Transformada de Laplace

Leonardo H. Añez Vladimirovna

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

13 de junio de 2018

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT207 (Ecuaciones Diferenciales)`, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Definición

Sea $F(t)$ definida para $t > 0$. Entonces la Integral:

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)dt$$

Es la *Transformada de Laplace* siempre que la Integral Converja. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Se tiene $F(t) = 1$, hallar $\mathscr{L}\{F(t)\}$, comenzamos reemplazando en la integral:

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1dt$$

Expresamos la integral en forma de límite:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt$$

Realizamos la Integral:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \left[\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Bigg|_0^b \right]$$

Evaluando la Integral en b y 0:

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(e^{-sb} - e^0\right) \right] = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right]$$

Aplicamos el límite:

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right] = -\frac{1}{s} \cdot (0-1) = \boxed{\frac{1}{s}}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}\{1\} = f(s) = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace de algunas Funciones Elementales

De igual manera que el ejemplo del anterior punto, estas Transformadas se pueden obtener:

$F(t)$	$\mathscr{L}\{1\} = f(s)$
1) 1	$\frac{1}{s}$; $s > 0$
2) t	$\frac{1}{s^2}$; $s > 0$
3) t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$
4) e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5) $sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6) $cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7) $senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$; $s > \lvert a \rvert$
8) $cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$; $s > \lvert a \rvert$

Propiedades

Teorema

Si C_1, C_2 son constantes y $F_1(t), F_2(t)$ funciones con transformadas de Laplace: $f_1(s), f_2(s)$ respectivamente, entonces:

$$\mathscr{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1\mathscr{L}\{F_1(t)\} + C_2\mathscr{L}\{F_2(t)\}$$

Esto es:

$$\mathscr{L}\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\} = C_1f_1(s) + C_2f_2(s)$$

Transformadas de Laplace de la Derivadas

T.1.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = s \cdot f(s) - F(0)$$

Asumiendo:

$$e^{-st} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty$$

T.2.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F''(t)\} = s^2 \cdot f(s) - s \cdot F(0) - F'(0)$$

T.3.

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathscr{L}\{F'''(t)\} = s^3 \cdot f(s) - s^2 \cdot F(0) - s \cdot F'(0) - F''(0)$$

Generalizando

$$\mathscr{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \cdot f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - s \cdot F^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$