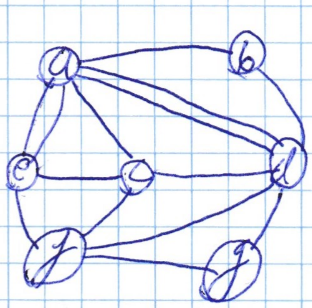
Nikita Polyanskiy
P550048833

Matematica Discreta

Ejercicios de sesiones 5-9

Problema 4.1



i) es Conexo

ii) Si, no tiene vertices de grado impar. (+no es dirigido)

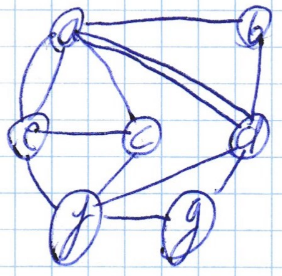
Un Grafo es euleriano solo si no Tiene vertices de grado impar.

v	deg(v)
a	6
b	2
c	4
d	6
e	4
f	4
g	2

iii) no Tiene Camino euleriano ya que se necesitan 2 vertices de grado impar.

a, e, f, g, d, a, e, c, f, d, b, a, c, d, a

Problema 4.2

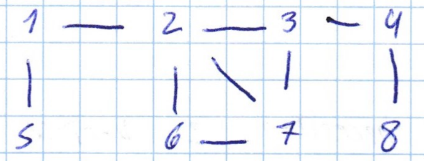


i) no es un grafo Euleriano al tener vertices de grado impar
c → 3
d → 5

ii) Tiene un camino euleriano ya que tiene exactamente 2 vertices de grado impar.

iii) c, a, e, f, g, d, a, b, d, a, e, c, f, d

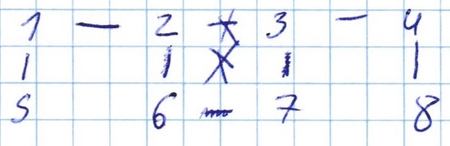
Problema 4.5



i) El grafo tendria que tener el mismo número de vertices y aristas, en este caso 8.

ii)

v	$dG(v)$
1	2
2	4
3	3
4	2
5	1
6	2
7	3
8	1

iii)  (+R.5. vi grado 2 se quedan

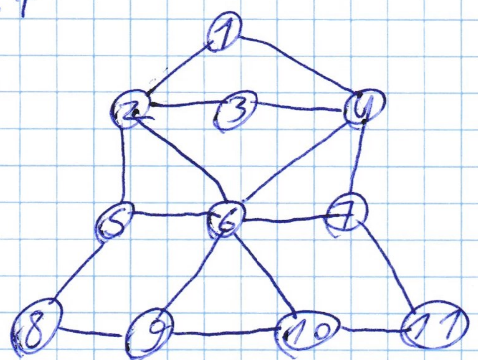
IV) {2,7}
{2,3}

R.6 | se produciría un ciclo, se quitan las no utilizadas

V) no habría vertices con grado mayor a 2
por lo que no habría ciclo hamiltoniano

Vi) Tiene que haber como mucho 2 aristas por vertice
el vertice 2 tiene 4.

problema 4.7



R.1 es conexo

R.2 Tiene por lo menos la misma cantidad de
aristas que de vertices.

R.4 todos los vertices tienen grado ≥ 2

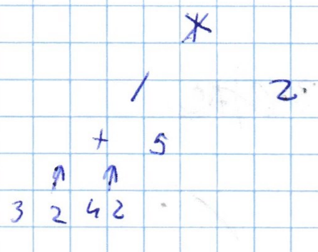
R.5 aristas de vertices de grado 2 se quedan

Problema 4.8

RS $\{1, , 6, 8, 5, 10\}$

Problema 5 Lección 3

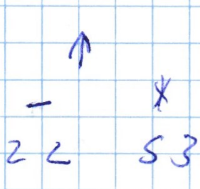
Ejercicio 2:



