Apuntes de Métodos Numéricos

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

7 de septiembre de 2018

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Agradecimiento a marmot

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT205 (Métodos Numéricos)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Aproximaciones y Errores

1.1. Errores

- **Errores de Redondeo:** Se debe a que el computador solo puede representar cantidades con un *número finito* de dígitos.
- **Errores de Truncamiento:** Representa la diferencia entre la formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico.
- **Cifras Significativas:** Se refiere a la confiabilidad de un valor numérico. Es el número de dígitos mas un dígito estimado que se puede usar con confianza.

  ⧫ Los ceros no siempre son cifras significativas ya que pueden usarse solo para ubicar el punto decimal.

Ejemplo:

Los siguientes números tienen cuatro cifras significativas y en notación científica se escriben de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
0{,}00001845 &= 1{,}845 \times 10^{-5} \\
0{,}0001845 &= 1{,}845 \times 10^{-4} \\
0{,}001845 &= 1{,}845 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Las cifras significativas, se cuentan de *izquierda a derecha* a partir del primer dígito distinto de cero.

1.2. Exactitud y Precisión

- **Exactitud:** Se refiere a la aproximación de un número o medida al valor verdadero que se supone presenta.
- **Precisión:** Se refiere a:
  - Al número de cifras significativas que representa una cantidad.
  - La extensión en las lecturas repetidas, de un instrumento que mide alguna propiedad física.

1.3. Definición de Error

1.3.1. Error Verdadero (E_v)

Es la diferencia simple entre el valor Verdadero (V_v) y el Valor Aproximado (V_a):

$$E_v = V_v - V_a$$

Esta definición de error no toma en consideración la magnitud del valor que se está evaluando.

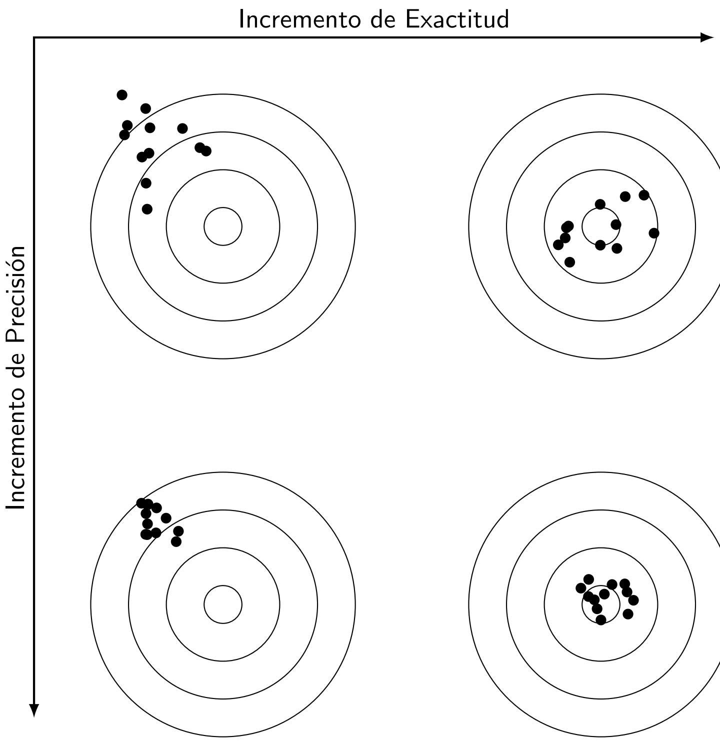

Figura 1.1: Relación entre Exactitud y Precisión.

1.3.2. Error Relativo Verdaderos

Para introducir la magnitud del valor que ese está midiendo se normaliza el error (E_r) al valor verdadero V_v:

$$E_r = \frac{E_v}{V_v} \cdot 100\,\% = \frac{V_v - V_a}{V_v} \cdot 100\,\%$$

En aplicaciones reales el valor verdadero (V_v) únicamente se conocerá cuando se trate de funciones que tienen solución analítica. En general, el valor verdadero no se lo conoce. Se utiliza para ello la mejor estimación posible.

Los métodos numéricos que utilizan sistemas iterativos, el error se normaliza, respecto de los valores aproximados. De esta manera, el error relativo aproximado se calcula por:

$$E_a = \frac{V_{actual} - V_{anterior}}{V_{actual}} \cdot 100\,\%$$

donde el V_{actual} representa el último valor calculado y $V_{anterior}$ es el valor anterior en dos iteraciones sucesivas.

El signo del error en general, no es significativo, siendo de mayor importancia acotar el valor absoluto del error $|E_a|$ menor a una cierta tolerancia. E_s, que en términos de la cantidad n de cifras significativas utilizadas en el cálculo del error es:

$$E_s = (0{,}5 \cdot 10^{2-n})\,\%$$

Donde:

- n : Número de Cifras Significativas

Esta formula garantiza que el valor calculado tendrá n cifras significativas iguales al valor verdadero.

