Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

☐	Grupo 01	- Lunes de 09:00 a 11: 00	(Prof. Martínez Martín, Ester)
☐	Grupo 02	- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00	(Prof. Escolano Ruiz, Francisco)
☐	Grupo 03	- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00	(Prof. Vicent Francés, José F.)
☐	Grupo 04	- Martes de 15:00 a 17:00	(Prof. Salinas Serrano, José María)
☐	Grupo 05	- Martes de 09:00 a 11:00	(Prof. Vicent Francés, José F.)
☐	Grupo 40	- Lunes de 11:00 a 13:00	(Prof. Martínez Martín, Ester)

Convocatoria de JUNIO. Matemáticas II. 17 junio 2019

Instrucciones generales:

- ✓ Debes seleccionar tu grupo de teoría y dispones de 2h y 15 minutos para la realización de la prueba.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.
- ✓ El incumplimiento de estas normas se reflejará en la evaluación.

	Nota	
Ejercicio 1	2	
Ejercicio 2	2	
Ejercicio 3	1	
Ejercicio 4	2	
Ejercicio 5	2	
Ejercicio 6	1	
Total		

1. *(2 puntos)* Dada la siguiente tabla de datos obtenidos a temperatura constante de 25ºC:

X: Presión (en atm)	1.090	1.341	1.606
Y: Volumen (en litros)	22.2	18	15

Usar el polinomio interpolador obtenido mediante el método de Lagrange para calcular el volumen si la presión es 1.2 atmósferas.

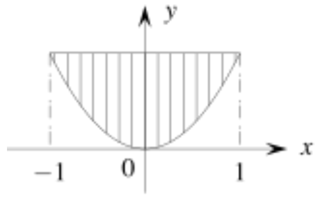
$$L_{2,0} = \frac{(x-1.341)(x-1.606)}{(1{,}090-1{,}341)(1{,}090-1{,}606)}\,;\, L_{2,1} = \frac{(x-1.090)(x-1.606)}{(1{,}341-1{,}090)(1{,}341-1{,}606)};$$

$$L_{2,0} = \frac{(x-1.090)(x-1.341)}{(1{,}606-1{,}090)(1{,}606-1{,}341)}$$

$$P_2(x) = 22{,}2\frac{(x-1.341)(x-1.606)}{0.1295} + 18\frac{(x-1.090)(x-1.606)}{-0.06652} + 15\frac{(x-1.090)(x-1.341)}{0.13674}$$

$$P_1(1.2) = 9.8136 + 12.0848 - 1.7014 = 20.197$$

2. *(2 puntos)* Encontrar la integral doble de $f(x,y) = x + y$ sobre la región D de la figura delimitada por $\{-1 \le x \le 1\ ;\ \ x^2 \le y \le 1\}$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x+y)dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} (x+y)dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{10} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

3. (1 punto) Dados los puntos de control $p_0=(-1,0)$, $p_1=(1,1)$, $p_2=(2,3)$, obtener razonadamente la curva de Bezier.

(-1,0)		
	(1-t)(-1,0)+t(1,1)	
(1,1)		(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))
	(1-t)(1,1)+t(2,3)	
(2,3)		

$(X(t),Y(t))=(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))=$

$=(1-2t+t^2)(-1,0)+(t-t^2)(1,1)+(t-t^2)(1,1)+t^2(2,3)$

$X(t)=-(1-2t+t^2)+2(t-t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$

$Y(t)=2(t-t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$

4. *(2 puntos)* Una empresa que fabrica pelotas de golf ha desarrollado un modelo de ganancias que depende del número *x* de pelotas de golf fabricadas al mes (medida en miles), y del número de horas por mes en anuncios *y*. El modelo viene dado por la función

   $f(x, y) = 48x + 96y - x^2 - 2xy - 9y^2$ donde $f(x, y)$ viene dado en miles de euros.

   Calcular razonadamente el número de pelotas que tienen que fabricar al mes y el número de horas de anuncios (al mes) para que el beneficio sea máximo. Tener en cuenta que solo pueden fabricar 50000 pelotas mensuales y el máximo número de horas de anuncios mensuales que pueden pagar es de 25.

$f_x = 48 - 2x - 2y;\ f_y = 96 - 2x - 18y$

$f_x = 0$ y $f_y = 0$ se obtiene $x = 21; y = 3$

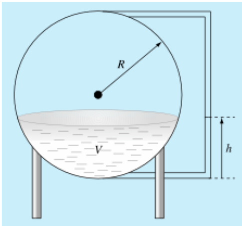
Para comprobar si es máximo

$f_{xx} = -2; f_{yy} = -18; f_{xy} = -2 = f_{yx}$ luego $G = 32.$

Como $G > 0$ y $f_{xx} < 0$ es un máximo.

El valor (21, 3) está dentro del dominio de la función, luego se maximiza el beneficio si fabrican 21000 pelotas y hacen 3 horas de anuncios mensuales.

5. (*2 puntos*) Se utiliza un tanque esférico (véase la figura) para almacenar agua. El volumen de líquido que puede contener es $V = \pi h^2 \dfrac{(3R-h)}{3}$,



donde V es el volumen en metros cúbicos, h es la profundidad del agua en el tanque (en metros) y R es el radio del tanque (también en m). Si R=3, calcula:

a) (1.5 puntos) La profundidad h a que debe llenarse el tanque para que contenga 30m^3 de agua. Utiliza cuatro iteraciones con el método de Newton comenzando con *a=1*.
b) (0.5 puntos) Calcula cuántos dígitos exactos tiene la aproximación por el método de Newton que has calculado.

Nota: Redondea a 4 decimales en tus cálculos

n	a_i	c_i	$f(a_i)$	$f'(a_i)$	$h = f(a_i)/f'(a_i)$
1	1	2,3765	21,6224	-15,7080	-1,3765
2	2,3765	2,0374	-9,1742	-27,0531	0,3391
3	2,0374	2,0269	-0,2661	-25,3634	0,0105
4	2,0269	2,0269	-0,0003	-25,2996	0,0000

Hay que encontrar las raíces de $30 - \pi h^2 (\dfrac{3R-h}{2})$

Como h=0, todas las cifras son exactas.

6. *(1 punto)* Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}07 \quad B = 3 \pm 0{,}05 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\sqrt{B - AC}$ y su cota de error relativo.

$$\sqrt{B - (8 \pm 0.875\%)(0.25 \pm 4\,\%} = \sqrt{B - (4 \pm 4.875\%)} = \sqrt{B - (4 \pm 0.0975)} =$$

$$= \sqrt{(3 \pm 0.05) - (4 \pm 0.0975)} = \sqrt{(1 \pm 0.1475)}$$

$$f(x) = \sqrt{x};\, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(1 \pm 0.1475) = \sqrt{1} \pm 0.1475\frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 \pm 0.07375$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

- ☐ Grupo 01 - Lunes de 09:00 a 11: 00 (Prof. Martínez Martín, Ester)
- ☐ Grupo 02 - ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00 (Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)
- ☐ Grupo 03 - Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00 (Prof. Vicent Francés, José Francisco)
- ☐ Grupo 04 - Martes de 15:00 a 17:00 (Prof. Salinas Serrano, José María)
- ☐ Grupo 05 - Martes de 09:00 a 11:00 (Prof. Vicent Francés, José Francisco)
- ☐ Grupo 40 - Lunes de 11:00 a 13:00 (Prof. Martínez Martín, Ester)

Convocatoria de JUNIO. Matemáticas II. 4 junio 2018

SOLUCIONES

Instrucciones generales:

- ✓ Debes seleccionar tu grupo de teoría y dispones de 2h para la realización de la prueba.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	2	
Ejercicio 2	2	
Ejercicio 3	2	
Ejercicio 4	2	
Ejercicio 5	2	
Total		

1. *(2 puntos)* Se sabe que $H_3(x) = 4 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + 3/2(x+1)^2(x-1)$ es el polinomio interpolado de Hermite que aproxima cierta función f, basado en los datos $f(-1), f(1), f'(-1), f'(1)$.

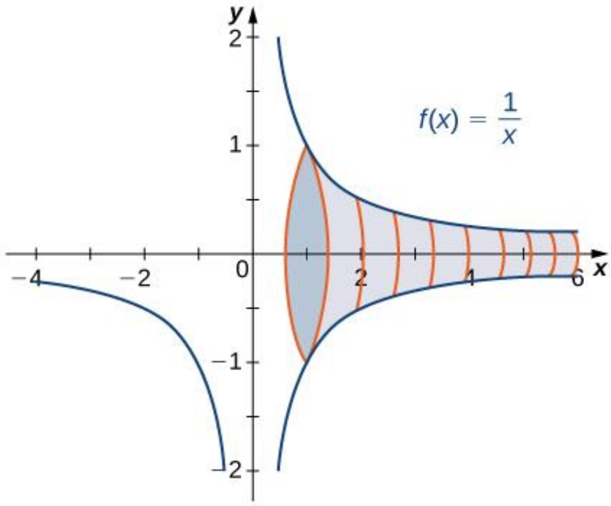
   a) (0.25 puntos) ¿Por qué el grado del polinomio es 3?

   b) (1.75 puntos) Sin evaluar $H_3(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite utilizada para la construcción de $H_3(x)$.

Porque grado =2*n-1, con n=número de puntos

-1	4			
		3		
-1	4		-2	
		-1		3/2
1	2		1	
		1		
1	2			

2. *(2 puntos)* Encontrar el volumen del solido de revolución obtenido al girar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del eje x, desde $x = 1$ hasta $x = \infty$.



Tenemos que $V = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \pi \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{x})_1^t = \cdots = \pi$

3. (*2 puntos*) Un brazo robot con un escáner laser está haciendo un control de calidad en los agujeros perforados en una placa rectangular. Los centros de los agujeros de la placa describen el camino que el brazo necesita tomar. Los centros están ubicados en un sistema de coordenadas cartesianas (con el origen en la esquina inferior izquierda de la placa) dados por la tabla

x (pulgadas)	**y** ***(pulgadas)***
2	7.2
4.25	7.1
5.25	6.0

a) (1.5 puntos) Obtén el polinomio interpolador de Lagrange.
b) (0.5 puntos) Calcula la coordenada ***y*** del centro de un nuevo agujero situado en ***x***=4.

$$P_2(x) = 7.2\frac{(x-4.25)(x-5.25)}{(2-4.25)(2-5.25)} + 7.1\frac{(x-2)(x-5.25)}{(4.25-2)(4.25-5.25)} + 6\frac{(x-2)(x-4.25)}{(5.25-2)(5.25-4.25)}$$

$$P_2(x) = 7.2\frac{(4-4.25)(4-5.25)}{(2-4.25)(2-5.25)} + 7.1\frac{(4-2)(4-5.25)}{(4.25-2)(4.25-5.25)} + 6\frac{(4-2)(4-4.25)}{(5.25-2)(5.25-4.25)} = 5.88$$

4. *(2 puntos)* La cantidad de calor que se desprende de una reacción química al interactuar x moléculas de un compuesto con y moléculas de otro se modelista por la función matemática $Q(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar x e y para que la cantidad de calor desprendida sea máxima.

