

Apuntes de Probabilidad y Estadística II

Leonardo H. Añez Vladimirovna¹

*Universidad Autónoma Gabriel René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia*

8 de octubre de 2018

¹Correo Electrónico: toborochi98@outlook.com

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia MAT305 (Probabilidad y Estadística II), acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período I-2018 en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

1. Variables Aleatorias	5
1.1. Clasificación de Variables Aleatorias	5
1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria	6
1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)	6
1.3.1. Representación Gráfica	6
1.3.2. Caso Continuo	6
1.3.3. Propiedades de la FDA	7
1.4. Esperanza Matemática	7
1.4.1. Varianza	8
1.5. Función de Probabilidad Conjunta	8
1.5.1. Función de Cuantía Conjunta	8
1.5.2. Función de Densidad Conjunta	8
1.6. Distribuciones Marginales	9
1.6.1. Independencia Estadística de las v.a. X y Y	9
1.6.2. Esperanza Matemática	9
1.6.3. Covarianza	9
1.6.4. Resultado Importantes	9
2. Modelos de Distribución de Probabilidad	11
2.1. Distribuciones Discretas	11
2.1.1. Distribución de Bernoulli	11
2.1.2. Distribución Binomial	11
2.1.3. Distribución de Poisson	12
2.2. Distribuciones Continuas	13
2.2.1. Distribución Uniforme o Rectangular	13
2.2.2. Distribución Exponencial	13
2.2.3. Distribución Normal	13

Capítulo 1

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria x (desde ahora denotada por **v.a.**) es una función definida sobre el espacio muestral S con valores en \mathbb{R} que a cada elemento de S (Punto muestral) hace corresponder un número real $x = X$.

$$x = X(w) \in \text{Rec}_X \subseteq \mathbb{R}$$

Gráficamente

Notación Conjuntista

$$X = \{(w, x) \mid w \in S, x = X(w) \in \mathbb{R}\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$

Donde:

- S : Conjunto Partida (Espacio Muestral).
- \mathbb{R} : Conjunto de llegada.
- w : Elemento de S (Punto Muestral).
- x : Valor de la **v.a.** X .
- Rec_X : Recorrido de X .
- X : Función **v.a.** (Conjunto de Pares Ordenados).

Notaciones

Las **v.a.** se denotan con letras mayúsculas tales como X, Y o Z , y los valores correspondientes con letras minúsculas.

1.1. Clasificación de Variables Aleatorias

- **Discreta:** Cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores:

$$X \text{ es v.a. discreta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Conjunto Finito de Valores} \\ \text{Conjunto Infinito Numerable de Valores} \end{cases}$$

- **Continúa:** Es aquella cuyo recorrido es conjunto finito no numerable de valores, puede tomar cualquier valor en un intervalo o conjunto.

◆ En general las **v.a. discretas** representan datos que provienen del *conteo* de número de elementos. Pueden ser número de titulados, número de estudiantes, etc. Mientras que las **v.a. continuas** representan mediciones, como longitud, capacidad, etc.

1.2. Función de Probabilidad de una Variable Aleatoria

También llamada función de cuantía o función de masa de probabilidad de una **v.a.**.

Se denomina función de probabilidad de una **v.a.** discreta X a una función p o f , cuyo valor es $p(x)$ o $P(X = x)$ ya que a cada valor distinto de la **v.a.** discreta X hace corresponder en un número entre los valores $[0, 1]$ que es su probabilidad, de ahí el nombre de función de cuantía o función de probabilidad. Estos valores satisfacen las siguientes condiciones:

1. $P(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{x_i \in \text{Rec}_X} p(x_i) = 1$
 - Si $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ entonces la condición (II) es: $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$
 - Si $\text{Rec}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ entonces la condición (II) es: $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Si A es un evento en el recorrido de la **v.a.** discreta X entonces la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \sum P(X = x) = \sum p(x)$$

Nota:

$$P(X = x) \begin{cases} p(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0; & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La función de probabilidad de una **v.a.** discreta X se puede expresar por:

- **Un Conjunto:**

$$p = \{(x, P(X))/x \in D_p\}$$

- **Una Tabla:**

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	\dots	$p(x_n)$

- **Una Gráfica:**

1.3. Función de Distribución Acumulada (FDA)

El valor de la **FDA** de una **v.a.** discreta X , que es $F(x)$, viene dada por la sumatoria de las probabilidades, desde un valor mínimo t hasta un valor específico x ; esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.1. Representación Gráfica

Valores $F(x)$ aumentan en *saltos*, presentando entonces la forma de una escalera:

