es que existieran):

$$f(x) = \frac{2x^2+4x}{x^2-x-6}$$

Asíntotas Verticales

Primeramente veremos los valores que pueden causar indeterminaciones, y estos serán candidatos a ser las asíntotas. Para este ejemplo, debemos hallar los valores para los cuales el denominador sea cero, para ello, factorizamos:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$\text{Tendremos } x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$$

Para cada candidato se aplica en el límite de la función:

Para x_1:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2+4x}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+4x}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$

Por lo tanto diremos que en $x = 3$ existe una asíntota vertical.

Para x_2 (Partiremos desde la cuarta igualdad):

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x-3} = -\frac{4}{5}$$

Para este caso diremos que en $x = -2$ existe un *hueco.*

Asíntotas Horizontales

Para hallar las asíntotas horizontales, es necesario hallar el límite de la función cuando esta tiende al infinito:

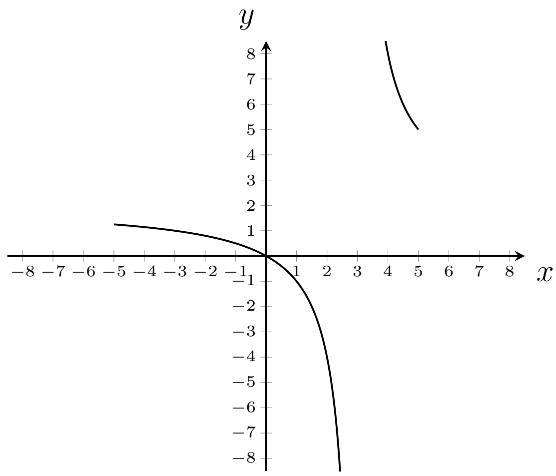
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2x^2+4x}{x^2-x-6}$$

Procedemos a dividir entre x^2 para deshacer la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = 2$$

Por lo tanto, la función f tiene asíntota horizontal en $y = 2$.

Gráfica de la función



Capítulo 4

Derivadas

4.1. Introducción

Sirve para medir en una situación límite, el efecto de una pequeña variación de la variable independiente sobre la variable dependiente.

4.1.1. Definición

La derivada de una función f respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en el punto a es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4.2. Regla de la Cadena

Teorema

Si $y = f(x)$, $u = g(x)$, y las derivadas $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ existen ambas, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Cálculo con Geometría Analítica - Segunda Edición, Earl Swokowski - Capítulo 3

Ejemplos

1. Hallar la derivada de la siguiente función: $y = \ln(senx)$.

Primeramente veremos su diagrama de dependencias:

$$y = \ln(u)$$

$$u = senx$$

Esto quiere decir que tenemos $x \to u \to y$. En otras palabras decimos que x depende de u y u depende de y. A continuación tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

4.3. Derivabilidad y Continuidad

Teorema

Si $f(x)$ es derivable en $x = c$ entonces $f(x)$ es continua en $x = c$. Si $f(x)$ es continua, no implica que se pueda derivar:

$$Continuidad \not\Longrightarrow Derivada$$

$$Derivabilidad \Longrightarrow Continuidads$$

Ejemplo

1. Sea: $f(x) = 3x^2 - 7$ ¿Es $f(x)$ continua en $x = 2$?

$f'(x) = 6x - 0 = 6x$
$f'(2) = 12$

Entonces $f(x) = 3x^2 - 7$ es continua en $x = 2$.

4.4. Derivadas Laterales

Definición

Sea $f(x)$ una función, la derivada lateral **derecha** se define por:

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sea $f(x)$ una función, la derivada lateral **izquierda** se define por:

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

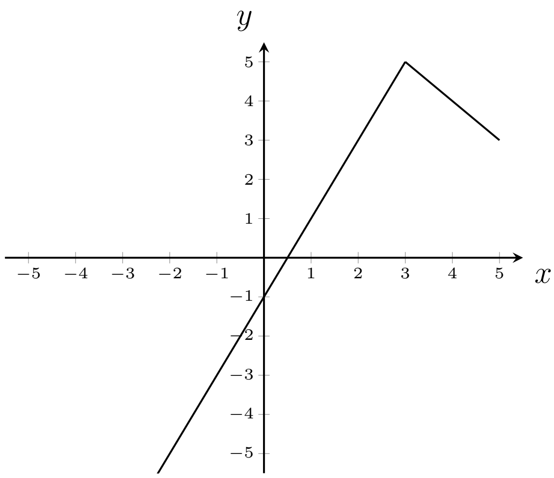
(Para ambas derivadas, siempre que el límite exista.)

Ejemplos

1. Para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Graficar:



b) ¿Es f continua en $x = 3$?