$f_x = -10x - 2y + 42 = 0 f_y = -16y - 2x + 102 = 0 x = 3 y = 6$

$f_{xx} = -10 f_{yy} = -16 f_{xy} = f_{yx} = -2$

$G = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 156 > 0$

Como $G > 0$ y $f_{xx} < 0$ es un máximo

5. (*2 puntos*) Considera una función T(x) que describe la distribución de temperaturas (T) en una barra conductora (considerada unidimensional), en función de la coordenada espacial x. Se desea estimar la temperatura en el punto de abscisa x=0.5, sabiendo que en los puntos del soporte {x=0, x=1, x=2} la temperatura toma los valores $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}, \frac{1}{2e^4}\}$.
   a) (1.5 puntos) Obtén el polinomio interpolador utilizando la fórmula de Newton de diferencias divididas.
   b) (0.5 puntos) Sabiendo que la distribución de temperaturas responde a la expresión $T(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}$, ¿qué error absoluto se ha cometido en la determinación de la temperatura en x = 0.5 con respecto al valor exacto?

Nota: Redondea a 5 decimales en tus cálculos

0	0.5		
		-0.31606	
1	0.18394		0.07064
		-0.17478	
2	0.00916		

$$P_2(x) = 0.5 - 0.31606x + 0.07064x(x-1)$$

$$P_2(0.5) = 0.5 - 0.31606x0.5 + 0.07064x0.5(0.5-1) = 0.32431$$

$$T(0.5) = \frac{1}{2}e^{-0.5^2} = 0.3894$$

$$|0.32431 - 0.3894| = 0.06509$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

☐	Grupo 01	- Lunes de 09:00 a 11: 00	(Prof. Martínez Martín, Ester)
☐	Grupo 02	- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00	(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)
☐	Grupo 03	- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00	(Prof. Vicent Francés, José Francisco)
☐	Grupo 04	- Martes de 15:00 a 17:00	(Prof. Salinas Serrano, José María)
☐	Grupo 05	- Martes de 09:00 a 11:00	(Prof. Vicent Francés, José Francisco)
☐	Grupo 40	- Lunes de 11:00 a 13:00	(Prof. Martínez Martín, Ester)

Convocatoria extraordinaria de JULIO. Matemáticas II. 12 julio 2018

Instrucciones generales:

- ✓ Debes seleccionar tu grupo de teoría y dispones de 2h para la realización de la prueba.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	2	
Ejercicio 2	2	
Ejercicio 3	2	
Ejercicio 4	2	
Ejercicio 5	2	
Total		

1. (2 puntos) Una empresa produce dos tipos distintos A y B de un bien. El coste diario de producir x unidades de A e y unidades de B es

   $Coste(x, y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500.$

   Si la empresa ingresa 15€ por cada producto del tipo A y 9€ por unidad del B, calcula:

   a. (0.25 puntos) La función B que representa el beneficio de la empresa.

   b. (1.75 puntos) Número de unidades que hay que vender de cada tipo para maximizar el beneficio.

$$Coste(x.y) = 0.04x^2 + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500$$
$$Ingresos(x, y) = 15x + 9y$$

$$\begin{aligned} Beneficio(x, y) &= Ingresos - Coste \\ &= (15x + 9y) - (0.04x^2 + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500) \end{aligned}$$
$$\mathrm{f_x} = 15 - 0.08\mathrm{x} - 0.01\mathrm{y} - 4 = 11 - 0.08\mathrm{x} - 0.01\mathrm{y} = 0$$
$$f_y = 9 - 0.01x - 0.02y - 2 = 7 - 0.01x - 0.02y = 0$$

Al resolver el sistema sale x=100, y=300

$\mathrm{f_{xx}} = -0.08;\ \mathrm{f_{yy}} = -0.02;\ \mathrm{f_{xy}} = -0.01 = \mathrm{f}_{yx}$

$$G = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$$

Como G >0 y f_{xx}<0 → es un máximo

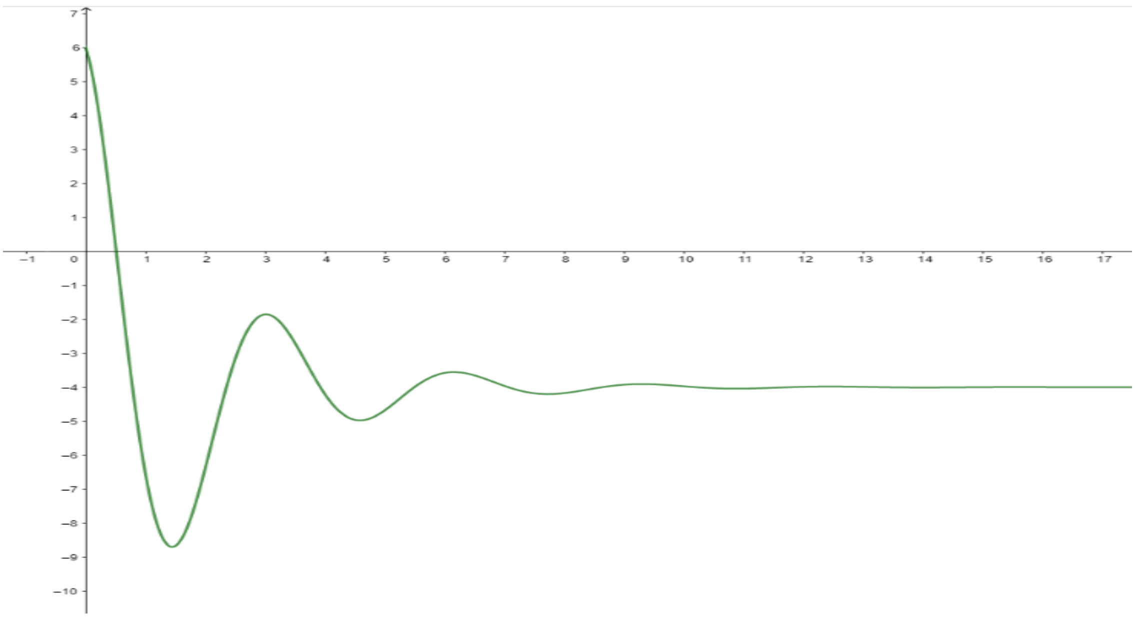
2. (2 puntos) Calcular el volumen comprendido entre $f(x,y) = 4 - x - y$ y el plano xy, sobre el rectángulo $D = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

$$\int_0^2 [\int_0^1 (4 - x - y)dy\,]dx$$

$$\int_0^1 (4 - x - y)dy = \left[4\mathrm{y} - \mathrm{xy} - \frac{y^2}{2}\right] = \left(4 - x - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{7}{2} - x$$

$$\int_0^2 (7/2 - x)dx = \left[\frac{7}{2}\mathrm{x} - \frac{x^2}{2}\right] = (7 - 2) = 5\,uv$$

3. (2 puntos) La oscilación de una estructura con un sistema de amortiguación, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la función $y(t) = 10e^{-t/2}\cos(2t) - 4$



a. (0.25 puntos) Mira la gráfica y elige un intervalo, con límites enteros, en el que se cumplan las condiciones del teorema de Bolzano.

b. (1.75 puntos) Encuentra la raíz de esta ecuación utilizando el método de la Bisección con una cota de error $\Delta = 5.10^{-2}$

Solución:
Como f(0) = 6 > 0 y f(1) = -6.524 < 0 entonces podemos tomar [a, b] = [0, 1]
El número máximo de iteraciones que debemos realizar para asegurar la tolerancia de error (o límite de tolerancia) es:

7	=n		Δ=	0.01		ε=	
i	a	b	c	h	f(a)	f(b)	f(c)
1	0	1	0.5	0.5	6	-6.5241	0.20788
2	0.5	1	0.75	0.25	0.20788	-6.5241	-3.5138
3	0.5	0.75	0.625	0.125	0.20788	-3.5138	-1.6931
4	0.5	0.625	0.5625	0.0625	0.20788	-1.6931	-0.74531
5	0.5	0.5625	0.53125	0.03125	0.20788	-0.74531	-0.26842

4. *(2 puntos)* Sean $p_0 = (-1,0)$, $p_1 = (1,1)$, $p_2 = (2,1)$ y $p_3 = (1,3)$ los puntos de control de una curva de Bezier cúbica. Calcula:
   a. (1 punto) La curva de Bezier
   b. (0.5 puntos) El punto de la curva cuando $t = 0$, $t = \frac{1}{4}$ y $t = 1$.
   c. (0.5 puntos) La derivada de la curva de Bezier en función de t.

a.

$$(-1,0)(1-t) + (1,1)t = (t-1,0) + (t,t) = (2t-1,t)$$

$$(1,1)(1-t) + (2,1)t = (1-t,1-t) + (2t,t) = (1+t,1)$$

$$(2,1)(1-t) + (1,3)t = (2-2t,1-t) + (t,3t) = (2-t,1+2t)$$

$$\begin{aligned}(2t-1,t)(1-t) + (1+t,1)t &= (2t-2t^2-1+t, t-t^2) + (t+t^2,t) \\ &= (-t^2+4t-1, -t^2+2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+t,1)(1-t) + (2-t,1+2t)t &= (1-t^2,1-t) + (2t-t^2, t+2t^2) \\ &= (-2t^2+2t+1, 2t^2+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-t^2+4t-1, -t^2+2t)(1-t) + (-2t^2+2t+1, 2t^2+1)t \\ &\quad = (-t^2+t^3+4t-4t^2-1+t, -t^2+t^3+2t-2t^2) \\ &\quad + (-2t^3+2t^2+t, 2t^3+t) = (-t^3-3t^2+6t-1, 3t^3-3t^2+3t)\end{aligned}$$

$$x(t) = (-1+6t-3t^2-t^3)$$

$$y(t) = (3t-3t^2+3t^3)$$

$x(0) = -1;\ y(0) = 0$

$x(1) = 1;\ y(1) = 3$

$x(1/4) = 19/64;\ y(1/4) = 39/64$

$$x' = (6-6t-3t^2)$$

$$y' = (3-6t+9t^2)$$

5. (2 puntos) La concentración de una determinada toxina, en un lago situado cerca de un área industrial, viene dada por la siguiente tabla.