1.3.2. Caso Continuo

Función de Densidad

f es función densidad, si $f(x)$ cumple las siguientes condiciones:

- (I) $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- (II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- (III) $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

FDA

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

1.3.3. Propiedades de la FDA**Caso Discreto**

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
6. $P(X < a) = \begin{cases} F(a-1), & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ F(\llbracket a \rrbracket), & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
9. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
10. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
11. $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Caso Continuo

1. $0 \leq F(x) \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
5. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
6. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
7. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
9. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

1.4. Esperanza Matemática

Sea X una v.a. con función de probabilidad f definida por $f(x)$. La *esperanza matemática* de X , denotada por $E(x)$, μ ó μ_x ; está dada por:

$$E(x) = \mu = \mu_x = \begin{cases} \sum_x x \cdot p(x), & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $E(a) = a$
2. $E(x \pm a) = E(x) \pm a$
3. $E(ax) = aE(x)$
4. $E(ax \pm b) = aE(x) \pm b$

1.4.1. Varianza

Notaciones: $V(x), \sigma^2, \sigma_x^2$

$$V(x) = \sigma^2 = \begin{cases} E[x - \mu]^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x); & \text{Si } X \text{ es v.a. Discreta} \\ E[x - \mu]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx; & \text{Si } X \text{ es v.a. Continua} \end{cases}$$

Propiedades

1. $V(x) \geq 0$
2. $V(a) = 0$
3. $V(ax) = aV(x)$
4. $V(ax \pm b) = a^2V(x)$
5. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

1.5. Función de Probabilidad Conjunta**1.5.1. Función de Cuantía Conjunta**

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s** X y Y si:

$$(I) \quad f(x, y) = p(x, y) \geq 0 \quad \text{Para cualquier } (x, y) \text{ de su dominio.}$$

$$(II) \quad \sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

$$(III) \quad P((x, y) \in A) = \sum_A \sum f(x, y) \quad \text{Para cualquier región } A \text{ del plano } XY.$$

1.5.2. Función de Densidad Conjunta

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) = p(x, y)$$

es el valor de una función de cuantía conjunta de la **v.a.'s** X y Y si:

$$(I) \quad f(x, y) = p(x, y) \geq 0 \quad \text{Para cualquier } (x, y) \text{ de su dominio.}$$

$$(II) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$(III) \quad P((x, y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{Para cualquier región } A \text{ del plano } XY.$$

1.6. Distribuciones Marginales

Sean X y Y **v.a.** con función de probabilidad conjunta definida por $f(x, y)$. La distribución marginal está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Caso Discreto: } & \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \sum_y f(x, y) \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \sum_x f(x, y) \end{cases} \\ \text{Caso Continuo: } & \begin{cases} \text{Distribución Marginal X: } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ \text{Distribución Marginal Y: } h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{cases} \end{aligned}$$

1.6.1. Independencia Estadística de las v.a. X y Y

Sean X y Y **v.a.** discretas o continuas con función de probabilidad conjunta definida por $f(x, y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente. Se dice que las **v.a.** X y Y serán estadísticamente independientes ssi:

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

Para cualquier (x, y) dentro de sus recorridos.

1.6.2. Esperanza Matemática

Sean X y Y **v.a.** con función de probabilidad definida por $f(x, y)$. La media o esperanza matemática de $g(x, y)$ está dada por:

$$\text{Caso Discreto: } E(g(x, y)) = \mu_{g(x, y)} = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot f(x, y)$$

$$\text{Caso Continuo: } E(g(x, y)) = \mu_{g(x, y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

1.6.3. Covarianza

Mide el grado de relación o asociación de dos variables.

1.6.4. Resultado Importantes

1. $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
2. $Cov(x, y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y)$
3. $V(x \pm y) = V(x) + V(y) \pm 2Cov(x, y)$
4. $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y) \pm 2abCov(x, y)$
5. Si X y Y son estadísticamente independientes entonces:
 - a) $E(x, y) = E(x)E(y)$
 - b) $Cov(x, y) = 0$
 - c) $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$
 - d) $V(ax \pm by) = a^2V(x) + b^2V(y)$

Capítulo 2

Modelos de Distribución de Probabilidad

2.1. Distribuciones Discretas

2.1.1. Distribución de Bernoulli

Si la probabilidad de que ocurra un evento p y la probabilidad de que no ocurra es $q(q = 1 - p)$, entonces se dice que la v.a. discreta X se distribuye según Bernoulli, cuya función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x \cdot (1 - p)^{1-x} & ; x = 0; 1 \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Y cuya función de distribución acumulada es:

$$F(X) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q = 1 - p & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$X \sim Ber(x; p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = p \\ V(x) = \sigma^2 = p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{p \cdot q} \end{cases}$$

Conocida como prueba o ensayo de Bernoulli, es un experimento que solo tiene 2 resultados posibles, a los cuales se los llama:

- Éxito (p)
- Fracaso (q)

2.1.2. Distribución Binomial

Una v.a. discreta X tiene distribución lineal si su función de cuantía está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} & ; x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde:

- p : Probabilidad de éxito.
- n : Número de ensayo.
- x : Número de éxitos.

