Apuntes de Ecuaciones Diferenciales

Leonardo H. Añez Vladimirovna[1]

Universidad Autónoma Gabriél René Moreno,
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones,
Santa Cruz de la Sierra, Bolivia

27 de junio de 2018

[1]Correo Electrónico: `toborochi98@outlook.com`

Notas del Autor

Estos apuntes fueron realizados durante mis clases en la materia `MAT207 (Ecuaciones Diferenciales)`, acompañados de referencias de libros, fuentes y código que use a lo largo del curso, en el período `I-2018` en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones.

Para cualquier cambio, observación y/o sugerencia pueden enviarme un mensaje al siguiente correo:

`toborochi98@outlook.com`

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Generales

Se dice que una ecuación es Diferencial si contiene una función desconocida y una o mas de sus derivadas. Si las ecuaciones contienen derivadas de funciones que dependen de una sola variable independiente se tiene una *Ecuación Diferencial Ordinaria.* Si la función depende de varias variables independientes se tienen *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.*

Teorema

Si se tiene la Ecuación:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si se logra conseguir una función $\alpha(x)$ tal que, al reemplazar en la Ecuación:

$$F(x, \alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x), \dots, \alpha^{(n)}(x)) = 0$$

Entonces se dice que $\alpha(x)$ es **Solución** de la Ecuación Diferencial.

Familia de Curvas

Una ED en su forma mas simple tiene la siguiente apariencia:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Para resolver esta ED debemos realizar el proceso inverso de la derivada, es decir integrar:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \Rightarrow y = F(x) + C$$

Debe notarse que debido a C esta solución es en realidad un número infinito de soluciones. A esto se le llama **Familia de Curvas**. Una solución particular de esta ecuación, es una sola curva contenida en la familia de curvas.

Orden, Grado y Linealidad de una Ecuación Diferencial

- **Orden:** El Orden de una ED[1] es el orden de la derivada mas alta de la función desconocida (variable dependiente) que aparece en la ecuación.

- **Grado:** El grado se expresa mediante el mayor exponente de la derivada de mayor orden.

- **Linealidad:** Una ED Lineal de orden n es una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a(x)y = h(x)$$

  Cuyos coeficientes $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ y el segundo miembro $h(x)$ son continuos en un Intervalo I en el que la $a_n(x) \neq 0$. Si $h(x) = 0$ la Ecuación se llama *Ecuación Diferencial de Orden n Homogénea.*

[1]ED = Ecuaciones Diferenciales (notación que usaremos de aquí en adelante)

1.1. Formas de Resolución

1.1.1. Ecuaciones con Variables Separables

Una ED de 1er Orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es separable, si la función $f(x,y)$ se puede escribir como un producto de una función de x y una función de y.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1.2. Ecuaciones Homogéneas

Una función $M(x,y)$ es Homogénea de grado n si la suma de las potencias de x y y en cada termino es n. Esto es:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$$

Una ED Homogénea es una ED de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

1.2.1. Método de Solución

Las ED Homogéneas se resuelven haciendo la sustitución:

$$y = Vx \qquad\qquad V = \frac{y}{x}$$

donde V es una función de x por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$$

El miembro que corresponde a la función se puede expresar en términos de $\frac{y}{x}$. Esto se hace dividiendo todo entre x^n. Donde n es el grado de: N y M.

Bibliografía

[1] Ion Zaballa Tejada, *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Curso 2008-2009,* Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco
`http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/`