## Práctica 4. Resolución de ecuaciones

Matemáticas 2. Ingeniería Informática

- Introducción
- 2 Bisección
- Secante
- 4 Regula Falsi
- Método de Newton
- 6 Ejercicios

#### Justificación

Dada una función f(x) el problema es **encontrar un valor**  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$ 

Es interesante para

- Resolver problemas de optimización: Generalmente, se formulan tal que f'(x) = 0 (encontrar puntos críticos)
- Factorización de integrales: Dada una integral racional, descomponer el denominador en factores

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} dx$$

• Valores propios de matrices: Dada la ecuación característica  $q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ , los valores propios reales  $\lambda$  de la matriz  $\mathbf{A}$  son las raíces reales de la citada ecuación.

#### **Ejemplo**

Encontrar un 
$$x_0$$
 tal que  $f(x_0) = 0$  para  $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ 

$$>>$$
 syms  $x$ ;

$$>> f(x) = x.^2 - \sin(x) - 0.5$$

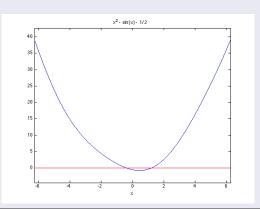
#### Según el **Teorema de Bolzano**

Si 
$$f(x)$$
 es continua en  $[a,b]$  y  $f(a)f(b) < 0$ , entonces existe al menos un punto  $c \in [a,b]$  tal que  $f(c) = 0$ 



## Ejemplo

Encontrar un  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$  para  $f(x) = x^2 - sin(x) - 0.5$ 



#### Ejemplo

Encontrar un  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$  para  $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ El intervalo [0, 2] es adecuado ya que contiene una de las dos raíces

Si 
$$a = 0$$
 y  $b = 2$  comprobamos que  $f(a)f(b) < 0$   
>>  $a = 0$ ;  $b = 2$   
>>  $sign(subs(f, a) * subs(f, b))$   
 $ans = -1$ 

Veamos que sucede en el punto medio del intervalo

$$>> c = (a+b)/2;$$



### Ejemplo

Encontrar un  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$  para  $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ 

- ¿Qué vale f(c)? >> double(subs(f,c)) ans = -0.3415
  - -0.3415
- Entonces: f(a) = -0.5, f(c) = -0.3415 y f(b) = 2.5907
- Luego la raíz está entre c y b puesto que f(b)f(c) < 0
- Por lo tanto c sustituye a a y el **nuevo intervalo** es [a=c,b]
- Este razonamiento conduce al Método de la Bisección



#### Definición

- Entrada: Una función, un intervalo, el error en la función, la tolerancia y el número de iteraciones: f(x), a, b,  $\epsilon$ ,  $\Delta$ , n con  $f(a_i)f(b_i) < 0$ ,  $\forall i$
- Salida: c<sub>i</sub>
- Algoritmo
  - ① Calculamos  $c_i = (a_i + b_i)/2$ , el punto medio del intervalo
  - **2** Comprobamos si cumple Bolzano,  $f(a_i)f(c_i) < 0$ , entonces  $b_{i+1} = c_i$ ,  $a_{i+1} = a_i$  en caso contrario  $a_{i+1} = c_i$ ,  $b_{i+1} = b_i$
  - 3 Paramos si  $h_i < \Delta \circ |f(c_i)| < \epsilon \circ i >= n$
  - **1** En caso de que no se cumpla ninguna de las condiciones de parada i = i + 1 y volver al punto 1

Es un **método cerrado**, lo que significa que la raíz está en  $[a_i, b_i]$ 



### Pseudo-código del Método de la Bisección

```
BúsquedaPorBisección (f(x), a, b, \epsilon, \Delta, n)
i:=0
h:=abs(b-a)
repetir
i:=i+1
c:=(a+b)/2
h:=h/2
si signo(<math>f(a))*signo(f(c))<0
entonces
b:=c
si no
a:=c
hasta (abs(<math>f(c)) \leq \epsilon) \delta (h \leq \Delta) \delta (i = n)
devolver c
```

