

# Apuntes de Probabilidad y Estadística II

Leonardo H. Añez Vladimirovna<sup>1</sup>

*Universidad Autónoma Gabriel René Moreno,  
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,  
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia*

24 de septiembre de 2018

<sup>1</sup>Correo Electrónico: [toborochi98@outlook.com](mailto:toborochi98@outlook.com)

## Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia MAT305 (Probabilidad y Estadística II), acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período I-2018 en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

# Índice general

<b>1. Variables Aleatorias</b>	<b>5</b>
1.1. Clasificación de Variables Aleatorias	5
1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria	6
1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)	6
1.3.1. Representación Gráfica	6
1.3.2. Caso Continuo	6
1.3.3. Propiedades de la FDA	7
1.4. Esperanza Matemática	7
1.4.1. Varianza	8
1.5. Función de Probabilidad Conjunta	8
1.5.1. Función de Cuantía Conjunta	8
1.5.2. Función de Densidad Conjunta	8
1.6. Distribuciones Marginales	9
1.6.1. Independencia Estadística de las v.a. $X$ y $Y$	9
1.6.2. Esperanza Matemática	9
1.6.3. Covarianza	9
1.6.4. Resultado Importantes	9
<b>2. Modelos de Distribución de Probabilidad</b>	<b>11</b>
2.1. Distribución de Bernoulli	11
2.2. Distribución Binomial	11
2.2.1. Características de la Distribución Binomial	12
2.2.2. Manejo de la Tabla Binomial	12
2.3. Distribución de Poisson	12



# Capítulo 1

## Variables Aleatorias

Una variable aleatoria  $x$  (desde ahora denotada por **v.a.**) es una función definida sobre el espacio muestral  $S$  con valores en  $\mathbb{R}$  que a cada elemento de  $S$  (Punto muestral) hace corresponder un número real  $x = X$ .

$$x = X(w) \in \text{Rec}_X \subseteq \mathbb{R}$$

**Gráficamente**

**Notación Conjuntista**

$$X = \{(w, x) \mid w \in S, x = X(w) \in \mathbb{R}\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$

Donde:

- $S$ : Conjunto Partida (Espacio Muestral).
- $\mathbb{R}$ : Conjunto de llegada.
- $w$ : Elemento de  $S$  (Punto Muestral).
- $x$ : Valor de la **v.a.**  $X$ .
- $\text{Rec}_X$ : Recorrido de  $X$ .
- $X$ : Función **v.a.** (Conjunto de Pares Ordenados).

**Notaciones**

Las **v.a.** se denotan con letras mayúsculas tales como  $X, Y$  o  $Z$ , y los valores correspondientes con letras minúsculas.

### 1.1. Clasificación de Variables Aleatorias

- **Discreta:** Cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores:

$$X \text{ es v.a. discreta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto Finito de Valores} \\ \text{Conjunto Infinito Numerable de Valores} \end{cases}$$

- **Continúa:** Es aquella cuyo recorrido es conjunto finito no numerable de valores, puede tomar cualquier valor en un intervalo o conjunto.

◆ En general las **v.a. discretas** representan datos que provienen del *conteo* de número de elementos. Pueden ser número de titulados, número de estudiantes, etc. Mientras que las **v.a. continuas** representan mediciones, como longitud, capacidad, etc.

## 1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria

También llamada función de cuantía o función de masa de probabilidad de una **v.a.**.

Se denomina función de probabilidad de una **v.a.** discreta  $X$  a una función  $p$  o  $f$ , cuyo valor es  $p(x)$  o  $P(X = x)$  ya que a cada valor distinto de la **v.a.** discreta  $X$  hace corresponder en un número entre los valores  $[0, 1]$  que es su probabilidad, de ahí el nombre de función de cuantía o función de probabilidad. Estos valores satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $P(x) \geq 0$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}$
2.  $\sum_{x_i \in \text{Rec}_X} p(x_i) = 1$ 
  - Si  $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  entonces la condición (II) es:  $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$
  - Si  $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  entonces la condición (II) es:  $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Si  $A$  es un evento en el recorrido de la **v.a.** discreta  $X$  entonces la probabilidad de  $A$  es el número:

$$P(A) = \sum P(X = x) = \sum p(x)$$

**Nota:**

$$P(X = x) \begin{cases} p(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La función de probabilidad de una **v.a.** discreta  $X$  se puede expresar por:

