RESUMEN Y EJEMPLOS SOBRE TRATAMIENTO DE ERRORES

Nota Previa: En UA-Cloud/Moodle/Laboratorio, disponéis del documento "1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf" donde se recogen los aspectos más importantes relacionados con la adquisición de medidas de magnitudes físicas. No obstante, dado que el tiempo dedicado a prácticas de laboratorio en esta asignatura es muy escaso (7.5 horas presenciales) hay determinados aspectos recogidos en el mismo que no va a ser posible contemplarlos. En este sentido, aunque ponemos a disposición de todos los alumnos el documento completo y recomendamos su lectura, os presentamos aquí un resumen con los elementos imprescindibles que debéis tener en cuenta. Este resumen está adaptado a las situaciones concretas que vamos a encontrarnos en las prácticas de laboratorio planificadas para esta asignatura y los ejemplos que se incluyen están relacionados con magnitudes físicas con las que vamos a trabajar.

Este documento tenéis que tenerlo a mano (On-Line o en papel impreso) en las 5 sesiones de laboratorio a las que tenéis que acudir de forma presencial.

ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO

- Toda medida realizada experimentalmente está afectada por una imprecisión. El valor de una medida **V** debe ir acompañado de su cota de error denominada error absoluto **Ea**. El error absoluto es un índice de la fiabilidad de la medida y se coloca detrás de ésta precedido por el signo (±).
- También puede expresarse el valor de una medida acompañada por su error relativo $\boldsymbol{\varepsilon_r}$, que nos informa, además, de la precisión de esta medida.
- Ambos errores está relacionados por la expresión: $\varepsilon_r = \frac{E_a}{V}$
- Lo errores relativos se suelen expresar en tanto por ciento: $\varepsilon_r(\%) = 100 \cdot \varepsilon_r = 100 \cdot \frac{E_a}{V}$, pero para **operar** siempre utilizaremos la expresión $\varepsilon_r = \frac{E_a}{V}$, es decir en tanto por uno.

> Ejemplo: R=2.45 ± 0.01 kΩ
>
> Valor: $\mathbf{V}_{(R)} = 2.45$ kΩ; $E_{a\,(R)} = 0.01$ kΩ; $\varepsilon_{r(R)} = \frac{E_{a(R)}}{V_{(R)}} = \frac{0.01}{2.45}$ =0.004; $\varepsilon_r(\%) = 0.4$

EXPRESION DE LOS VALORES DE LAS MAGNITUDES Y SUS ERRORES

Determinado el valor y error de una magnitud física, procederemos de acuerdo con la siguiente normativa para especificar ambos correctamente:

- Primero. Actuamos sobre el error. Este no debe contener **nunca más de dos cifras significativas** (se debe considerar la primera cifra distinta de cero y la siguiente). Se admite, por convenio, que el error absoluto sólo puede darse con dos cifras significativas si la primera de ellas es un 1. También pueden utilizarse dos cifras significativas si la primera es un 2 y la segunda no llega a 5. En el resto de los casos, el error debe darse **con una sola cifra** significativa.

REGLA PRÁCTICA. Los valores que pueden aparecer en un error son: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24. Los demás valores sólo pueden ser ceros. Ceros a la izquierda si el error tiene decimales (por ejemplo: 0.21 V, 0.04 mm, 0.0017 mA, etc.) o a la derecha si no hay decimales (por ejemplo: 50 N, 110 Ω, 220 nF, etc.).

Si para especificar correctamente un error absoluto (según norma descrita) hay que suprimir cifras significativas del mismo, éste se redondea siempre al alza, independientemente del valor de la cifra que suprimimos.

Por ejemplo, un error absoluto de 0.1432 debe de ponerse como 0.15, no como 0.14.

