Apuntes de Probabilidad y Estadística II

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

23 de agosto de 2018

[1]Correo Electrónico: toborochi98@outlook.com

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT305 (Probabilidad y Estadística II)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria x (desde ahora denotada por **v.a.**) es una función definida sobre el espacio muestral S con valores en $\mathbb{R}$ que a cada elemento de S (Punto muestral) hace corresponder un número real $x = X$.

$$x = X(w) \in Rec_X \subseteq \mathbb{R}$$

Gráficamente

Notación Conjuntista

$$X = \{(w, x)\ w \in S, x = X(w) \in \mathbb{R}\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$

Donde:

- S: Conjunto Partida (Espacio Muestral).
- $\mathbb{R}$: Conjunto de llegada.
- w: Elemento de S (Punto Muestral).
- x: Valor de la **v.a.** X.
- Rec_X: Recorrido de X.
- X: Función **v.a.** (Conjunto de Pares Ordenados).

Notaciones

Las **v.a.** se denotan con letras mayúsculas tales como X, Y o Z, y los valores correspondientes con letras minúsculas.

1.1. Clasificación de Variables Aleatorias

- **Discreta:** Cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores:

$$X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ discreta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto Finito de Valores} \\ \text{Conjunto Infinito Numerable de Valores} \end{cases}$$

- **Contínua:** Es aquella cuyo recorrido es conjunto finito no numerable de valores, puede tomar cualquier valor en un intervalo o conjunto.

⧫ En general las **v.a.** *discretas* representan datos que provienen del *conteo* de número de elementos. Pueden ser número de titulados, número de estudiantes, etc. Mientras que las **v.a.** *contínuas* representan mediciones, como longitud, capacidad,etc.

1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria

También llamada función de cuantía o función de masa de probabilidad de una **v.a.**.

Se denomina función de probabilidad de una **v.a.** discreta X a una función p o f, cuyo valor es $p(x)$ o $P(X = x)0$ ya que a cada valor distinto de la **v.a.** discreta X hace corresponder en un número entre los valores $[0, 1]$ que es su probabilidad, de ahí el nombre de función de cuantía o función de probabilidad. Estos valores satisfacen las siguientes condiciones:

1. $P(x) \geq 0 \ \ ; \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\sum_{x_i \in Rec_X} p(x_i) = 1$
   - Si $Rec_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ entonces la condición **(II)** es: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
   - Si $Rec_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ entonces la condición **(II)** es: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Si A es un evento en el recorrido de la **v.a.** discreta X entonces la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \sum P(X = x) = \sum p(x)$$

Nota:

$$P(X = x) \begin{cases} p(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La función de probabilidad de una **v.a.** discreta X se puede expresar por:

- **Un Conjunto:**

$$p = \{(x, P(X))/x \in D_p\}$$

- **Una Tabla:**

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\ldots$	$p(x_n)$

- **Una Gráfica:**

1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)

El valor de la **FDA** de una **v.a.** discreta X, que es $F(x)$, viene dada por la sumatoria de las probabilidades, desde un valor mínimo t hasta un valor específico x; esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.1. Representación Gráfica

Valores $F(x)$ aumentan en *saltos*, presentando entonces la forma de una escalera:

1.3.2. Caso Continuo

Función de Densidad

f es función densidad, si $f(x)$ cumple las siguientes condiciones:

(I) $f(x) \geq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(III) $\displaystyle p(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

FDA

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1.3.3. Propiedades de la FDA

Caso Discreto

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1), \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ F(\llbracket a \rrbracket), \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
9. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = x)$
10. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Caso Continuo

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
9. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

1.4. Esperanza Matemática

Sea X una **v.a.** con función de probabilidad f definida por $f(x)$. La *esperanza matemática* de X, denotada por $E(x), \mu$ ó μ_x; está dada por: