

Transformada de Laplace

Leonardo H. Añez Vladimirovna

*Universidad Autónoma Gabriel René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia*

24 de junio de 2018

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia MAT207 (Ecuaciones Diferenciales), en el período I-2018 en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Definición

Sea $F(t)$ definida para $t > 0$. Entonces la Integral:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t) dt$$

Es la *Transformada de Laplace* siempre que la Integral Converja. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Se tiene $F(t) = 1$, hallar $\mathcal{L}\{F(t)\}$, comenzamos reemplazando en la integral:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt$$

Expresamos la integral en forma de límite:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt$$

Realizamos la Integral:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Big|_0^b \right]$$

Evaluando la Integral en b y 0:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot (e^{-sb} - e^0) \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right]$$

Aplicamos el límite:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{e^{sb}} - 1 \right) \right] = -\frac{1}{s} \cdot (0 - 1) = \boxed{\frac{1}{s}}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{1\} = f(s) = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace de algunas Funciones Elementales

De igual manera que el ejemplo del anterior punto, estas Transformadas se pueden obtener:

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1) 1	$\frac{1}{s} \quad ; \quad s > 0$
2) t	$\frac{1}{s^2} \quad ; \quad s > 0$
3) t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad ; \quad s > 0$
4) e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5) $\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
6) $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
7) $\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad ; \quad s > a $
8) $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad ; \quad s > a $

Propiedades

Teorema

Si C_1, C_2 son constantes y $F_1(t), F_2(t)$ funciones con transformadas de Laplace: $f_1(s), f_2(s)$ respectivamente, entonces:

$$\mathcal{L}\{C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\}$$

Esto es:

$$\mathcal{L}\{C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)\} = C_1 f_1(s) + C_2 f_2(s)$$

Transformadas de Laplace de la Derivadas

T.1.

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s \cdot f(s) - F(0)$$

Asumiendo:

$$e^{-st} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

T.2.

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 \cdot f(s) - s \cdot F(0) - F'(0)$$

T.3.

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3 \cdot f(s) - s^2 \cdot F(0) - s \cdot F'(0) - F''(0)$$

Generalizando

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = s^n \cdot f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - s \cdot F^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

Transformada Inversa

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ entonces $f(s)$ es la transformada inversa de Laplace. Esto es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

Para la inversa se pueden utilizar las transformadas normales, teniendo en cuenta que ahora trabajamos con las inversas.