Apuntes de Probabilidad y Estadística II

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

2 de octubre de 2018

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT305 (Probabilidad y Estadística II)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria x (desde ahora denotada por **v.a.**) es una función definida sobre el espacio muestral S con valores en $\mathbb{R}$ que a cada elemento de S (Punto muestral) hace corresponder un número real $x = X$.

$$x = X(w) \in Rec_X \subseteq \mathbb{R}$$

Gráficamente

Notación Conjuntista

$$X = \{(w, x)\ w \in S, x = X(w) \in \mathbb{R}\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$

Donde:

- S: Conjunto Partida (Espacio Muestral).
- $\mathbb{R}$: Conjunto de llegada.
- w: Elemento de S (Punto Muestral).
- x: Valor de la **v.a.** X.
- Rec_X: Recorrido de X.
- X: Función **v.a.** (Conjunto de Pares Ordenados).

Notaciones

Las **v.a.** se denotan con letras mayúsculas tales como X, Y o Z, y los valores correspondientes con letras minúsculas.

1.1. Clasificación de Variables Aleatorias

- **Discreta:** Cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores:

$$X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ discreta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto Finito de Valores} \\ \text{Conjunto Infinito Numerable de Valores} \end{cases}$$

- **Contínua:** Es aquella cuyo recorrido es conjunto finito no numerable de valores, puede tomar cualquier valor en un intervalo o conjunto.

⧫ En general las **v.a.** *discretas* representan datos que provienen del *conteo* de número de elementos. Pueden ser número de titulados, número de estudiantes, etc. Mientras que las **v.a.** *contínuas* representan mediciones, como longitud, capacidad,etc.

1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria

También llamada función de cuantía o función de masa de probabilidad de una **v.a.**.

Se denomina función de probabilidad de una **v.a.** discreta X a una función p o f, cuyo valor es $p(x)$ o $P(X = x)0$ ya que a cada valor distinto de la **v.a.** discreta X hace corresponder en un número entre los valores $[0, 1]$ que es su probabilidad, de ahí el nombre de función de cuantía o función de probabilidad. Estos valores satisfacen las siguientes condiciones:

1. $P(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\sum_{x_i \in Rec_X} p(x_i) = 1$
   - Si $Rec_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ entonces la condición **(II)** es: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
   - Si $Rec_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ entonces la condición **(II)** es: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Si A es un evento en el recorrido de la **v.a.** discreta X entonces la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \sum P(X = x) = \sum p(x)$$

Nota:

$$P(X = x) \begin{cases} p(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La función de probabilidad de una **v.a.** discreta X se puede expresar por:

- **Un Conjunto:**

$$p = \{(x, P(X))/x \in D_p\}$$

- **Una Tabla:**

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\ldots$	$p(x_n)$

- **Una Gráfica:**

1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)

El valor de la **FDA** de una **v.a.** discreta X, que es $F(x)$, viene dada por la sumatoria de las probabilidades, desde un valor mínimo t hasta un valor específico x; esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.1. Representación Gráfica

Valores $F(x)$ aumentan en *saltos*, presentando entonces la forma de una escalera:

1.3.2. Caso Continuo

Función de Densidad

f es función densidad, si $f(x)$ cumple las siguientes condiciones:

(I) $f(x) \geq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(III) $\displaystyle p(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

FDA

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1.3.3. Propiedades de la FDA

Caso Discreto

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1), \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ F([\![a]\!]), \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
9. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = x)$
10. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Caso Continuo

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
9. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

1.4. Esperanza Matemática

Sea X una **v.a.** con función de probabilidad f definida por $f(x)$. La *esperanza matemática* de X, denotada por $E(x), \mu$ ó μ_x; está dada por:

$$E(x) = \mu = \mu_x = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x \cdot p(x), \text{ Si } X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ Discreta} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, \text{ Si } X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $E(a) = a$
2. $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3. $E(ax) = aE(x)$
4. $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

1.4.1. Varianza

Notaciones: $V(x), \sigma^2, \sigma_x^2$

$$V(x) = \sigma^2 = \begin{cases} E[x-\mu]^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x); \text{ Si } X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ Discreta} \\ E[x-\mu]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx; \text{Si } X \text{ es } \textbf{v.a.} \text{ Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $V(x) \geq 0$
2. $V(a) = 0$
3. $V(ax) = aV(x)$
4. $V(ax \pm b) = a^2 V(x)$
5. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

1.5. Función de Probabilidad Conjunta

1.5.1. Función de Cuantía Conjunta

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s** X y Y si:

(I) $f(x, y) = p(x, y) \geq 0$ Para cualquier (x, y) de su dominio.

(II) $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

(III) $P((x, y) \in A) = \sum_A \sum f(x, y)$ Para cualquier región A del plano XY.

1.5.2. Función de Densidad Conjunta

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s** X y Y si:

(I) $f(x, y) = p(x, y) \geq 0$ Para cualquier (x, y) de su dominio.

(II) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$

(III) $P((x, y) \in A) = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ Para cualquier región A del plano XY.

