Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES (I)

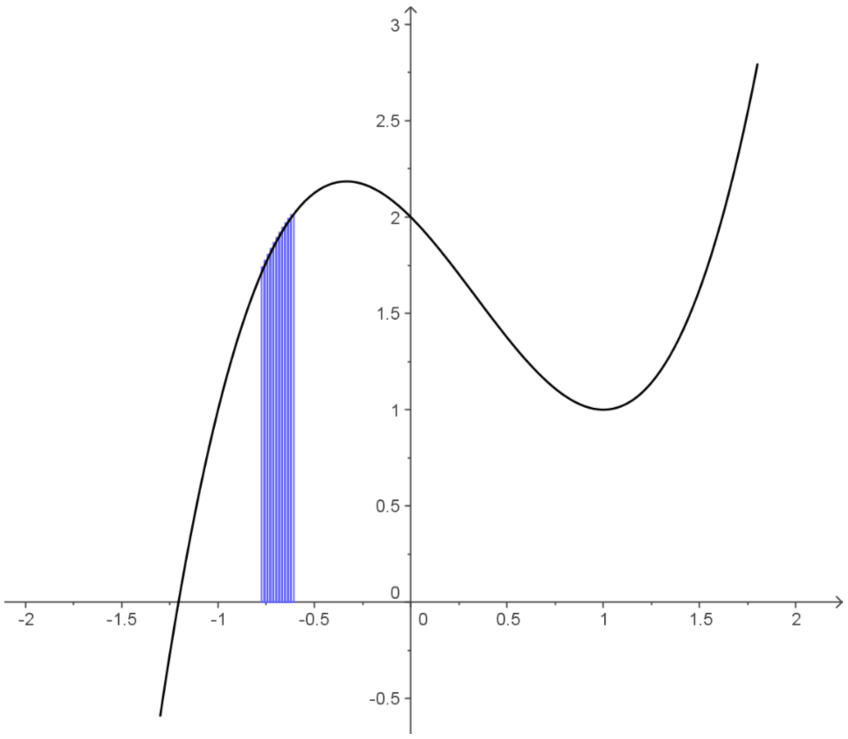
CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

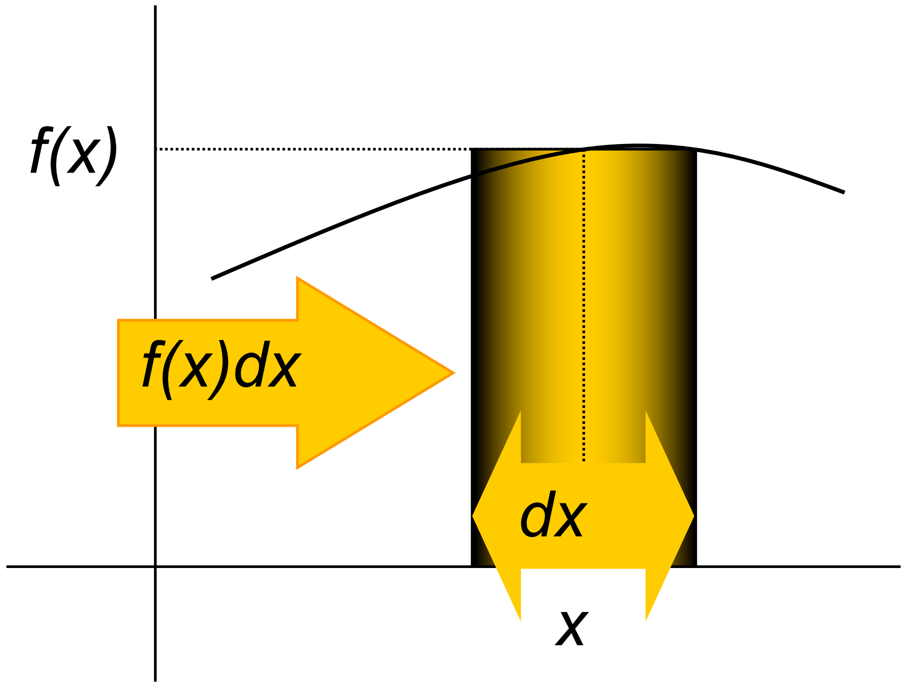
Integrar significa acumular pequeños (ínfimos) y consecutivos resultados

Si pudiéramos sumar las líneas verticales asociadas a cada punto de una gráfica conceptualmente, obtendríamos el área que queda por debajo de la gráfica. Pero las líneas no tienen superficie.



PROBLEMA DEL ÁREA

Para que las líneas verticales tuvieran superficie deberíamos considerar que tiene un pequeño grosor, un ancho ínfimo que llamaremos *dx*



FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA

Sea *f* acotada en *[a, b]*, intervalo dividido en *n* subintervalos de longitud Δx de la forma

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que

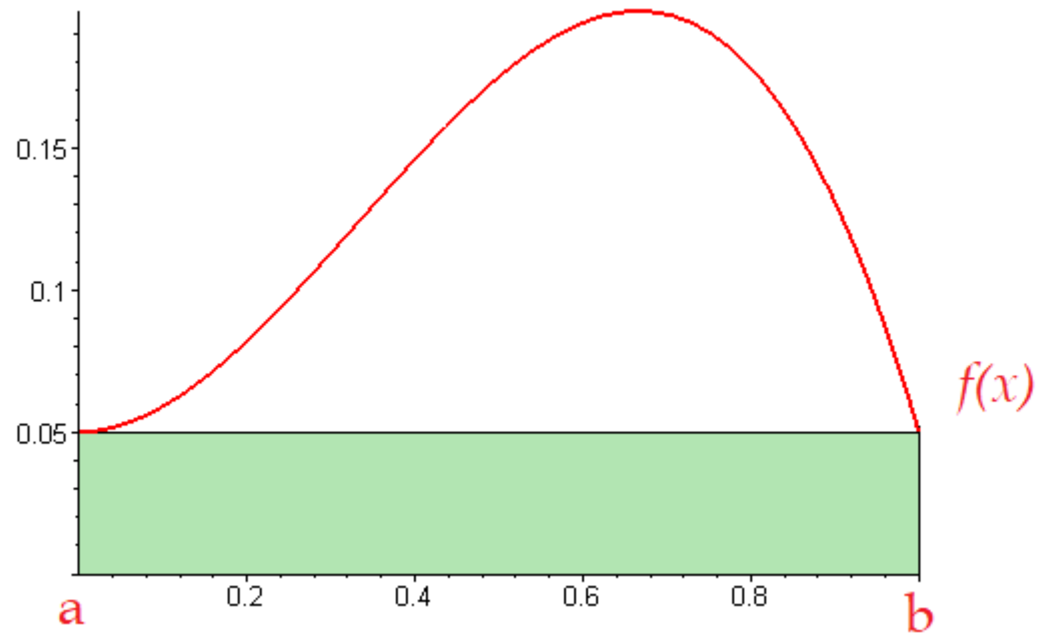
$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