# Para $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ en [0, 2] se tiene f(1.1963) = -0.0015836

i	a	С	b	(b - a)/2
1	0	1	2	1
2	1	1.5	2	0.5
3	1	1.25	1.5	0.25
4	1	1.125	1.25	0.125
5	1.125	1.1875	1.25	0.0625
6	1.1875	1.21875	1.25	0.03125
7	1.1875	1.203125	1.21875	0.015625
8	1.1875	1.195312	1.203125	0.0078125
9	1.195312	1.199219	1.203125	0.0039062
10	1.195312	1.197266	1.199219	0.0019531
11	1.195312	1.196289	1.197266	0.00097656

# Para $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ en [-1, 0] se tiene f(-0.37012) = -0.00128

i	а	С	b	(b - a)/2
1	-1	-0.5	0	0.5
2	-0.5	-0.25	0	0.25
3	-0.5	-0.375	-0.25	0.125
4	-0.375	-0.3125	-0.25	0.0625
5	-0.375	-0.34375	-0.3125	0.03125
6	-0.375	-0.359375	-0.34375	0.015625
7	-0.375	-0.367188	-0.359375	0.0078125
8	-0.375	-0.371094	-0.367188	0.0039062
9	-0.371094	-0.369141	-0.367188	0.0019531
10	-0.371094	-0.370117	-0.369141	0.00097656

#### Definición

- Entrada: Una función, dos números, el error en la función, la tolerancia y el número de iteraciones: f(x), a, b,  $\epsilon$ ,  $\Delta$ , n
- Salida: *c<sub>i</sub>*
- Algoritmo
  - **1** Si  $|f(a_i)| > |f(b_i)|$  entonces intercambiar  $a_i$  y  $b_i$
  - 2 Hacer  $c_i = a_i h_i$  donde  $h_i = \frac{f(a_i)(b_i a_i)}{f(b_i) f(a_i)}$
  - 3 El nuevo valor de  $c_i$  sustituye a  $b_i$ , es decir,  $b_i = c_i$
  - **1** Paramos si  $h_i < \Delta$  ó  $|f(c_i)| < \epsilon$  ó i >= n
  - **5** En caso de que no se cumpla ninguna de las condiciones de parada i = i + 1 y volver al punto 1

Es un **método abierto**, lo que significa que no se tiene seguridad de que la raíz está en  $[a_i, b_i]$ 



#### Pseudo-código del Método de la Secante

```
BúsquedaPorSecante (f(x), a, b, \epsilon, \Delta, n) i:=0 repetir i:=i+1 si abs(f(a))>abs(f(b)) entonces (*/Intercambiar 'a' por 'b' /*) a\Leftrightarrowb h:=f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a)) c:=a-h b:=c hasta (abs(f(c))\leq\epsilon) ó (abs(h)\leq\Delta) ó (i=n) devolver c
```

# Para $f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$ en [0, 2] se tiene $f(-0.3709) = 2.119 * 10^{-5}$

A pesar de empezar con a = 0 y b = 2 se llega a la raíz entre [-1, 0]

i	а	b	h	С	f(c)
1	0	2	-0.323551	0.323551	-0.713250
2	0	0.323551	0.758619	-0.758619	0.763422
3	0	-0.758619	0.300224	-0.300224	-0.114132
4	-0.300224	0	0.0888	-0.389024	0.030625
5	-0.389024	-0.300224	-0.018786	-0.370237	-0.001088
6	-0.370237	-0.389024	0.000644	-0.370882	-0.000010



Para 
$$f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$$
 en  $[-1, 0]$  se tiene  $f(-0.3709) = 2.1 * 10^{-5}$ 