5) $3\,2\uparrow 4\,2\uparrow + 5 / 2 *$

$$\frac{\left(3^2 + 4^2\right)}{5} \cdot 2 = 10$$

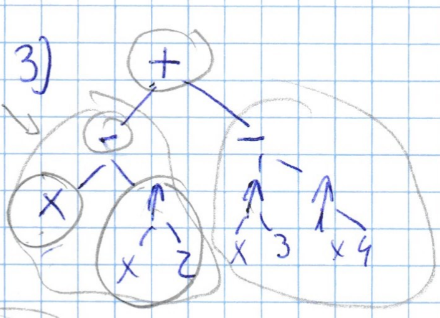
Ejercicio 3:



4) $(2-2)^{(5\cdot 3)} = 0$

Ejercicio 4:

3)



NPI IDR

$X\,X\,2\uparrow \cancel{X} - X\,3\uparrow X\,4\uparrow - +$

NPD

$+ - X \uparrow X\,2 - \uparrow X\,3 \uparrow X\,4$

Ejercicio 5

$/ - a \uparrow b\, 2 + c \times 3d$

~~(3a ↑ b²)(c·3d)~~

~~c3d~~

$\frac{a - b^2}{c + 3d}$

```
           /
      -         +
    a   ↑     c   ×
      b   2     3   d
```

NPI = ~~b2↑a - 3d×c + /~~

. $a\, b\, 2 \uparrow - c\, 3\, d \times + /$

$= T_- \; T_+ \; /$

$= a\, T_\uparrow - c\, T_\times + /$

$a\, b\, 2 \uparrow - c\, 3\, d \times + /$

Ejercicio 9:

$|V_{d}| = n \qquad 3V_4 \qquad 2V_3 \qquad 5V_2$

V_1 ~~2~~ $\qquad 10 \cdot + V_1$

$A = nV - 1$

Ejercicio 10:

A_3 solo tiene un vertice de grado ~~a~~ 1, necesita mínimo 2

A_2, Tiene que haber $|V| - 1 = |A|$, hay 5V y 9A

Arc Ari ~~1+3+1+1+2=8~~

~~4+4+2+6~~

~~4+8+2+0+2+6+4=32~~

6.2)

$$W = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 1 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 8 & \infty & 4 & 2 & \infty \\ 1 & 1 & \infty & 1 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 1 & 5 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

i)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) si $!= \infty \rightarrow 1$, sino 0

iii) 7 vertices, 24 arcos, 0 aristas

3 con 1, 2, 4, 6

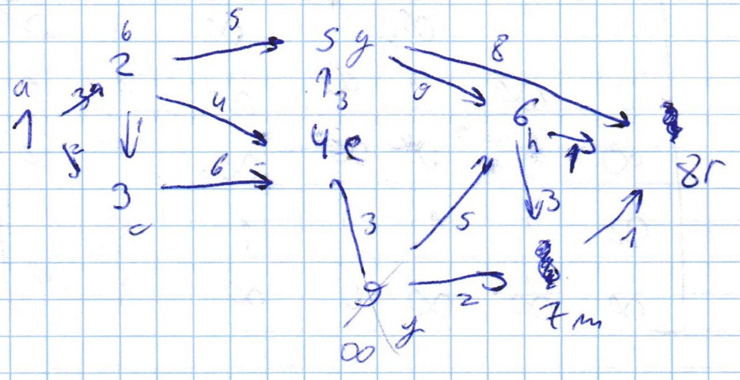
5 es el vertice de salida de 2 y 6, pero 4 y 1

filas = vertices de salida
Columnas = vertices de entrada

2 a 1 (9) y 1 a 4 (9)

6.3

i) acíclico, empezando por v $d_e^- = 0$ (y quitándolo del grafo), nunca vuelve a uno anterior



ii) $u_1 = 0$

$u_j = \min_{k \neq j} \{u_k + w_{kj}\}$

$u_2 = u_1 + w_{12} = 0+3 = 3$

No $\Big[$ ~~$u_3 = u_2 + w_{23} = 3+1 = 4$~~

~~$u_4 = u_3 +$~~

$u_3 = \min_{k<3} \{u_k + w_{k3}\} = \min\{u_1 + w_{13}, u_2 + w_{23}\} = \min\{0+2, 3+1\} = 2$