2009	2011	2013	2015	2017	2019
13.0	15.2	18.2	19.8	24.1	???

a. Obtén el polinomio interpolador utilizando el método de Lagrange.

b. Predice cual será la concentración de la toxina el año que viene (2019).

$$L_{4,0} = \frac{(x-2011)(x-2013)(x-2015)(x-2017)}{(2009-2011)(2009-2013)(2009-2015)(2009-2017)}$$

$$L_{4,1} = \frac{(x-2009)(x-2013)(x-2015)(x-2017)}{(2011-2009)(2011-2013)(2011-2015)(2011-2017)}$$

$$L_{4,2} = \frac{(x-2009)(x-2011)(x-2015)(x-2017)}{(2013-2009)(2013-2011)(2013-2015)(2013-2017)}$$

$$L_{4,3} = \frac{(x-2009)(x-2011)(x-2013)(x-2017)}{(2015-2009)(2015-2011)(2015-2013)(2015-2017)}$$

$$L_{4,4} = \frac{(x-2009)(x-2011)(x-2013)(x-2015)}{(2017-2009)(2017-2011)(2017-2013)(2017-2015)}$$

$$P(x) = 13.0L_{4,0} + 15.2L_{4,1} + 18.2L_{4,2} + 19.8L_{4,3} + 24.1L_{4,4}$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Lunes de 09:00 a 11: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:00 a 17:00**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 09:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 40**	**- Lunes de 11:00 a 13:00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**

Examen Final de Matemáticas II. 6 Junio 2017

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre y DNI) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**2**	
Ejercicio 4	**2**	
Ejercicio 5	**2**	
Total		

1. (2 puntos) En la siguiente función encontrar los puntos críticos y determinar si éstos son máximos o mínimos relativos o puntos de silla:

$$f(x,y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$$

Calculamos la primera derivada e igualamos a cero

$$f_x = 9x^2 - 225 = 0 \;\text{ y }\; f_y = -10y \quad + 70$$

Con esto obtenemos $x = \pm 5$ y $y = 7$. Evaluamos los puntos $(-5,7)$ y $(5,7)$

Calculamos la segunda derivada

$f_{xx} = 18x \quad , f_{yy} = -10 \, , f_{xy} = f_{yx} = 0$

Evaluando el punto $(5,7)$ obtenemos que es un punto de silla

Evaluando el punto $(-5,7)$ obtenemos que es un máximo

2. (2 puntos) Sean $P(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-1.5) - 2(x-1)(x-1.5)x$ y $Q(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)x - 2(x-2)x(x-1.5)$, dos polinomios de interpolación de una misma función $f(x)$, obtenidos mediante diferencias divididas a partir de los mismos x_i en distinto orden.

a) (1.5 puntos) Obtener las tablas de diferencias divididas que dan origen a $P(x)$ y $Q(x)$, teniendo en cuenta que $P(x_i) = Q(x_i)$, siendo x_i la primera columna de la tabla.

b) (0.5 puntos) Estimar $f(1.75)$ usando $P(x)$ y $Q(x)$.

a) Como $P(x)$ y $Q(x)$ interpolan a $f(x)$, esto quiere decir que $P(x) \cong f(x)$ y $Q(x) \cong f(x)$.

Es decir que en los nodos $P(x_i) = Q(x_i),\ \forall\, i = \{0,\ 1,\ 1.5,\ 2\}$

La tabla de diferencias divididas que da origen a $P(x)$ es

1	3			
		1/2		
1.5	P(1.5)		1/3	
		(P(0)-P(1.5))/(0-1.5)		-2
0	P(0)		…	
		(P(a)-P(0))/(a-0)		
a	P(a)			

La tabla de diferencias divididas que da origen a $Q(x)$ es

2	5/3			
		-2/3		
0	Q(0)		-5/3	
		(Q(1.5)-Q(0))/(1.5-0)		-2
1.5	Q(1.5)		…	
		(Q(b)-Q(1.5))/(b-1.5)		
b	Q(b)			

Es evidente que el punto que falta para la tabla de $P(x)$ es el 2 y el punto que falta para la tabla de $Q(x)$ es el 1.

Con lo que $a = 2, P(a) = P(2) = Q(2) = \frac{5}{3}$ y $b = 1, Q(b) = Q(1) = P(1) = 3$

Con estos datos la obtención de los valores que faltan es inmediata

1	3			
		1/2		
1.5	13/4		1/3	
		1/6		-2
0	3		-5/3	
		-2/3		
2	5/3			

2	5/3			
		-2/3		
0	3		-5/3	
		1/6		-2
1.5	13/4		1/3	
		1/2		
1	3			

b) Y el valor en 1.75 es

$$P(1.75) = \frac{89}{32} = 2.78125$$

$$Q(1.75) = \frac{89}{32} = 2.78125$$

3. (2 puntos) Una determinada sustancia se desintegra según la ecuación

$$A(t) = P\, e^{-0.0248t},$$

donde P es la cantidad inicial en el tiempo $t = 0$ y $A(t)$ la cantidad resultante después de t años. Si inicialmente se depositan 500 miligramos de dicha sustancia. Se necesita determinar el tiempo que debe transcurrir para que quede solo el 1 por ciento de la sustancia inicial depositada.

- **a)** (0.5 puntos) Determina la función $f(t)$ cuya raíz nos da el tiempo que debe transcurrir para que quede el 1 por ciento de la sustancia inicial depositada.
- **b)** (1.5 puntos) Partiendo de $t_0 = 0$ aplica el método de Newton para calcular dicha raíz. (utiliza 5 cifras decimales y 8 iteraciones)

a) $0{,}01\ 500 = 500\, e^{-0{,}0248t}$ $\qquad f(t) = e^{-0{,}0248t} - 0{,}01$

b) $f'(t) = (-0{,}0248)\, e^{-0{,}0248t}$

	t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	h_i
0	0	0,99	-0,0248	-39,91935
1	39,91935	0,36158	-0,00922	-39,21692
2	79,13627	0,1305	-0,00348	-37,5
3	116,61328	0,04543	-0,00137	-33,16058
4	149,56256	0,01436	-0,0006	-23,93333
5	173,23469	0,00345	-0,00033	-10,45455
6	183,64645	0,00038	-0,00026	-1,46154
7	185,26183	0,00001	-0,00025	-0,04
8	185,30183	0		

4. (2 puntos*)* Dado el spline cúbico interpolador de los puntos:

$(x_0, y_0) = (0,1)$, $(x_1, y_1) = (1,2)$ y $(x_2, y_2) = (2, a)$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si\ \ 0 \le x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si\ \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural, es decir $S_0''(x_0) = S_1''(x_n) = 0$

Recuerda también que $S_1'(x_1) = S_0'(x_1)$ y $S_1''(x_1) = S_0''(x_1)$

$S_0'(x) = 2 - 3x^2$

$S_0''(x) = -6x$

$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$

$S_1'(x) = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$

$S_1''(x) = 2c + 6dx - 6d$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$ $\qquad a = -1$

5. (2 puntos) Sea la función $f(x)$ una función contínua en [0,1] y derivable en (0,1), tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utiliza el método de Integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Tenemos que averiguar $\int_0^1 f(x)dx$.

Podemos hacerlo aplicando integración por partes a $\int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1$:

$$\int_0^1 2xf'(x)\,dx = \left[\int 2xf'(x)\,dx\right]_0^1 = \left\| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \\ u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = f'(x)\,dx & v = f(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \left[2x\,f(x) - \int f(x)\,2\,dx\right]_0^1 = [2x\,f(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1 \end{array} \right\| = (0) - 2\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

luego $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2}$

O directamente a $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_0^1 = \left\| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \\ u = f(x) & du = f'(x)\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\| = \left[f(x)\,x - \int x\,f'(x)\,dx\right]_0^1 =$$

$$= [f(x)\,x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(x)\,dx = \left\| \begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1 \end{array} \right\| = (0) - \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Lunes de 09:00 a 11: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:00 a 17:00**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 09:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 40**	**- Lunes de 11:00 a 13:00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**

Convocatoria de JULIO. Matemáticas II. 6 Julio 2017

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre y DNI) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2.5**	
Ejercicio 2	**1**	
Ejercicio 3	**2.5**	
Ejercicio 4	**2**	
Ejercicio 5	**2**	
Total		

1. *(2.5 puntos)* Se pretende aproximar los valores que toma la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ mediante un polinomio de interpolación de Hermite, partiendo de dos valores x_0, x_1. Los valores vienen expresados en radianes; no olvides configurar tu calculadora en modo radián.

a) *(0.1 puntos)* Indica, de forma razonada, el grado máximo del polinomio buscado.

El grado máximo de un polinomio de interpolación de Hermite es 2n-1 siendo n el número de puntos a interpolar, En este caso con 2 puntos, el grado es 3.

b) *(0.8 puntos)* Si los valores de partida son $x_0 = 0{,}40$, $x_1 = 0{,}42$, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite y anota los resultados en el espacio reservado a continuación. Redondea a cinco cifras decimales todos los cálculos. Si este apartado se te resiste, pasa a los siguientes, ya que los valores que necesitas para continuar están en la tabla.

0,40	0,38942			
		0,92106		
0,40	0,38942		-0,20300	
		0,91700		0,37500
0,42	0,40776		-0,19550	
		0,91309		
0,42	0,40776			

c) *(0.8 puntos)* A partir de la tabla del apartado anterior, construye el polinomio interpolador de Hermite. No es necesario desarrollar las potencias de $(x - x_0)$, $(x - x_1)$ y simplificar.

$$P(x) = 0{,}38942 + 0{,}92106(x - x_0) - 0{,}203(x - x_0)^2 - 0{,}375(x - x_0)^2(x - x_1)$$

d) *(0.8 puntos)* Haciendo uso del polinomio obtenido en el apartado anterior, obtén un valor aproximado de seno de 0,41 y compáralo con el que se obtiene con la calculadora. Redondea a cinco cifras decimales todos los cálculos.

Si $x = 0{,}41$, se tiene que $x - x_0 = 0{,}01$, $x - x_1 = -0{,}01$ y $(x - x_0)^2 = 0{,}0001$.
Operando se tiene que $P(x) = 0{,}39861$.
Por otro lado, haciendo uso de la calculadora y redondeando a cinco cifras decimales, se obtiene el mismo resultado: $\operatorname{sen} 0{,}41 = 0{,}39861$.

2. *(1 punto)* Calcula la siguiente integral:

$\iint_D dxdy$ siendo $D = \left\{(x, y) \in R^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 - x\right\}$

$$\iint_D dxdy = \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1-x} dy\right] dx = \int_0^{1/2} (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

3. *(2.5 puntos)* Dadas las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ vamos estimar el punto de corte de ambas funciones.

a) (0.5 punto) Calcula la función $f(x)$ que hay que igualar a cero.

$g(x) = x - \frac{1}{2}$ $h(x) = \cos(x)$ luego tenemos $f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x)$

b) *(0.5 puntos)* Comprueba que $f(x)$ en el intervalo [0,5, 1,25] cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

$f(0{,}5) = -0{,}87758$ y $f(1{,}25) = 0{,}43468$ son de signos distintos. Se cumple.

c) *(1.5 punto)* Utilizando el método de la Bisección, obtener una raíz de $f(x)$ iterando hasta lograr dos dígitos exactos. Opera redondeando a 4 decimales.

