

Apuntes de Probabilidad y Estadística II

Leonardo H. Añez Vladimirovna¹

*Universidad Autónoma Gabriel René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia*

23 de agosto de 2018

¹Correo Electrónico: toborochi98@outlook.com

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia MAT305 (Probabilidad y Estadística II), acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período I-2018 en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

1. Variables Aleatorias	5
1.1. Clasificación de Variables Aleatorias	5
1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria	6
1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)	6
1.3.1. Representación Gráfica	6
1.3.2. Caso Continuo	6
1.3.3. Propiedades de la FDA	7
1.4. Esperanza Matemática	7
1.4.1. Varianza	8

Capítulo 1

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria x (desde ahora denotada por **v.a.**) es una función definida sobre el espacio muestral S con valores en \mathbb{R} que a cada elemento de S (Punto muestral) hace corresponder un número real $x = X$.

$$x = X(w) \in \text{Rec}_X \subseteq \mathbb{R}$$

Gráficamente

Notación Conjuntista

$$X = \{(w, x) \mid w \in S, x = X(w) \in \mathbb{R}\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$

Donde:

- S : Conjunto Partida (Espacio Muestral).
- \mathbb{R} : Conjunto de llegada.
- w : Elemento de S (Punto Muestral).
- x : Valor de la **v.a.** X .
- Rec_X : Recorrido de X .
- X : Función **v.a.** (Conjunto de Pares Ordenados).

Notaciones

Las **v.a.** se denotan con letras mayúsculas tales como X, Y o Z , y los valores correspondientes con letras minúsculas.

1.1. Clasificación de Variables Aleatorias

- **Discreta:** Cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores:

$$X \text{ es v.a. discreta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto Finito de Valores} \\ \text{Conjunto Infinito Numerable de Valores} \end{cases}$$

- **Continúa:** Es aquella cuyo recorrido es conjunto finito no numerable de valores, puede tomar cualquier valor en un intervalo o conjunto.

◆ En general las **v.a. discretas** representan datos que provienen del *conteo* de número de elementos. Pueden ser número de titulados, número de estudiantes, etc. Mientras que las **v.a. continuas** representan mediciones, como longitud, capacidad, etc.

1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria

También llamada función de cuantía o función de masa de probabilidad de una **v.a.**.

Se denomina función de probabilidad de una **v.a.** discreta X a una función p o f , cuyo valor es $p(x)$ o $P(X = x)$ ya que a cada valor distinto de la **v.a.** discreta X hace corresponder en un número entre los valores $[0, 1]$ que es su probabilidad, de ahí el nombre de función de cuantía o función de probabilidad. Estos valores satisfacen las siguientes condiciones:

1. $P(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{x_i \in \text{Rec}_X} p(x_i) = 1$
 - Si $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ entonces la condición (II) es: $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$
 - Si $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ entonces la condición (II) es: $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Si A es un evento en el recorrido de la **v.a.** discreta X entonces la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \sum P(X = x) = \sum p(x)$$

Nota:

$$P(X = x) \begin{cases} p(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La función de probabilidad de una **v.a.** discreta X se puede expresar por:

- **Un Conjunto:**

$$p = \{(x, P(X))/x \in D_p\}$$

- **Una Tabla:**

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	\dots	$p(x_n)$

- **Una Gráfica:**

1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)

El valor de la **FDA** de una **v.a.** discreta X , que es $F(x)$, viene dada por la sumatoria de las probabilidades, desde un valor mínimo t hasta un valor específico x ; esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.1. Representación Gráfica

Valores $F(x)$ aumentan en *saltos*, presentando entonces la forma de una escalera:

1.3.2. Caso Continuo

Función de Densidad

f es función densidad, si $f(x)$ cumple las siguientes condiciones:

- (I) $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- (II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- (III) $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

FDA

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

1.3.3. Propiedades de la FDA**Caso Discreto**

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1), \text{ si } a \in \mathbb{Z} \\ F(\llbracket a \rrbracket), \text{ si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
9. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
10. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Caso Continuo

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
9. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

1.4. Esperanza Matemática

Sea X una **v.a.** con función de probabilidad f definida por $f(x)$. La *esperanza matemática* de X , denotada por $E(x)$, μ ó μ_x ; está dada por:

$$E(x) = \mu = \mu_x = \begin{cases} \sum_x x \cdot p(x), & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $E(a) = a$
2. $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3. $E(ax) = aE(x)$
4. $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

1.4.1. Varianza

Notaciones: $V(x), \sigma^2, \sigma_x^2$

$$V(x) = \sigma^2 = \begin{cases} E[x - \mu]^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x); & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ E[x - \mu]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx; & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $V(x) \geq 0$
2. $V(a) = 0$
3. $V(ax) = aV(x)$
4. $V(ax \pm b) = a^2V(x)$
5. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$