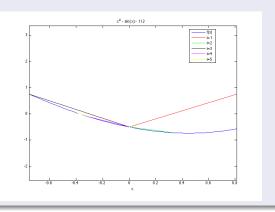
i	a	b	h	С	f(c)
1	0	-1	0.271522	-0.271522	-0158078
2	-0.271522	0	0.125530	-0.397052	0.044352
3	-0.397052	-0.271522	-0.027504	-0.369549	-0.002239
4	-0.369549	-0.397052	0.001322	-0.370870	-0.000028

En ambos casos el Método Secante converge a la misma raíz, pero en **menos iteraciones** que en el Método de la Bisección



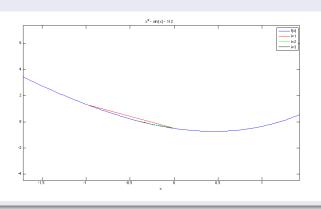
### Gráfica

Resolución  $f(x) - x^2 - sin(x) - 0.5 = 0$  en [a, b] = [0, 2]



### Gráfica

Resolución 
$$f(x) - x^2 - sin(x) - 0.5 = 0$$
 en  $[a, b] = [-1, 0]$ 



#### Definición

- Entrada: Una función, un intervalo, el error en la función, la tolerancia y el número de iteraciones: f(x), a, b,  $\epsilon$ ,  $\Delta$ , n con  $f(a_i)f(b_i) < 0$ ,  $\forall i$
- Salida: ci
- Algoritmo
  - **1** Si  $|f(a_i)| > |f(b_i)|$  entonces intercambiar  $a_i$  y  $b_i$ .
  - 2 Sea  $c_i = a_i h_i$  donde  $h_i = \frac{f(a_i)(b_i a_i)}{f(b_i) f(a_i)}$
  - 3 Comprobamos si cumple Bolzano,  $f(a_i)f(c_i) < 0$  entonces  $b_{i+1} = c_i$  y  $a_{i+1} = a_i$ , en caso contrario  $a_{i+1} = c_i$ ,  $b_{i+1} = b_i$ ;
  - **4** Paramos si  $h_i < \Delta$  ó  $|f(c_i)| < \epsilon$  ó i >= n
  - **5** En caso de que no se cumpla ninguna de las condiciones de parada i = i + 1 y volver al punto 1

Es un método **cerrado**, lo que significa que la raíz está en  $[a_i, b_i]$ 



#### Pseudo-código del Método de la Regula Falsi

```
BúsquedaRegulaFalsi (f(x),a,b,\epsilon,\Delta,n)

i:=0

repetir

i:=i+1

si abs(f(a))>abs(f(b)) entonces

a\Leftrightarrowb

h:=f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))

c:=a-h

si signo(f(a))*signo(f(c))<0

entonces b:=c

si no a:=c

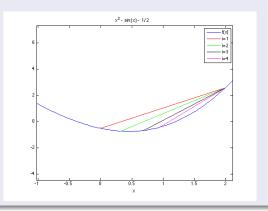
hasta (abs(f(c)) \le \epsilon) ó (abs(h) \le \Delta) ó (i=n)
```

Para 
$$f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$$
 en  $[0, 2]$ ,  $f(1.1958) = -5.7133 * 10^{-4}$ 

i	a	b	h	С	f(c)
1	0	2	-0.323551	0.323551	-0.713250
2	0.323551	2	-0.361908	0.685459	-0.663174
3	0.685459	2	-0.267917	0.953376	-0.406448
4	0.953376	2	-0.141934	1.095311	-0.189365
5	1.095311	2	-0.061623	1.156934	-0.077078
6	1.156934	2	-0.024358	1.181292	-0.029647
7	1.181292	2	-0.009263	1.190555	-0.011154
10	1.195318	2	-0.000481	1.195798	-0.000575

#### Gráfica

Encontrar 
$$f(x) - x^2 - \sin(x) - 0.5 = 0$$
 en  $[a, b] = [0, 2]$ 



Para 
$$f(x) = x^2 - \sin(x) - 0.5$$
 en  $[-1, 0]$ ,  $f(-0.3707) = -3.1354 * 10^{-4}$ 