El resultado es una magnitud de orden unidades. Si exigimos dos dígitos exactos:

$$m = 0 \qquad n = 2$$

Según el teorema de la acotación: $\Delta \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = 0{,}5\ 10^{-1} = 0{,}05$

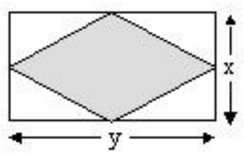
Luego $\mathrm{h} <= 0{,}05$ garantiza 2 dígitos exactos.

El resultado es 1,0218169 con los dígitos exactos 1,02

a	*b*	*c*	*h*	*f(a)*	*f(b)*	*f(c)*
0,5	1,25	0,875	0,365	-0,87758	0,43468	-0,266
0,875	1,25	1,0625	0,1875	-0,266	0,43468	-0,07581
0,875	1,0625	0,96875	0,09375	-0,266	0,07581	-0,09758
0,96875	1,0625	1,01563	0,04688	-0,09758	0,07581	-0,011845

Resultado $x = 1{,}01563 \pm 0{,}04688$

4. *(2 puntos)* ¿Cuáles son las dimensiones (los valores de x e y) de un rectángulo de perímetro igual a 100, para que el área de un romboide inscrito, como el de la figura, sea máxima? El romboide tiene los cuatro lados iguales (es un rombo). Di también cuál es tamaño del lado del romboide.



Nota: Área de un romboide es producto de sus ejes partido por dos.

$$A_R = \frac{x\,y}{2}$$

Perímetro del rectángulo $= 100$ luego $100 = 2x + 2y,\ \ y = 50 - x$

$$A_R(x) = 25x - \frac{x^2}{2} \qquad A_R'^{(x)} = 25 - x = 0 \qquad x = 25$$

Como A''(x)=-1< 0 es un máximo.

Entonces $x = 25$ $y = 25$

Y el romboide tendrá de lado $\frac{25}{\sqrt{2}} = 17{,}67767$

5. *(2 puntos)* Dados los puntos de control $p_0=(-1,0)$, $p_1=(1,1)$, $p_2=(2,3)$. Calcula la curva de Bezier $(X(t), Y(t))$ mediante la fórmula recursiva de De Casteljau.

(-1,0)		
	(1-t)(-1,0)+t(1,1)	
(1,1)		(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))
	(1-t)(1,1)+t(2,3)	
(2,3)		

$$(X(t),Y(t))=(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))=$$
$$=(1-2t+t^2)(-1,0)+(t-t^2)(1,1)+(t-t^2)(1,1)+t^2(2,3)$$

$$X(t)=-(1-2t+t^2)+2(t-t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$$

$$Y(t)=2(t-t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

- ☐ **Grupo 01** - Lunes de 09:00 a 11: 00 (Prof. Martínez, Francisco)
- ☐ **Grupo 02** - ARA - Miércoles de 11:00 a 13:00 (Prof. Escolano, Francisco)
- ☐ **Grupo 03** - Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00 (Prof. Vicente, José F.)
- ☐ **Grupo 04** - Martes de 15:00 a 17:00 (Prof. Salinas, José María)
- ☐ **Grupo 05** - Martes de 9:00 a 11:00 (Prof. Vicente, José F.)

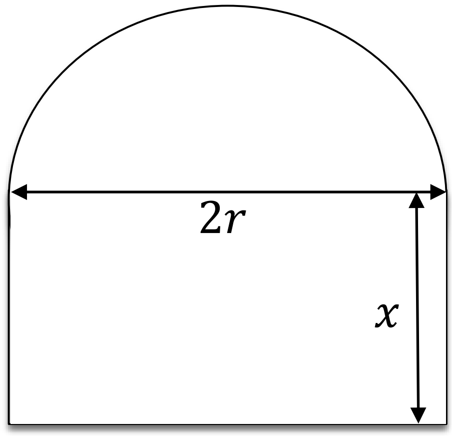
Examen Final de Matemáticas II. 29 Mayo 2015

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Está terminantemente prohibido el uso de teléfonos móviles.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	2	
Ejercicio 2	2	
Ejercicio 3	1,5	
Ejercicio 4	1,5	
Ejercicio 5	1	
Ejercicio 6	2	
Total		

1. **(2 puntos)** Un ranchero usa 600 metros de valla para construir un corral como el de la figura. Encontrad las dimensiones que maximizan el área del corral.



Perímetro: $2x + 2r + \pi r = 600$ $\quad x = \frac{600-(2+\pi)r}{2}$

Área: $A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx$ $\quad A(r) = \frac{\pi}{2}r^2 - (2+\pi)r^2 + 600r$

$$A'(r) = \pi r - (4 + 2\pi)r + 600 = 600 - (4+\pi)r = 0$$

$$\boldsymbol{r = \frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$\boldsymbol{x} = 300 - (2+\pi)\frac{300}{4+\pi} = 300\left(1 - \frac{2+\pi}{4+\pi}\right) = 300\left(\frac{2}{4+\pi}\right) = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$x = r \quad A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx = \frac{\pi r^2 + 4r^2}{2} = r^2\,\frac{4+\pi}{2} = \boldsymbol{\left(\frac{600}{4+\pi}\right)^2}\,\frac{4+\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi}\,\frac{600}{2} = r\,300}$$

$$\boldsymbol{A = 84,015 \cdot 300 = 25204,5}$$

2. **(2 puntos)** El porcentaje de concentración de cloro en el agua disminuye según la siguiente expresión $20e^{-t}$ siendo t el tiempo en horas. En este instante ($t_0 = 0$) la concentración es del 20% ($20e^{-0} = 20$).

a. **(1.25 puntos)** Utiliza el método de Newton para calcular el tiempo t_n que se necesita para que la concentración se reduzca al 6% ($20e^{-t} = 6$), es decir, aplica el método a la función $f(t) = 20e^{-t} - 6$. Itera hasta asegurarte que el error es menor de una centésima. Redondea todas las operaciones a cuatro decimales y utiliza $t_0 = 0$ como valor inicial.

$$f(t) = 20e^{-t} - 6 \qquad \boldsymbol{f'(t) = -20e^{-t}}$$

n	t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	$h = f(t_i)/f'(t_i)$
0	0	14	-20	-0,7
1	0,7	3,9317	-9,9317	-0,3959
2	1,0959	0,6848	-6,6848	-0,1024
3	1,1983	0,0347	-6,0347	-0,0058
4	**1,2041**			|-0,0058|<0,01
5				

$|h|$ es cota del error absoluto y $t_4 = 1{,}2041$ horas $=$ **1 hora 12' 15"**

b. **(0.75 puntos)** Calcula cuántos dígitos exactos tiene la aproximación por el método de Newton que has calculado.

$$|h| = 0{,}0058 \leq 0{,}05 = \left(\tfrac{1}{2}\right) 10^{m-n+1} \quad -1 = m - n + 1$$

$$t_4 = \mathbf{1},2042 \rightarrow m = 0 \qquad -1 = 0 - n + 1 \qquad \boldsymbol{n = 2}$$

3. **(1.5 puntos)** Dados los puntos de control $P_0=(1, 1)$; $P_1=(2, 3)$;$P_2=(4, 3)$ y $P_3=(1, 1)$, encontrar la curva de Bezier (utiliza el método que prefieras).

De Casteljau:

Abscisas

1

$(1-t)+2t=1+t$

2 $(1+t)(1-t)+(2+2t)t=1+2t+t^2$

$2(1-t)+4t=2+2t$ $(1+2t+t^2)(1-t)+(2+4t-5t^2)t=1+3t+3t^2-6t^3$

4 $2(1+t)(1-t)+(4-3t)t=2+4t-5t^2$

$4(1-t)+t=4-3t$

1

Ordenadas

1

$(1-t)+3t=1+2t$

3 $(1+2t)(1-t)+3t=1+4t-2t^2$

$3(1-t)+3t=3$ $(1+4t-2t^2)(1-t)+(3-2t^2)t=1+6t-6t^2$

3 $3(1-t)+(3-2t)t=3-2t^2$

$3(1-t)+t=3-2t$

1

Curva: $(1+3t+3t^2-6t^3,\ 1+6t-6t^2)$

Polinomios de Bernstein:

Grado 3: $B(t) = B_0^3P_0 + B_1^3P_1 + B_2^3P_2 + B_3^3P_3$

$B_0^3 = \binom{3}{0}t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3$ $B_1^3 = \binom{3}{1}t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$

$B_2^3 = \binom{3}{2}t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t)$ $B_3^3 = \binom{3}{3}t^3(1-t)^{3-3} = t^3$

$B(t) = (1-t)^3(1,1) + 3t(1-t)^2(2,3) + 3t^2(1-t)(4,3) + t^3(1,1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x(t)} &= (1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + t^3 \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) + 6t(1-2t+t^2) + 12t^2 - 12t^3 + t^3 \\ &= \mathbf{1+3t+3t^2-6t^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y(t)} &= (1-t)^3 + 9t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + t^3 \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) + 9t(1-2t+t^2) + 9t^2 - 9t^3 + t^3 = \mathbf{1+6t-6t^2}\end{aligned}$$

4. **(1.5 puntos)** Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\ln(A - BC)$ y su cota de error absoluto.

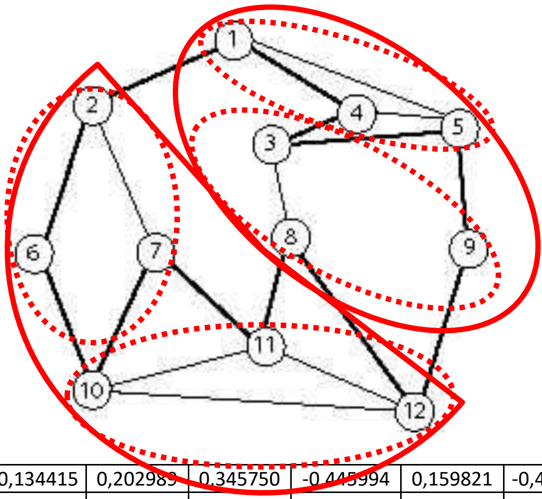
$$\ln\ (A - (3 \pm 2\%)(0{,}25 \pm 4\%)) = \ln\ (A - (0{,}75 \pm 6\%)) =$$
$$= \ln\ ((8 \pm 0{,}08) - (0{,}75 \pm 0{,}045))] = \ln\ (7{,}25 \pm 0{,}125)$$

$$f(x \pm \Delta) = f(x) \pm \Delta \cdot f'(x) \quad \left\| \begin{matrix} f(x) = ln\ x \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\|$$

$$f(7{,}25 \pm 0{,}125) = ln\, 7{,}25 \pm 0{,}125 \cdot \frac{1}{7{,}25} = \mathbf{1{,}981 \pm 0{,}01724} = 1{,}981 \pm 0{,}8682\%$$

5. **(1 punto)** Dado el grafo de la figura:

   a. (0.25 puntos) Calcula la matriz Laplaciana.
   b. (0.25 puntos) Con los vectores propios dados por la tabla adjunta, selecciona el vector de Fiedler y calcula una partición del grafo en dos trozos.
   c. (0.5 puntos) Calcula una posible función hash de dos bits.



