Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES (II)

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral
- Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias

INTEGRALES IMPROPIAS

De primera especie

Si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe para todo $b \geq a$ y existe $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ entonces la integral impropia, que se denota por $\int_a^\infty f(x)dx$, se dice que converge, y de lo contrario, que diverge

Ídem para el $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

INTEGRALES IMPROPIAS

De segunda especie

Si el integrando de una integral definida no esta definido en algún punto *c* del intervalo de integración *[a,nb],* entonces se dice que la

integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge

si lo hacen $\lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)dx$ y $\lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)dx$

y si no la integral impropia diverge

INTEGRALES IMPROPIAS. EJEMPLOS

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

INTEGRALES IMPROPIAS

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right] = 1$$

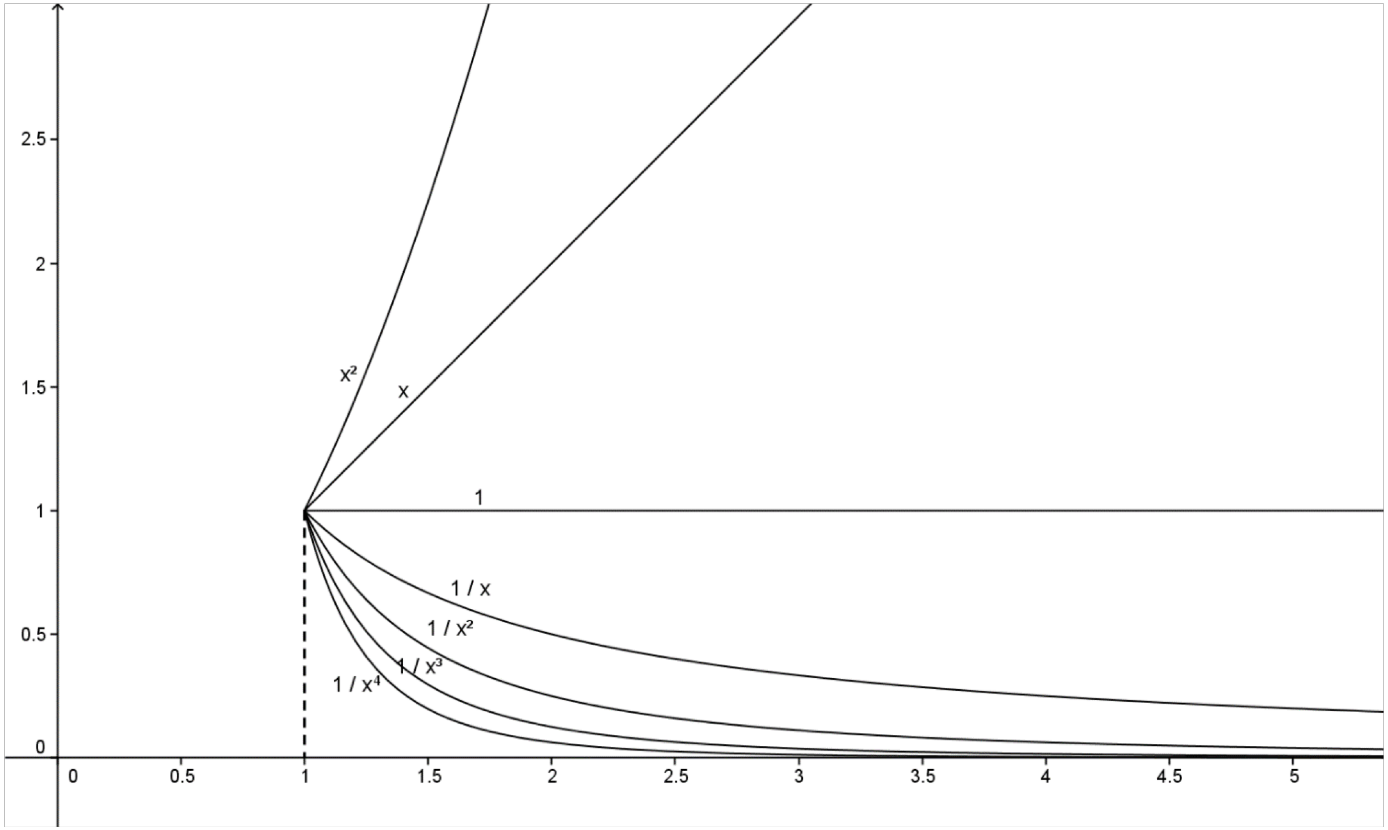
Converge

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty}[\ln(b)] = \infty$$

Diverge

INTEGRALES IMPROPIAS. EJEMPLOS

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$



$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$$

Diverge si n≤1 y converge para n>1

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

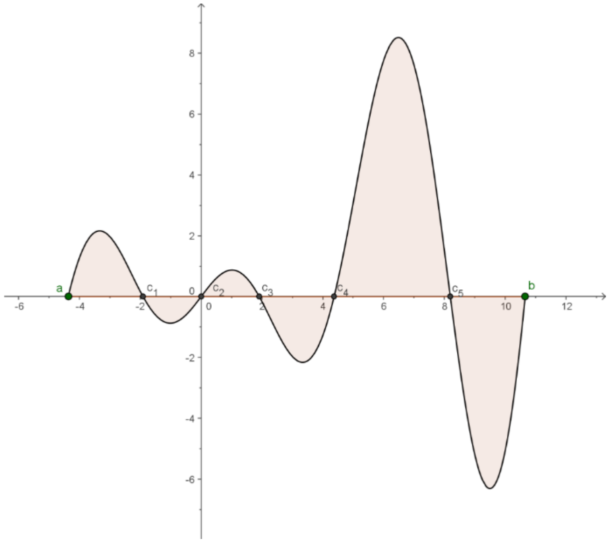
- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias
- Aplicaciones