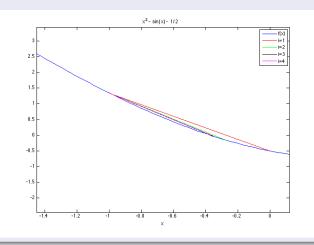
i	a	b	h	С	f(c)
1	0	-1	0.271522	-0.271522	-0.158078
2	-0.271522	-1	0.076794	-0.348316	-0.037361
3	-0.348316	-1	0.017658	-0.365974	-0.008204
4	-0.365974	-1	0.003854	-0.369828	-0.001772
5	-0.369828	-1	0.000831	-0.370659	-0.000381

El Método converge a la misma raíz, pero en **más iteraciones** que las obtenidas en el Método de la Secante



### Gráfica

Resolución 
$$f(x) - x^2 - \sin(x) - 0.5 = 0$$
 en  $[a, b] = [-1, 0]$ 



#### Definición

- Entrada: Una función, un valor inicial, el error en la función, la tolerancia y el número de iteraciones: f(x), a,  $\epsilon$ ,  $\Delta$ , n
- Salida: ci
- Algoritmo:

  - **3** Paramos si  $h_i < \Delta$  ó  $|f(c_i)| < \epsilon$  ó i >= n
  - **①** En caso de que no se cumpla ninguna de las condiciones de parada i = i + 1 y volver al punto 1

Es un método abierto, no es seguro que se alcance la raíz!



#### Newton

#### Pseudo-código del Método de la Newton

```
BúsquedaPorNewton (f(x),a,\epsilon,\Delta,n)

f'(x)::=df(x)/dx

i:=0

repetir

i:=i+1

h:=f(a)/f'(a)

c:=a-h

a:=c

hasta (abs(f(c)) \le \epsilon) ó (abs(h) \le \Delta) ó (i=n)

devolver c
```

### Para $a_1 = 2$ tenemos f(1.196082) = 0.0

i	a	h	С	f(c)
1	2	0.586643	1.413357	0.509945
2	1.413357	0.190996	1.222361	0.054257
3	1.222361	0.025796	1.196564	0.000977
4	1.196564	0.000482	1.196082	0.000000

En solo 3 iteraciones se puede aproximar la raíz.

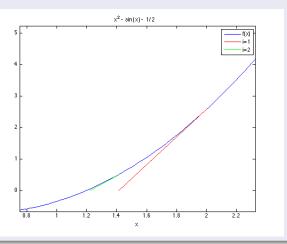
Se pueden dibujar las rectas tangentes mediante el siguiente código Matlab

- >> ezplot(f), hold on;
- >> line([XNewton(1).a XNewton(2).a], [XNewton(1).fa 0], 'color', 'r')
- >> line([XNewton(2).a XNewton(3).a], [XNewton(2).fa 0], 'color', 'g')

XNewton es una estructura con los elementos necesarios en cada iteración.

### Gráfica

Resolución 
$$f(x) - x^2 - sin(x) - 0.5 = 0$$
 para  $a_1 = 2$ 



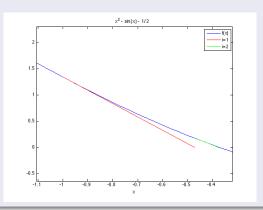
### Para $a_1 = -1$ tenemos f(-0.370887) = 1.0

i	a	h	С	f(c)
1	-1	-0.528075	-0.471925	0.177314
2	-0.471925	-0.096653	-0.375272	0.007354
3	-0.375272	-0.004375	-0.370897	0.000016
4	-0.370897	-0.000009	-0.370887	0.000000

En solo 3 iteraciones se alcanza una buena aproximación

#### Gráfica

Resolución 
$$f(x) - x^2 - \sin(x) - 0.5 = 0$$
 para  $a_1 = -1$ 



#### Definición

Sirve para calcular raices de funciones. Se invoca de la siguiente manera fzero(fun, inicial, op) Donde fun es la función de la que se quiere calcular las raices, inicial es el valor de partida inicial -puede ser un intervalo- y op son parámetros de la función.