$u_4 = \min_{k<4} \{u_k + w_{k4}\} = \min\{u_2 + w_{24}, u_3 + w_{34}\} = \min\{3+4, 2+6\} = 7$

$u_5 = \min_{k<5} \{u_k + w_{k5}\} = \min\{u_2 + w_{25}, u_4 + w_{45}\} = \min\{3+5, 7+3\} = 8$

$u_6 = \min_{k<6} \{u_k + w_{k6}\} = \min\{u_5 + w_{56}\} = 8+9 = 17$

No $\Big[$ ~~$u_7 = \min_{k<7} \{u_k + w_{k7}\} = \min\{u_5 + w_{57}, u_6 + w_{67}\} = \min\{8+8, 17+1\} = 16$~~

~~$u_8 = \min_{k<8} \{u_k + w_{k8}\} = \min$~~

$u_7 = \min_{k<7} \{u_k + w_{k7}\} = \min\{u_6 + w_{67}\} = 20$

$u_8 = \min_{k<8} \{u_k + w_{k8}\} = \min\{u_6 + w_{68}, u_7 + w_{78}, u_5 + w_{58}\} = \min\{17+1, 20+1, 8+8\} = 16$

$u_9 = \infty$

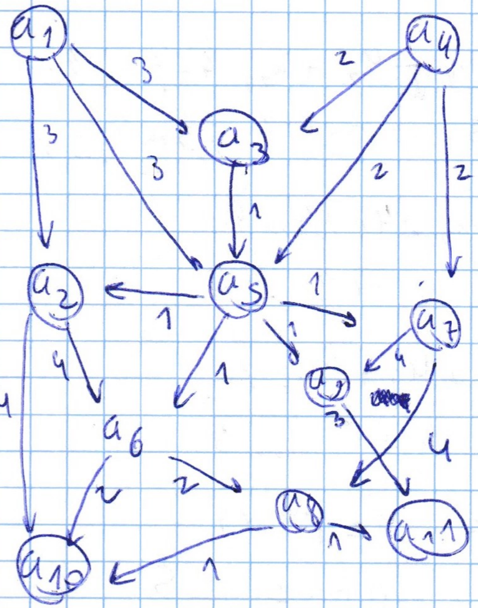
Caminos de a's

b: a-b
c: a-c
e: a-b-e
g: a-b-g
h: a-b-g-h
m: a-b-g-h-m
r: a-b-g-r
y: ∞

Leccion 4

Ejercicio 1:

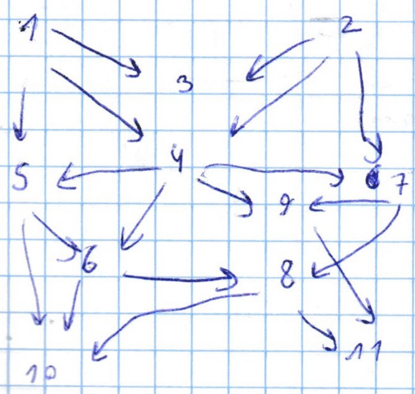
1.-



2.-

$$W = \begin{bmatrix}
\infty & 3 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
- & 1 & - & - & \infty & 1 & 1 & - & 1 & - & - \\
- & - & - & - & - & \infty & - & 2 & - & 2 & - \\
- & - & - & - & - & - & \infty & 4 & 4 & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & \infty & - & 1 & 1 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & \infty & - & 3 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & \infty & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \infty
\end{bmatrix}$$

3.- elegimos vertices con $d_e = 0$, lo numeramos y lo eliminamos, luego se repite



~~se quedan los mismos numeros que antes~~. no hay ciclos ya que al eliminar 1 vertice siempre hay otro con $d_e = 0$, si los hubiera esto no pasaria.

4.