0,288675	0,243793	-0,319203	-0,134415	0,202989	0,345750	-0,445994	0,159821	-0,421102	0,519198	0,029112	0,088860
0,288675	-0,212224	-0,427773	0,025454	0,151342	0,446010	0,114790	-0,162757	0,199201	-0,488826	-0,116446	-0,220378
0,288675	0,335820	0,116176	-0,446572	-0,315561	-0,153090	0,531248	-0,045238	-0,427513	0,189013	-0,156877	0,092777
0,288675	0,409051	-0,130958	-0,337831	-0,070638	-0,340145	0,187646	-0,660804	0,636668	-0,227691	0,059321	-0,086891
0,288675	0,367868	-0,044429	0,134882	0,062677	-0,149617	-0,149570	0,640853	-0,165270	-0,273879	-0,010950	0,060078
0,288675	-0,406123	-0,426045	0,219115	-0,650403	-0,077278	-0,029809	0,041900	0,052007	0,151164	-0,042253	0,217771
0,288675	-0,329242	-0,063064	-0,051089	0,554316	-0,324913	0,436459	-0,015656	0,051870	0,262098	0,285437	0,306416
0,288675	0,000938	0,394910	-0,386750	-0,214936	0,509135	-0,220162	0,071667	0,209410	0,141018	0,318468	-0,231273
0,288675	0,199245	0,366210	0,650357	-0,088079	0,013328	0,309613	-0,231644	0,047624	0,230931	-0,062829	-0,169094
0,288675	-0,322352	0,048772	0,044773	0,039647	-0,358953	-0,074763	0,072956	-0,334028	0,049308	0,257503	-0,603191
0,288675	-0,228044	0,259837	-0,137689	0,200553	-0,045941	-0,189624	0,107699	0,052225	-0,060447	-0,808517	-0,028821
0,288675	-0,105604	0,370202	0,073558	-0,036813	0,134603	-0,266163	-0,144391	0,041805	-0,397565	0,220696	0,579401

a)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}
\qquad
D=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$L=D-A=\begin{bmatrix}3&-1&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&3&0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&0\\0&0&3&-1&-1&0&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&-1&3&-1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&0&-1&-1&4&0&0&0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&2&0&0&0&-1&0&0\\0&-1&0&0&0&0&3&0&0&-1&-1&0\\0&0&-1&0&0&0&0&3&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&0&0&0&2&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1&-1&0&0&4&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&4\end{bmatrix}$$

b) Fiedler es al segundo vector, y sus valores **positivos son el {1,3,4,5,8,9,} y los negativos {2,6,7,110,11,12}**, que corresponde con los nodos que producen el corte óptimo (en línea continua).

c) Con el vector de Fiedler y el siguiente, asociando a los valores positivos un uno y a los negativos un cero obtenemos una codificación de dos bits:

$$\boldsymbol{h(1) = (1,0) = 2}$$
$$\boldsymbol{h(2) = (0,0) = 0}$$
$$\boldsymbol{h(3) = (1,1) = 3}$$
$$\boldsymbol{h(4) = (1,0) = 2}$$
$$\boldsymbol{h(5) = (1,0) = 2}$$
$$\boldsymbol{h(6) = (0,0) = 0}$$
$$\boldsymbol{h(7) = (0,0) = 0}$$
$$\boldsymbol{h(8) = (1,1) = 3}$$
$$\boldsymbol{h(9) = (1,1) = 3}$$
$$\boldsymbol{h(10) = (0,1) = 1}$$
$$\boldsymbol{h(11) = (0,1) = 1}$$
$$\boldsymbol{h(12) = (0,1) = 1}$$

6. **(2 puntos)** Se considera la función $F(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con n entero.

Construir una tabla de diferencias divididas para los puntos n=1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 comprobando que $f[x_i, x_{i+1}]$ es un cuadrado perfecto; que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ es un número impar dividido entre dos y que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ es siempre una constante.

Demostrar que $F(n)$ es un polinomio de tercer grado y calcularlo.

n	f(n)	$(n+1)^2$	(2n+3)/2	1/3			
1	1						
		4					
2	5		5/2				
		9		1/3			
3	14		7/2		0		
		16		1/3		0	
4	30		9/2		0		0
		25		1/3		0	
5	55		11/2		0		
		36		1/3			
6	91		13/2				
		49					
7	140						

$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}] = (n+1)^2} \qquad \boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = (2n+3)/2}$$
$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = 1/3}$$

$F(n)$ coincide con in polinomio de tercer grado aunque se interpolen más de 4 puntos:

$$F(n) = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= 1 + 4n - 4 + \frac{5}{2}(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{3}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Lunes de 09:00 a 11: 00**	**(Prof. Martínez, Francisco)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 11:00 a 13:00**	**(Prof. Escolano, Francisco)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente, José F.)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:00 a 17:00**	**(Prof. Salinas, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente, José F.)**

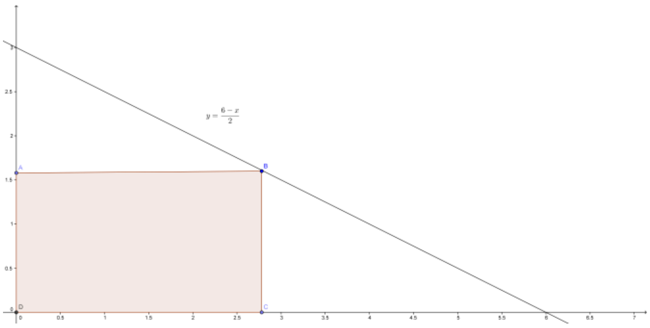
Examen Final JULIO Matemáticas II. 06 Julio 2015

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Está terminantemente prohibido el uso de teléfonos móviles.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**2**	
Ejercicio 4	**1**	
Ejercicio 5	**1**	
Ejercicio 6	**2**	
Total		

1. **(2 puntos)** Un rectángulo está acotado por los ejes y por la gráfica de la recta y = (6 − x) / 2 ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?



Área (x,y) = *xy*

Las dos variables deben ser mayores que cero y menores que los punbtos de corte con los ejes, es decir $0 < x < 6\,;\ 0 < y < 3$

La ecuación que une las dos variables es $y = \frac{(6-x)}{2}$

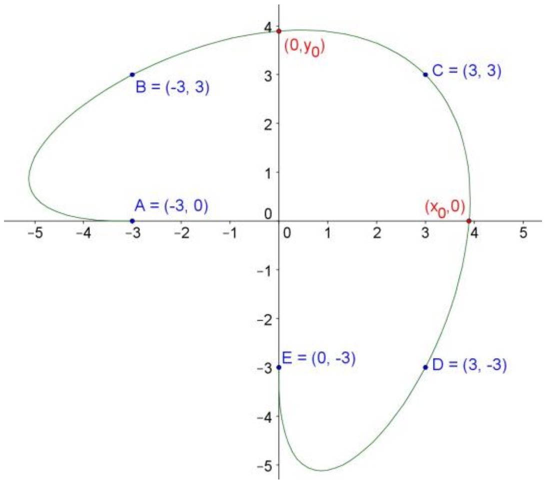
Sustituyendo $A(x) = \frac{x(6-x)}{2} = \frac{(6x-x^2)}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}$

Derivando = $A'(x) = 3 - x = 0 \rightarrow \ \ x = 3$

$A''(x) = -1 > 0$ luego es máximo.

Las dimensiones son $x = 3\ e\ y = 3/2$

2. (**2 puntos**) Interpola la curva que pasa por los puntos A, B, C, D y E, mediante diferencias divididas y utilizando un polinomio para abscisas X(t) y otro polinomio para ordenadas Y(t). Expresa los valores en fracción, y solo en caso de tener que realizar cálculos con decimales redondea a 7 decimales antes de volver a operar.



	t	X(t)	Y(t)
A	0	-3	0
B	¼	-3	3
C	½	3	3
D	¾	3	-3
E	1	0	-3

t_i	$X(t_i)$	$X[t_{i-1},t_i]$	$X[t_{i-2},t_{i-1},t_i]$	$X[t_{i-3},\dots,t_i]$	$X[t_0,\dots,t_n]$
0	-3				
		0			
¼	-3		48		
		24		-128	
½	3		-48		160
		0		32	
¾	3		-24		
		-12			
1	0				

t_i	$Y(t_i)$	$Y[t_{i-1},t_i]$	$Y[t_{i-2},t_{i-1},t_i]$	$Y[t_{i-3},\dots,t_i]$	$Y[t_0,\dots,t_n]$
0	0				
		12			
¼	3		-24		
		0		-32	
½	3		-48		160
		-24		128	
¾	-3		48		
		0			
1	-3				

3. (2 puntos) Supongamos que nos dan una curva de Bezier de la forma:

$$B(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (1 + t + t^2, t^2) \quad t \in [0\,,1]$$

Encuentra los puntos de control que definen esa curva.

Como es de grado 2 implica que hay tres puntos de control P_0, P_1 y P_2.

El primer punto de control será cuando t=0, P0=(X(0), Y(0) = (1, 0).

El último punto de control será cuando t=1, P2=(X(1), Y(1) = (3, 1).

Para calcular el punto P1=(x,y) procedemos así:

Abscisas

(1-t)+xt

x(1-t)+3t [(1-t)+xt](1-t)+[x(1-t)+3t]t=1+t+t^2 -> (1-2t+t^2+xt-xt^2) +(xt-xt^2+3t^2)=1+t+3t^2

Luego [1+(2x-2)t+(4-2x)t^2]=1+t+t^2 Es decir x =3/2

Ordenadas

0(1-t)+yt

y(1-t)+t yt(1-t)+(y(1-t)+t)t= t^2

Es decir yt-yt^2+yt-yt^2+t^2=t^2 -> 2yt + (1-2y)t^2 = t^2 -> y=0

El punto P_1 es (3/2, 0)

4. (**1 punto**) Utiliza el método de Hermite para hallar un polinomio P(x) que satisfaga P(0)=1, P’(0)=1, P(1)=3, P’(2)=-1.

