Apuntes de Lenguajes Formales

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

17 de mayo de 2019

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Agradecimiento a marmot

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `INF319 (Lenguajes Formales)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2019` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Preliminares Formales

1.1. Conjuntos

1.1.1. Conjunto Finito e Infinito

Equivalencia

Dado A y B (conjuntos) los llamamos *equivalentes* si existe una biyección: $f : A \to B$

Conjunto Finito

Un conjunto A es finito si es equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Conjunto Infinito

Un conjunto es infinito si no es finito. Si no es equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ es decir no hay biyección. Sin embargo no todos los conjuntos finitos son equivalentes.

- **Conjunto Contablemente Infinito:** Se dice que un conjunto es contablemente infinito si es equivalente con $\mathbb{N}$.
- **Conjunto Contable:** Es contable si es finito o contablemente infinito.
- **Conjunto Incontable:** Se dice que es incontable si no es contable.

Principio de las Casillas

Si A y B son conjuntos finitos no vacíos y $|A| > |B|$ entonces no existe una función inyectiva de: $A \to B$.

1.2. Preliminares

1.2.1. Alfabeto

Un alfabeto Σ es cualquier conjunto finito no vacío.

Ejemplo(s)

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{Leo, Martha\}\\ \Sigma_2 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, 13\}\\ \Sigma_3 &= \{a, b\}\\ \Sigma_4 &= \{R, G, B, A\}\end{aligned}$$

1.2.2. Palabra

Una palabra sobre Σ es una sucesión finita de símbolos de Σ. Es decir:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n); \sigma \in \Sigma \qquad \text{ó} \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \ldots \sigma_n; \sigma \in \Sigma$$

Ejemplo(s)

Sobre Σ_1	**Sobre Σ_2**	**Sobre Σ_3**	**Sobre Σ_4**
$w_1 =$*LeoLeo*	$w_1 =$1111110	$w_1 =$*bababababa*	$w_1 =$*ABGR*
$w_2 = MarthaLeoMartha$	$w_2 =$11235813	$w_2 =$*abba*	$w_2 =$*RRRA*

Denotamos por Σ^* el conjunto de todas las palabras sobre Σ.

Longitud de una Palabra

Sea w una palabra sobre Σ, es decir $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n; \sigma \in \Sigma$. La longitud de w es n y se denota por: $|w| = n$.

Palabra vacía

Es la sucesión vacía de símbolos de Σ y se denota por: λ.

1.2.3. Notaciones

- $\Sigma^+ = \{w \in \Sigma^*/|w| > 0\}$
- $\Sigma^k = \{w \in \Sigma^*/|w| = k\}$
- $\Sigma^0 = \{w \in \Sigma^*/|w| = 0\} = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{w \in \Sigma^*/|w| = 1\} = \Sigma$
- $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$
- $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

1.2.4. Cantidad de Ocurrencias

Sea $w \in \Sigma^*$, denotamos por $|w|_\sigma$ al número de ocurrencias del símbolo σ en la palabra w.

Ejemplo(s)

$$\Sigma = \{a, b\}$$

- $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, \ldots\}$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma_1 = \Sigma = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{ab, aa, ba, bb\}$

1.2.5. Concatenación

Sea $u, v \in \Sigma^*$ tal que $u = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n, v = \epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$. La concatenación de u y v se define por:

$$uv = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$$

Definición de Recurrencia

$$|\ | : \Sigma^* \to \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} |\lambda| = 0 \\ |wa| = |w| + 1 \end{cases}$$

Ejemplo(s)

$$u = abab \qquad uv = ababbba$$
$$v = bba \qquad vu = bbaabab$$

Propiedades

- $uv \neq vu$
- $(uv)w = u(vw)$
- $u\lambda = \lambda u = u$
- $|uv| = |u| + |v|$
- $|uv|_a = |u|_a + |v|_a$

1.2.6. Inversa

Si $w = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma^n$ entonces $w' = \sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1$ se llama inversa o transpuesta de w.

Definición de Recurrencia

$$' : \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ (wa)' = aw' \end{cases}$$

1.2.7. Potencia de una Palabra

$$w^n = \underbrace{ww \ldots w}_{n-veces}$$

Definición de Recurrencia

$$' : \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$\begin{cases} w^0 = \lambda \\ w^{n+1} = ww^n \end{cases}$$

Propiedades

- $|w^n| = n|w|$
- $w^m w^n = w^{m+n}$
- $(w^n)^m = w^{mn}$
- $\lambda^n = \lambda$

1.2.8. Principio de Inducción para Σ^*

Sea L un conjunto de palabras sobre Σ con las propiedades:

i.) $\lambda \in L$

ii.) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

Entonces

$L = \Sigma^*$, (es decir, todas las palabras sobre Σ están en L.)