Las Funciones de Distribución Acumulada Binomialmente está definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & ; 0 \leq x < n \\ 1 & ; x \geq n \end{cases}$$

$$X \sim b(x; n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = n \cdot p \\ V(x) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \\ D(x) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{cases}$$

Características de la Distribución Binomial

1. Se realiza n pruebas , cada una independiente.
2. p es la probabilidad de éxito en cada prueba que ocurra en un evento y se mantiene constante a travez de las n pruebas.
3. El experimento es con reposición (sustitución por reemplazo).
4. Se da el valor de la **v.a.** X . La variación de x es desde 0 hasta n .

Observaciones

$$f(x) = b(x; n, p) \quad n \text{ y } p \text{ son parámetros.}$$

Manejo de la Tabla Binomial

1. $\begin{pmatrix} p \leq 0,50 \\ n \leq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x; n, p) = B(x; n, p) - B(x-1; n, p)$
2. $\begin{pmatrix} p > 0,50 \\ n \geq 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i.) } b(x; n, p) = B(n-x; n, 1-p) - B(n-x-1; n, 1-p) \\ \text{(ii.) } b(x; n, p) = b(n-x; n, 1-p) \text{ luego de usar (i.)} \\ \text{(iii.) } B(x; n, p) = 1 - B(n-x-1; n, 1-p) \end{cases}$

2.1.3. Distribución de Poisson

Una **v.a.** discreta X tiene distribución de Poisson, si su función de cuantía está dada por:

$$p(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{otro caso} \end{cases}$$

Parámetro: $\lambda > 0$

La distribución de Poisson se obtiene de 2 maneras:

1. $\lim_{p \rightarrow 0} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \simeq \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$
2. $p(x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda \cdot t} (\lambda \cdot t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$

donde t es la cantidad de medida (intervalo de tiempo, longitud, área, etc...) La **F.D.A.** de Poisson está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$X \sim Poisson(x; \lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \lambda = n \cdot p \\ V(x) = \sigma^2 = n \cdot p \\ D(x) = \sigma = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

2.2. Distribuciones Continuas

2.2.1. Distribución Uniforme o Rectangular

Se dice que una v.a. continua X tiene distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Parámetros: a, b

La gráfica de esta función se muestra en la siguiente figura: La **F.D.A.** de X , distribuida uniformemente, está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x < b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

La gráfica de F es:

$$X \sim U(x; a, b) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{a+b}{2} \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \\ D(x) = \sigma = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

2.2.2. Distribución Exponencial

Sea X una v.a. continua. Se dice que X tiene distribución exponencial con el parámetro real λ , si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Parámetro: $\lambda > 0$

La gráfica de f , se muestra en la siguiente figura: La **F.D.A.** de X , distribuida exponencialmente está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_{-\infty}^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx, & x \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de F , es la siguiente:

$$X \sim exp(x; \lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda} \\ V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ D(x) = \sigma = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Propiedad Amnésica

$$P(X > 5 + t/x > s) = P(X > t)$$

2.2.3. Distribución Normal

Una v.a. continua X tiene distribución normal con media $E(x) = \mu \in \mathbb{R}$ y varianza $V(x) = \sigma^2 > 0$, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = N(x; \mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, x \in \mathbb{R}$$

La gráfica de $f(x)$ es la siguiente:

Características de la Curva Normal

1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$
2. $x < \mu \Rightarrow f'(x) > 0$; luego f es creciente en $] - \infty, \mu]$
3. $x > \mu \Rightarrow f'(x) < 0$; luego f es decreciente en $[\mu, +\infty[$
4. La curva tiene un máximo en $x = \mu$. (Moda en μ)
5. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu + \sigma$
6. Los puntos de inflexión están en: $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
7. La curva de la distribución normal es simétrica respecto de μ .
8. La media, mediana y moda son iguales (coinciden).
9. El área total bajo la curva normal y arriba del eje horizontal, es igual a 1.
10. La curva de la distribución normal se extiende $] - \infty, +\infty[$.

Distribución Normal Estándar