APLICACIONES. ÁREAS

Áreas comprendidas en la curva y el eje *x*

Se deben buscar los puntos de corte de la función con el eje *x* para integrar por intervalos:

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$



Se suman las partes, en valor absoluto, de la integral por intervalos

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$$

APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Calcula el área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4$$

$$(x^2)=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\qquad x=\begin{matrix}\pm\sqrt{4}=\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}\\ \pm\sqrt{1}=\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\end{matrix}$$

Al ser función par

$$A=2\left(\left|\int_0^1(x^4-5x^2+4)dx\right|+\left|\int_1^2(x^4-5x^2+4)dx\right|\right)=$$

$$=2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_1^2\right|\right)=$$

APLICACIONES. ÁREAS – EJEMPLO

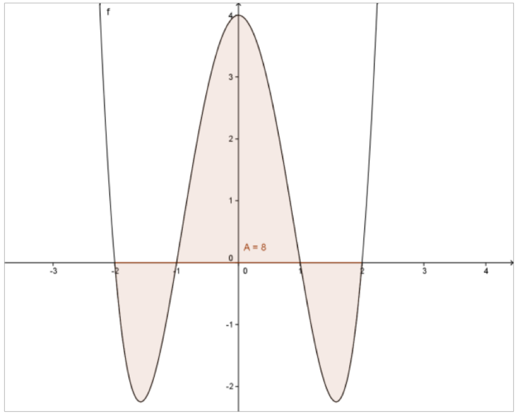
Área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$A = 2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_1^2\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_0^1\right| + \left|\left[3x^5 - 25x^3 + 60x\right]_1^2\right|\right)$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left|38 - 0\right| + \left|\left[96 - 200 + 120\right] - 38\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{15}(38 + |16 - 38|) = \frac{2 \cdot 60}{15} = 8$$