$u_1 = 0$
$u_2 = 0$

$u_3 = \max_{k<3} \{u_k + w_{k3}\} = \max\{u_1 + w_{13}, u_2 + w_{23}\} = \max\{0+3, 0+2\}$
$= 3$

$u_4 = \max_{k<4} \{u_k + w_{k4}\} = \max\{u_1 + w_{14}, u_2 + w_{24}, u_3 + w_{34}\} =$
$0+3, 0+2, \underbrace{3+1} = 4$

$u_5 = \max_{k<5} \{u_k + w_{k5}\} = \max\{u_1 + w_{15}, u_4 + w_{45}\}$
$0+3, 4+1 = 5$

$u_6 = \max_{k<6} \{u_k + w_{k6}\} = \max\{u_5 + w_{56}, u_4 + w_{46}\} =$
$5+4, 4+1 = 9$

$u_7 = \max_{k<7} \{u_k + w_{k7}\} = \max\{u_4 + w_{47}, u_2 + w_{27}\}$
$4+1, 0+2 = 5$

$u_8 = \max_{k<8} \{u_k + w_{k8}\} = \max\{u_6 + w_{68}, u_7 + w_{78}\}$
$9+2, 5+4 = 11$

$u_9 = \max_{k<9} \{u_k + w_{k9}\} = \max\{u_4 + w_{49}, u_7 + w_{79}\}$
$= 4+1, 5+4 = 9$

$u_{10} = \max_{k<10} \{u_k + w_{k10}\} = \max\{u_5 + w_{510}, u_6 + w_{610}, u_8 + w_{810}\}$
$5+4, 9+2, 11+1 = 12$

$u_{11} = \max_{k<11} \{u_k + w_{k11}\} = \max\{u_9 + w_{911}, u_8 + w_{811}\}$
$\underbrace{9+3} \neq \underbrace{11+1} = 12$

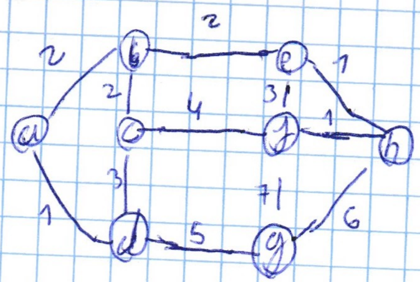
12 días para completar proyecto (u_{10} y u_{11})

1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 8 - 11
— 10

CC.

7. máximo 2 días, $u_7 \xrightarrow{9} u_8$
u_6 $\overline{11}$

Problema 7.2



Algoritmo Djikstra desde v_a

Vertice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	Paso 7	Paso 8
a	$\boxed{(0,a)}$	★	★	★	★	★	★	★
b	(2,a)	(2,a)	$\boxed{(2,a)}$	★	★	★	★	★
c	∞	(4,a)	(4,b)	$\boxed{(4,b)}$	★	★	★	★
d	(1,a)	$\boxed{(1,a)}$	★	★	★	★	★	★
e	∞	∞	(4,b)	(4,b)	$\boxed{(4,b)}$	★	★	★
f	∞	∞	∞	(8,c)	(7,e)	(7,e)	(7,e)	$\boxed{(7,e)}$
g	∞	(5,d)	(6,d)	(6,d)	(6,d)	(6,d)	$\boxed{(6,d)}$	★
h	∞	∞	∞	∞	(5,e)	$\boxed{(5,e)}$	★	★

Caminos Obtenidos =

a: a , peso = 0

b: a - b , peso = 2

c: a - b - c ó a - d - c , peso = 4

d: a - d , peso = 1

e: a - b - e , peso = 4

f: a - b - e - f , peso = 7

g: a - d - g , peso = 6

h: a - b - e - h , peso = 5

Problema 7.4

$$W = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 2 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 1 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Floyd - Warshall entre V_3 y V_5:

Usando V_1 como intermedio:

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[rr, "\infty"] \arrow[dr, "1"'] & & V_5 \\ & V_1 \arrow[ur, "8"'] & \end{tikzcd}$$