- **Un Conjunto:**

$$p = \{(x, P(X))/x \in D_p\}$$

- **Una Tabla:**

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$

- **Una Gráfica:**

## 1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)

El valor de la **FDA** de una **v.a.** discreta  $X$ , que es  $F(x)$ , viene dada por la sumatoria de las probabilidades, desde un valor mínimo  $t$  hasta un valor específico  $x$ ; esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### 1.3.1. Representación Gráfica

Valores  $F(x)$  aumentan en *saltos*, presentando entonces la forma de una escalera:

### 1.3.2. Caso Continuo

**Función de Densidad**

$f$  es función densidad, si  $f(x)$  cumple las siguientes condiciones:

- (I)  $f(x) \geq 0$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (II)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- (III)  $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

**FDA**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

**1.3.3. Propiedades de la FDA****Caso Discreto**

1.  $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $F(-\infty) = 0$
3.  $F(+\infty) = 1$
4.  $P(X \leq a) = F(a)$
5.  $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
6.  $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1), & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ F(\llbracket a \rrbracket), & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7.  $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8.  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
9.  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
10.  $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11.  $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

**Caso Continuo**

1.  $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $F(-\infty) = 0$
3.  $F(+\infty) = 1$
4.  $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5.  $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6.  $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7.  $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8.  $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
9.  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

**1.4. Esperanza Matemática**

Sea  $X$  una **v.a.** con función de probabilidad  $f$  definida por  $f(x)$ . La *esperanza matemática* de  $X$ , denotada por  $E(x)$ ,  $\mu$  ó  $\mu_x$ ; está dada por:

$$E(x) = \mu = \mu_x = \begin{cases} \sum_x x \cdot p(x), & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

**Propiedades**

1.  $E(a) = a$
2.  $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3.  $E(ax) = aE(x)$
4.  $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

**1.4.1. Varianza**

Notaciones:  $V(x), \sigma^2, \sigma_x^2$

$$V(x) = \sigma^2 = \begin{cases} E[x - \mu]^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x); & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ E[x - \mu]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx; & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

**Propiedades**

1.  $V(x) \geq 0$
2.  $V(a) = 0$
3.  $V(ax) = aV(x)$
4.  $V(ax \pm b) = a^2V(x)$
5.  $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

**1.5. Función de Probabilidad Conjunta****1.5.1. Función de Cuantía Conjunta**

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s**  $X$  y  $Y$  si:

$$(I) \quad f(x, y) = p(x, y) \geq 0 \quad \text{Para cualquier } (x, y) \text{ de su dominio.}$$

$$(II) \quad \sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

$$(III) \quad P((x, y) \in A) = \sum_A \sum f(x, y) \quad \text{Para cualquier región } A \text{ del plano } XY.$$

**1.5.2. Función de Densidad Conjunta**

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s**  $X$  y  $Y$  si:

$$(I) \quad f(x, y) = p(x, y) \geq 0 \quad \text{Para cualquier } (x, y) \text{ de su dominio.}$$

$$(II) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$(III) \quad P((x, y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{Para cualquier región } A \text{ del plano } XY.$$



## 1.6. Distribuciones Marginales

Sean  $X$  y  $Y$  **v.a.** con función de probabilidad conjunta definida por  $f(x, y)$ . La distribución marginal está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Caso Discreto: } & \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \sum_y f(x, y) \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \sum_x f(x, y) \end{cases} \\ \text{Caso Continuo: } & \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.6.1. Independencia Estadística de las v.a. $X$ y $Y$

Sean  $X$  y  $Y$  **v.a.** discretas o continuas con función de probabilidad conjunta definida por  $f(x, y)$  y distribuciones marginales  $g(x)$  y  $h(y)$ , respectivamente. Se dice que las **v.a.**  $X$  y  $Y$  serán estadísticamente independientes ssi:

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

Para cualquier  $(x, y)$  dentro de sus recorridos.

