Fórmulas de Probabilidad y Estadística II (MAT302)

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones

Universidad Autónoma Gabriel René Moreno

Leonardo H. Añez Vladimirovna

toborochi98@outlook.com

3 de marzo de 2019

1. Variables Aleatorias

1.1. Definiciones

1.1.1. Discretas

Notación: $P(A), P(X = x), f(x)$.

1. $p(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\sum_{x_i \in Rec_x} p(x_i) = 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

1.1.2. Continuas

Notación: $F(x), P(X \leq x)$.

1. $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq x \leq b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$

1.2. Propiedades

1.2.1. Discreta

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1); a \in \mathbb{Z} \\ F([\![x]\!]); a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$
9. $P(X \leq x \leq) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
10. $P(a < x < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

1.2.2. Continua

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
9. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

1.3. Esperanza

1.3.1. V.A.s Discretas

$$E(x) = \mu = \mu_x = \sum_x x \cdot p(x)$$

X v.a. con función f:

$$E(g(x)) = \mu_{g(x)} = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$

1.3.2. V.A.s Continua

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

X v.a. con función f:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

1.3.3. Propiedades

★ a y b constantes.

1. $E(a) = a$
2. $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3. $E(ax) = aE(x)$
4. $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

1.4. Varianza

1.4.1. V.A.s Discretas

$$\begin{aligned} V(x) = \sigma^2 &= E(x-\mu)^2 \\ &= \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \end{aligned}$$

1.4.2. V.A.s Continua

$$\begin{aligned} V(x) = \sigma^2 &= E(x-\mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \end{aligned}$$

1.4.3. Propiedades

1. $V(x) \geq 0$
2. $V(a) = 0$
3. $V(ax) = aV(x)$
4. $V(ax \pm b) = a^2 V(x) \pm b$
5. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

1.5. Función de Probabilidad Conjunta

1.5.1. Función de Cuantía Conjunta (Discreta)

1. $P(x, y) = P(X = x, Y = y) \geq 0$
2. $\displaystyle\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$
3. $P((x, y) \in A) = \sum_A \sum P(x, y)$

1.5.2. Función de Densidad Conjunta (Continua)

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3. $\displaystyle P((x, y) \in A) = \int_A \int f(x, y) dx dy$

1.6. Distribuciones Marginales

1.6.1. Caso Discreto

- **Distribución Marginal de X:**

  $$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

- **Distribución Marginal de Y:**

  $$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

1.6.2. Caso Continuo

- **Distribución Marginal de X:**

  $$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

- **Distribución Marginal de Y:**

  $$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

1.7. Covarianza

1.7.1. Caso Discreto

$$\begin{aligned} Cov(x,y) = \sigma_{xy} &= E((x-\mu_x)(y-\mu_y)) \\ &= \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y) \end{aligned}$$

1.7.2. Caso Continuo

$$\begin{aligned} Cov(x,y) = \sigma_{xy} &= E((x-\mu_x)(y-\mu_y)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y) dxdy \end{aligned}$$

1.8. Resultados Importantes

1. $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
2. $Cov(x,y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$
3. $V(x \pm y) = V(x) + V(y) \pm 2Cov(x,y)$
4. $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2ab \cdot Cov(x,y)$
5. Si x y y son estadísticamente independientes:
    a) $E(x,y) = E(x) \cdot E(y)$
    b) $Cov(x,y) = 0$
    c) $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$
    d) $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y)$
6. Si $x1, x2, x3, \ldots$ son variables aleatorias independientes 2 a 2:

$$V\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} V(x_i)$$

2. Distribuciones

2.1. Distribuciones Discretas

2.1.1. Distribución de Bernoulli (Ber)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & ; x = 0,1 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q = 1-p & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$X \sim Ber(x;p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{p \cdot q} \end{cases}$$

2.1.2. Distribución Binomial (b)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} & ; x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![x]\!]} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & ; 0 \leq x < n \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$X \sim b(x;n,p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = npq \\ D(x) = \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$$

★ Manejo de la Tabla:

1. $\begin{pmatrix} p \leq 0{,}50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x;n,p) = B(x;n,p) - B(x-1;n,p)$

2. $\begin{pmatrix} p > 0{,}50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{(i)}\ b(x;n,p) = B(n-x;n,1-p) - B(n-x-1;n,1-p) \\ \textbf{(ii)}\ b(x;n,p) = b(n-x,n,1-p) \text{ luego (i)} \\ \textbf{(iii)}\ B(x;n,p) = 1 - B(n-x;n,1-p) \end{cases}$

2.1.3. Distribución de Poisson ($Poisson$)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & ; x = 0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{[\![x]\!]} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim Poisson(x;\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \lambda = np \\ V(x) = \sigma^2 = \lambda = np \\ D(x) = \sigma = \sqrt{np} \end{cases}$$

2.2. Distribuciones Continuas

2.2.1. Distribución Uniforme o Regular (U)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} & ; a \leq x < b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

$$X \sim U(x;a,b) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \dfrac{a+b}{2} \\[2ex] V(x) = \sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12} \\[2ex] D(x) = \sigma = \dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