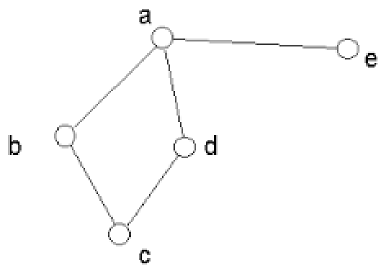
0	1			
		1		
0	1		1	
		2		-4
1	3		-3	
		-1		
1	3			

$P(x)=1+1(x-0)+1(x-0)^2-4(x-0)^2(x-1) = 1+x+x^2-4x^2(x-1) = 1+x+x^2-4x^3+4x^2 = 1+x+5x^2-4x^3$

5. **(1 punto)** Dado el grafo de la figura:

a. (0.5 puntos) Calcula la matriz de Adyacencia, matriz de Grados y Laplaciana.
b. (0.25 puntos) Con los cuatro primeros vectores propios dados por la tabla adjunta, selecciona el vector de Fiedler y calcula una partición del grafo en dos trozos.
c. (0.25 puntos) Calcula una posible función hash de un bit.

0.44721	0.13802	0	0.53625
0.44721	-0.25597	0.70711	0.24217
0.44721	-0.43753	0	-0.70308
0.44721	-0.25597	-0.70711	0.24217
0.44721	0.81146	0	-0.31752



$$Ad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por un lado los nodos a, e y por el otro lado b, c, d

Función hash suponiendo + -> 1 y - -> 0 tenemos H(x)=1 0 0 0 1

6. **(1.25 puntos)** Encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ con un error menor que 0.02. Para ello encuentra una raíz de la función $f(x) = x^3 - 2$ mediante el método de bisección, comprobando previamente que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo [1, 1.5]. (Redondea a 6 cifras decimales).
(**0.75 puntos**) ¿Cuántas dígitos exactos tiene la solución que has encontrado?

i	a_i	b_i	c_i	h_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$
1	1	1,5	1,25	0,25	-1	1,375	-0,046875
2	1,25	1,5	1,375	0,125	-0,046875	1,375	0,599609
3	1,25	1,375	1,3125	0,0625	-0,046875	0,599609	0,260986
4	1,25	1,3125	1,28125	0,03125	-0,046875	0,260986	0,103302
5	1,25	1,28125	1,265625	0,015625	-0,046875	0,103302	0,027287

$|h| = 0{,}015625 \leq 0{,}05 = \left(\frac{1}{2}\right) 10^{m-n+1}$ -1= $m - n + 1$

$t_4 = 1{,}265625 \rightarrow m = 0$ $-1 = 0 - n + 1$ $n = 2$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Martes de 11:00 a 13: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:30 a 17:30**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**

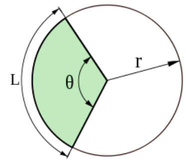
Examen Final de Matemáticas II. Junio 2014

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**1,5**	
Ejercicio 4	**1,5**	
Ejercicio 5	**2**	
Ejercicio 6	**1**	
Total		

1. *(2 puntos)* Un pedazo de pizza, en forma de sector circular, tiene un perímetro de a cm. ¿Cuál debería de ser el radio de la pizza para crear el pedazo de mayor área posible?



Área del sector circular: $A(\theta) = \frac{\theta r^2}{2}$ Longitud del arco de circunferencia: L = θr.

El sector circular puede ser de un ángulo θ que varía de 0 a 2π radianes. El perímetro a del sector circular incluye dos veces el radio, más la longitud del arco de circunferencia correspondiente:

$$a = 2r + \theta r = (2 + \theta)r$$

De donde podemos determinar la longitud del radio en función del ángulo:

$$r(\theta) = \frac{a}{2 + \theta}$$

El área del sector es $\mathrm{A} = \frac{\theta}{2}\mathrm{r}^2$ y en función del ángulo quedaría:

$$A(\theta) = \frac{\theta R(\theta)^2}{2} = \frac{a^2\theta}{2(2 + \theta)^2}$$

Para determinar con qué ángulo se hace máxima, comprobemos dónde su derivada se hace 0:

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2(2 + \theta)^2 - (a^2\theta)2(2 + \theta)}{(2 + \theta)^4}\right) = \frac{a^2(2 + \theta) - 2a^2\theta}{2(2 + \theta)^3} = 0$$

Como el denominador siempre será positivo, el cero solo se dará en el numerador:

$$2a^2 + a^2\theta - 2a^2\theta = 0$$

$$2a^2 - a^2\theta = 0 \qquad \theta = 2$$

El área máxima siempre se dará con el ángulo de 2 radianes, por lo que el radio que deberá tener la pizza es:

$$r = R(2) = \frac{a}{2 + 2} = a/4$$

2. *(2 puntos)* Dado el spline cúbico interpolador de los puntos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,a)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si\ \ 0 \leq x\ < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si\ \ 1 \leq x\ \leq 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural, es decir $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$

Recuerda también que $S_{i+1}'(x_{i+1}) = S_i'(x_{i+1})$ y $S_{i+1}''(x_{i+1}) = S_i''(x_{i+1})$

$S'_0(x) = 2 - 3x^2$

$S''_0(x) = -6x$

$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$

$S'_1(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2 = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$

$S''_1(x) = 2c + 6d(x-1) = 2c + 6dx - 6d$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = S_0'(1) = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = S_0''(1)/2 = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$ $\qquad a = S_1(2) = -1$

3. Los termistores (resistencias térmicas) se utilizan para medir la temperatura de los cuerpos y se basan en la variación de la resistencia eléctrica con la temperatura.
Los fabricantes proporcionan una curva de calibración de la resistencia (variable x) frente a la temperatura (variable y) de forma que si se mide la resistencia se puede encontrar la temperatura. Un fabricante de termistores ofrece los siguientes datos de calibración:

Resistencia (KΩ)	Temperatura (ºC)
1,100	25
0,900	30
0,650	40
0,450	50

a) *(1 punto)* Calcula el polinomio interpolador del grado correspondiente usando el método de diferencias divididas.

b) *(0,5 puntos)* Si se mide una resistencia de 1 KΩ, ¿a qué temperatura se encuentra el termistor?

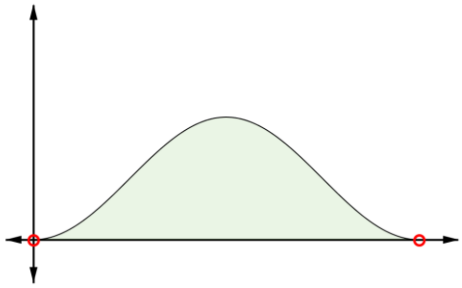
Advertencia: usad fracciones o redondead a 3 decimales.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
1,1	25	$\frac{30-25}{0,9-1,1}=-25$	$\frac{25-40}{0,65-1,1}=\frac{100}{3}$ $=33,333$	$\frac{\frac{200}{9}-\frac{100}{3}}{0,45-1,1}=\frac{2000}{117}$ $=17,094$
0,9	30	$\frac{40-30}{0,65-0,9}=-40$	$\frac{40-50}{0,45-0,9}=\frac{200}{9}$ $=22,222$	
0,65	40	$\frac{50-40}{0,450-0,650}=-50$		
0,45	50			

$$\boldsymbol{P(x)=}$$
$$\boldsymbol{=25\ -25(x-1,1)+\frac{100}{3}(x-1,1)(x-0,9)+\frac{2000}{117}(x-1,1)(x-0,9)(x-0,65)}$$

$$P(1\ k\Omega)=25-25(-0,1)+\frac{100}{3}(-0,1)(0,1)+\frac{2000}{117}(-0,1)(0,1)(0,35)=$$
$$=25+2,5-\frac{1}{3}-\frac{7}{117}=27+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{7}{117}=27+\frac{351-234-7}{702}=27+\frac{110}{702}=\mathbf{27,157\ ºC}$$

4. Una curva viene definida por la expresión $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2x$.



a) *(0,5 puntos)* Calcula los puntos de corte con el eje x en el intervalo $[0, \pi]$

b) *(1 punto)* ¿Cuál es el área comprendida entra la curva y el eje de abscisas (eje x)?

y=0 si $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}cos\,2x$ solo sí $cos\,2x = 1$

de donde $2x = acos\,1 \begin{cases} 2x = 0 & x = 0 \\ 2x = 2\pi & x = \pi \end{cases}$

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2x\ \ dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi cos\,2x\ \ dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{sen\,2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{sen\,2\pi}{2} - \frac{sen\,0}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0 - 0) = \frac{\pi}{2}$$

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} - cos\, x\pi$.
   a) *(0,5 puntos)* Comprueba que el intervalo $[0, 1]$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano.
   b) *(1 punto)* Utilizando el método de Regula Falsi o Falsa Posición con 3 iteraciones, encontrar una solución a la ecuación $\sqrt{x} - cos\, x\pi = 0$. Opera redondeando a 4 decimales.
   c) *(0,5 puntos)* ¿Cuántos dígitos exactos tiene la solución en la tercera iteración?

$f(0) = \sqrt{0} - cos\, 0 = 0 - 1 = -1$ $\quad$ $f(1) = \sqrt{1} - cos\, \pi = 1 - (-1) = 2$

$$f(0)f(1) < 0$$

$c = a - h$ $\quad$ $h = f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

a	***b***	***c***	***h***	***f(a)***	***f(b)***	***f(c)***
0	1	0,3333	$-0{,}3333$	-1	2	0,0772
0,3333	0	0,3094	0,0239	0,0772	-1	-0,0074
0,3094	0,3333	**0,3115**	-0,0021	-0,0074	0,0772	-0,0001

$$0{,}3115 \pm 0{,}0021$$

$$0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1=m} + 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0{,}0021 \leq 0{,}005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1=-2}$$

$$-1 - n + 1 = -2 \quad n = 2$$

0,31

6. *(1 punto)* Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\sqrt{B - AC}$ y su cota de error relativo.

$$\sqrt{B-(8\pm 1\%)(0{,}25\pm 4\%)} = \sqrt{B-(2\pm 5\%)} = \sqrt{(3\pm 0{,}06)-(2\pm 0'1)} = \sqrt{1\pm 0{,}16}$$

$$f(x\pm\Delta) = f(x) \pm \Delta\cdot f'(x) \quad \left\| \begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x} \\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\| \; f(1\pm 0{,}16) = \sqrt{1} \pm 0{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{1}} = 1\pm 0{,}08 =$$

$$= 1 \pm 8\%$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Martes de 11:00 a 13: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:30 a 17:30**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicente Francés, José Francisco)**

Examen Final de Matemáticas II. Julio 2014

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**2**	
Ejercicio 4	**2**	
Ejercicio 5	**2**	
Total		

1. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Se tiene 24 árboles con una producción de 600 frutos / árbol. Sea x los árboles que se plantan. La producción ahora será: $P(x) = (24 + x)(600 - 15x) = 14400 + 240x - 15x^2$. Para maximizar derivamos e igualamos a cero: $P'(x) = 240 - 30x = 0$ es decir $x = 8$. Luego el número de árboles que maximiza la producción es 24+8 = 32 y la producción será:

$$P(8) = (24 + 8)(600 - 15 \cdot 8) = 15360$$

2. Encontrar el valor de $\frac{1}{3}$ usando el método de Newton-Raphson con tres iteraciones. Tomar como valor inicial $x_0 = 0.25$ y dar para cada iteración el error absoluto que se comete.