Para este inciso realizamos el siguiente análisis (recordar punto **3.6.**):

(I.) $f(3) = 5$

(II.) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

(III.) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$\therefore$ Diremos que f es continua en $x = 3$.

c) Hallar $f_-{}'(3)$

$$f_-{}'(3) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2(3+h) - 1 - 5}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{6 + 2h - 6}{h} = 2$$

d) Hallar $f_+{}'(3)$

$$f_+{}'(3) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{8 - 3 - h - 5}{h} = -1$$

e) Hallar $f'(3)$

De los incisos **c)** y **d)** podemos decir que:

$$f_-{}'(3) \neq f_+{}'(3)$$

Por lo tanto:

$$f'(3) = \nexists$$

4.5. Derivadas de Funciones Inversas

Ejemplos

1. Sea $y = \sqrt[3]{x^2}$, hallar $\dfrac{dx}{dy}$.

4.6. Derivadas de Funciones Implícitas

Si está dada de forma implícita es decir $f(x,y)=0$ entonces se puede derivar haciendo uso adecuado de la regla de la cadena.

Ejemplos

1. Hallar la derivada de la siguiente función: $f(x,y)=x^2+y^2-9=0$

Solución:

Para hallar ésta derivada respecto a y, procedemos a derivar como lo haríamos normalmente, sólo que cuando tengamos y, derivamos y multiplicamos por $\frac{dy}{dx}$:

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

Despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

4.7. Derivadas Sucesivas o de Orden Superior

Decimos que una función es 2 veces derivable en un punto dado ssi[1] la función derivada es derivable en dicho punto, obteniendose la segunda derivada y así sucesivamente, las definiciones y notaciones están dadas por:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

$$f'''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$$

Generalizando

$$f^n(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$$

Ejemplos

[1]ssi = sí y solo sí

4.8. Derivación Logarítmica

4.9. Aplicación de la Derivada

4.9.1. Valores Extremos de Funciones

Definición

Si una función f está definida en un intervalo I, y c es un punto de I, entonces:

(I.) $f(c)$ es un valor *Máximo* de f en I, ssi $f(x) \leq f(c)$, para todo x de I.

(I.) $f(c)$ es un valor *Mínimo* de f en I, ssi $f(x) \geq f(c)$, para todo x de I.

Ejemplo

1. Sea la función: $f(x) = x^2$. Hallar los valores Máximo y Mínimo en:

a) $(-\infty, \infty)$

b) $[0, 2]$

c) $(0, 2]$

d) $(0, 2)$

4.9.2. Teorema del Valor Extremo

Teorema

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f tiene ambos, *Máximo y Mínimo* en el intervalo.

4.9.3. Valores Extremos Locales (Relativos)

Definición

Sea c un punto en el dominio f:

(I.) $f(c)$ es Mínimo Local de f ssi existe un intervalo (a, b) que contiene a c tal que:

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo c del intervalo (a, b).

(II.) $f(c)$ es un Máximo Local de f ssi existe un intervalo (a, b) que contiene a c tal que:

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo c del intervalo (a, b).

4.9.4. Puntos Críticos

Teorema

Si una función tiene un extremo local en c, entonces $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe.

Definición

Un número c en el dominio de una función f es un **Punto Crítico** de f si:

$$f'(c) = 0 \text{ ó } f'(c) \text{ no existe}$$

4.9.5. Procedimiento para encontrar los Máximos y Mínimos Absolutos

(I.) Calcular $f(c)$ para cada punto crítico.

(II.) Calcular $f(a)$ y $f(b)$

Los valores *Máximo* y *Mínimo* de f en $[a, b]$ serán respectivamente el mayor y el menor de estos valores de la función.

4.9.6. Teorema de Rolle

Si una función f es continua $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto c de (a, b) tal que:

$$f'(c) = 0$$

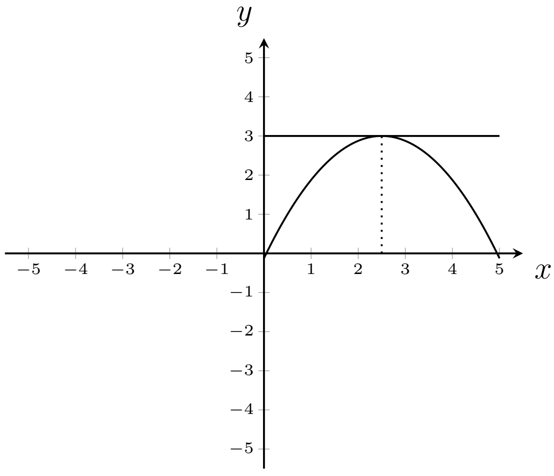


Figura 4.1: Gráfica del Teorema de Rolle

4.9.7. Teorema del Valor Medio

Si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe un punto c de (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(b)}{b - a}$$

Nota: Una notación equivalente: $\alpha y = f'(c)\alpha x$

4.9.8. Crecimiento y Decrecimiento

Definición

Si una función f está definida en un intervalo I, entonces:

(I.) f es **Creciente** en I si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$

(II.) f es **Decreciente** en I si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$

(III.) f es **Constante** en I si: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \forall x_1, x_2 \in I$