y

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

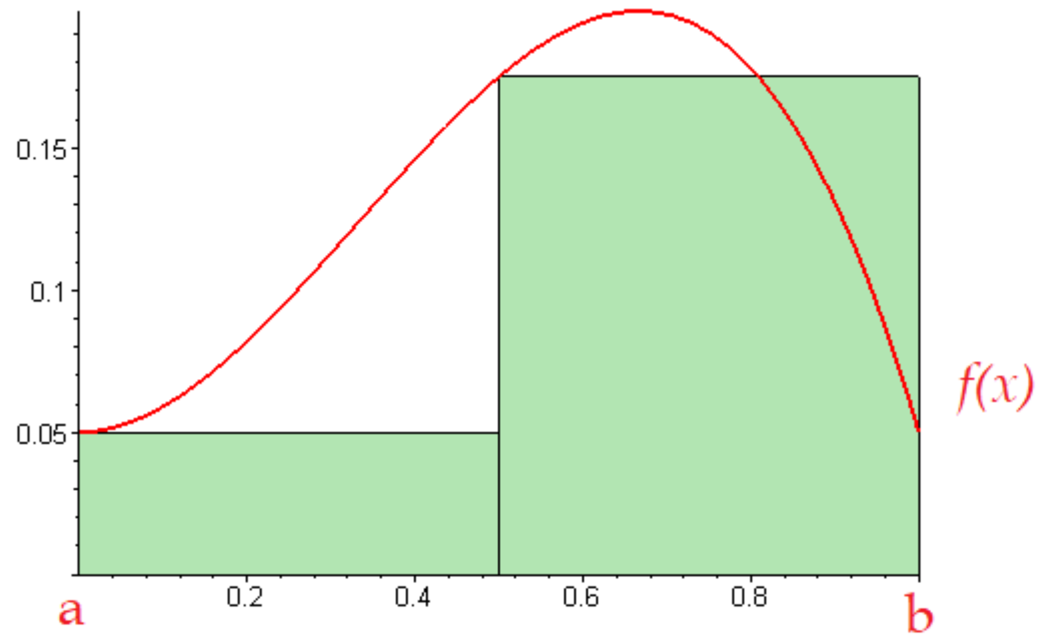
SUMAS INFERIORES



$$L_1(f) = m_1 \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{1}$$

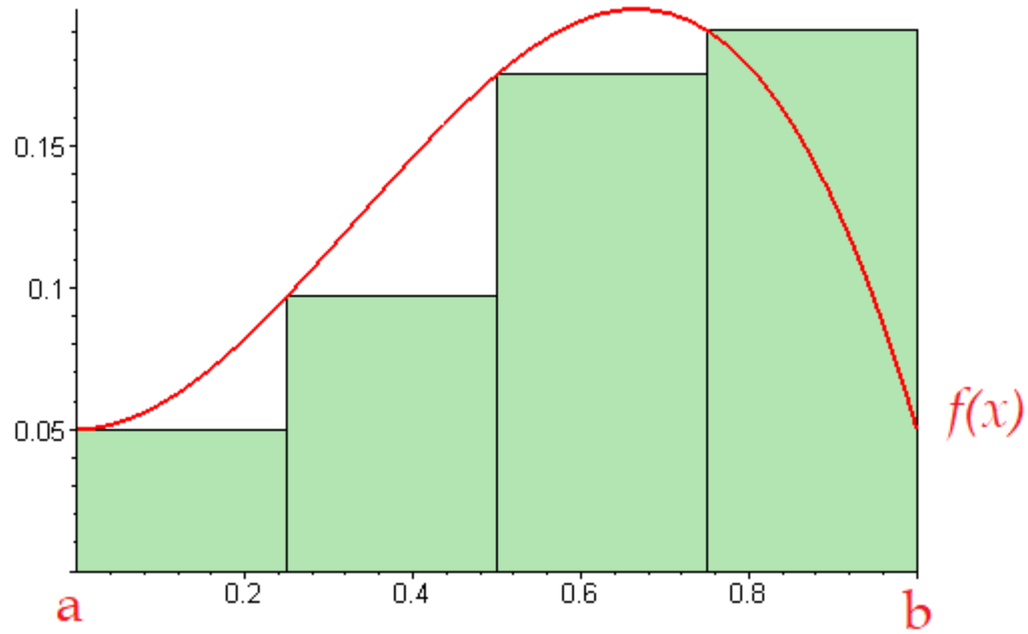
SUMAS INFERIORES



$$L_2(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x = \sum_{k=1}^{2} m_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{2}$$

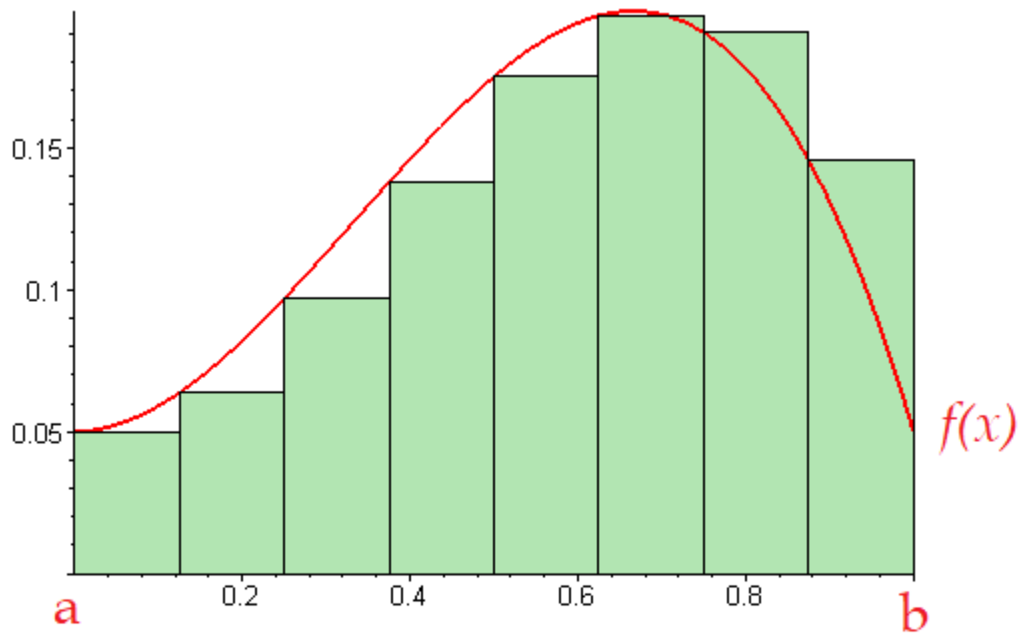
SUMAS INFERIORES



$$L_4(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_4\Delta x = \sum_{k=1}^{4} m_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

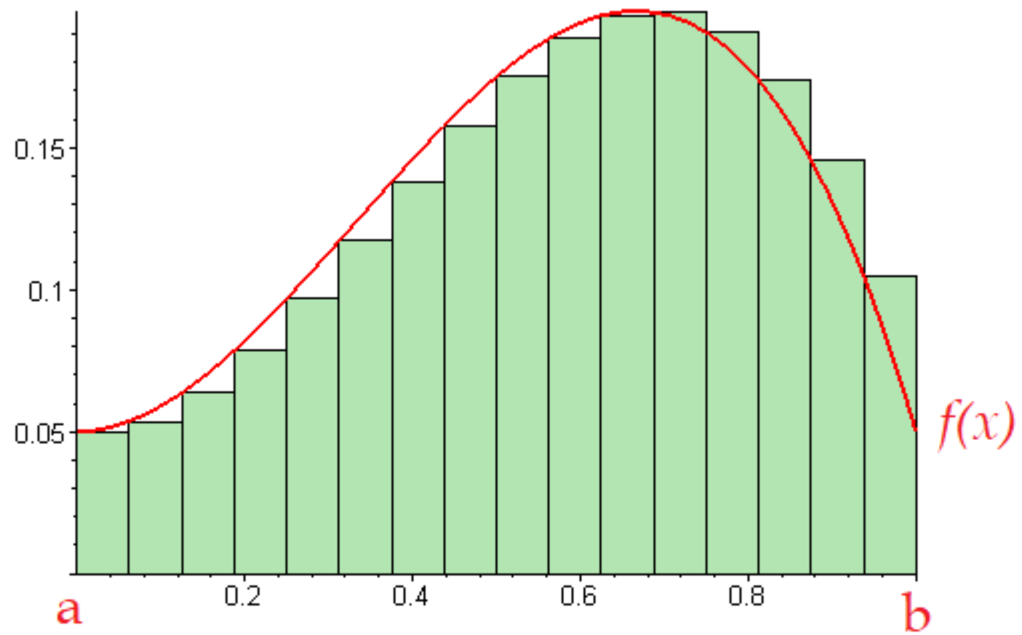
SUMAS INFERIORES



$$L_8(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \dots + m_8\Delta x = \sum_{k=1}^{8} m_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{8}$$