- Segundo. Actuamos sobre la magnitud. La magnitud debe tener las mismas cifras decimales que el error (el error manda). En el caso de que el error no tenga decimales, la última cifra significativa de valor y error han de ser del mismo orden (unidades, decenas, etc.). Si hay que suprimir cifras en la magnitud, ésta se ha de redondear en la forma habitual:
  - Si la cifra a partir de la cual se elimina es ≤4, la última cifra que permanece se deja igual
  - Si la cifra a partir de la cual se elimina es ≥5, se añade 1 a la última cifra que permanece

Ejemplos:

Números incorrectos	Números correctos
2,437 ± 0,2133 mA	2,44 ± 0,22 mA
5,3 ± 0,085 V	5,3 ± 0,1 V 5,30 ± 0,09 V
2147,288 ± 11,4574 Ω	2147 ± 12 Ω 2,147 ± 0,012 kΩ
28,254 ± 0,26 mT	28,3 ± 0,3 mT
356,8 ± 4,7 cm	357 ± 5 cm
4321 ± 68 μC	4320 ± 70 μC 4,32 ± 0,07 mC

CALCULO DE ERRORES

El valor de las magnitudes físicas se obtiene experimentalmente de dos formas posibles:

a) **Medida directa**. Valor de la magnitud proporcionada por un instrumento

b) **Medida indirecta**. Calculamos el valor de la magnitud a partir de otras magnitudes cuyo valor y error están previamente determinados. Las magnitudes que intervienen en el cálculo se encuentran ligadas por una fórmula física.

Para obtener el error absoluto de una medida hay que distinguir si ésta se obtiene directamente o a partir de otras medidas. Así, la medición del valor de una resistencia R con un óhmetro o la intensidad I que circula a través de ella con un amperímetro son ejemplos de medidas directas. Determinar la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia, a partir de los valores de resistencia e intensidad medidos anteriormente (magnitudes ligadas por la expresión V=I.R), es un ejemplo de una medición indirecta.

(a) Error absoluto de una magnitud medida directamente

En las páginas 4 y 5 del documento "1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf" se encuentra especificado el procedimiento general para asignar el error a una medida directa. No obstante, en las sesiones planificadas para FFI, las medidas se realizan con instrumentos digitales y en condiciones en las que la variabilidad en los registros es muy rara. Por lo tanto, no será necesario hacer el proceso descrito en estas páginas para obtener el valor y error de medidas directas. Salvo que se especifique expresamente otra cosa, se procederá como sigue:

- Verificar que las medidas que estáis efectuando no cambian (si cambian advertir al profesor, por si algún elemento no está funcionando correctamente).
- Si las medidas son estables se asignará:
  - Valor de la magnitud: lectura de del dispositivo digital
  - Error de la magnitud: sensibilidad del dispositivo
  - Unidades: las que aparecen en el fondo de escala seleccionado para medir.

SENSIBILIDAD del instrumento de medida: menor valor que se puede apreciar con la escala seleccionada. En dispositivos digitales se corresponde con un valor de ±1 en la última cifra que aparece en pantalla

FONDO DE ESCALA: Máximo valor de la magnitud que puede ser medido.

NOTA. Si en algún caso, que con las prácticas planificadas para FFI no debería ocurrir, tuviéramos valores dispares para una misma magnitud, deberá procederse como se especifica en las páginas 4 y 5 del documento "1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf".

Ejemplo: Si medimos una resistencia con un fondo de escala de 2000 Ω y en la pantalla digital aparece 857, su valor, error y unidades serán: R = 857 ± 1 Ω.

Si ahora medimos la misma resistencia con un fondo de escala de 20 KΩ en la pantalla aparecerá 0.86 y, por tanto, su valor, error y unidades serán: R = 0.86 ± 0.01 KΩ.

En todos los casos se ha de asignar una variación de ±1 a la última cifra visible en el registro (el error es de ±1 Ω en el primer caso y de ±0.01 KΩ = ±10 Ω en el segundo).

Para cualquier medida, salvo que se indique expresamente otra cosa, siempre utilizaremos aquél fondo de escala que nos permita obtener un menor error absoluto. En nuestro ejemplo la resistencia R debe medirse con el fondo de escala 2000 Ω

(b) <u>Error absoluto de una medida indirecta</u>

Sea **M** el valor de una medida indirecta. M se calcula a partir de las medidas directas de las magnitudes **x**, **y**, **z**; con las que se encuentra relacionada por la función **f**: M=f (x, y, z);

Podemos obtener el error absoluto de esta medida indirecta de dos formas distintas:

i) Identificando el error absoluto de una magnitud con su diferencial:

El error absoluto de **M** se obtiene como:

$$E_{a(M)} = \left|\frac{\partial M}{\partial x}\right| E_{a(x)} + \left|\frac{\partial M}{\partial y}\right| E_{a(y)} + \left|\frac{\partial M}{\partial z}\right| E_{a(z)}$$