3-1-5
$w=9$

Usando V_2 como intermedio:

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[rr, "\infty"] \arrow[dr, "\infty"'] & & V_5 \\ & V_2 \arrow[ur, "2"'] & \end{tikzcd}$$

X inf

Usando V_4 como intermedio:

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[rr, "\infty"] \arrow[dr, "3"'] & & V_5 \\ & V_4 \arrow[ur, "\infty"'] & \end{tikzcd}$$

X inf

El camino más corto es $V_3 - V_1$

Ahora buscamos el más corto de V_1 a V_5

Usando V_2 como intermedio

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[rr, "8"] \arrow[dr, "2"'] & & V_5 \\ & V_2 \arrow[ur, "2"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{3-1-2-5 \quad w=5}$

Usando V_4 como intermedio

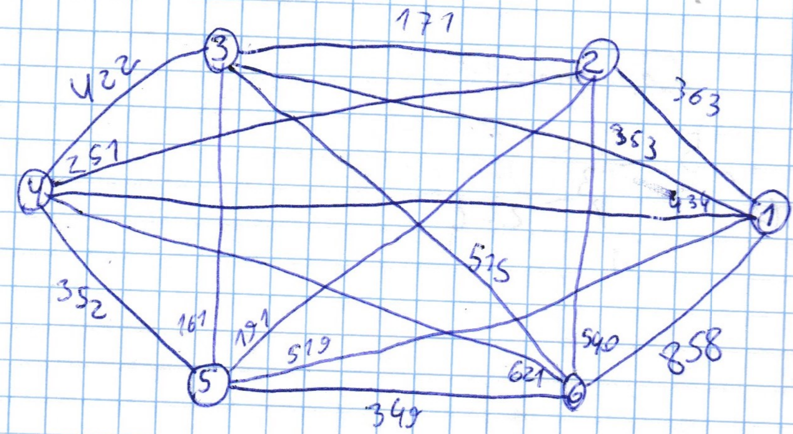
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[rr, "8"] \arrow[dr, "3"'] & & V_5 \\ & V_4 \arrow[ur, "\infty"'] & \end{tikzcd}$$

X inf

El camino más corto de V_3 a V_5 es $V_3 - V_1 - V_2 - V_5$, peso = 5

~~Rut~~ Problema 7.7

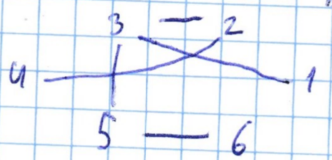
1- Granada
2- Albacete
3- Alicante
4- Madrid
5- Valencia
6- Barcelona

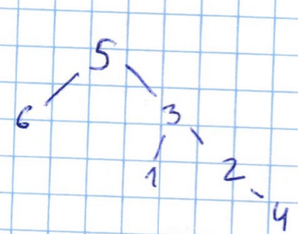


i) Empezamos seleccionando un vertice inicial, y luego las aristas con menor peso incidentes en otros que ya tenemos, pasando por cada vertice 1 vez, sin crear ciclos

	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
Granada	519	353	353	353	353 (3-1)
Albacete	191	171 (3-2)	*	*	*
Alicante	166 (5-3)	*	*	*	*
Madrid	352	352	251 (2-4)	*	*
Valencia	Inicial (0)	*	*	*	*
Barcelona	349	349	349	349 (5-6)	*

Arbol Generador:





ii) Seleccionamos las aristas de menor peso, pasando 1 o 2 veces por cada vertice, sin crear ciclos

5-3 (166)

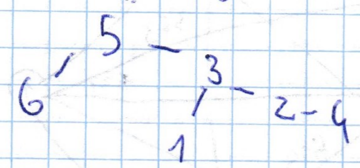
3-2 (171)

4-2 (251)

3-1 (353)