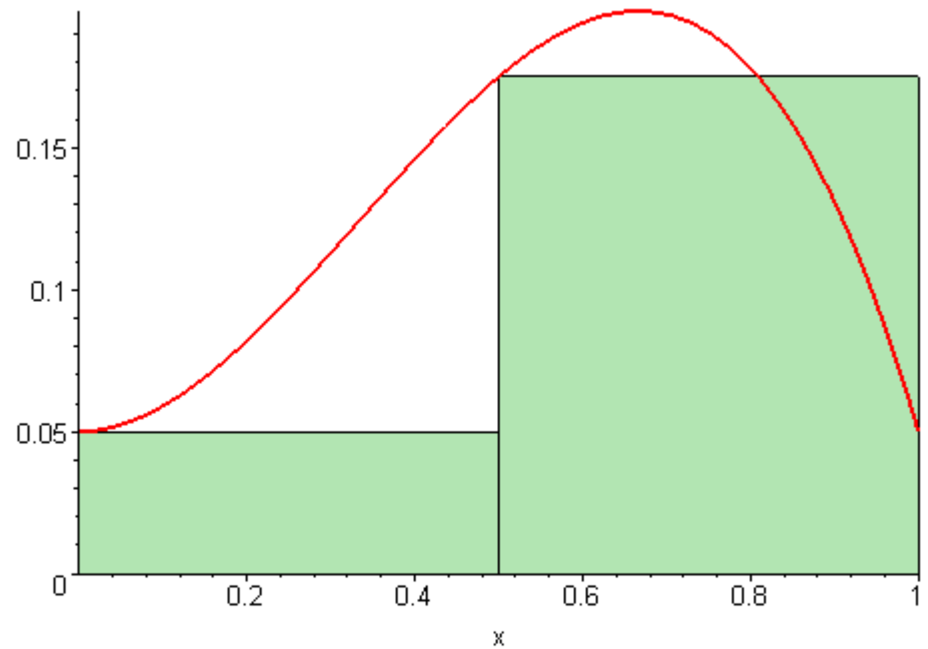
SUMAS INFERIORES



$$L_{16}(f) = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \ldots. + m_{16} \Delta x = \sum_{k=1}^{16} m_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{16}$$

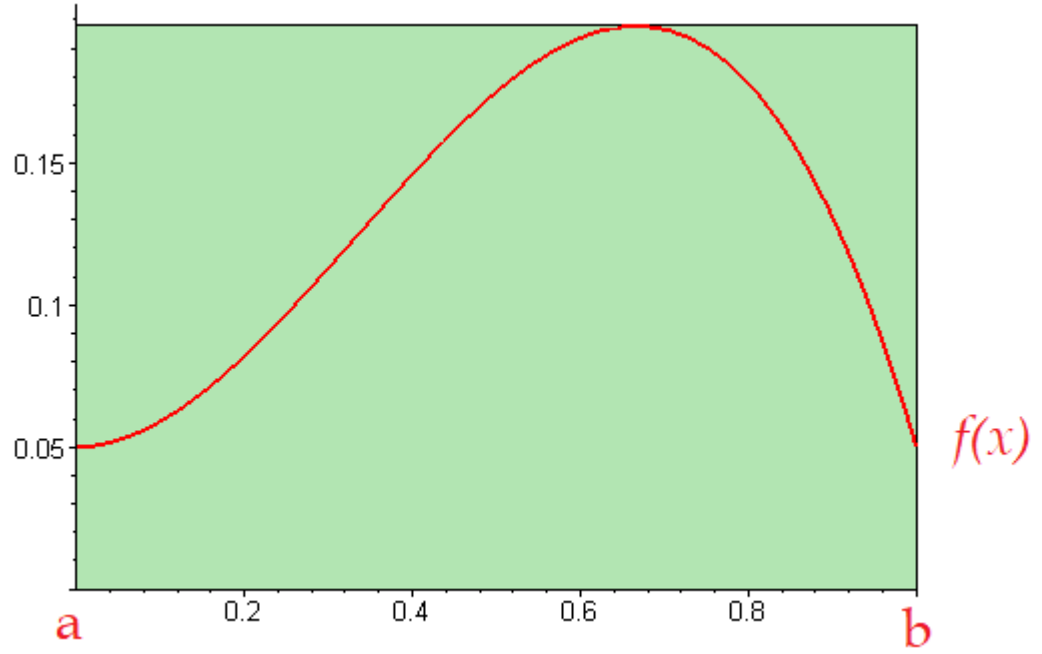
SUMAS INFERIORES



$$L_n(f) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots. + m_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$L_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{Área inferior de } f \text{ entre } x = a \text{ y } x = b$$

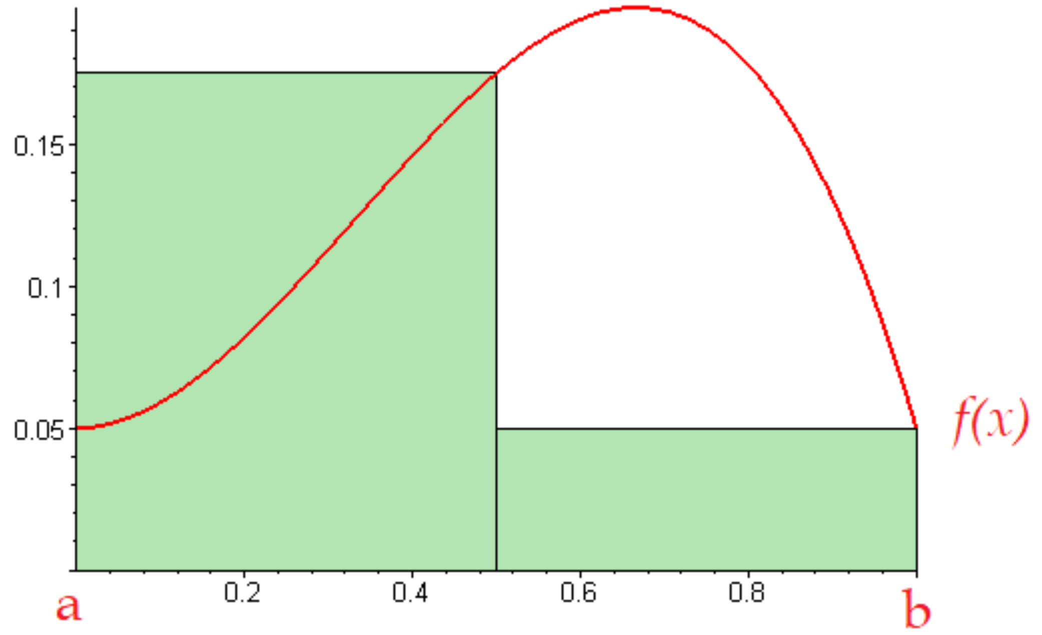
SUMAS SUPERIORES



$$U_1(f) = M_1 \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{1}$$

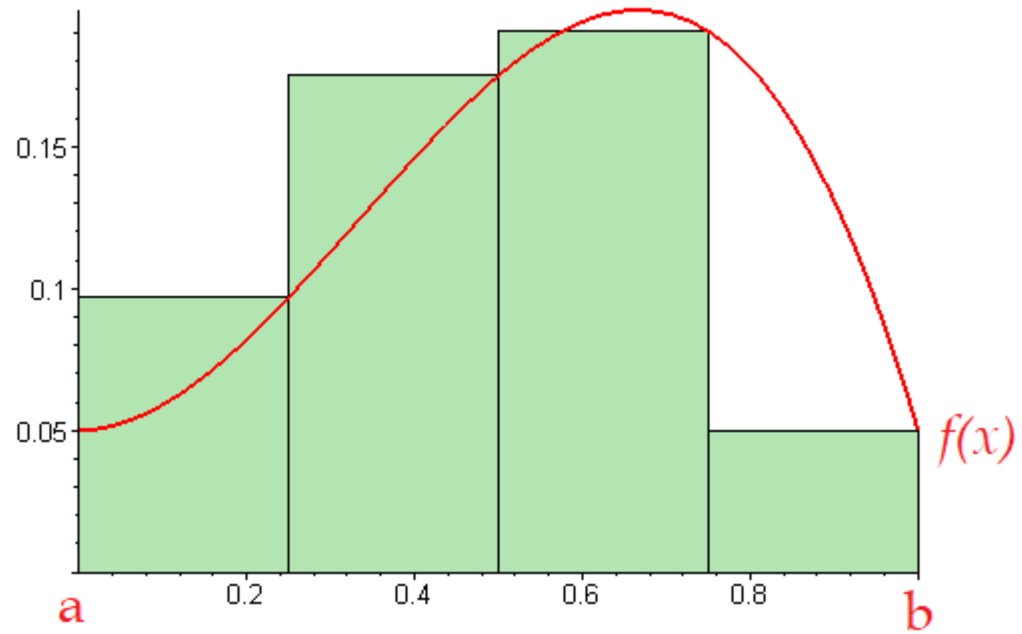
SUMAS SUPERIORES



$$U_2(f) = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x = \sum_{k=1}^{2} M_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{2}$$