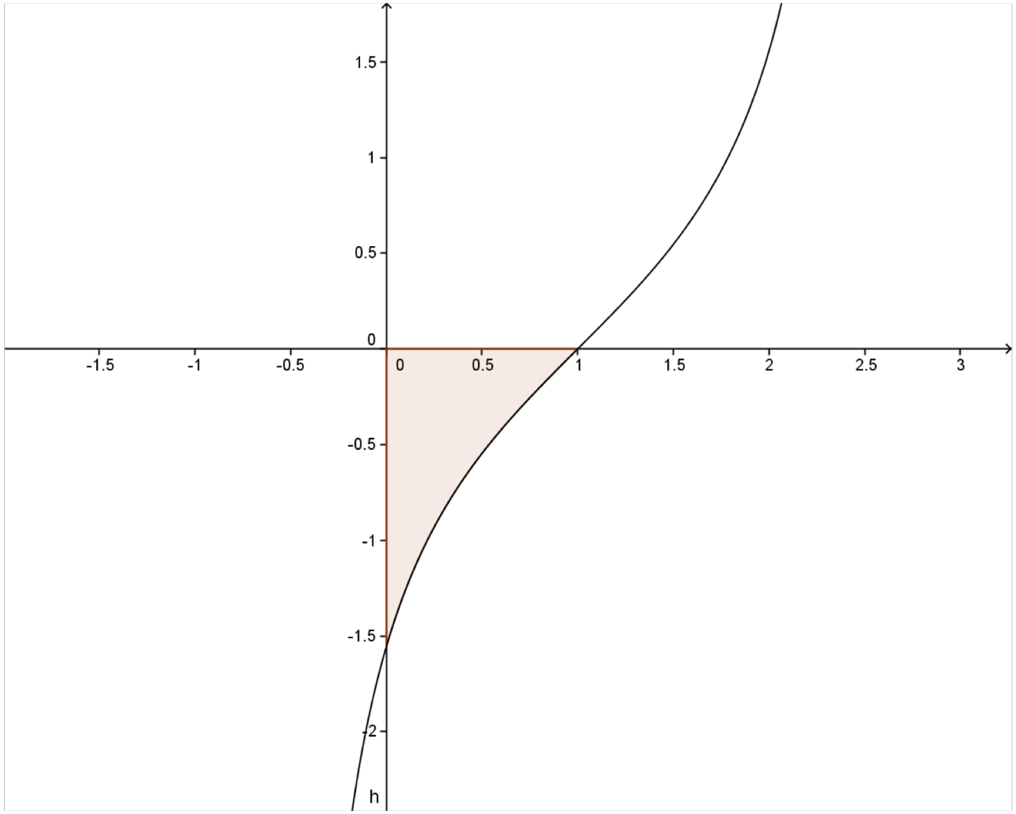


APLICACIONES. ÁREAS

Área comprendida entre la curva y los dos ejes

Se busca b más próximo a *0* tal que *f(b)=0* y

$$A = \left| \int_0^b f(x)dx \right|$$



APLICACIONES. ÁREAS - EJEMPLO

Calcular el área comprendida entre $f(x)=tan(x-1)$ y ambos ejes

APLICACIONES. ÁREAS – EJEMPLO

Área comprendida entre *f(x)=tan(x-1)* y ambos ejes

$$\tan(x-1)=0$$

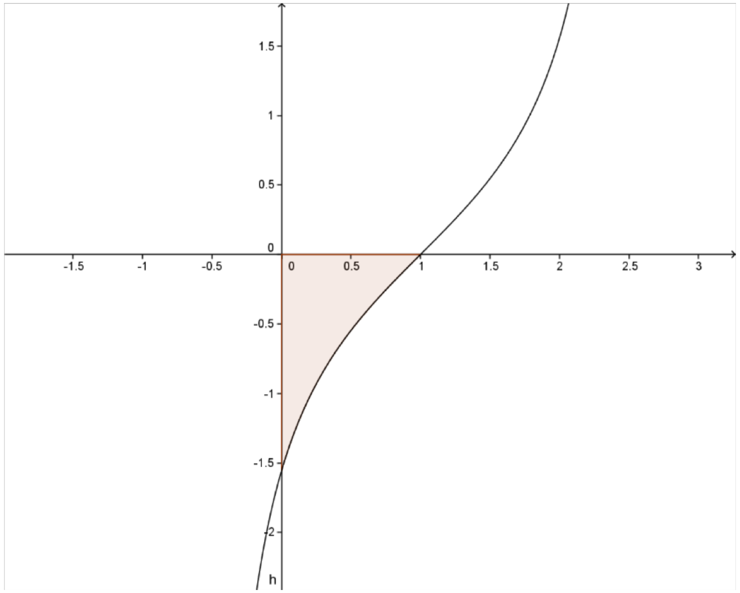
Corte con el eje *y* en *x=1*

$$A=\left|\int_0^1 \tan(x-1)dx\right|$$

$$=\left|\left[-\ln(\cos(x-1))\right]_0^1\right|$$

$$=\left|\left[0+\ln(\cos(-1))\right]\right|$$

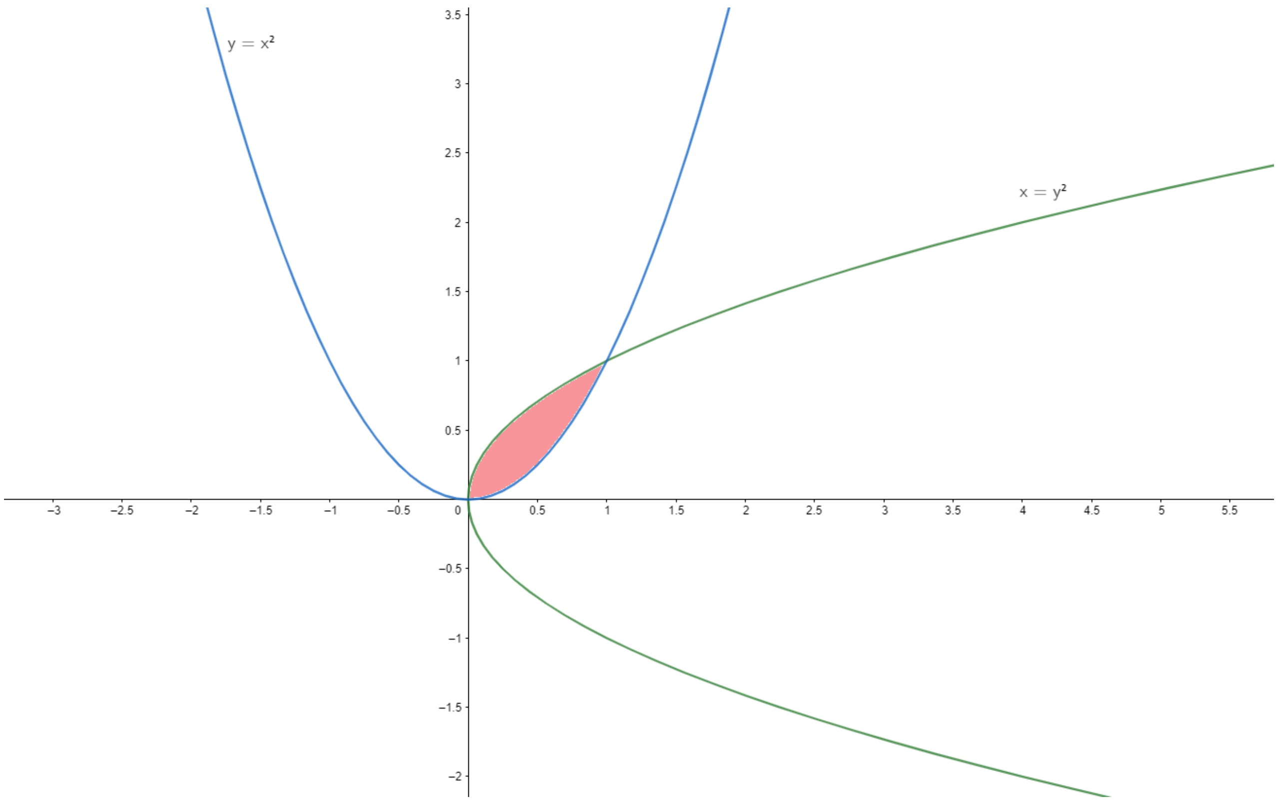