1.4. Series

Las series son sucesiones de términos (en general infinitos) que se utilizan para representar funciones. El uso de series facilita el tratamiento de aquellas expresiones que son muy complicadas.

Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!}$$

Donde:

- $f^{(n)}(a)$: Derivada n-ésima de $f(x)$ evaluada en a.
- $n!$: Factorial de n.
- a : Entorno reducido de x.

Serie de MacLaurin

Es un caso particular de la serie de Taylor para $a = 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot (x)^n}{n!}$$

1.5. Reglas de Redondeo

1. En el redondeo se conservan las cifras significativas ,y el resto se descarta. El último dígito que se conserva se aumenta en una si el primer dígito descartado *es mayor de 5*. De otra manera se deja igual. Si el primer dígito descartado *es 5* o es *5 seguido de ceros*, entonces el último dígito retenido se incrementa en uno solo si es impar.

2. En la suma y en la resta, el redondeo se lleva a cabo de forma tal que el último dígito retenido en la respuesta corresponda con el último dígito mas significativo de los números que se están sumando o restando.
   Observar que un dígito en la columna de las centésimas es mas significativo que un número en la columna de las milésimas.

3. Para la multiplicación y para la división el redondeo es tal que la cantidad de cifras significativas del resultado es igual al número mas pequeño de cifras significativas que contiene la cantidad de la operación.

4. Para combinaciones de operaciones aritméticas, existen dos cosas generales. Se puede sumar o restar el resultado de las multiplicaciones o de las divisiones.

$$\begin{pmatrix} \text{Multiplicación o} \\ \text{División} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{Multiplicación o} \\ \text{División} \end{pmatrix}$$

   o también se pueden multiplicar o dividir los resultados de las sumas y restas.

$$\begin{pmatrix} \text{Suma o} \\ \text{Resta} \end{pmatrix} \times / \div \begin{pmatrix} \text{Suma o} \\ \text{Resta} \end{pmatrix}$$

   en ambos casos se ejecutan las operaciones entre paréntesis y el resultado es redondeado antes de proceder con otra operación.

Capítulo 2

Raíces de Ecuaciones

Se entiende por *raíz* de una ecuación $f(x)$, al valor de x que satisface:

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) = p$

♦ ξ : Letra griega (Xi) utilizada para representar el valor verdadero *(exacto)* de la raíz.

El caso mas conocido de cálculo de raíces en la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio de segundo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para polinomios de mayor grado no existen fórmulas sencillas tampoco para las funciones trascendentes (logaritmos, trigonométricas, exponenciales o para combinaciones de todas ellas).

Por ello se recurre a los métodos numéricos donde se verán algoritmos generales para resolver este tipo de problemas.

2.1. Métodos de Intervalo

2.1.1. Método Gráfico

Este método nos da una aproximación inicial a la de las raíces de $f(x)$, consiste en representar la función en una gráfica en el plano cartesiano. Para ello se generan pares ordenados $(x, f(x))$ que representan puntos en el plano y que al unirlos con una curva apropiada se obtiene el gráfico de $f(x)$.

Teorema de Bolzano

Se dice que $f(x)$ tiene por lo menos una raíz ξ en el intervalo (a, b) si se cumple que:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

2.1.2. Método de Bisección

Consiste en dividir en dos partes un intervalo. Para una función $f(x)$ conocida, y el intervalo (a, b) que cumple con el *Teorema de Bolzano.*

El método consiste en aproximarse a la raíz ξ subdividiendo el intervalo (a, b) en dos.

Método de Bisección

Algoritmo 1: Método de Bisección

Con: $a_0 = a$, $b_0 = b$

para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**

  Calcular: $\boxed{x_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}}$

  si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ **entonces**

    $a_{i+1} = a_i$

    $b_{i+1} = x_{i+1}$

  si no, si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ **entonces**

    $a_{i+1} = x_{i+1}$

    $b_{i+1} = b_i$

2.1.3. Método de Regla Falsa

Este método parte del supuesto que la raíz ξ está mas próxima del extremo del intervalo (a, b) donde $|f(a)|$ o $|f(b)|$ es menor.

Por ello en vez de calcular el valor medio de a y b como aproximación a la raíz ξ se calculará la media ponderada. Se debe entonces incorporar los valores $f(a)$ y $f(b)$ en la ecuación de iteración.