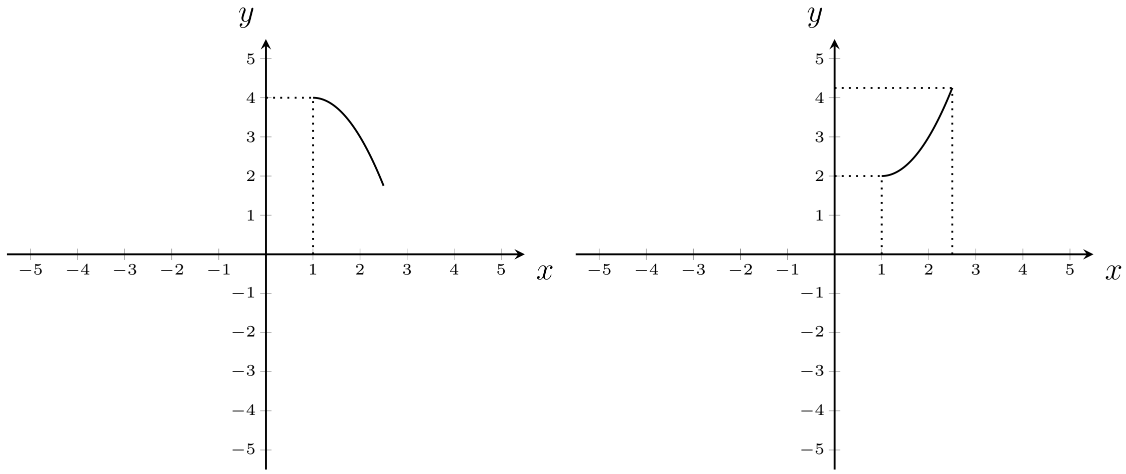


Figura 4.2: Explicación Gráfica de Crecimiento y Decrecimiento

4.9.9. Criterio de la Primera Derivada

Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces:

(I.) Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b) entonces f es **Creciente** en $[a, b]$.

(II.) Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b) entonces f es **Decreciente** en $[a, b]$.

4.9.10. Criterio de la primera Derivada para Máximos y Mínimos Locales

Supongamos que c es un punto crítico de f y (a, b) es un intervalo abierto que contiene a c, supongamos también que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) excepto posiblemente en c, entonces:

(I.) Si $f'(x) > 0$ para todo $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para todo $c < x < b$ entonces:

$f(c)$ es un **Máximo Local** en f

(II.) Si $f'(x) < 0$ para todo $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para todo $c < x < b$ entonces:

$f(c)$ es un **Mínimo Local** en f

(III.) Si $f'(x) > 0$ (ó $f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$ excepto posiblemente en $x = c$ entonces:

$f(c)$ **no** es un extremo local de f

4.9.11. Criterio de la Segunda Derivada

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c y supongamos que $f'(c) = 0$ entonces:

(I.) Si $f''(c) < 0$ entonces f tiene un Máximo Local en c.

(II.) Si $f''(c) > 0$ entonces f tiene un Mínimo Local en c.

4.9.12. Concavidad

Definición

Sea f derivable enn un punto c:

(I.) La gráfica f es cóncava hacia arriba en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que la gráfica de f se encuentra arriba de la recta tangente en P.

(II.) La gráfica de f es cóncava hacia abajo en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que en él la gráfica de f se encuentra abajo de la recta tangente en P.

Prueba de Concavidad

Si una función f es derivable en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c entonces la gráfica tiene:

(I.) Concavidad hacia arriba si $f''(x) > 0$

(II.) Concavidad hacia abajo si $f''(x) < 0$

4.9.13. Punto de Inflexión

Definición

Un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica de una función es *Punto de Inflexión* si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que una de las siguientes afirmaciones se cumple:

(I.) $f''(x) > 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ si $c < x < b$

(II.) $f''(x) < 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ si $c < x < b$

Procedimiento

Para localizar los puntos de inflexión de una función cuya segunda derivada es continua, primero encontramos todos los puntos x tales que:

$$f''(x) = 0$$

Después investigamos si cada uno de estos puntos es la abscisa de un *Punto de Inflexión.*

4.10. Regla de L'Hopital

Supongamos que las funciones f y g son derivables en el intervalo (a, b) excepto posiblemente en c, y si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ en $x = c$ entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Capítulo 5

Integrales

5.1. Diferenciales

5.1.1. Álgebra de Diferenciales

5.2. La Integral Indefinida

5.2.1. Método de Integración por Partes

5.2.2. Método de Fracciones Parciales

5.3. Integral Definida

5.3.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una antiderivada cualquiera de $f(x)$ (es decir $F'(x) = f(x)$) entonces:

Capítulo 6

Anexos

Bibliografía

[1] Víctor Chungara Castro. *Cálculo I.* Editorial Leonardo, 2016.

[2] Richard Johnsonbaugh. *Matemáticas Discretas, Sexta Edición.* Pearson, Prentice Hall, 2005.

[3] Armando Rojo. *Álgebra I.* Librería-Editorial El Ateneo, 1996.

[4] Louis Leithold. *El Cálculo, Séptima Edición.* Oxford University Press, 1998.

[5] Gilbert Strang and Edwin "Jed"Herman. *Calculus Volume 1 OpenStax^{TM}*, 2017.

[6] James Stewart. *Calculus, Early Trascendentals Eighth Edition.* Cengage Learning, 2014.

[7] Earl W. Swokowski. *Cálculo con Geometría Analítica, Segunda Edición.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.