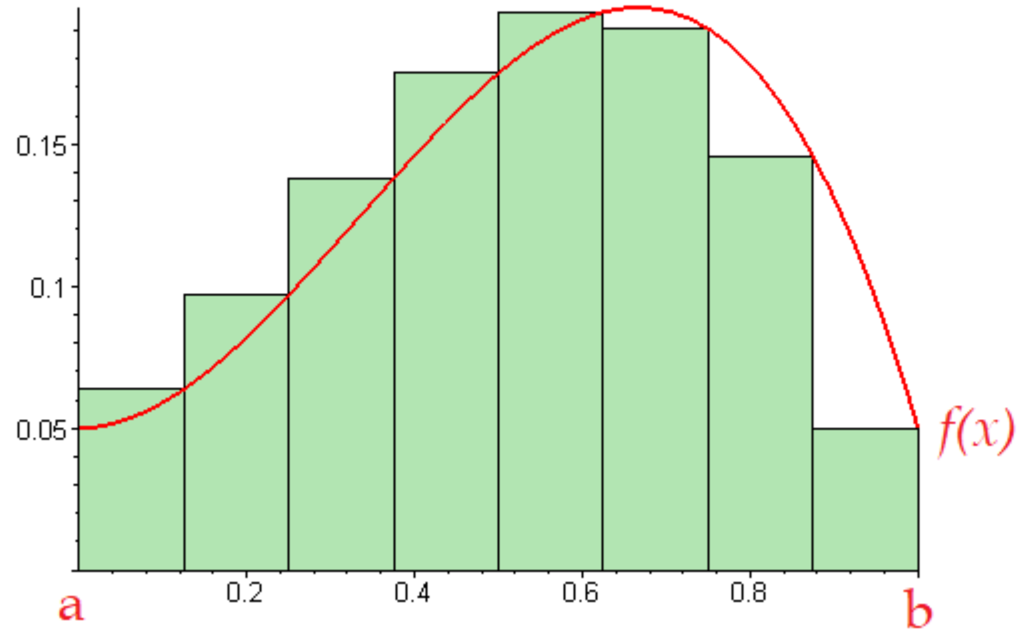
SUMAS SUPERIORES



$$U_4(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_4\Delta x = \sum_{k=1}^{4} M_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

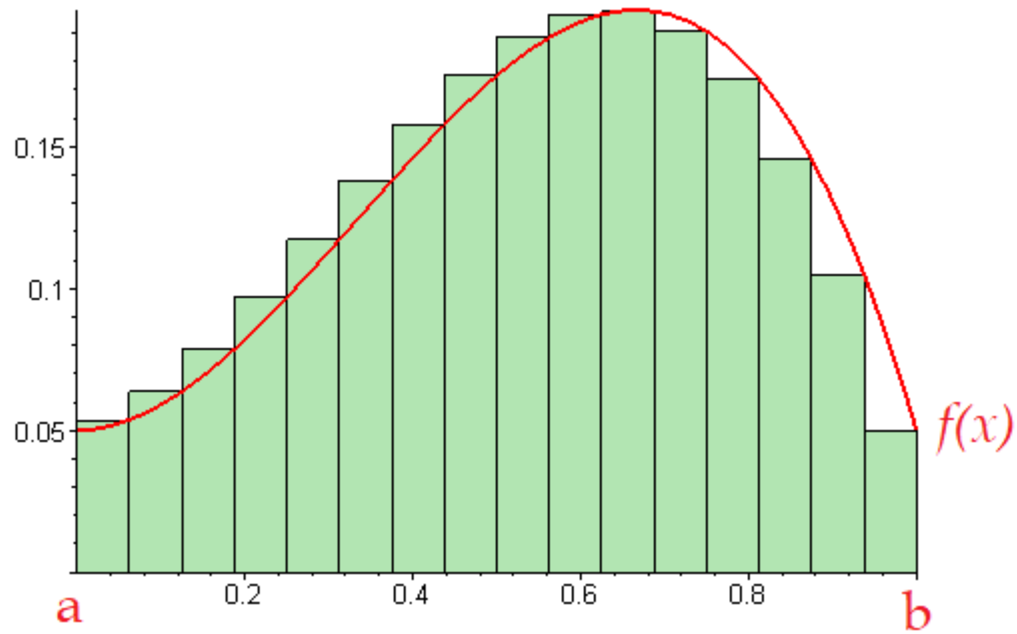
SUMAS SUPERIORES



$$U_8(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_8\Delta x = \sum_{k=1}^{8} M_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{8}$$

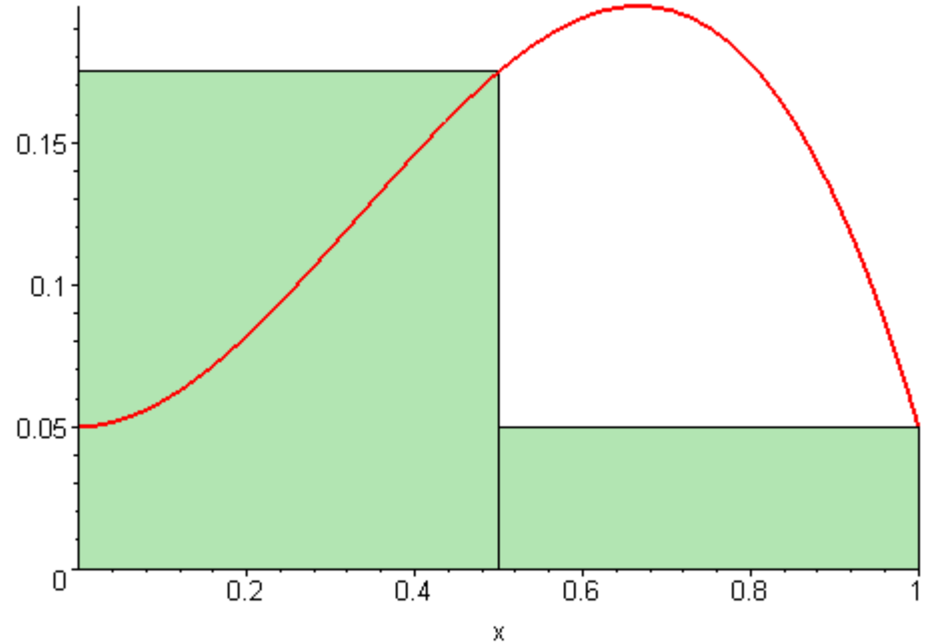
SUMAS SUPERIORES



$$U_{16}(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_{16}\Delta x = \sum_{k=1}^{16} M_k \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{16}$$

SUMAS SUPERIORES



$$U_n(f) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$U_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{Área superior de } f \text{ entre } x = a \text{ y } x = b$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Darboux (particularización Riemann)

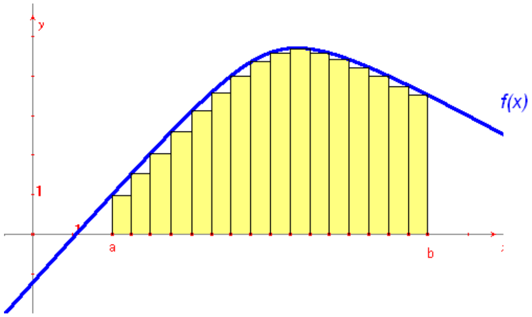
Para cualquier *n*

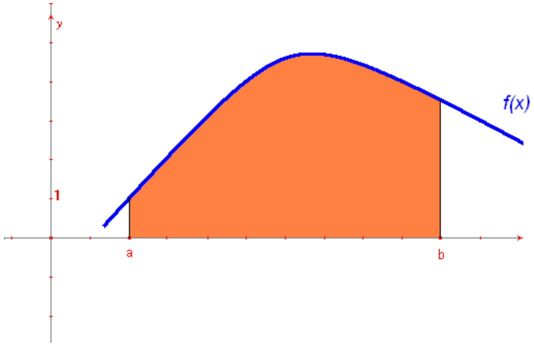
$$L_n(f) \leq \acute{A}rea \leq U_n(f)$$