## Ejemplo 1

$$>> f = Q(x) 0.4 - x + sin(x)$$

>> fzero(f,0)

#### Ejemplo 2

```
>> f = Q(x) \ sqrt(9.81 * x/0.25) * tanh(sqrt(9.81 * 0.25/x) * 4) - 35',80)
```

- >> options = optimset('display',' iter')
- >> fzero(f, 80, options)

#### Ejemplo 3

```
>> fzero('cos(x) * cosh(x) + 1', [0, 5])
```

$$>> fzero('cos(x) * cosh(x) + 1', [3, 7])$$

$$>> fzero('cos(x) * cosh(x) + 1', [7, 10])$$

$$>> fzero('cos(x) * cosh(x) + 1', [0, 1])$$

## Ejercicio #1

#### Construir una función llamada

Bisection(f,a,b,tolerancia,errorfun,maxiter) que implemente el

**Método de la Bisección**, teniendo en cuenta que el error en la raíz es la  $tolerancia = \Delta$ , el error en la función es  $errorfun = \epsilon$  y el número máximo de iteraciones es e

- Probarlo con la función  $f(x) = f(x) = x^2 \sin(x) 0.5$
- Implementar la iteración con: while...end
- Obtener el valor de la raíz c para
  - Cuando  $\Delta \leq 10^{-3}$
  - Cuando  $\epsilon < 10^{-3}$
  - Cuando se realicen 4 iteraciones
- Probar los intervalos [0,2] y [-1,0]
- ¿Cuantas iteraciones se necesitan si  $\Delta \leq 10^{-5}$ ?



## Ejercicio #1 (cont)

Construir una estructura llamada Xbisec que almacene la tabla que almacena los resultados intermedios. Esta estructura se devuelve junto con r

- Al principio i = 1
- Para el primer intervalo Xbisec(i).a = a1; Xbisec(i).b = b1;
- Al calcular c = (a1 + b1)/2 realizar Xbisec(i).c = c; Xbisec(i).fa = double(subs(f, a)); Xbisec(i).fc = double(subs(f, c)); Xbisec(i).fb = double(subs(f, b));
- Después de decidir el nuevo intervalo, incrementar i y almacenarlo en Xbisec(i).a = a1; Xbisec(i).b = b1;



## Ejercicio #2

### Construir un programa llamado

Secant(f,a,b,tolerancia,errorfun,maxiter) que implemente el Método de la Secante, teniendo en cuenta que el error en la raíz es la tolerancia  $= \Delta$ , el error en la función es errorfun  $= \epsilon$  y el número máximo de iteraciones es maxiter

- Probarlo con la función  $f(x) = f(x) = x^2 \sin(x) 0.5$
- Implementar la iteración con: while... end
- Obtener el valor de la raíz c
  - Cuando  $\Delta \leq 10^{-3}$
  - Cuando  $\epsilon < 10^{-3}$
  - Cuando se realicen 4 iteraciones
- Probar los intervalos [0,2] y [-1,0]
- ¿Cuantas iteraciones se necesitan si  $\Delta \leq 10^{-5}$ ?



## Ejercicio #2 (cont)

Construir una estructura *Xsec* que almacene la tabla como en la práctica #1 y usarla para mostrar las gráficas de las secantes. De forma que, si *Xsec* es la estructura para el intervalo [0,2]

```
>> ezplot(f); hold on;

>> line([Xsec(1).a Xsec(1).b], [Xsec(1).fa Xsec(1).fb],' color',' r')

>> line([Xsec(2).a Xsec(2).b], [Xsec(2).fa Xsec(2).fb],' color',' g')

>> line([Xsec(3).a Xsec(3).b], [Xsec(3).fa Xsec(3).fb],' color',' black')

>> line([Xsec(4).a Xsec(4).b], [Xsec(4).fa Xsec(4).fb],' color',' magenta')

>> line([Xsec(5).a Xsec(5).b], [Xsec(5).fa Xsec(5).fb],' color',' vellow')
```