Ejemplo:

Si I=1.33 ± 0.02 mA es la intensidad que pasa por una resistencia R=3.72 ± 0.01 kΩ. ¿Cuál es el potencial entre sus bornes?

$$V = I \cdot R = 1.33 \cdot 3.72 = 4.9476\, V$$

$$E_{a(V)} = \left|\frac{\partial V}{\partial I}\right| E_{a(I)} + \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| E_{a(R)} = R \cdot E_{a(I)} + I \cdot E_{a(R)} = 3.72 \cdot 0.02 + 1.33 \cdot 0.01 = 0.0877$$

Que debemos expresar con arreglo a normativa como: $V = 4.95 \pm 0.09\, V$

ii) A partir de su error relativo $E_{a(M)} = \varepsilon_{r(M)} \cdot M$.

Error relativo que se obtiene de la siguiente forma: Si M = f (x^a, y^b, z^c); entonces:

$$\varepsilon_{r(M)} = a \cdot \varepsilon_{r(x)} + b \cdot \varepsilon_{r(y)} + c \cdot \varepsilon_{r(z)}$$

NOTA: Esta última expresión sólo se puede aplicar si x, y, z están multiplicando o dividiendo en la expresión que las liga con M. Si hay magnitudes que están sumando o restando no es válida.

Ejemplo:

r =2.50 ± 0.05 cm es el radio de la base de un cilindro y h = 6.4 ± 0.1 cm su altura. Calcula su volumen.

$$V = \pi\, r^2\, h = 125.6637 \text{ cm}^3$$

Tomando π con suficientes decimales como para considerarlo una constante, el cálculo del error del volumen por los dos métodos es:

i) $$E_{a(V)} = \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| E_{a(r)} + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| E_{a(h)} = 2\pi r h \cdot E_{a(r)} + \pi\, r^2 \cdot E_{a(h)} = 6.99$$

Que debemos expresar con arreglo a normativa como: $V = 126 \pm 7$ cm^3

ii) $\varepsilon_{r(r)} = \frac{0.05}{2.5} = 0.02$ y $\varepsilon_{r(h)} = \frac{0.1}{6.4} = 0.0156$, entonces:

$$\varepsilon_{r(V)} = 2\,\varepsilon_{r(r)} + \varepsilon_{r(h)} = 0.04 + 0.0156 = 0.0556$$

Ahora: $E_{a(V)} = \varepsilon_{r(V)} \cdot V = 0.0556 \cdot 125.6637 = 6.9869$

Que al expresarlo conforme a la norma proporciona el mismo resultado: $V = 126 \pm 7$ cm^3

Si la relación entre las magnitudes es sencilla y la derivación resulta fácil el primer método es más directo, pero en muchos casos es más útil el segundo método.

Veamos el siguiente ejemplo.

Tenemos dos resistencias de valores: R_1 = 330 ± 1 **Ω** y R_2 = 202 ± 1 **Ω**. Calcular la resistencia equivalente cuando las conectamos en serie y en paralelo.

En serie: $$R_e = R_1 + R_2 = 532\ \Omega$$

Cuando hay una suma, como en este caso, el primer procedimiento nos dice que el error no es más que la suma de errores.

$$E_{a(Re)} = \left|\frac{\partial Re}{\partial R1}\right| E_{a(R1)} + \left|\frac{\partial Re}{\partial R2}\right| E_{a(R2)} = E_{a(R1)} + E_{a(R2)} = 2$$

Por tanto: $R_e = 532 \pm 2\ \Omega$

En paralelo: $$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 125.3\ \Omega$$

Aquí el primer método resulta más complicado porque la derivada ya no es tan simple y hay mayor riesgo de error en las operaciones. El segundo método en principio no puede aplicarse, porque aparece una suma en el denominador. Pero podemos transformar la expresión de la resistencia equivalente en paralelo de forma que eliminemos la suma. Así:

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad \text{donde} \quad R_3 = R_1 + R_2 = 532 \pm 2\ \Omega$$