   Para encontrar $f(x)$ tener en cuenta que al hacer $f(x) = 0$ tiene que salir como solución $x = \frac{1}{3}$. Tomar 8 decimales.

	x	$f(x)$	$f'(x)$	h
1	0.25	1	-16	-0.0625
2	0.3125	0.2	-10.24	-0.01953125
3	0.33203125	0.01176471	-9.07072664	-0.001297

La función es $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ y su derivada $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$. El método de Newton-Raphson sigue la fórmula de recurrencia: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Así pues el valor de $x_3 = 0.33203125 - (-0.001297) = 0.33332825$

3. Rellenar la tabla siguiente para encontrar un polinomio interpolador P(x) (mediante el método de Hermite) con los datos siguientes: P(0)=1, P(1)=2, pendiente de la recta tangente en x=0 igual 0 y pendiente de la recta tangente en x=1 igual a 1. Utilizar el polinomio obtenido para calcular P(0.5).

0	1			
		0		
0	1		1	
		1		-1
1	2		0	
		1		
1	2			

$$P(x) = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x^2(x-1) = 1 + x^2 - x^3 + x^2 = 1 + 2x^2 - x^3$$

$$P(0.5) = 1 + 2 \cdot 0.5^2 - 0.5^3 = 1.375$$

4. Supongamos que nos dan una curva de Bezier de la forma:

$$B(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (1 + t + t^2, t^2) \quad t \in [0\,,1]$$

Encuentra los puntos de control que definen esa curva.

Recuerda que la curva de Bezier pasa por el primer y el último punto de control.

Si t=0 tenemos el primer punto de control P_0 y si t=1 el último P_2.

$t = 0 \rightarrow\ P_0 = (1, 0)$ y si $t = 1 \rightarrow\ P_2 = (3, 1)$

Mediante De Casteljau obtenemos el tercer punto de control $P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

5. Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 6 \pm 0.06 \quad B = 3 \pm 0.06 \quad C = 0.5 \pm 0.08 \quad D = 2 \pm 0.04$$

Calcula el valor aproximado de $\sqrt{A(B+C)+D}$ y su cota de error relativo.

$$\begin{aligned}\sqrt{A(B+C)+D} &= \sqrt{(6 \pm 0.06)(3 \pm 0.06 + 0.5 \pm 0.08) + (2 \pm 0.04)}\\ &= \sqrt{(6 \pm 0.06)(3.5 \pm 0.14) + (2 \pm 0.04)}\\ &= \sqrt{(6 \pm 1\%)(3.5 \pm 4\%) + (2 \pm 0.04)} = \sqrt{(21 \pm 5\%) + (4 \pm 0.04)}\\ &= \sqrt{(21 \pm 1.05) + (4 \pm 0.04)} = \sqrt{(25 \pm 1.09)}\end{aligned}$$

$$f(x \pm \Delta) = f(x) \pm \Delta \cdot f'(x) \qquad \left\| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\|$$

$$f(25 \pm 1.09) = \sqrt{25} \pm 1.09 \cdot \frac{1}{2\sqrt{25}} = 5 \pm 0.109 = 5 \ \pm 2.18\%$$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Alumno:	
Grupo teoría:	(de a)
DNI:	
Email:	
Aula del examen:	

Convocatoria de Junio. Teoría. Matemáticas II, 30-05-2013

Instrucciones generales:

Debes rellenar el cuadro de datos personales (nombre y apellidos, grupo, DNI, etc.) indicando tu grupo de teoría.

Debes usar únicamente las hojas grapadas que se os facilitan y no podrá haber por encima de la mesa, ni circulando cerca, ningún otro papel durante el examen. Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par), y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar). Dispones además de una hoja adicional para más operaciones, hacer referencias, aclaraciones, etc.

Pregunta	Máx	Nota
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	1	
6	1	
	Total:	

1. **(2 puntos)** Se quiere construir un centro deportivo que se compone de una sección rectangular con dos semicírculos a cada extremo. Si el perímetro debe ser el de una pista de atletismo de 500 metros. Encontrar las dimensiones que harán el área lo mayor posible.

Perímetro = $\pi r + x + x + \pi r = 500 \rightarrow \pi r + x = 250 \rightarrow x = 250 - \pi r$

Área(r, x) = $\pi r^2 + x\ 2\ r \rightarrow$ Área (r) = $\pi r^2 + 2\ r\ (250 - \pi r) = \pi r^2 + 500\ r - 2\pi r^2 = 500\ r - \pi r^2$

Área'(r) = $500 - 2\pi r = 0 \rightarrow 500 = 2\pi r \rightarrow$ $\mathbf{r} = 500/2\pi = \mathbf{250/\pi}$

$\mathbf{x} = 250 - \pi\ 250/\pi = \mathbf{0}$

Área''(r) = $-2\pi < 0 \rightarrow$ luego es un máximo.

2. **(2 puntos)** Dados los puntos de control $p_0=(-1,0)$, $p_1=(1,1)$, $p_2=(2,3)$. Calcula la curva de Bezier mediante:
   a. La fórmula recursiva de De Casteljau
   b. Polinomios de Bernstein.

a.

(-1,0)		
	(1-t)(-1,0)+t(1,1)	
(1,1)		(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))
	(1-t)(1,1)+t(2,3)	
(2,3)		

$(X(t),Y(t))=(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))=$
$=(1-2t+t^2)(-1,0)+(t-t^2)(1,1)+(t-t^2)(1,1)+t^2(2,3)$

$X(t)=-(1-2t+t^2)+2(t-t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$

$Y(t)=2(t-t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$

b.

$(X(t),Y(t)) =(1-t)^2(-1,0)+2(1-t)t(1,1)+t^2(2,3)=(1-2t+t^2)(-1,0)+(2t-2t^2)(1,1)+t^2(2,3)$

$X(t)= -(1-2t+t^2)+(2t-2t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$

$Y(t)=(2t-2t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$

3. **(2 puntos)** Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2e^x$, el eje x y las rectas x=0 y x=1.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\int x\, e^x dx =$$
$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = 1 & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x$$

$$\int_0^1 x^2e^x dx = [e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x]_0^1 = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2 = 0{,}718281$$

Se ha utilizado dos veces la integración por partes.

4. **(2 puntos)** Aplicar el método de Newton para obtener una estimación del punto de corte de las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ con dos dígitos decimales exactos. Tomar 1 como valor inicial y redondea las operaciones a 8 decimales.

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{h}$
1	1	-0,04030231	1,84147098	-0,02188593
2	1,02188593	0,00012792	1,85309354	0,00006903
3	1,0218169			
4				
5				
6				
7				

$f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x)$ $\quad f'(x) = 1 + \mathrm{sen}(x)$

El resultado es una magnitud de orden unidades. Si exigimos exactitud a las décimas y centésimas (dos dígitos decimales exactos) tenemos tres dígitos exactos, por lo que: $m = 0$ $\quad n = 3$

Según el teorema de la acotación: $\Delta \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = 0{,}5^{-2} = 0{,}005$

Sólo se necesitan dos iteraciones porque $\mathrm{h} <= 0{,}005$ garantiza 3 dígitos exactos.

El resultado es 1,0218169 con los dígitos exactos 1,02

5. **(1 puntos)** De una función **f(x)** se conocen los datos que figuran a continuación

x_i	$f(x_i)$
1,0	**0,841**
1,1	**0,891**
1,2	**0,993**
1,3	**1,000**

Calcula el polinomio interpolador mediante diferencias divididas (redondea a 3 decimales).

1,0	0,841			
		0,05/0,1=0,5		
1,1	0,891		0,52/0,2=2,6	
		0,102/0,1=1,02		-7,35/0,3=-24,5
1,2	0,993		-0,95/0,2=-4,75	
		0,007/0,1=0,07		
1,3	1,000			

$$P(x) = 0{,}841 + 0{,}5(x-1) + 2{,}6(x-1)(x-1{,}1) - 24{,}5(x-1)(x-1{,}1)(x-1{,}2)$$
$$= -24'5\mathrm{x}^3 + 83{,}45\mathrm{x}^2 - 93{,}65\mathrm{x} + 35{,}541$$

6. (1 punto) Encontrar un valor c que satisfaga las condiciones del "Teorema del Valor Medio para la Derivabilidad" de la función $f(x) = \sqrt{x}$ para valores a=4 y b=9.

Según el teorema del valor medio, si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) entonces existe un c perteneciente a (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En nuestro caso a=4 y b=9 con lo que f(9)=3 y f(4) =2, $f'(c) = \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$

y como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ luego $\frac{1}{5} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ y $c = \frac{25}{4}$

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
Grupo teoría:	□ Grupo 1 - Martes de 11:00 a 13:00 (Prof. Francisco Miguel Martínez Pérez) □ Grupo 2 - Martes de 9:00 a 11:00 (Prof. José Francisco Vicent Francés) □ Grupo 3 - Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00 (Prof. José Francisco Vicente Francés) □ Grupo 4 - ARA -Miércoles de 9:00 a 11:00 (Prof. Francisco Javier Escolano Ruiz) □ Grupo 5 - Martes de 15:30 a 17:30 (Prof. José María Salinas Serrano)
DNI:	
Email:	
Aula del examen:	

Convocatoria de julio. Teoría. Matemáticas II, 28-06-2013

Instrucciones generales:

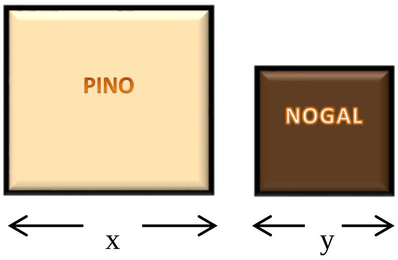
- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar). Dispones además de una hoja adicional (la última) para más operaciones, hacer referencias, aclaraciones, etc.