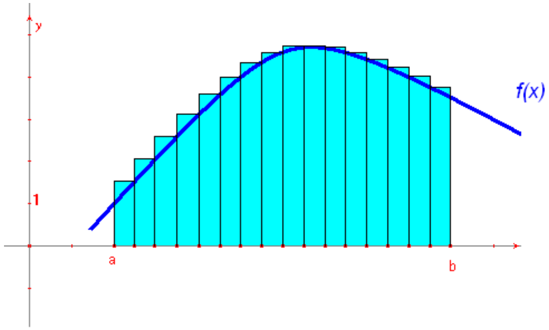
Cuando $n \to \infty$ entonces $\Delta x \to 0$, y si entonces L_n y U_n son el mismo límite, se dice que *f* es integrable en *[a, b]* y ese límite se llama **integral definida** de *f* entre *a* y *b* y se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA







$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} U_n(f)$$

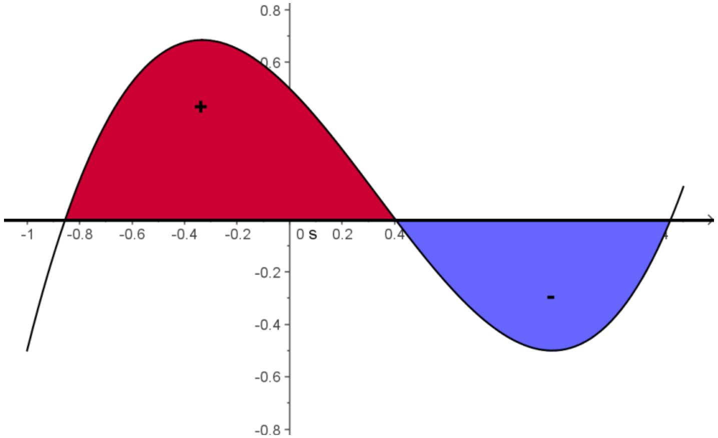
CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Corte con el eje X

Si *f(x)* es positiva y negativa, la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa la diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje x



CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Integrar $f(x)=x^2$ para $x \in [0,1]$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

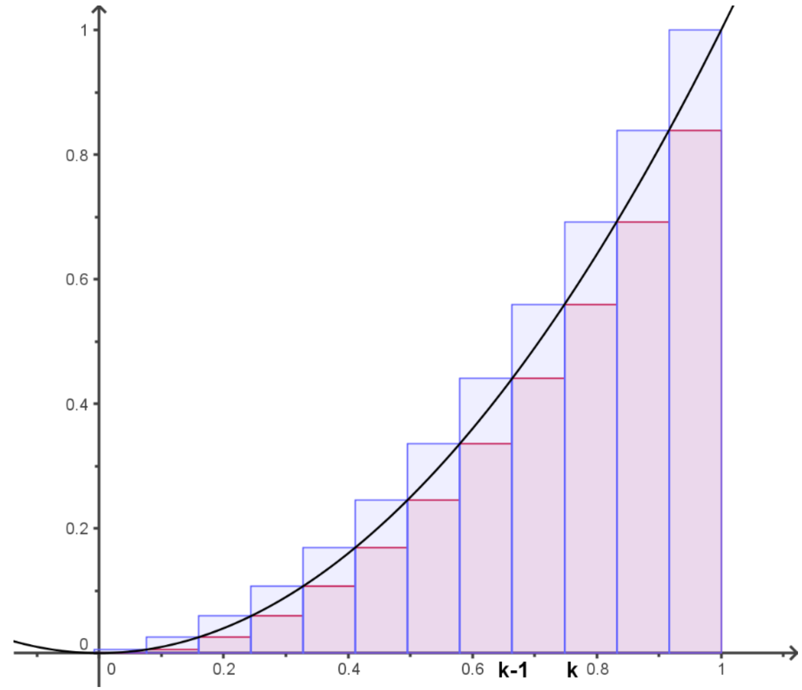
Ejemplo. Integrar $f(x)=x^2$ para $x \in [0,1]$

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$L_n(f)=\frac{1}{n^3}\left[0^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

$$U_n(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$U_n(f)=\frac{1}{n^3}\left[1^2+\ldots+n^2\right]$$



Usando $$1^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$L_n(f)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$U_n(f)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

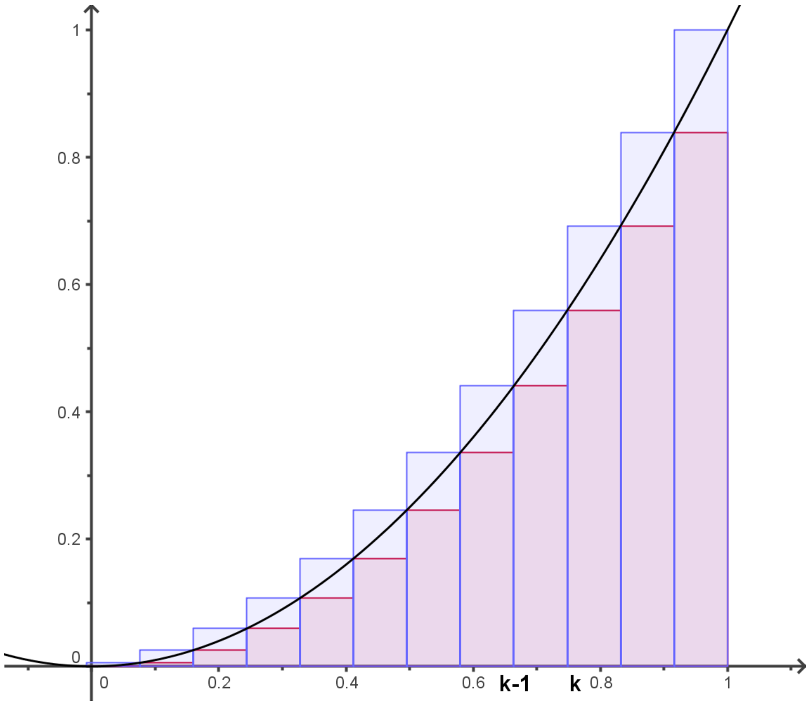
Ejemplo. Integrar $f(x)=x^2$ para $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \frac{2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \frac{2}{6}$$

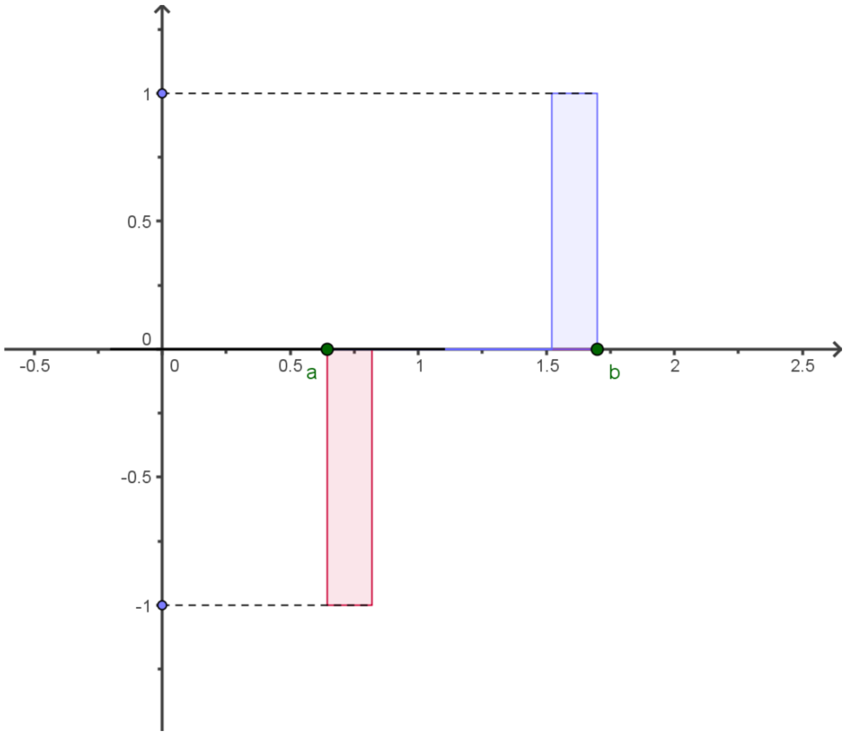


$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Discontinuidad e integrabilidad