Para deducir la ecuación del método de la Regla Falsa, se traza inicialmente una recta uniendo los extremos de $f(a)$ y $f(b)$. Donde esta recta intersecta al eje x (falsa posición) será la primera aproximación a la raíz x_1:

$$x_1 = a + \triangle_{0x}$$

Por relación de Triángulos:

$$\frac{\triangle_{0x}}{-f(a)} = \frac{b-a}{f(b) + [-f(a)]}$$

Método de la Regla Falsa

Algoritmo 2: Método de la Regla Falsa

Con: $a_0 = a$, $b_0 = b$

para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**

  Calcular: $\boxed{x_{i+1} = \dfrac{a_i \cdot f(b_i) - b_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$

  si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ **entonces**

    $a_{i+1} = a_i$

    $b_{i+1} = x_{i+1}$

    $f(b_{i+1}) = f(x_{i+1})$

  si no, si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ **entonces**

    $a_{i+1} = x_{i+1}$

    $b_{i+1} = b_i$

    $f(a_{i+1}) = f(x_{i+1})$

2.1.4. Método de Regla Falsa Mejorada

El *Método de la Regla Falsa* tiene el defecto que se aproxima a la raíz ξ por uno de los lados del intervalo (a, b) dejando el otro lado sin información.

Para superar este defecto, lo que se hace es introducir un nuevo condicional dentro de los anteriores:

Si $f(x) \cdot f(x_{i+1}) > 0$, entonces se divide a la mitad el valor de $f(a_i)$ o $f(b_i)$ según corresponda.

Este simple artificio hace que el método se aproxime a la raíz por ambos lados del intervalo (a, b).

Método de la Regla Falsa Mejorada

Algoritmo 3: Método de la Regla Falsa Mejorada

Con: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $F = f(a)$, $G = f(b)$, $x_0 = a$
para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**
  Calcular: $\boxed{x_{i+1} = \dfrac{a_i \cdot G - b_i \cdot F}{G - F}}$
  si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ **entonces**
    $a_{i+1} = a_i$
    $b_{i+1} = x_{i+1}$
    $G = f(x_{i+1})$
    si $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ **entonces**
      $F = F \div 2$
  si no, si $f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ **entonces**
    $a_{i+1} = x_{i+1}$
    $b_{i+1} = b_i$
    $F = f(x_{i+1})$
    si $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ **entonces**
      $G = G \div 2$

2.2. Métodos Abiertos

Estos métodos no precisan de intervalo (a, b) inicial que incluya a la raíz ξ de $f(x)$, solo valores iniciales cercanos a la raíz. Los métodos abiertos tienen mayor velocidad de convergencia y sus algoritmos son más simples presentan la desventaja de que no siempre son convergentes.

2.2.1. Método de la Secante

Este método se inicia con dos puntos x_{-1} y x_0, cercanos a la raíz ξ, pero no necesariamente la incluyen. Utiliza la misma formula que la *Regla Falsa* de manera directa sin averiguar de que lado queda la raíz en cada iteración.

Método de la Secante

Algoritmo 4: Método de la Secante

para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**
  Calcular: $\boxed{x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$

2.2.2. Método de Newton-Raphson

Este método nos permite resolver problemas del tipo $f(x) = P$ sin la necesidad de transformar la ecuación $f(x)$. Se necesita un punto de partida x_0 y las aproximaciones se realizan trazando tangentes a $f(x)$. La primera aproximación, consiste en trazar una tangente a $f(x)$ en $x = x_0$ hasta intersectar P. Proyectando este punto sobre el eje de las x se obtiene:

$$x_1 = x_0 + \triangle_{0x}$$

El incremento $\triangle_{0x}$ se obtiene por:

$$\tan(\alpha_0) = \frac{P - f(x_0)}{\triangle_{0x}}$$

Por definición de derivada; $\tan(\alpha_0) = f'(x_0)$

$$\triangle_{0x} = \frac{P - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{P - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En la segunda aproximación se traza nuevamente una tangente a $f(x)$ ahora en $x = x$, hasta intersectar P, obteniendo de manera análoga:

$$x_2 = x_1 + \frac{P - f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Generalizando este proceso:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{P - f(x_i)}{f'(x_i)}$$

En el caso de que $P = 0$ se recae en problemas del tipo $f(x) = 0$ y la formula se transforma a:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

y se denomina *Formula de Newton* únicamente.

Método de Newton-Raphson

Algoritmo 5: Método de Newton-Raphson

para $i = 0, 1, \ldots,$ *hasta que se satisfaga* **hacer**

  Calcular: $\boxed{x_{i+1} = x_i + \frac{P - f(x_i)}{f'(x_i)}}$

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones

Capítulo 4

Interpolación Polinomial

Capítulo 5

Derivación e Integración Numérica

Bibliografía

[1] Luis Vásquez, Salvador Jiménez, Carlos Aguirre, Pedro José Pascual, *Métodos Numéricos para la Física y la Ingeniería*, McGrawHill, 2009.