$$=-\ln(\cos(1))$$



APLICACIONES. ÁREAS – EJERCICIO

Calcular el área comprendida entre las curvas

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

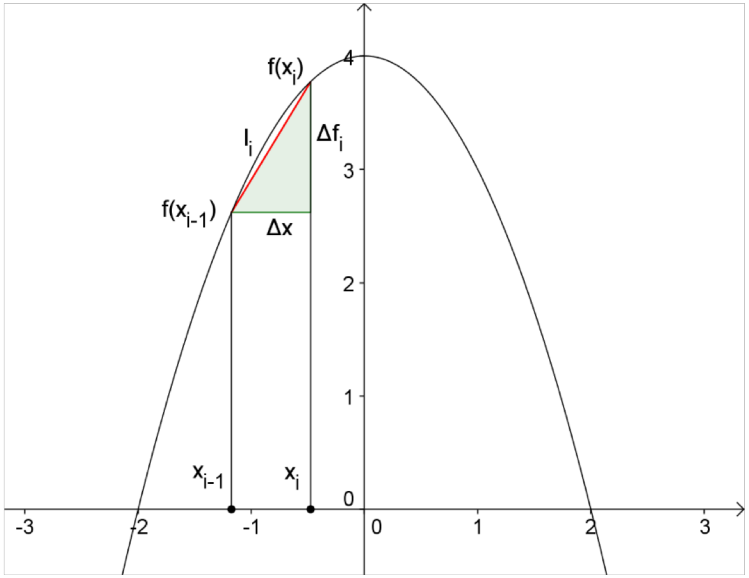


APLICACIONES. LONGITUDES

Longitud de una gráfica

Dividimos el intervalo *[a, b]* en *n* subintervalos donde *f(x)* es continua y de igual longitud $\Delta x=(b-a)/n$

En cada subintervalo, una hipotenusa l_i que va de $f(x_{i-1})$ a $f(x_i)$ se aproxima a la longitud de la gráfica en ese subintervalo. Los catetos son Δx y $\Delta f_i=f(x_i)- f(x_{i-1})$



$$l_i=\sqrt{\Delta x^2+\Delta f_i^2}=\sqrt{\Delta x^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$$