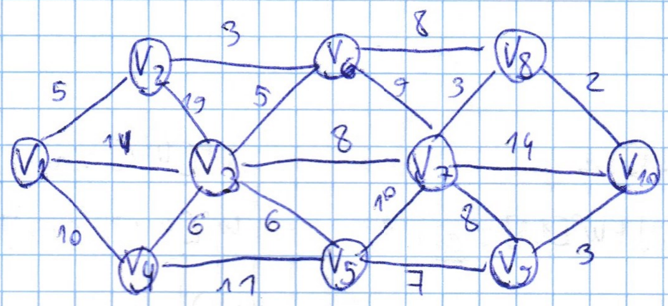
5-6 (349)

Arbol generador:



Lección 4

Ejercicio 2:



	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	Paso 7	Paso 8	Paso 9	Paso 10
V_1	$\boxed{(0, V_1)}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
V_2	$(5, V_1)$	$\boxed{(5, V_1)}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
V_3	$(14, V_1)$	$(14, V_1)$	$(13, V_6)$	$(13, V_6)$	$\boxed{(13, V_6)}$	✗	✗	✗	✗	✗
V_4	$(10, V_1)$	$(10, V_1)$	$(10, V_1)$	$\boxed{(10, V_1)}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
V_5	∞	∞	∞	$(21, V_4)$	$(19, V_3)$	$(19, V_3)$	$(19, V_3)$	$(19, V_3)$	$\boxed{(19, V_3)}$	✗
V_6	∞	$(8, V_2)$	$\boxed{(8, V_2)}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
V_7	∞	∞	$(17, V_6)$	$(17, V_6)$	$(17, V_6)$	$(17, V_6)$	$\boxed{(17, V_6)}$	✗	✗	✗
V_8	∞	∞	$(16, V_6)$	$(16, V_6)$	$(16, V_6)$	$\boxed{(16, V_6)}$	✗	✗	✗	✗
V_9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$(25, V_7)$	$(21, V_{10})$	$(21, V_{10})$	$\boxed{(21, V_{10})}$
V_{10}	∞	∞	∞	∞	∞	$(18, V_8)$	$(18, V_8)$	$\boxed{(18, V_8)}$	✗	✗

Caminos más cortos desde V_1:

V_2: $V_1 - V_2$ (5)

V_3: $V_1 - V_2 - V_6 - V_3$ (13)

V_4: $V_1 - V_4$ (10)

V_5: $V_1 - V_2 - V_6 - V_3 - V_5$ (19)

V_6: $V_1 - V_2 - V_6$ (8)

V_7: $V_1 - V_2 - V_6 - V_7$ (17)

V_8: $V_1 - V_2 - V_6 - V_8$ (16)

V_9: $V_1 - V_2 - V_6 - V_8 - V_{10} - V_9$ (21)

V_{10}: $V_1 - V_2 - V_6 - V_8 - V_{10}$ (18)

Ejercicio 3:

$$W^0 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & \infty & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Floyd Warshall

$$W^1 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & \boxed{9} & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$w^0[2,3] = \infty$

$w^0[2,1] + w^0[1,3] = \infty + 1$

$w^0[3,2] = 2$

$w^0[3,1] + w[1,2] = \infty + 4$

$w^0[4,2] = \infty$

$w^0[4,1] + [1,2] = \infty + 4$

$w^0[5,2] = \infty$

$w^0[5,1] + w^0[1,2] = 5 + 4 = 9$

$w^0[5,3] = 5$

$w^0[5,1] + w^0[1,3] = 6$

$$W^2 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & 9 & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$w^1[1,3] = 1$

$w^1[1,2] + w^1[2,3] = 4 + \infty$

∞

$$W^3 = \begin{bmatrix} \infty & \boxed{3} & 1 & \boxed{4} & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & \boxed{7} & 5 & \boxed{8} & \infty \end{bmatrix}$$

$w^2[1,2] = 4$

$w^2[1,3] + w^2[3,2] = 1 + 2 = 3$

$w^2[1,4] = \infty$

$w^2[1,3] + w^2[3,4] = 1 + 3 = 4$

$w^2[1,5] + w^2[3,5] = 1 + \infty$

$w^2[5,2] = 9$

$w^2[5,3] + w^2[3,2] = 5 + 2 = 7$

$$W^4 = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 4 & \boxed{8} \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \boxed{7} \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

