Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

28 de junio de 2018

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT207 (Ecuaciones Diferenciales)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Generales

Se dice que una ecuación es Diferencial si contiene una función desconocida y una o mas de sus derivadas. Si las ecuaciones contienen derivadas de funciones que dependen de una sola variable independiente se tiene una *Ecuación Diferencial Ordinaria.* Si la función depende de varias variables independientes se tienen *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.*

Teorema

Si se tiene la Ecuación:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Si se logra conseguir una función $\alpha(x)$ tal que, al reemplazar en la Ecuación:

$$F(x, \alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x), \ldots, \alpha^{(n)}(x)) = 0$$

Entonces se dice que $\alpha(x)$ es **Solución** de la Ecuación Diferencial.

Familia de Curvas

Una ED en su forma mas simple tiene la siguiente apariencia:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Para resolver esta ED debemos realizar el proceso inverso de la derivada, es decir integrar:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \Rightarrow y = F(x) + C$$

Debe notarse que debido a C esta solución es en realidad un número infinito de soluciones. A esto se le llama **Familia de Curvas**. Una solución particular de esta ecuación, es una sola curva contenida en la familia de curvas.

Orden, Grado y Linealidad de una Ecuación Diferencial

- **Orden:** El Orden de una ED[1] es el orden de la derivada mas alta de la función desconocida (variable dependiente) que aparece en la ecuación.

- **Grado:** El grado se expresa mediante el mayor exponente de la derivada de mayor orden.

- **Linealidad:** Una ED Lineal de orden n es una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

  Cuyos coeficientes $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y el segundo miembro $h(x)$ son continuos en un Intervalo I en el que la $a_n(x) \neq 0$. Si $h(x) = 0$ la Ecuación se llama *Ecuación Diferencial de Orden n Homogénea.*

[1]ED = Ecuaciones Diferenciales (notación que usaremos de aquí en adelante)

1.1. Formas de Resolución

1.1.1. Ecuaciones con Variables Separables

Una ED de 1er Orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es separable, si la función $f(x,y)$ se puede escribir como un producto de una función de x y una función de y.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1.2. Ecuaciones Homogéneas

Una función $M(x,y)$ es Homogénea de grado n si la suma de las potencias de x y y en cada termino es n. Esto es:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$$

Una ED Homogénea es una ED de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

1.2.1. Método de Solución

Las ED Homogéneas se resuelven haciendo la sustitución:

$$y = Vx \qquad\qquad V = \frac{y}{x}$$

donde V es una función de x por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

El miembro que corresponde a la función se puede expresar en términos de $\frac{y}{x}$. Esto se hace dividiendo todo entre x^n. Donde n es el grado de: N y M.

1.3. Ecuación Lineal de 1er Orden

Recordando la definición de una ED de orden n:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

tenemos, para 1er Orden:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \tag{1.1}$$

Dividiendo la ED entre el coeficiente de $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{h(x)}{a_1(x)}}_{Q(x)}$$

Con esto tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1.2}$$

1.3.1. Método de Solución

Partimos de:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x) \cdot y\right] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x) \cdot y = \mu(x)P(x)$$

Tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x) \cdot y\right] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\overbrace{\frac{d\mu}{dx}} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \overbrace{\mu(x)P(x)} \cdot y = \mu(x)Q(x)$$

A partir de esta igualdad obtendremos lo que se llama como *Factor Integrando:*

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x)$$

Para simplificar, escribiremos $\mu(x)$ simplemente como μ, sobreentenderemos que esta en función de x:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot P(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu} = \int P(x)dx$$

$$e^{\ln(\mu)} = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \tag{1.3}$$

Una vez hallado el FI, procedemos a reemplazar en la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\Big[\mu(x) \cdot y\Big] = \mu(x) \cdot Q(x)$$
$$\frac{d}{dx}\Big[e^{\int P(x)dx}y\Big] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Integrando:

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx}$$

1.4. Ecuación de Bernoulli

Tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

Para poder tratar la ecuación, dividimos entre y^n:

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)$$

1.5. Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.4}$$

Es exacta se se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x,y)\Big] = 0$$

Criterio

La diferencia total:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{1.5}$$

Para (1.4) y (1.5) serán lo mismo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = M(x,y) \qquad \wedge \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = N(x,y)$$

Por Clairaut

Si existen las segundas derivadas cruzadas y son continuas entonces estas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

Bibliografía

[1] Ion Zaballa Tejada, *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Curso 2008-2009,* Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco
http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/