$$g(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x=a \\ 0 & \text{si} \quad a<x<b \\ 1 & \text{si} \quad x=b\end{cases}$$



$$L_n(g)=-\frac{b-a}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} L_n(g)=0$$

$$U_n(g)=\frac{b-a}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} U_n(g)=0$$

$$\int_a^b g(x)dx=0$$

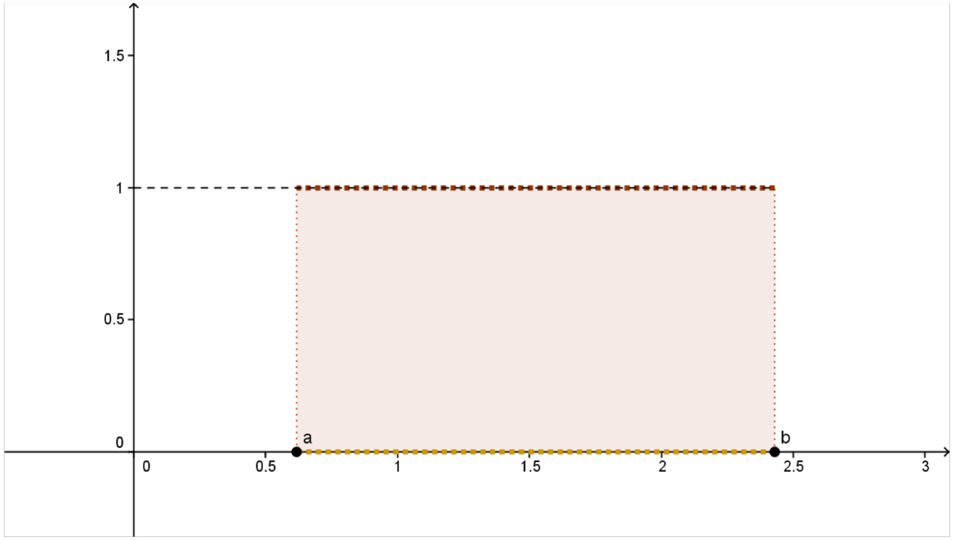
Las funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son integrables

Función de Dirichlet

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \quad \text{racional} \\ 0 & \text{si} \quad x \quad \text{iracional} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(h) = 0\frac{b-a}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(h) = n\frac{b-a}{n} = b-a$$



Para la definición dada, la función h(x) no es integrable porque los límites no coinciden

Otra definición: Lebesgue

INTEGRAL DEFINIDA. PROPIEDADES

Linealidad

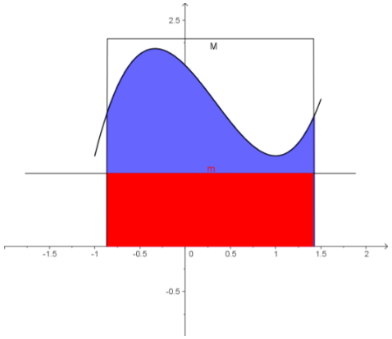
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

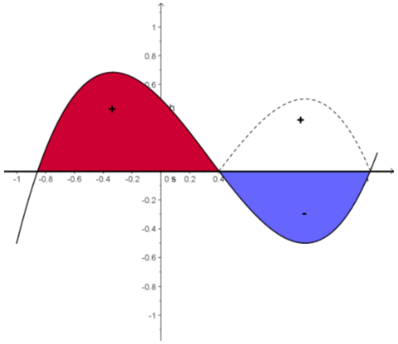
Desigualdades

Si *m* ≤ *f(x)* ≤ *M* para *x* ϵ *[a,b]* entonces

1. $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



2. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$



INTEGRAL DEFINIDA. PROPIEDADES

Desigualdades

Si *f(x)* ≤ *g(x)* para *x* є *[a, b]* (f y g continuas en [a, b])

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

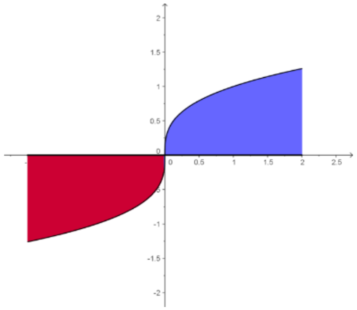
Si *f(x)*≥*0* para *x* є *[a, b]* y *[c, d]* ⊂ *[a, b]*

$$\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Otros

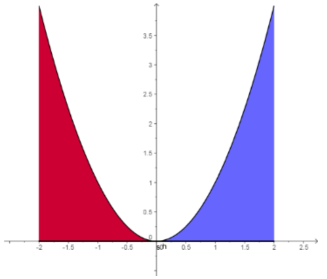
Si f(x) es impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



Si f(x) es par

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRABILIDAD A TROZOS

Teorema

Sean *a* < *c* < *b* y *f(x)* integrable en *[a, b]* entonces *f(x)* es integrable en *[a, c]* y *[c, b]*,

y $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

además $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Generalizando $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

INTEGRABILIDAD A TROZOS

Teoremas

Si *f(x)* es continua en *[a, b]*, entonces *f(x)* es integrable en *[a, b]*

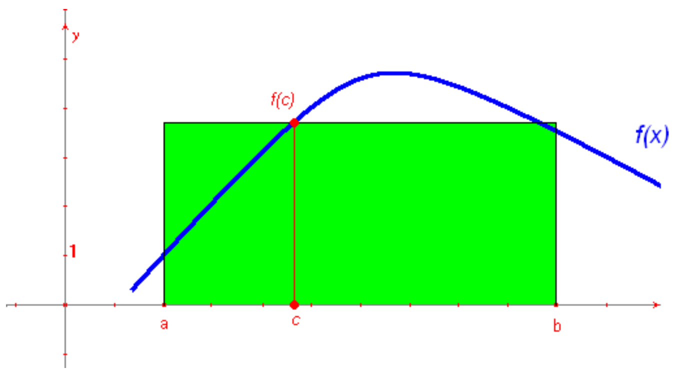
Si *f(x)* es continua a trozos en *[a, b]*, entonces *f(x)* es integrable en *[a, b]*

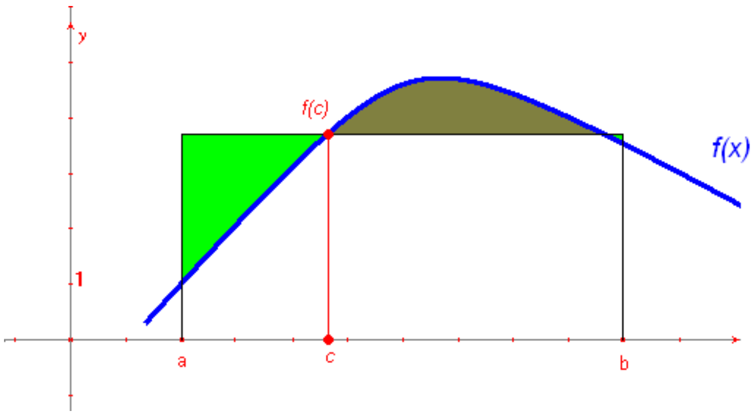
CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

TEOREMA DE LA MEDIA (INTEGRAL)

Si la función *f(x)* es continua en *[a, b]* entonces existe un *c є [a, b]* tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$





CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si *f(x)* es integrable en *[a, b]* entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en *[a, b]*

Si además *f(x)* es continua en *c ϵ (a, b)* entonces *F(x)* es derivable en *c* y