APLICACIONES. LONGITUDES

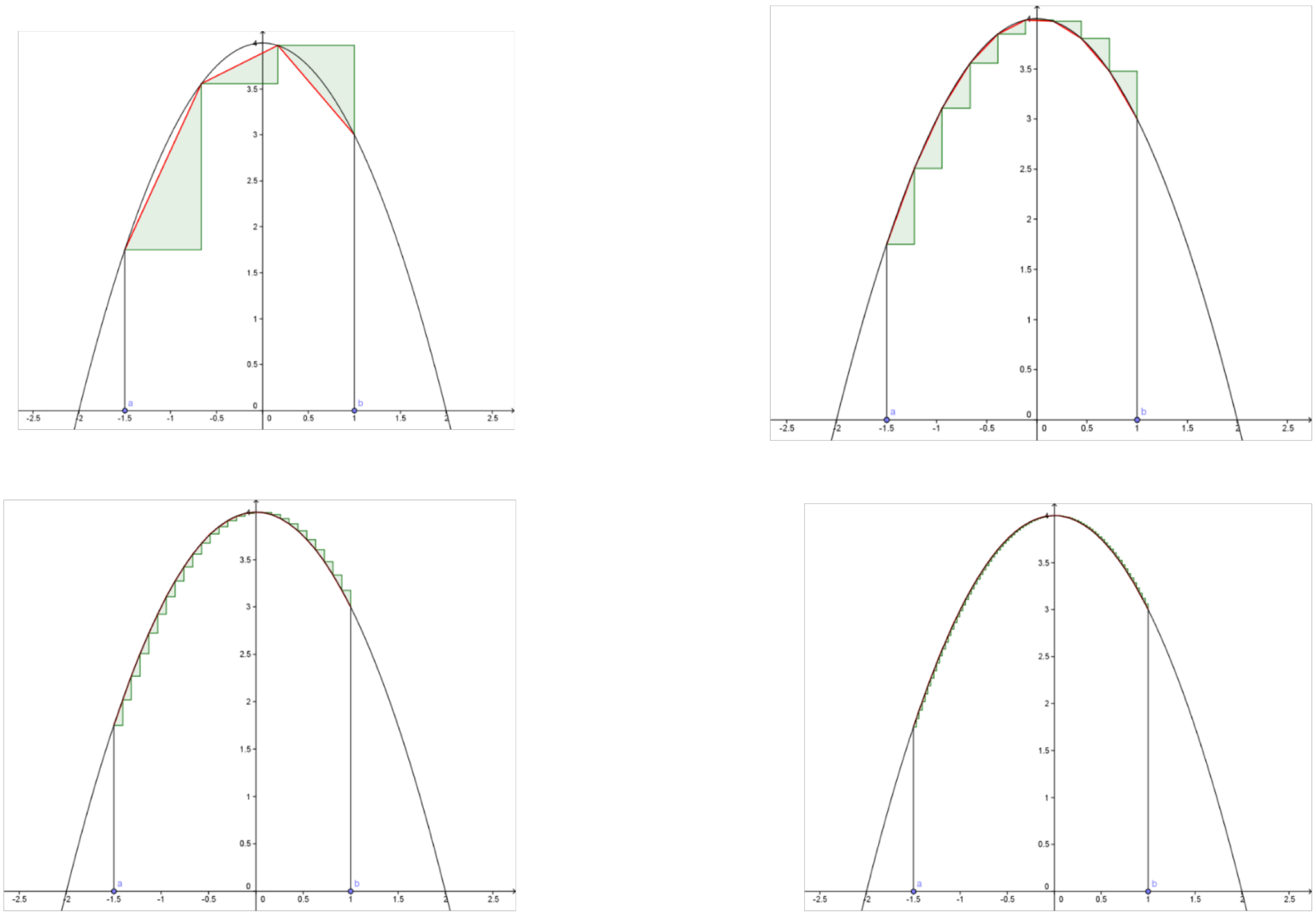
Longitud de una gráfica

$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{\Delta f_i^2 \cdot \Delta x^2}{\Delta x^2}} =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 (1 + \frac{\Delta f_i^2}{\Delta x^2})} = \sqrt{(1 + \frac{\Delta f_i^2}{\Delta x^2})} \Delta x =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Longitud de una gráfica



APLICACIONES. LONGITUDES

Longitud de una gráfica

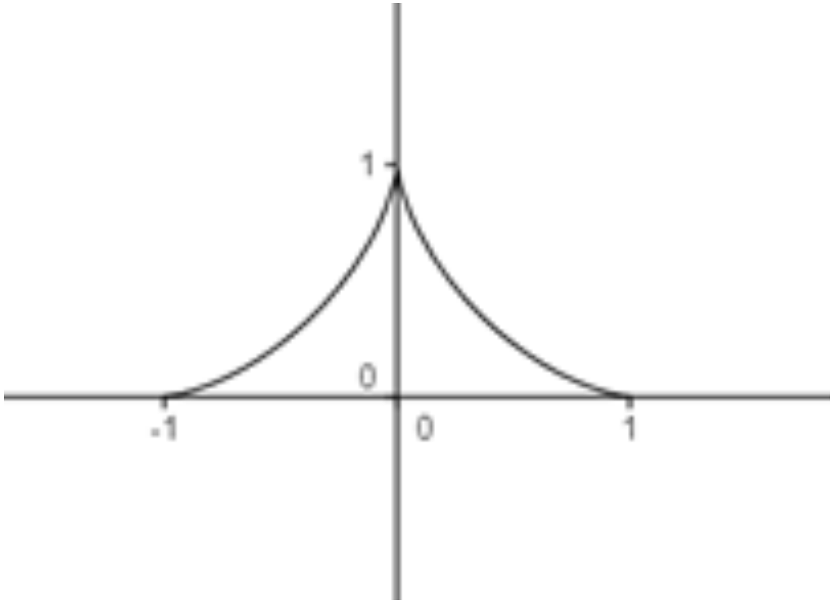
$$L = \sum_{n\to\infty} l_i = \sum_{n\to\infty} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



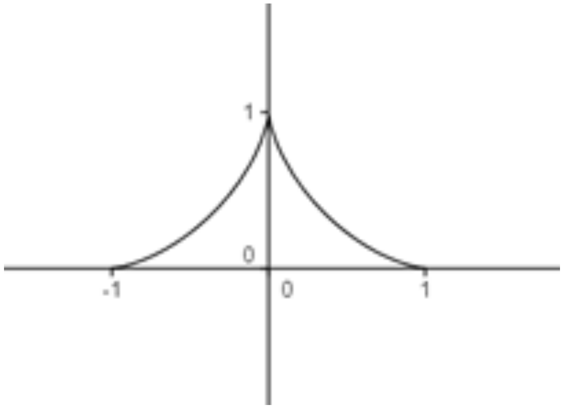
APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

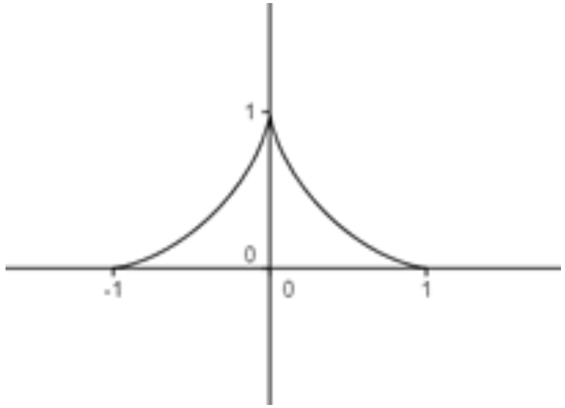
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



APLICACIONES. LONGITUDES - EJEMPLO

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Derivada implícita



$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3}$$

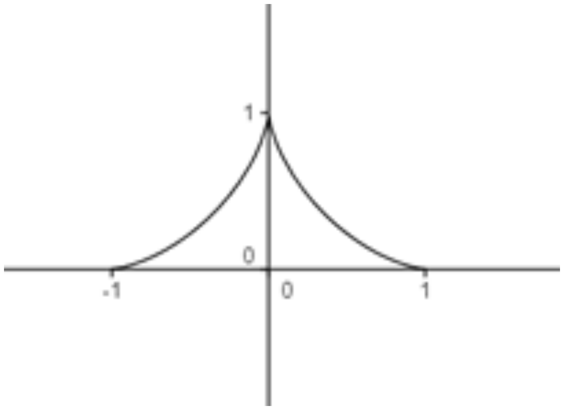
$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$