1.2.9. Lenguajes

Un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*

Operaciones

Recordemos que ya conocemos otras operaciones (Unión, Intersección, Diferencia y Complemento), para esta materia tenemos las siguientes:

- Concatenación

  Sea $A, B \subseteq \Sigma^*$

$$AB = \{w \in \Sigma^* / w = xy, x \in A, y \in B\}$$

- Transposición

  Sea $A \subseteq \Sigma^*$

$$A' = \{w' \in \Sigma^* / w \in A\}$$

- Estrella de Kleene

  Sea $A \subseteq \Sigma^*$

$$A^* = \{w \in \Sigma^* / w = w_1 w_2 \dots w_n \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \text{ y para algunas } w_1, w_2, \dots, w_k \in A\}$$

1.2.10. Expresiones Regulares

Las expresiones regulares (ER) sobre un alfabeto (Σ) son las palabras sobre el alfabeto $\Sigma \cup \{), (, \emptyset, \cup, *\}$ tal que cumple lo siguiente:

1.) $\emptyset$ y cada símbolo de Σ es una ER.

2.) Si α y β son ER entonces $(\alpha\beta)$ es una ER.

3.) Si α y β son ER entonces $(\alpha\cup\beta)$ es una ER.

4.) Si α es una ER entonces α^* es una ER.

5.) Nada mas es una ER a menos que provenga de **(1.)** a **(4.)**

Ejemplo(s)

Para $\Sigma = \{a, b\}$ podemos formar:

$$\begin{aligned} &\emptyset \\ &a \\ &b \\ &(ab) \\ &(a\cup b) \\ &((ab)\cup b) \\ &(ba)^* \\ &((ba)^* \cup (a\cup b))^* \end{aligned}$$

Lenguaje Regular

Un lenguaje es regular ssi es generado por una expresión regular.

1.2.11. Módulos

Definición

Un módulo es una tripleta $D = (k, \Sigma, f)$ donde:

- k es un conjunto finito no vacío, *llamado conjunto de estados*
- Σ es un conjunto finito no vacío, *llamado alfabeto*
- $f : k \times \Sigma \to k$, *llamado función de transición*

Interpretación

Un módulo se puede interpretar como un dispositivo que en determinados instantes de tiempo recibe señales (símbolos del alfabeto), que producen cambios en su configuración interna.

$$\xrightarrow{\sigma \in \Sigma} \boxed{s \in k}$$

Representación

- **Tabla de Transición**
- **Grafo**

$$s_i \xrightarrow{\sigma} s_j$$

Figura 1.1: ssi: $f(s_i, \sigma) = s_j$

Comportamiento Dinámico

Sea $D = (k, \sigma, f)$ un módulo:

$$\begin{array}{ccccccccc} t_0 & & t_1 & & t_2 & & \cdots & & t_k \\ s_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & s_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & s_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & s_k \end{array}$$

Función Estado Terminal

Sea $D = (k, \sigma, f)$ un módulo:

Una función de Estado Terminal del módulo D es una única función:

$$\widehat{f} : k \times \Sigma \to k \text{ tal que } \forall s \in k, w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$$

$$\begin{cases} \widehat{f}(s, \lambda) = s \\ \widehat{f}(s, \sigma w) = \widehat{f}\,[f(s, \sigma), w] \end{cases}$$

◇ **Notas**

- $w = \lambda$

$$\widehat{f}(s, \sigma) = \widehat{f}(s, \sigma\lambda) = \widehat{f}\,[f(s, \sigma), \lambda] = f(s, \sigma)$$

- $\forall w \in \Sigma^*$

$$f : k \to k \text{ tal que: } f_w(s) = \widehat{f}(s, w)s$$

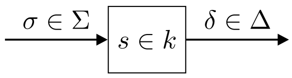
1.2.12. Máquinas

Una máquina es una quíntupla $M = (k, \Sigma, \Delta, f, g)$ donde:

- k es un conjunto finito no vacío, *llamado conjunto de estados*
- Σ es un conjunto finito no vacío, *llamado alfabeto de entrada*
- Δ es un conjunto finito no vacío, *llamado alfabeto de salida*
- $f : k \times \Sigma \to k$, *llamado función de transición*
- $g : k \times \Sigma \to \Delta$, *llamado función de salida*

Interpretación

Una máquina se puede interpretar como un dispositivo que en determinados instantes de tiempo recibe señales (símbolos de entrada) que producen cambios en su configuración interna y emiten señales (símbolos de salida).