2.2.2. Distribución Exponencial (exp)

- Función de Cuantía

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dt = 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim exp(x;\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \dfrac{1}{\lambda} \\ \\ V(x) = \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} \\ \\ D(x) = \sigma = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

★ Propiedad Amnésica

$$P(X > s + t/x > s) = P(X > t)$$

2.2.3. Distribución Normal (N)

- Función de Cuantía

$$f(x) = N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; x \in \mathbb{R}$$

- Función Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Distribución Normal Estándar

- Función de Cuantía

$$f(z) = N(z;0,1) = N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \qquad z \in \mathbb{R}$$

- Función Acumulada

$$F(z) = P(Z \leq z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}r} dr$$

Transformación

$$X \sim N(x;\mu,\sigma^2) \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(z;0,1) \text{ ó } N(0,1)$$

★ Manejo de la Tabla:

1. $P(X < a) = P(X \leq a) = P\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

2. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

3. $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P\left(z \leq \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \left(z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

4. $P(x \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

5. $P(|X| < a) = P(|X| \leq a) = P(-a \leq X \leq a) = \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{-a-\mu}{\sigma}\right)$

6. $P(|x| > a) = 1 - P(|x| \leq a) = 1 - P(-a \leq x \leq a) = 1 - \phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\dfrac{-a-\mu}{\sigma}\right)$

Distribución Normal como aproximación Binomial

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) \approx N(x;np,npq) \approx N(x;\mu,\sigma^2)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x=x_1}^{x_2} b(x;n,p) \simeq \int_{x_1-\frac{1}{2}}^{x_2+\frac{1}{2}} N(x;np,npq)dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z;0,1)dz$$

Donde:

- $z_1 = \dfrac{(x_1-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}$
- $z_2 = \dfrac{(x_2+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}$

2.2.4. Distribución Chi-Cuadrado (χ^2)

- Función de Densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)} \cdot x^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

$$X \sim \chi^2(r) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = r \\ V(x) = \sigma^2 = 2r \\ D(x) = \sigma = \sqrt{2r} \end{cases}$$

2.2.5. Distribución Fisher-Snedecor (F)

- Función de Densidad

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r_1+r_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{r_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{r_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{r_1}{r_2}x\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Corolario

$$X \sim F(r_1, r_2) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \dfrac{r_2}{r_2-2} & \forall r_2 > 2 \\ V(x) = \sigma^2 = \dfrac{2r^2(r_1+r_2-2)}{r_2(r_2-2)^2(r_2-4)} & \end{cases}$$

★ Manejo de la Tabla:

$$P(X \leq c) = 1-\alpha \text{ ó } P(X \leq F_{1-\alpha}(r_1,r_2)) = 1-\alpha$$

2.2.6. Distribución T-Student (t)

3. Muestreo

3.1. Distribuciones de Muestreo

Algunas distribuciones de Muestreo:

- $\widehat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$
- $\widehat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = S^2$
- $\widehat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \widehat{S}^2$

3.2. Estadístico

3.2.1. Desigualdad de Chebyshev

$$P(|x - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \qquad ; k \in \mathbb{R}^+$$

4. Estimación Estadística

Parámetros	Estadígrafos
μ	$\bar{x}$
σ^2	S^2 ó $\hat{S}^2$
p, π	$\hat{p}, \hat{\pi}$

4.1. Estimación Puntual

4.1.1. Propiedades

- Estimador Insesgado: $E(\hat{\theta}) = \Theta$
- Estimador Eficiente:
$$\hat{\theta}_1 \text{ es mas eficiente que } \hat{\theta}_2 \Leftrightarrow V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$$
- Estimador Consistente:
$$\begin{cases} \textbf{(i)} \ \lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = 0 \\ \textbf{(ii)} \ \lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0 \end{cases}$$
- Estimador Suficiente: $\hat{\theta}$ es un suficiente de Θ ssi: Aporta tanta información acerca de los parámetros que se estiman a partir de una muestra de Θ.

4.2. Sesgo y Error Cuadrático Medio de un Estimador (ECM)

Sesgo

$$Sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta^1$$

ECM

$$ECM(\hat{\theta}) = E\big[(\hat{\theta} - \theta)^2\big] = V(\hat{\theta}) + \Big[Sesgo(\hat{\theta})\Big]^2$$

4.3. Estimación por Intervalo

4.3.1. Estimación por Intervalo de la Media Poblacional

(I) $P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

(II) $P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \dfrac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(r) \cdot \dfrac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

[1] $Sesgo(\widehat{\theta}) = 0$, entonces $\widehat{\theta}$ es un estimador incesgado.

4.3.2. Estimación por Intervalo de la diferencia o suma de Medias

4.3.3. Estimación por Intervalo para Proporciones

5. Misceláneo

5.1. Interpolación

$\phi(z)$	z
a	x
b	λ
c	y

$$\rightarrow \qquad \frac{a-c}{b-c} = \frac{x-y}{\lambda - y}$$

5.2. Desigualdades