APLICACIONES. LONGITUDES - EJEMPLO

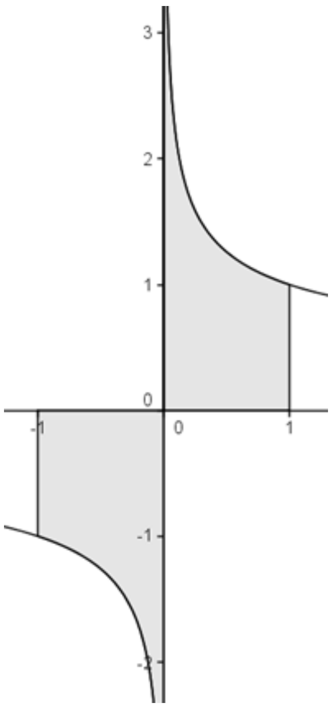
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$f'(x)^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = x^{-2/3} - 1$$



Longitud de -1 a 1 $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$



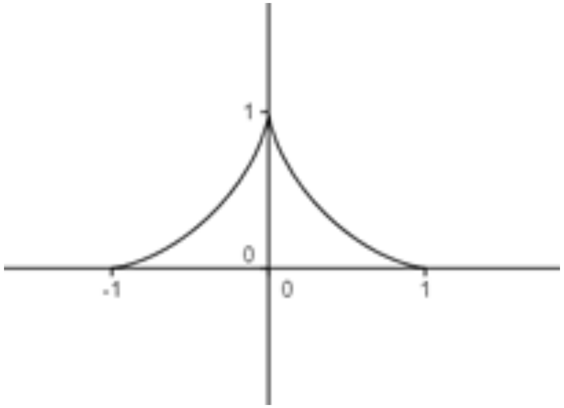
$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x^{-2/3} - 1} = \sqrt{x^{-2/3}} = x^{-1/3}$$

APLICACIONES. LONGITUDES – EJEMPLO

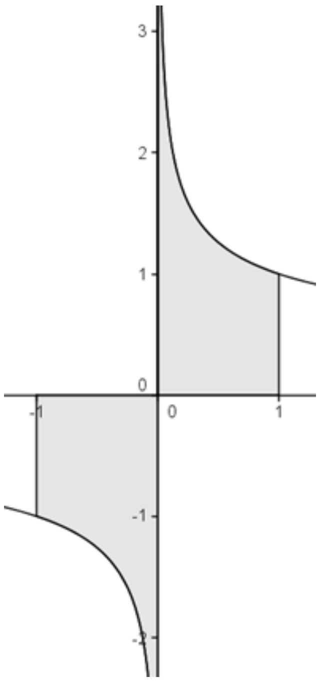
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$f'(x)^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1$$



Longitud de -1 a 1



$$L=2\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=2\int_0^1 x^{-1/3}=$$

$$=2\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_0^1=3x^{2/3}\Big]_0^1=3-0=3$$

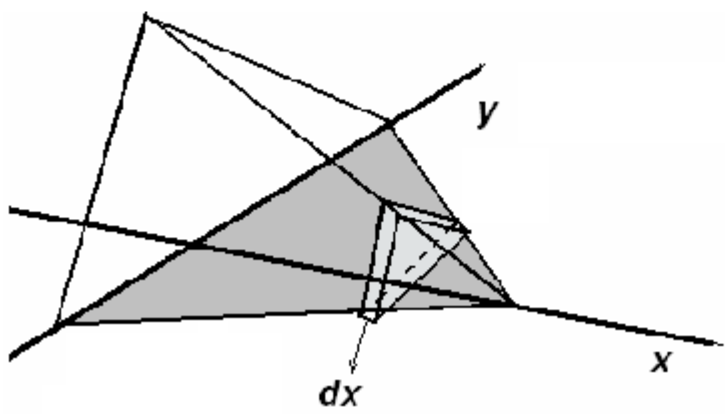
APLICACIONES. LONGITUDES – EJERCICIO

Calcula la longitud de la curva $y = x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 4$

APLICACIONES. VOLÚMENES

Volumen por secciones planas

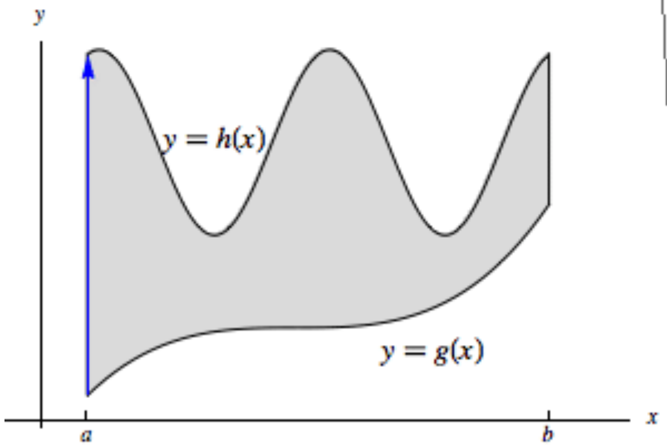
El volumen de un sólido que se extiende de *x=a* a *x=b* (intervalo *[a, b]*) y cuya área de la sección en un punto *x* venga dada por una función *A(x)* se calcula con la integral