## Ejercicio #3

#### Construir una función llamada

RegulaFalsi(f,a,b,tolerancia,errorfun,maxiter) que implemente el Método de Regula Falsi, teniendo en cuenta que el error en la raíz es la  $tolerancia = \Delta$ , el error en la función es  $errorfun = \epsilon$  y el número máximo de iteraciones es maxiter

- Probarlo con la función  $f(x) = f(x) = x^2 \sin(x) 0.5$
- Implementar la iteración con: while...end
- Tiene que devolver c
  - Cuando  $\Delta < 10^{-3}$
  - Cuando  $\epsilon < 10^{-3}$
  - Cuando se realicen 4 iteraciones
- Probar dos intervalos [0,2] y [-1,0]
- ¿ Cuántas iteraciones necesita si  $\Delta \leq 10^{-5}$ ?



## Ejercicio #3 (cont)

Construir una estructura Xreg que almacene la tabla y usarla para mostrar las gráficas de las secantes. De forma que, si Xreg es la estructura para el intervalo [0,2]

```
>> ezplot(f); hold on;

>> line([Xreg(1).a Xreg(1).b], [Xreg(1).fa Xreg(1).fb],' color',' r')

>> line([Xreg(2).a Xreg(2).b], [Xreg(2).fa Xreg(2).fb],' color',' g')

>> line([Xreg(3).a Xreg(3).b], [Xreg(3).fa Xreg(3).fb],' color',' black')

>> line([Xreg(4).a Xreg(4).b], [Xreg(4).fa Xreg(4).fb],' color',' magenta')

>> line([Xreg(5).a Xreg(5).b], [Xreg(5).fa Xreg(5).fb],' color',' yellow')
```

## Ejercicio #4

#### Construir una función llamada

Newton(f,a,tolerancia,errorfun,maxiter) que implemente el Método de Newton, teniendo en cuenta que el error en la raíz es la *tolerancia*  $= \Delta$ , el error en la función es *errorfun*  $= \epsilon$  y el número máximo de iteraciones es *maxiter* 

- Probarla con  $f(x) = f(x) = x^2 \sin(x) 0.5$
- Implementar el bucle con: while...end
- Devolver c
  - Cuando  $\Delta \leq 10^{-3}$
  - Cuando  $\epsilon < 10^{-3}$
  - Cuando se realicen 4 iteraciones
- Probar para  $a_1 = 2$  y  $a_1 = -1$
- ¿Cuántas iteraciones se necesita para  $\epsilon = 10^{-5}$ ?



### Ejercicio #4 (cont)

Construir una estructura *Xnew* que almacene la tabla y usarla para mostrar las gráficas de las tangentes.

#### Ejercicio #5

Considerar la función  $f(x) = e^x - 4x^2$ , cuyas raíces están en los intervalos [-1,0],[0,1] y [4,4.5]. Encontrar la primera raíz usando la función definida para el método de la Bisección, la segunda raíz con la función definida para el método de Regula Falsi y la tercera con la del método de Newton

## Ejercicio #6

Encontrar graficamente una solución de la ecuación:  $xe^x - 7 = 0$ 



### Ejercicio #7

#### Utilizando la función fzero calcula

- Una solución de la ecuación  $xe^x 7 = 0$ , con  $x_0 = 1$ .
- Una solución de la ecuación  $xe^x 7 = 0$ , en el intervalo [1, 2].

#### Ejercicio #8

Crea una función llamada CalculoRaices, que tenga como parametros de entrada una función matemática y un intervalo, y que devuelva las raices de la función (utiliza fzero).

### Ejercicio #9

Construir una función llamada

Steffensen(f,a,tolerancia,errorfun,maxiter) para implementar el Método de Steffensen.

En este método las iteraciones siguen la fórmula de recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \ k \ge 0$$

Utiliza una estructura Xsteff para almacenar la tabla.