1.6. Distribuciones Marginales

Sean X y Y **v.a.** con función de probabilidad conjunta definida por $f(x, y)$. La distribución marginal está dada por:

$$\text{Caso Discreto:} \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \sum_y f(x,y) \\ \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \sum_x f(x,y) \end{cases}$$

$$\text{Caso Continuo:} \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{cases}$$

1.6.1. Independencia Estadística de las v.a. X y Y

Sean X y Y **v.a.** discretas o contínuas con función de probabilidad conjunta definida por $f(x, y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente. Se dice que las **v.a.** X y Y serán estadísticamente independientes ssi:

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

Para cualquier (x, y) dentro de sus recorridos.

1.6.2. Esperanza Matemática

Sean X y Y **v.a.** con función de probabilidad definida por $f(x, y)$. La media o esperanza matemática de $g(x, y)$ está dada por:

$$\text{Caso Discreto: } E(g(x,y)) = \mu_{g(x,y)} = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot f(x,y)$$

$$\text{Caso Contínuo: } E(g(x,y)) = \mu_{g(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

1.6.3. Covarianza

Mide el grado de relación o asociación de dos variables.

1.6.4. Resultado Importantes

1. $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
2. $Cov(x, y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y)$
3. $V(x \pm y) = V(x) + V(y) \pm 2Cov(x, y)$
4. $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2abCov(x, y)$
5. Si X y Y son estadísticamente independientes entonces:
   a) $E(x, y) = E(x)E(y)$
   b) $Cov(x, y) = 0$
   c) $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$
   d) $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y)$

Capítulo 2

Modelos de Distribución de Probabilidad

2.1. Distribuciones Discretas

2.1.1. Distribución de Bernoulli

Si la probabilidad de que ocurra un evento p y la probabilidad de que no ocurra es $q(q = 1 - p)$, entonces se dice que la **v.a.** discreta X se distribuye según Bernoulli, cuya función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x \cdot (1-p)^{1-x} & ; x = 0; 1 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Y cuya función de distribución acumulada es:

$$F(X) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q = 1 - p & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$X \sim Ber(x; p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{p \cdot q} \end{cases}$$

Conocida como prueba o ensayo de Bernoulli, es un experimento que solo tiene 2 resultados posibles, a los cuales se los llama:

- Éxito (p)
- Fracaso (q)

2.1.2. Distribución Binomial

Una **v.a.** discreta X tiene distribución lineal si su función de cuantía está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} & ; x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde:

- p : Probabilidad de éxito.
- n : Número de ensayo.
- x : Número de éxitos.

Las Funciones de Distribución Acumulada Binomialmente está definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![x]\!]} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & ; 0 \leq x < n \\ 1 & ; x \geq n \end{cases}$$

$$X \sim b(x; n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = n \cdot p \\ V(x) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{cases}$$

Características de la Distribución Binomial

1. Se realiza n pruebas , cada una independiente.
2. p es la probabilidad de éxito en cada prueba que ocurra en un evento y se mantiene constante a travez de las n pruebas.
3. El experimento es con reposición (sustitución por reemplazo).
4. Se da el valor de la **v.a.** X. La variación de x es desde 0 hasta n.

Observaciones

$$f(x) = b(x; n, p) \qquad n \text{ y } p \text{ son parámetros.}$$

Manejo de la Tabla Binomial

1. $\begin{pmatrix} p \leq 0{,}50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x; n, p) = B(x; n, p) - B(x-1; n, p)$
2. $\begin{pmatrix} p > 0{,}50 \\ n \geq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{(i.)}\ b(x; n, p) = B(n-x; n, 1-p) - B(n-x-1; n, 1-p) \\ \textbf{(ii.)}\ b(x; n, p) = b(n-x; n, 1-p) \text{ luego de usar } \textbf{(i.)} \\ \textbf{(iii.)}\ B(x; n, p) = 1 - B(n-x-1; n, 1-p) \end{cases}$

2.1.3. Distribución de Poisson

Una **v.a.** discreta X tiene distribución de Poisson, si su función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}; & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0; & \text{otro caso} \end{cases}$$

Parámetro: $\lambda > 0$

La distribución de Poisson se obtiene de 2 maneras:

1. $\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \backsimeq \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$
2. $p(x) = f(x) = \dfrac{e^{-\lambda \cdot t} (\lambda \cdot t)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$

donde t es la cantidad de medida (intervalo de tiempo, longitud, área, etc...) La **F.D.A.** de Poisson está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![x]\!]} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim Poisson(x; \lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \lambda = n \cdot p \\ V(x) = \sigma^2 = n \cdot p \\ D(x) = \sigma = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

2.2. Distribuciones Continuas

2.2.1. Distribución Uniforme o Rectangular

Se dice que una **v.a.** continua X tiene distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Parámetros: a, b

La gráfica de esta función se muestra en la siguiente figura: La **F.D.A.** de X, distribuida uniformemente, está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x < b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

La gráfica de F es:

$$X \sim U(x;a,b) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \dfrac{a+b}{2} \\ V(x) = \sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12} \\ D(x) = \sigma = \dfrac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

2.2.2. Distribución Exponencial

Sea X una **v.a.** continua. Se dice que X tiene distribución exponencial con el parámetro real λ, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Parámetro: $\lambda > 0$

La gráfica de f, se muestra en la siguiente figura: La **F.D.A.** de X, distribuida exponencialmente está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx, & x \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de F, es la siguiente:

$$X \sim exp(x;\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda} \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ D(x) = \sigma = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Propiedad Amnésica

$$P(X > 5 + t/x > s) = P(X > t)$$