$w^3[1,5] = 9$

$w^3[1,4] + w^3[4,5] = 8$

$w^3[3,5] = \infty$

$w^3[3,4] + [4,5] = 7$

~~$w^3[5,4] + [4,5]$~~

$$W^5 = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 4 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \boxed{12} & 2 & \infty & 3 & 7 \\ \boxed{9} & \boxed{11} & \boxed{9} & \infty & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

$W^4[4,2] = \infty$

$W^5[4,5] + [5,2] = 11$

2- El Camino más corto de 1 a 5 es ~~mismo~~ 1-3-4-5 como se puede ver en los calculos de W^4 y W_3

3- Volvemos a calcular W^4 y W^5 sin W^3 (a partir de W^2) y sin tener en cuenta V_3

$$W^2 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & 9 & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 3 & \boxed{7} \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 5 & 9 & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

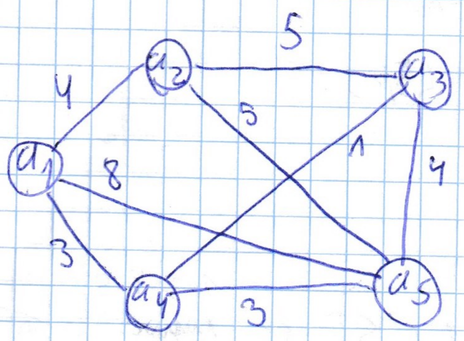
$$W^5 = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \boxed{12} & 2 & \infty & 3 & 7 \\ \boxed{9} & \boxed{13} & \boxed{9} & \infty & 4 \\ 5 & 9 & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$W^4[4,2] = \infty$

$W^4[4,5] + W^4[5,2] = 4+9 = 13$

El Camino más corto de 4 a 2 es 4-5-1-2 (13)

Ejercicio 4

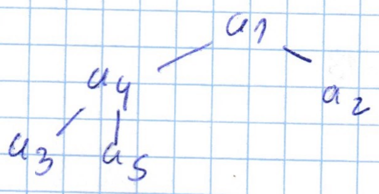


1- Debemos obtener los caminos mas cortos entre cada par de vertices (Floyd-Worshall), (Prim)...

2- Empezamos seleccionando un vertice inicial y luego la arista con menor peso, incidente con otros vertices que ya hemos seleccionado, sin crear ciclos.

	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
a_1	0 (inicial)	X	X	X	X
a_2	4	4	4	4 (1-2)	X
a_3	∞	1 (4-3)	X	X	X
a_4	3 (1-4)	X	X	X	X
a_5	8	3	3 (4-5)	X	X

Arbol generador:



3- Seleccionamos las aristas de menor peso, hasta haber obtenido todos los vertices, sin crear ciclos

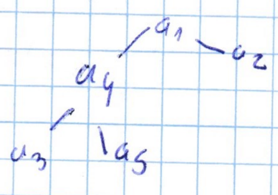
$a_4 - a_3$ (1)

$a_4 - a_5$ (3)

$a_4 - a_1$ (3)

$a_1 - a_2$ (4)

Arbol generador



4 – Vertice inicial = $a_3 - a_5$

	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
a_1	∞	8	3 (4-1)	✗
a_2	5	5	5	4 (1-2)
a_3	Inicial (0)	✗	✗	✗
a_4	1	1 (3-4)	✗	✗
a_5	4 (3-5)	✗	✗	✗

$a_3 - a_5$
|
$a_4 - a_1 - a_2$

5 – Lo mismo, en vez de utilizar la arista con menor peso, utilizamos a_3-a_5 como inicial

$a_3 - a_5$ (4)
$a_3 - a_4$ (1)
$a_1 - a_4$ (1)
$a_1 - a_2$ (4)

$a_3 - a_5$
|
a_4
|
a_1
|
a_2