Ahora sí podemos aplicar el segundo método:

$$\varepsilon_{r(R1)} = \frac{1}{330} = 0.003; \quad \varepsilon_{r(R2)} = \frac{1}{202} = 0.00495 \quad \text{y} \quad \varepsilon_{r(R3)} = \frac{2}{532} = 0.00376,$$

entonces:

$$\varepsilon_{r(Re)} = \varepsilon_{r(R1)}+\varepsilon_{r(R2)}+\varepsilon_{r(R3)} = 0.01171 \quad \text{y} \quad E_{a(Re)} = \varepsilon_{r(Re)} \cdot R_e = 1.4673$$

Por tanto, con arreglo a normativa: $R_e = 125.3 \pm 1.5\ \Omega$

Cuando en la resistencia equivalente entre dos puntos de un circuito intervengan varias resistencias, lo más efectivo es ir agrupando de dos en dos. El error de la resistencia resultante de cada agrupación se calculará de acuerdo con este ejemplo, en función de la disposición de las dos resistencias que se agrupan: en serio o paralelo

MEDIDAS EN TABLAS

Las medidas experimentales deben agruparse en forma de tabla, ya que se evitan las reiteraciones y esta presentación permite un mejor análisis de los resultados.

En la cabecera de cada columna que aparezca en una tabla deben figurar la magnitud de la medida registrada, así como sus unidades. Si además el error de todas las medidas de una misma columna es el mismo, éste debe figurar también en la cabecera.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

En los trabajos científicos la representación gráfica es un método eficaz y conveniente para presentar y analizar los datos. Para hacer nuestras representaciones utilizaremos papel milimetrado y es necesario tener en cuenta determinadas normas para obtener los resultados adecuados (ver documento 1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf)

Cuando se pida que presentéis una gráfica antes de hacerlo debéis chequear que se cumplen cada uno de los siguientes requisitos:

1. Que en cada eje figuran las magnitudes que se representan junto con sus unidades.
2. Que se ha elegido una escala sencilla para dividir los ejes. Esto incluye que los milímetros asignados a las divisiones de la escala sean un número fácilmente divisible. Recordar que deben figurar las divisiones en los ejes, no los valores experimentales.
3. Que están dibujados los rectángulos de error (si no es posible dibujarlos se ha de indicar el motivo). Para ello es importante determinar el valor mínimo que podemos representar en cada eje, es decir, qué valor de la magnitud representa un milímetro. Por ejemplo, si en la escala elegida para el eje

X en la que se representa el voltaje se han tomado 50 divisiones (50 mm) para 1 V, entonces 1 mm representa 1/50 = 0.02 V. Para un error de ±0.05 V, dibujaríamos tres mm a la izquierda y otros tres a la derecha del valor (siempre un número entero de mm, redondeando por exceso).

4. Que la línea representativa de la función sea continua (nunca quebrada) y pase por dentro de los rectángulos de error (en la medida de lo posible).

INTERPOLACION

Dado un conjunto de valores experimentales (x_i,y_i), buscamos la función y=f(x) que liga las magnitudes x e y. Esto nos permite obtener el valor de y para cualquier valor de x sin necesidad de medirlo.

La función f en general es un polinomio. Nosotros nos centraremos en casos en los que los valores experimentales (x_i,y_i) ajustan a una recta $y=m\cdot x+n$ (ajuste lineal). Operación que podemos realizar de dos formas:

Interpolación gráfica: Representamos los valores (x_i,y_i), con sus rectángulos de error y dibujamos, a ojo, la recta que entendemos ajusta mejor a nuestros valores. A partir de esta recta se puede obtener el valor de *y* para cualquier *x*, o viceversa, o los valores de *m* y *n*, si fuera necesario.

Interpolación analítica: Se buscan los valores de *m* y *n* que proporcionan el mejor ajuste, a partir de un criterio matemático. En nuestro caso utilizaremos el método de **mínimos cuadrados**, en el que el criterio que condiciona los valores de *m* y *n* es que la recta que representan debe cumplir que: *el sumatorio de las distancias de cada punto experimental a la recta, elevado al cuadrado, sea mínimo.*

Detalles sobre este método podéis encontrarlos en "1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf", aquí nos centraremos en su aplicación práctica ya que disponéis de su implementación en una hoja *excell*: "5_Ajuste minim_cuadr - hasta 19 datos.xls".