### 1.6.2. Esperanza Matemática

Sean  $X$  y  $Y$  **v.a.** con función de probabilidad definida por  $f(x, y)$ . La media o esperanza matemática de  $g(x, y)$  está dada por:

$$\text{Caso Discreto: } E(g(x, y)) = \mu_{g(x, y)} = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot f(x, y)$$

$$\text{Caso Continuo: } E(g(x, y)) = \mu_{g(x, y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

### 1.6.3. Covarianza

Mide el grado de relación o asociación de dos variables.

### 1.6.4. Resultado Importantes

1.  $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
2.  $Cov(x, y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y)$
3.  $V(x \pm y) = V(x) + V(y) \pm 2Cov(x, y)$
4.  $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2abCov(x, y)$
5. Si  $X$  y  $Y$  son estadísticamente independientes entonces:
  - a)  $E(x, y) = E(x)E(y)$
  - b)  $Cov(x, y) = 0$
  - c)  $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$
  - d)  $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y)$



## Capítulo 2

# Modelos de Distribución de Probabilidad

### 2.1. Distribución de Bernoulli

Si la probabilidad de que ocurra un evento  $p$  y la probabilidad de que no ocurra es  $q(q = 1 - p)$ , entonces se dice que la v.a. discreta  $X$  se distribuye según Bernoulli, cuya función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x \cdot (1 - p)^{1-x} & ; x = 0; 1 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Y cuya función de distribución acumulada es:

$$F(X) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q = 1 - p & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$
$$X \sim Ber(x; p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{p \cdot q} \end{cases}$$

Conocida como prueba o ensayo de Bernoulli, es un experimento que solo tiene 2 resultados posibles, a los cuales se los llama:

- Éxito ( $p$ )
- Fracaso ( $q$ )

### 2.2. Distribución Binomial

Una v.a. discreta  $X$  tiene distribución lineal si su función de cuantía está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} & ; x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde:

- $p$  : Probabilidad de éxito.
- $n$  : Número de ensayo.
- $x$  : Número de éxitos.

Las Funciones de Distribución Acumulada Binomialmente está definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & ; 0 \leq x < n \\ 1 & ; x \geq n \end{cases}$$

$$X \sim b(x; n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = n \cdot p \\ V(x) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{cases}$$

### 2.2.1. Características de la Distribución Binomial

1. Se realiza  $n$  pruebas, cada una independiente.
2.  $p$  es la probabilidad de éxito en cada prueba que ocurra en un evento y se mantiene constante a través de las  $n$  pruebas.
3. El experimento es con reposición (sustitución por reemplazo).
4. Se da el valor de la v.a.  $X$ . La variación de  $x$  es desde 0 hasta  $n$ .

#### Observaciones

$$f(x) = b(x; n, p) \quad n \text{ y } p \text{ son parámetros.}$$

### 2.2.2. Manejo de la Tabla Binomial

1.  $\begin{pmatrix} p \leq 0,50 \\ n \geq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x; n, p) = B(x; n, p) - B(x-1; n, p)$
2.  $\begin{pmatrix} p > 0,50 \\ n \geq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i.) } b(x; n, p) = B(n-x; n, 1-p) - B(n-x-1; n, 1-p) \\ \text{(ii.) } b(x; n, p) = b(n-x; n, 1-p) \text{ luego de usar (i.)} \\ \text{(iii.) } B(x; n, p) = 1 - B(n-x-1; n, 1-p) \end{cases}$

## 2.3. Distribución de Poisson

Una v.a. discreta  $X$  tiene distribución de Poisson, si su función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{otro caso} \end{cases}$$

Parámetro:  $\lambda > 0$

La distribución de Poisson se obtiene de 2 maneras:

1.  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \simeq \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$
2.  $p(x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda \cdot t} (\lambda \cdot t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$

donde  $t$  es la cantidad de medida (intervalo de tiempo, longitud, área, etc...) La **F.D.A.** de Poisson está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} & ; x \geq 0 \end{cases}$$