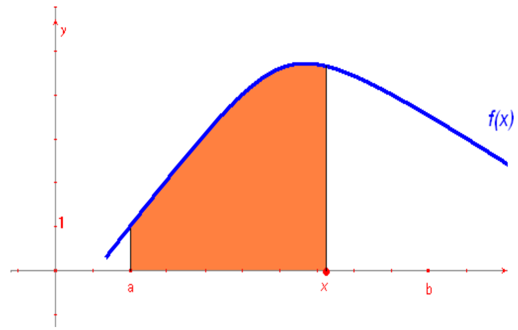
$$F'(x) = f(x)$$

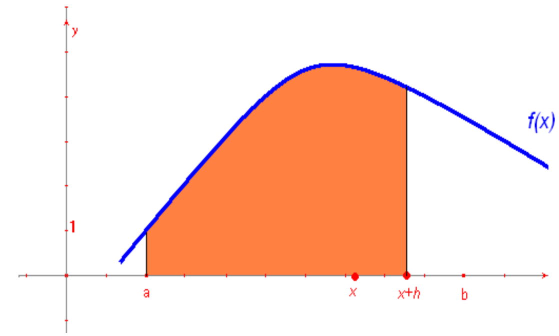
PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Demostración

Si

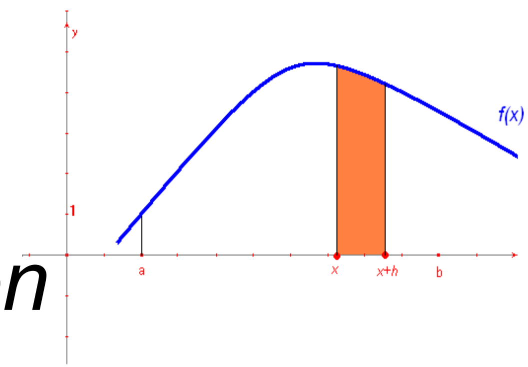
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$





por teorema valor medio

$$F(x+h)-F(x)=h\cdot f(c)$$



donde *c ϵ [x, x+h] y por definición*

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(c)}{h}=f(c)$$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si *f(x)* es continua en *[a, b]* y *f(x)=g'(x)* entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)]_a^b$$

Demostración:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad F'(x) = f(x) \qquad F(x) = g(x) + k$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = g(a) + k = 0 \qquad k = -g(a)$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = g(b) + k = g(b) - g(a) = g(t)]_a^b$$

REGLA DE BARROW

Se dice que *g(x)* es una primitiva de *f(x)* si *f(x)=g'(x)*

F(x)=g(x)+k nos sirve para representar cualquier elemento del conjunto de todas las primitivas de *f(x)*

Y el segundo teorema fundamental se conoce como regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida

INTEGRAL INDEFINIDA

Es el conjunto de todas las infinitas primitivas de una función y se denota por

$$\int f(x)dx$$

Se resuelve como $\int f(x)dx = F(x) + C$

donde *C* es la constante de integración.

Podemos considerar, pues, la integral indefinida como la operación inversa a la deriva, lo que se denomina antiderivada.

INTEGRAL INDEFINIDA

Sirven para resolver integrales definidas mediante la regla de Barrow

El sistema consiste en establecer tablas de primitivas o aplicar reglas para el cálculo de las no conocidas, y así poder resolver las integrales.

Integrales elementales

$$\int 0dx = c \qquad \int adx = ax + c \qquad \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

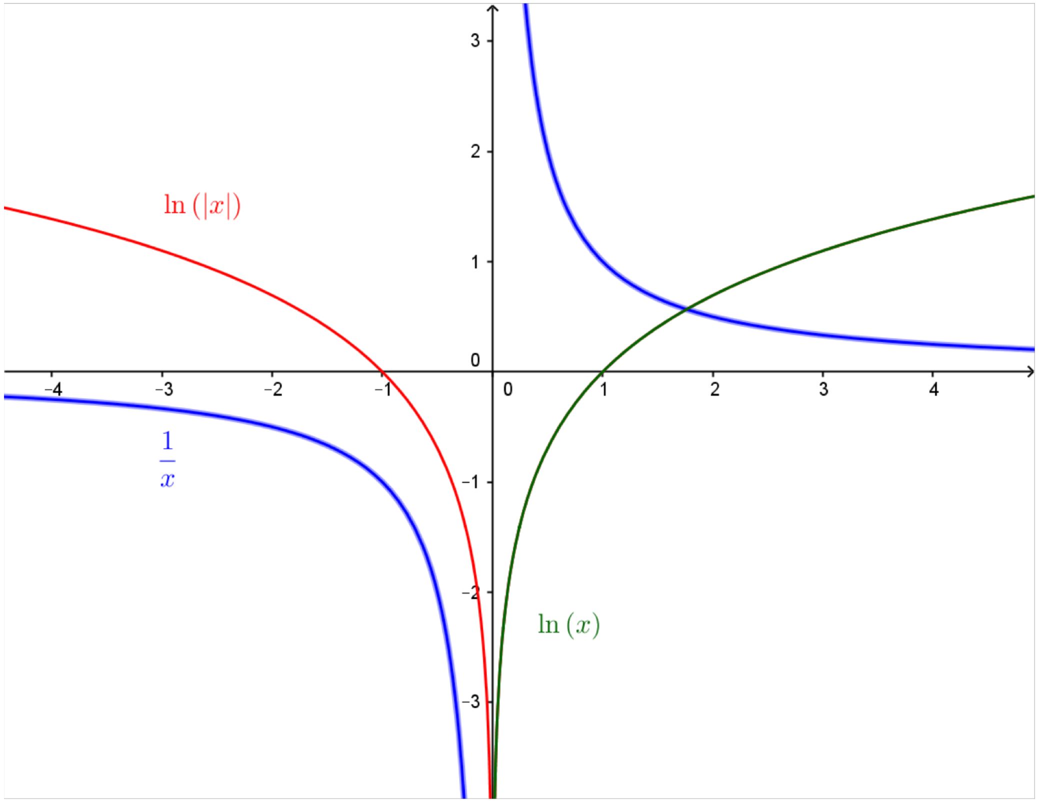
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Como $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$ entonces $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$



INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

Como

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)=\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x)=-\operatorname{sen}(x)$$

entonces

$$\int \operatorname{sen}(x)dx=-\cos(x)+c$$

$$\int \cos(x)dx=\operatorname{sen}(x)+c$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Tablas de primitivas

Como $$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Entonces $$\int e^x dx = e^x + c$$

Y más … (ver tablas de primitivas).

INTEGRAL DEFINIDA. EJERCICIO 1

$$\int_0^2 f(x)dx \text{ si } \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & para \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & para \quad 1< x\le 2 \end{cases}$$

INTEGRAL INDEFINIDA

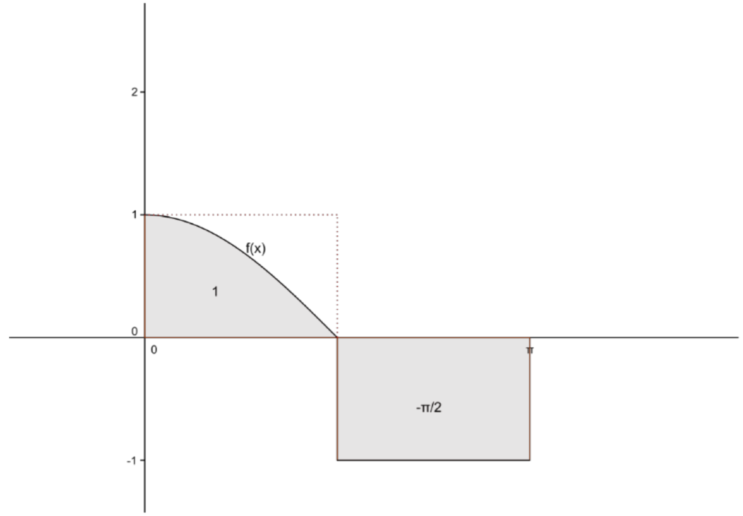
Ejercicio

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ si } \quad f(x) = \begin{cases} \cos(x) & para \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ -1 & para \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-1)dx =$$

$$= \operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2} + (-x)\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 1 - \pi/2$$



INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4 - 4}\, dt$$

Por ser impar el integrando

$$F(1) = \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{t^4 - 4}\, dt = 0$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt$$

Por ser impar el integrando

$$F(1)=\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt=0$$

La pendiente es la derivada en ese punto *x=1*

$$F'(x)=\frac{x^3}{x^4-4} \qquad F'(1)=\frac{1}{-3}$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt$$

Por ser impar el integrando

$$F(1)=\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt=0$$

Pendiente es la derivada en ese punto *x=1*

$$F'(x)=\frac{x^3}{x^4-4}\qquad F'(1)=\frac{1}{-3}$$

Entonces la tangente es $\dfrac{y-0}{x-1}=-\dfrac{1}{3}\qquad y=-\dfrac{x-1}{3}$

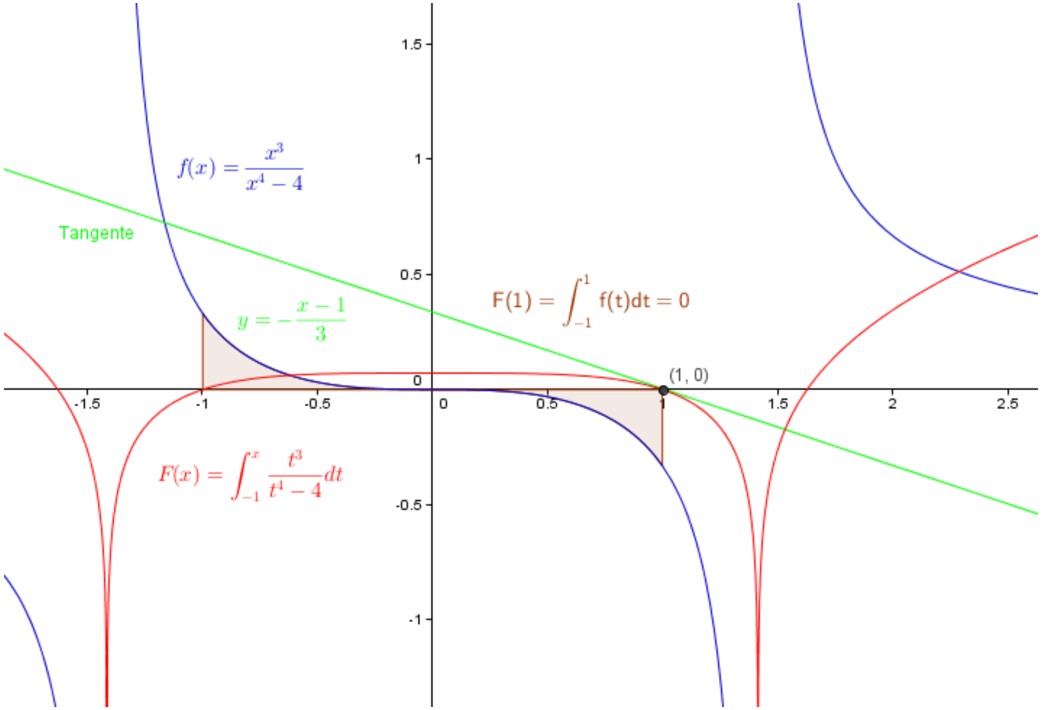
INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio

Calcular la recta tangente en *x=1* a la función

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{t^3}{t^4-4}\,dt \qquad F'(x)=f(x)=\frac{x^3}{x^4-4}$$

$$y=-\frac{x-1}{3}$$



INTEGRAL INDEFINIDA

Teorema

Si *f(t)* es continua en *[a(x), b(x)]* ó *[b(x), a(x)]*, si *a(x)>b(x)* y

$$H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

entonces

$$H'(x) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Demostración

Si suponemos

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

entonces

$$H(x)=\int_0^{b(x)} f(t)dt-\int_0^{a(x)} f(t)dt = F[b(x)]-F[a(x)]$$

$$H'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

INTEGRAL INDEFINIDA. EJERCICIO

Calcular la derivada de la función

$$H(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

INTEGRAL INDEFINIDA. EJEMPLO

Calcular la derivada de la función

$$H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio

Calcular la derivada de la función

$$H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

$$H'(x) = \operatorname{sen}[(\sqrt{x})^2]\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}}$$

INTEGRAL INDEFINIDA. REGLAS

Combinación lineal

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Como la derivada del logaritmo de una función es

$$\frac{d}{dx}\ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

entonces

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln[f(x)] + c$$

INTEGRAL INDEFINIDA. REGLAS

Como la regla de la cadena deriva

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^a = a[f(x)]^{a-1} f'(x)$$

entonces

$$\int [f(x)]^a f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c$$

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Como la regla de la cadena deriva

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

entonces

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)] + c$$

Hacemos el cambio de variable *u=g(x)* para sustituir *du* por *g'(x)dx*

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejemplo

$$\int x\cos(x^2)dx$$

Se hace el cambio $u=x^2$ y $du=2xdx$

$$\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(u) + c = \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{2} + c$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejemplo

Se realiza el cambio u=ln(x) -> du=dx/x, y también e y 5

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)} \qquad u(e)=\ln(e)=1$$

$$u(5)=\ln(5)$$

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_1^{\ln(5)} \frac{du}{u} = \ln(u)\Big]_1^{\ln(5)}$$

$$\ln(\ln(5)) - \ln(1) = \ln(\ln(5))$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicio

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes

INTEGRACIÓN POR PARTES

Si

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

entonces

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

de donde

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Si se cambia a la nomenclatura *df=f'(x)dx*, y u=f(x), v=g(x), la regla queda

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sentado **u**n **d**ía **v**i **u**n **v**aliente **S**oldado **v**estido **d**e **u**niforme

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Prioridad para escoger la función **u**

Inversas: arcsen, arccos, arctag
Logarítmicas: log
Aritméticas: x^n
Trigonométricas: sen, cos, tag
Exponenciales: e^x

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u=ln(x)$ y $dv=dx$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int u dv = uv - \int v du$$

Tomamos *u=ln(x)* y *dv=dx*

Calculamos *du=dx/x* y *v=x*

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int \ln(x)dx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u=ln(x)$ y $dv=dx$

Calculamos $du=dx/x$ y $v=x$

Sustituimos

$$\int \ln(x)dx = \ln(x)x - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + c = x(\ln(x)-1) + c$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRACIÓN POR PARTES. EJERCICIO

$$\int xe^{-x}dx$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos *u=sen(x)* y *dv=*e^x*dx*
Calculamos *du=cos(x)dx* y *v=*e^x
Sustituimos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos	*u=sen(x)*	y	$dv=e^x dx$
Calculamos	*du=cos(x)dx*	y	$v=e^x$

Sustituimos

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x \mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Tomamos	*u=cos(x)*	y	$dv=e^x dx$
Calculamos	*du=-sen(x)dx*	y	$v=e^x$

Sustituimos

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx = e^x \mathrm{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo

$$\int e^x \mathrm{sen}(x)dx$$

Integral por partes cíclica

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - \left(e^x \cos(x) - \int -e^x sen(x)dx\right)$$

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \,\mathrm{sen}(x) - e^x \cos(x) - \int e^x sen(x)dx$$

$$2\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \left(\mathrm{sen}(x) - \cos(x)\right)$$

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(x)dx = e^x \left(\frac{\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{2}\right) + c$$

EJERCICIOS

1. $\int_0^1 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} x & para \quad 0 \le x \le t \\ t\dfrac{1-x}{1-t} & para \quad t < x \le 1 \end{cases}$

2. Calcular la derivada de la función $\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

3. Calcular la derivada de la función $\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \cos(\pi \cdot t^2)dt$

4. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)dx$

5. $\int \left(3 - \mathrm{x}^2\right)^3 dx$

6. $\int \dfrac{dx}{x+a}$

EJERCICIOS - SOLUCIONES

1. $\frac{5}{6}$

2. $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^3}}$

3. $\left(\sin(x) - \cos(x)\right)\cos(\pi \cdot \sin^2(x))$

4. 4π

5. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$

6. $\ln(x+a)$