Representación

- **Tabla de Transición**
- **Grafo**

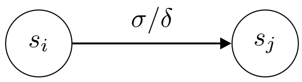


Figura 1.2: ssi: $f(s_i, \sigma) = s_j \wedge g(s_i, \sigma) = \delta$

Comportamiento Dinámico

Sea $M = (k, \Sigma, \Delta, f, g)$ una máquina:

$$\begin{array}{ccccccccc} t_0 & & t_1 & & t_2 & & \cdots & & t_k \\ s_0 & \xrightarrow{\sigma_0/\delta_0} & s_1 & \xrightarrow{\sigma_1/\delta_1} & s_2 & \xrightarrow{\sigma_2/\delta_2} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_{k-1}/\delta_{k-1}} & s_k \end{array}$$

Capítulo 2

Autómatas

2.1. Autómata Finito Determinístico (AFD)

2.1.1. Definición

Un Autómata Finito Determinístico (AFD) es una quintupla $M = (k, \Sigma, f, s_0, F)$ donde:

- k conjunto finito no vacio, *conjunto de estados*
- Σ conjunto finito no vacio, *Alfabeto*
- $f : k \times \Sigma \to k$, *Funcion de transicion*
- $s_0 \in k$, *Estado inicial*
- $F \subseteq k$, *Conjunto de estados finales*

2.1.2. Intepretación

2.1.3. Representación

2.1.4. Configuración

Sea $M = (k, \Sigma, \delta, s_0, F)$ un AFD.

Una configuración de M es un elemento de $k \times \Sigma^*$

Relación $\vdash_{M}$

Sea (q, w) y (q', w') dos configuraciones[1]:

$$(q, w) \vdash_{M} (q', w') \Leftrightarrow w = \sigma w' \text{ para algun } \sigma \in \Sigma \text{ y } \delta(q, \sigma) = q'$$

Lenguaje Aceptado por M

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* / M \text{ acepta } w\}$$
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* / (s, w) \vdash_{M}^{*} (q, \lambda) \wedge q \in F\}$$

2.2. Autómata Finito no Determinístico (AFN)

2.2.1. Definición

Un autómata Finito no Deterministico (AFN) es una quintupla $M = (k, \Sigma, \Delta, s, F)$ donde:

- k : conjunto finito no vacio
- Σ : conjunto finito no vacio

[1] $\vdash_{M}$ se lee *"conduce a"* en un paso.

- Δ : es un subconjunto finito de $k \times \Sigma^* \times k$
- $s \in k$
- $F \subseteq k$

2.3. Equivalencia entre una AFD y un AFN

Teorema

Para cada AFN existe un AFD equivalente.

★ Prueba

Sea $M = (k, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN

i.) Construimos $M' = (k', \Sigma, \Delta', s', F')$ eliminando todas las aristas de M que:

$$(q, u, q') \in \Delta \qquad \wedge \qquad |u| > 1$$

Si $u = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k, k > 1$ entonces añadimos $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ estados y las nuevas transiciones:

$$(q, \sigma_1, p_1), (p_1, \sigma_2, p_2), \ldots, (p_{k-1}, \sigma_k, q')$$

a Δ para u tal que $|u| > 1$.

ii.) Construimos $M'' = (k'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$
La idea clave es considerar que un AFN en un determinando instante se encuentra en un conjunto de estados:

- $k'' = \Sigma^{k'}$
- $F'' = \{Q \subseteq k' / Q \cap F' \neq \emptyset\}$

Formalmente:

$$E(q) = \{p \in k' / (q, \lambda) \vdash^{*}_{M'} (p, \lambda)\}$$

Equivalentemente:

$$E(q) = \{p \in k' / (q, w) \vdash^{*}_{M'} (p, w)\}$$

Donde:

- $s'' = E(s')$
- $\forall Q \subseteq k' \wedge$ para cada símbolo $\sigma \in \Sigma$

Ademas:

$$\delta''(Q, \sigma) = \cup\{E(p) : p \in k' \wedge (q, \sigma, p) \in \Delta', \exists q \in Q\}$$

Afirmamos que $\forall w \in \Sigma^*$ y $\forall p, q \in k'$:

$$(q, w) \vdash^{*}_{M'} (p, \lambda) \Leftrightarrow (E(q), w) \vdash^{*}_{M''} (P, \lambda)$$

p.d. $M' \approx M''$
p.d. $L(M') = L(M'')$

$$\begin{aligned} w \in L(M') &\Leftrightarrow (s', w) \vdash^{*}_{M'} (q, \lambda), q \in F' \\ &\Leftrightarrow (E(s'), w) \vdash^{*}_{M''} (Q, \lambda) \\ &\Leftrightarrow (s'', w) \vdash^{*}_{M''} (Q, \lambda), Q \in F'' \\ &\Leftrightarrow w \in L(M'') \end{aligned}$$

$\therefore L(M') = L(M'')$