Pregunta	Máx	Nota
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
	Total:	

1. Un cliente acude a una tienda de bricolaje y le indica al dependiente que necesita dos piezas de madera cuadradas, una de pino y otra de nogal, cuyo perímetro total (ambas piezas) debe ser exactamente 10 metros y que, además, desea gastarse lo menos posible.
Antes de cortar las piezas, el dependiente introduce los datos en una aplicación informática que calcula las medidas óptimas y el coste total.
Sabiendo que el precio de las maderas que desea el cliente es de 2 € el m^2 para la de pino y de 3 € por m^2 para la de nogal.

a) *(1,8 puntos)* ¿Cuánto debe medir el lado de cada una de las piezas para que el coste total sea mínimo?

b) *(0,2 puntos)* ¿Cuánto le costarán las dos piezas al cliente?



a) Dados los dos cuadrados con lados x e y respectivamente, el perímetro total viene dado por la expresión 4x + 4y. Como debe ser igual a 10 m., tendremos

$$4x + 4y = 10. \qquad (1)$$

La superficie de ambas piezas viene dada por la expresión $x^2 + y^2$.
Con el precio de la madera que se nos ha facilitado, el coste de la compra es

$$2x^2 + 3y^2 \text{ €}. \qquad (2)$$

Despejando y en la expresión (1) tendremos

$$y = \frac{10-4x}{4} = \frac{5}{2} - x\,.$$

Sustituyendo en la expresión (2) tendremos la función coste

$$C(x) = 2\,x^2 + 3\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = 5\,x^2 - 15\,x + \frac{25}{4}\,.$$

El coste mínimo se alcanzará en los valores de x que cumplan $C'(x)=0$ y $C''(x)>0$.

$$C'(x)=10\,x-15=0 \rightarrow x=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1{,}5 \text{ m.}$$

$$C''(1{,}5)=10>0$$

A partir del valor obtenido para *x*, vamos a calcular el valor de *y*

$$y=\frac{5}{2}-x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \text{ m.}$$

En consecuencia, la pieza de pino debe medir 1’5 m. de lado y la de nogal 1 m. de lado.

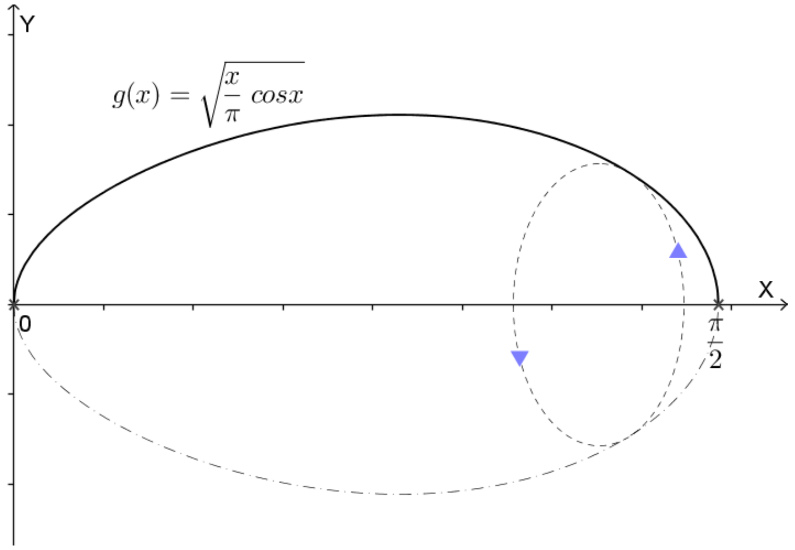
b) El coste total de la compra es

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot 1^2 = 7'5 \text{ €.}$$

2. Integración.

a) *(1,3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\pi}\cos x$, justifica (utilizando integración por partes) que $\int f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left(\cos x + x\ \text{sen} x\right)+C.$

b) *(0,7 puntos)* Dada la función $g(x)=\sqrt{f(x)}$, haciendo uso del apartado anterior, calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar el arco de curva $g(x)$, con $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alrededor del eje de abscisas.



a) Recordemos, en primer lugar, la fórmula utilizada en la integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Denotando por $u=\dfrac{x}{\pi},\ dv=\cos x\,dx,$ tendremos $du=\dfrac{1}{\pi}dx,\ v=\int \cos x\,dx = sen x$

y, en consecuencia,

$$\int \frac{x}{\pi}\cos x\ dx = \frac{x}{\pi}\text{sen } x - \frac{1}{\pi}\int \text{sen } x\ dx = \frac{1}{\pi}\left(x\ \text{sen } x + \cos x\right)+C.$$

b) El volumen pedido viene dado por la expresión

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pi\left[\frac{1}{\pi}\left(x\ \text{sen } x+\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

3. La velocidad de una partícula que se mueve, expresada en metros por segundo, está determinada por la función $v(t) = t^3 - 2t^2$.
Utilizando el método de la Regla Falsa (o Regula Falsi) se pide que obtengas una estimación del tiempo t necesario para que la partícula alcance la velocidad de 1 metro por segundo. Para ello:

a) *(0,1 puntos)* Plantea la ecuación a resolver.
b) *(0,1 puntos)* Expresa la fórmula de recurrencia del método.
c) *(1,3 puntos)* Realiza hasta la quinta iteración, considerando como intervalo inicial [2,3] y utilizando para los cálculos cinco cifras decimales con redondeo.
d) *(0,5 puntos)* Calcula el número de dígitos exactos en la estimación obtenida en el apartado anterior.

a) La ecuación a resolver es $v(t) = 1$, esto es, $t^3 - 2t^2 - 1 = 0$.

b) La fórmula para obtener en cada iteración, i, el valor interior c_i del intervalo $[a_i,b_i]$ es

$$c_i = a_i - h_i,\ i = 1,2,\cdots$$

donde

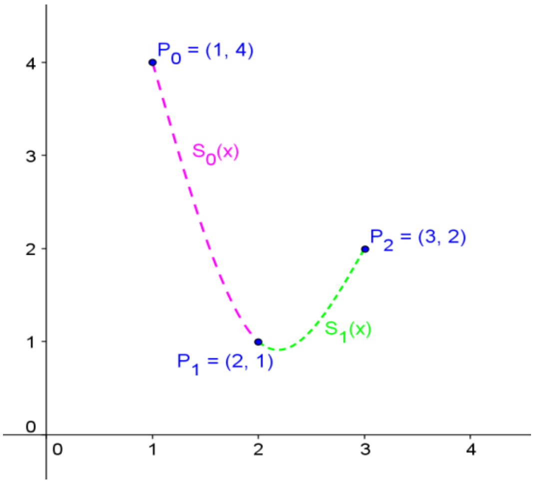
$$h_i = \frac{v(a_i)(b_i - a_i)}{v(b_i) - v(a_i)},\ i = 1,2,\cdots$$

c)

i	a_i	b_i	c_i	h_i	$v(a_i)$	$v(b_i)$	$v(c_i)$
1	2	3	2,11111	-0,11111	-1	8	-0,5048
2	2,11111	3	2,16387	-0,05276	-0,5048	8	-0,2327
3	2,16387	3	2,18750	-0,02363	-0,2327	8	-0,10276
4	2,18750	3	2,19781	-0,01003	-0,10276	8	-0,04451
5	2,19781	3	2,20225	-0,00444	-0,04451	8	-0,01912

d) El error absoluto cometido está acotado por el valor absoluto de:
$\Delta \leq |h| = 0{,}00444$.
El resultado obtenido (2,20225) es del orden de unidades,
por lo que m=0 en la expresión:
$0{,}00444 \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1} \rightarrow m-n+1 = -2$
si m=0, entonces el número de dígitos exactos es n=3

4. *(2 puntos)* Encuentra el spline cúbico natural $S(x)$ que empieza en el punto $P_0 = (1,4)$, pasa por el punto $P_1 = (2,1)$ y termina en el punto $P_2 = (3,2)$.



No es necesario que agrupes las potencias en x de los polinomios $S_0(x)$ y $S_1(x)$, puedes dejarlos con potencias de $(x-x_i)$, como en la expresión

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3; \quad \text{con } i = 0,1.$$

Observa que el número de trozos del spline es $n=2$ y recuerda que las indeterminadas se pueden obtener de las expresiones

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \text{para } i = 0,1;$$
$$a_i = f(x_i), \quad \text{para } i = 0,1,2;$$
$$v_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1}-a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad \text{para } i = 1;$$
$$c_0 = c_2 = 0, \quad [c_1] = [2(h_0+h_1)]^{-1}[v_1];$$
$$b_i = \frac{a_{i+1}-a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad \text{para } i = 0,1;$$
$$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}, \quad \text{para } i = 0,1.$$

Completa la siguiente tabla y escribe S(x) en el espacio reservado para ello.

i	x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	1	4	-4	0	1
1	2	1	1	-1	3	-1
2	3		2		0	

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 4 - 4(x-1) + (x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \\ S_1(x) = 1 - (x-2) + 3(x-2)^2 - (x-2)^3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} = \frac{3(2-1)}{1} - \frac{3(1-4)}{1} = 3 + 9 = 12$$

$$[c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1} \text{ x } [v_1] = [2(1+1)]^{-1} \text{ x } [12] = [4]^{-1} \text{ x } [12] \qquad c_1 = \frac{1}{4}12 = 3$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2\mathrm{c}_0 + \mathrm{c}_1) = \frac{(1-4)}{1} - \frac{1}{3}3 = -4$$
$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2) = \frac{(2-1)}{1} - \frac{1}{3}6 = -1$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{(3-0)}{3} = 1$$
$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{(0-3)}{3} = -1$$

5. Se pretende aproximar los valores que toma la función $f(\mathrm{x}) = \operatorname{sen} \mathrm{x}$ mediante un polinomio de interpolación de Hermite, partiendo de dos valores x_0, x_1.

a) *(0,1 puntos)* Obtén, de forma razonada, el grado máximo del polinomio buscado.

b) *(0,6 puntos)* Si los valores de partida son $x_0 = 0,40,\ x_1 = 0,42,$ completa la tabla de diferencias divididas de Hermite y anota los resultados en el espacio reservado a continuación.

0,40	0,38942			
		0,92106		
0,40	0,38942		-0,20300	
		0,91700		0,37500
0,42	0,40776		-0,19550	
		0,91309		
0,42	0,40776			

c) *(0,7 puntos)* A partir de la tabla del apartado anterior, construye el polinomio interpolador de Hermite.

d) *(0,6 puntos)* Haciendo uso del polinomio obtenido en el apartado anterior, obtén un valor aproximado de sen 0,41 y compáralo con el que se obtiene con la calculadora.

Notas:

- Redondea a cinco cifras decimales todos los cálculos.
- Los valores x de la función $f(\mathrm{x}) = \operatorname{sen} \mathrm{x}$ vienen expresados en radianes ($f : R \to [0,1]$); no olvides configurar tu calculadora en modo radián.
- En el apartado c) no es necesario desarrollar las potencias de $(x - x_0)$, $(x - x_1)$ y simplificar.
- Si el apartado b) se te resiste, te recomendamos que hagas los siguientes ya que los valores que necesitas están en la tabla.

a) Partiendo de dos valores x_0, x_1, el grado máximo del polinomio de interpolación es 2·1+1=3.

b) En la tabla.

c) $P(x) = 0,38942 + 0,92106\,(x - x_0) - 0,203\,(x - x_0)^2 - 0,375\,(x - x_0)^2 (x - x_1)$

d) Denotando por c=0,41, se tiene que $c - x_0 = 0,01,\ c - x_1 = -0,01\ y\ (c - x_0)^2 = 0,0001.$
Operando en $P(x)$, se tiene que $P(c) = 0,39861$.
Por otro lado, haciendo uso de la calculadora y redondeando a cinco cifras decimales, se obtiene el mismo resultado: sen c = 0,39861.