Introduciendo los valores (x_i,y_i) en la hoja excell podéis obtener directamente los valores de m y n, con sus errores, y el coeficiente de correlación **r**, que nos habla de la bondad del ajuste (mejor ajuste cuanto más se aproxime r al valor 1). Lo que os pedimos es que sepáis interpretar este ajuste y para ello hay que cuidar algunos detalles:

1. Como primer paso se han de elegir las magnitudes físicas que representan *x* e *y*. Esta elección, que se ha de especificar expresamente, es fundamental ya que *m* y *n* representan magnitudes distintas en función de esta elección previa.

2. No perder de vista que calcular m y n **no es el objetivo** de una experiencia, sino un proceso intermedio. En general se buscará el valor y error de alguna magnitud física, que estará relacionada con m y/o n.

Ejemplo: Las longitudes de un muelle sometido a diferentes pesos son:

Peso ± 0,1 N	3,0	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0
Longitud ± 0,01 cm	6,41	7,02	8,23	10,16	12,11	15,04

Con estos datos se pide determinar el valor de la constante del muelle y su longitud inicial

Solución: El comportamiento del muelle obedece a la ley de Hooke.

$$F = k \cdot \Delta l = k \cdot (l - l_0) \quad (1)$$

Donde k es la constante elástica del muelle, l es su longitud y l_0 su longitud inicial (sin peso).

Puesto que tenemos 6 pares de valores de fuerza (peso) y longitud y la relación entre k y l es lineal (ver ecuación 1), podemos utilizar el método de mínimos cuadrados para ajustar los valores experimentales.

Punto 1: identificar que es x e y. La ecuación (1) puede escribirse también como:

$$l = \frac{F}{k} + l_0 \quad (2)$$

Ambas formas de expresar la ecuación pueden identificarse con la ecuación de una recta $y = mx + n$ (3), y podemos elegir qué variable, x o y, asignar a las magnitudes conocidas: Peso y longitud. Así, si identificamos (1) y (3) tenemos que:

$$x = l;\ \ y = F;\ \text{Y en consecuencia } m = k;\ \text{ y } \ n = -k\ l_0 \ (4)$$

Si identificamos (2) y (3) tenemos que:

$$x = F;\ \ y = l;\ \text{Y en consecuencia } m = 1/k;\ \text{ y } \ n = \ l_0 \ (5)$$

Como puede observarse m y n representan magnitudes físicas diferentes dependiendo de la elección previa. Debe de prestarse especial atención a esta tarea (identificación de x e y) porque es, frecuentemente, fuente de errores y de falsas interpretaciones del resultado.

En este problema optamos por elegir la primera opción, es decir, identificar: $x = l$; e $y = F$; Introduciendo los valores en el programa:

	Valores de X	ERROR X	Valores de Y	ERROR Y
DATO 1	6.41	0.01	3	0.1
DATO 2	7.02	0.01	5	0.1
DATO 3	8.23	0.01	7	0.1
DATO 4	10.16	0.01	9	0.1
DATO 5	12.11	0.01	11	0.1
DATO 6	15.04	0.01	13	0.1
DATO 7				

r=	0.976150
M=	1.105232747
ERROR M=	0.010326325

n=	-2.862595853
ERROR n=	0.232744299

r próximo a 1 nos indica que el ajuste es bueno.

Punto 2: Lo que se pide es calcular los valores de k y l_0 (no m y n). Por tanto, a partir de la identificación realizada en (4) tenemos:

$$k = m = 1.11 \pm 0.01 \text{ N/cm} \qquad \text{y} \qquad l_0 = -\frac{n}{k} = 2.590 \text{ cm}$$

El error de k es directamente el mismo que el de m, pero el error de l_0 hay que calcularlo.

$$E(l_0) = \frac{E_n}{k} + \frac{|n| \cdot E_k}{k^2} = \frac{0.23}{1.11} + \frac{2.86 \cdot 0.01}{1.23} = 0.207 + 0.023 = 0.23$$

Por tanto: $l_0 = 2.59 \pm 0.23\ cm$

MEMORIA DE PRÁCTICAS

Se recomienda leer lo que figura en el documento "1_FFI_TeoriaErrores2019.pdf" respecto de este tema, para haceros una idea general sobre la presentación de informes técnicos. No obstante, en las prácticas que vamos a realizar en esta asignatura se especificará, al final de cada guion, lo que debéis presentar en cada una de ellas para evaluaros.