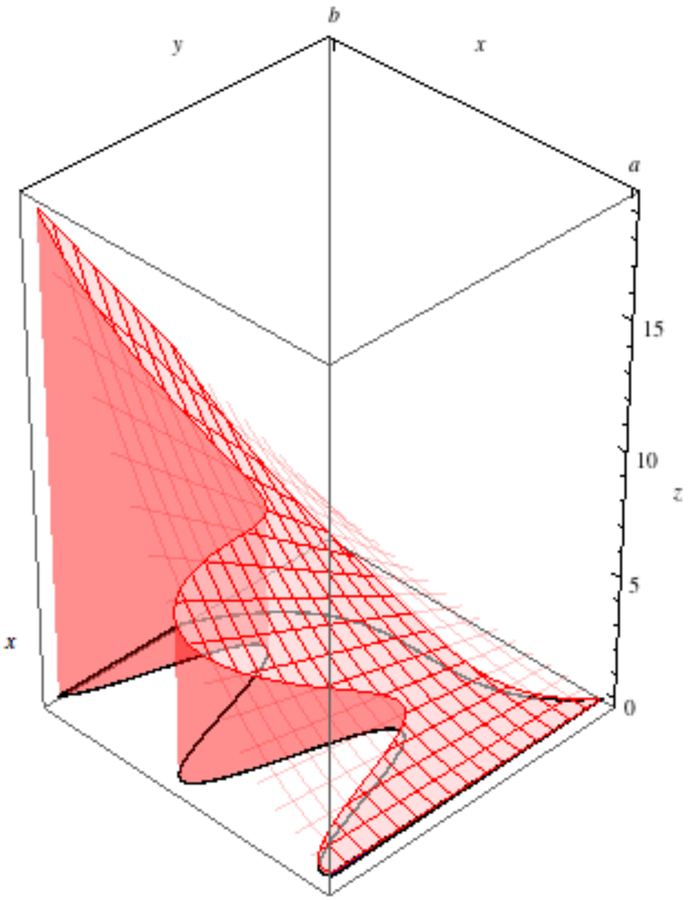


$$V = \int_a^b A(x)dx$$

APLICACIONES. VOLÚMENES

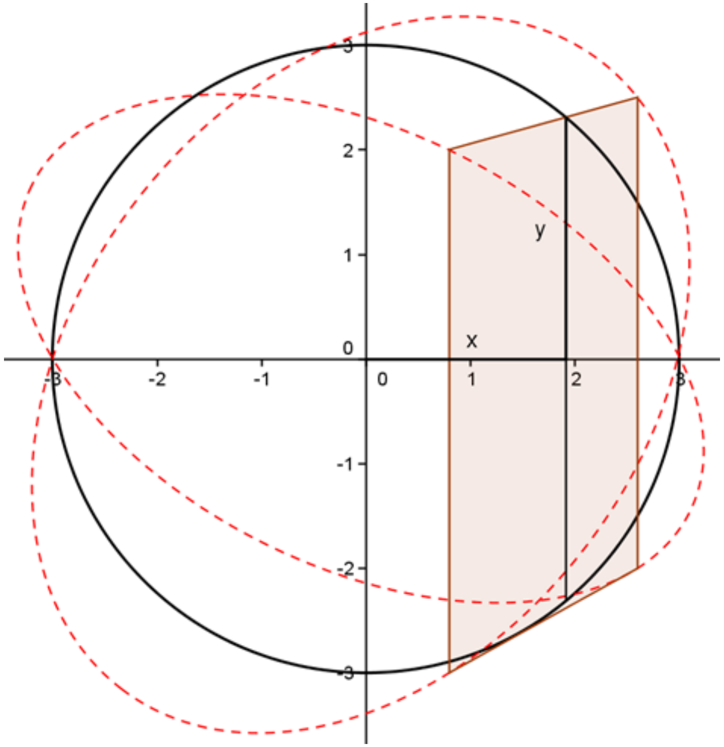
Volumen por secciones planas





APLICACIONES. VOLÚMENES - EJEMPLO

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje *x* son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por *x* en una circunferencia de radio *3* y centro en el origen de coordenadas.



APLICACIONES. VOLÚMENES – EJEMPLO

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje x son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por x en una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas

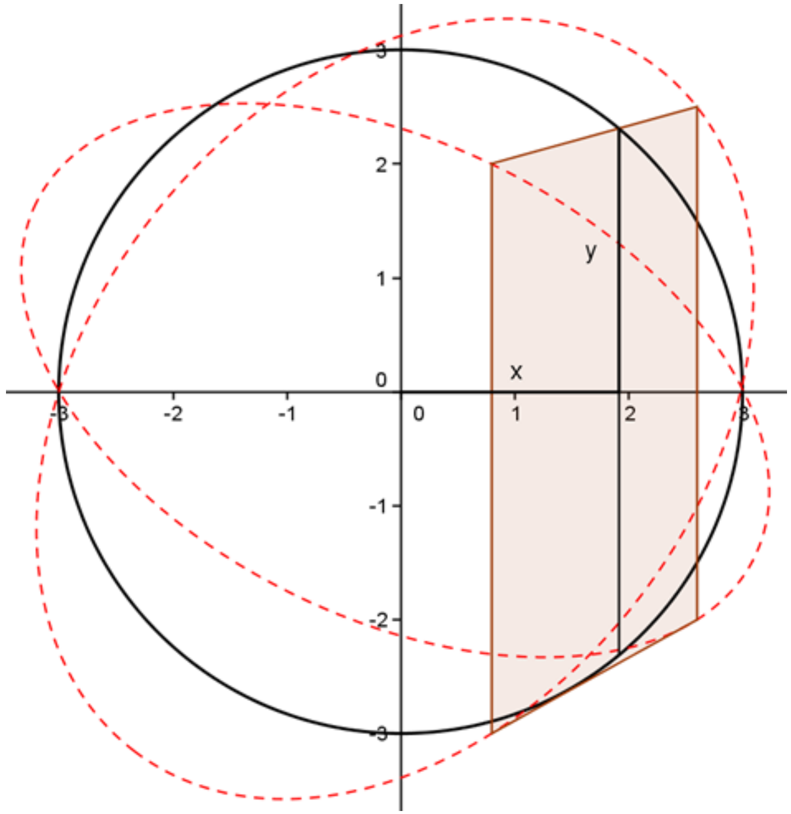
$$y^2 + x^2 = 3^2$$

$$A(x) = (2y)^2 = 4(9 - x^2)$$

$$V = 2\int_0^3 A(x)dx =$$

$$= 8\int_0^3 (9 - x^2)dx =$$

$$= 8\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 = 144$$

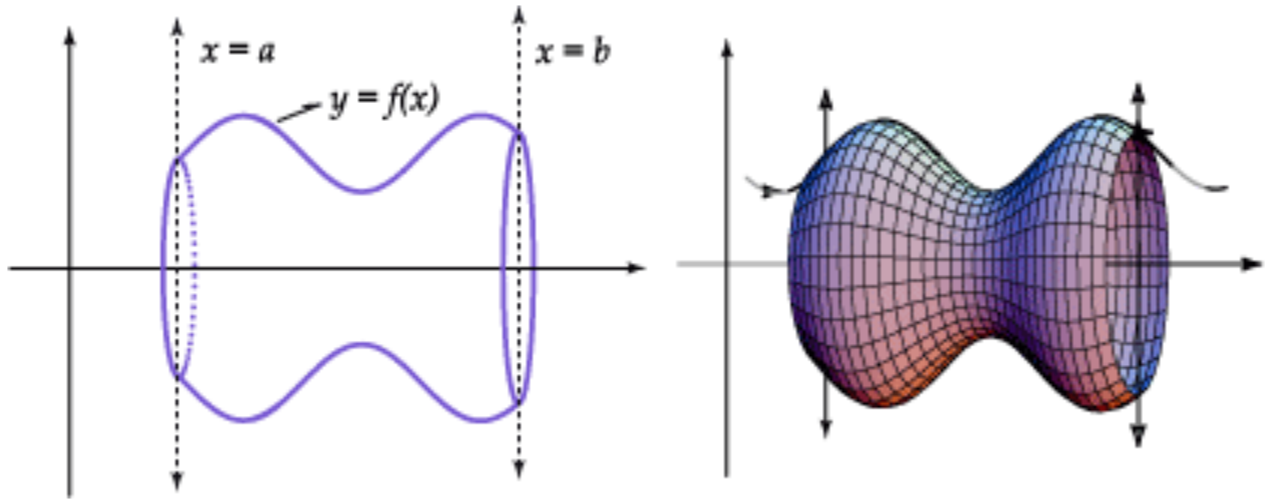


APLICACIONES. VOLÚMENES - EJERCICIO

Calcula el volumen de una esfera de radio *r*.

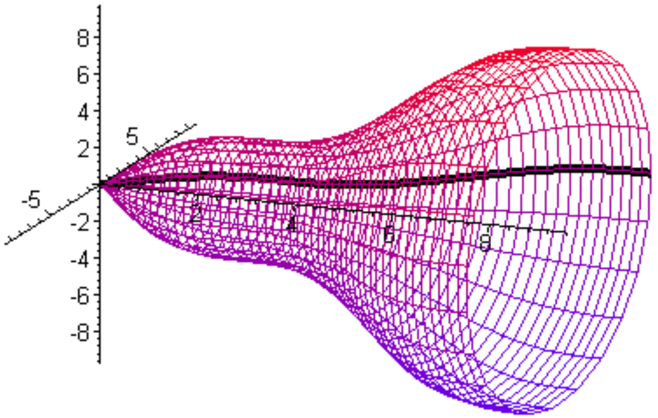
Volumen de revolución

El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$



Volumen de revolución

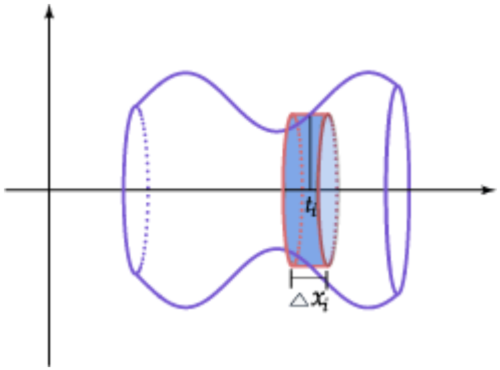
El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$



APLICACIONES. VOLÚMENES

Volumen de revolución

Se subdivide *[a, b]* en *n* intervalos donde *f(x)* es continua y con ancho $\Delta x=(b-a)/n$



f(x) es el radio de la base del disco e Δx su altura. El volumen de cada disco será

$$v_i = (\pi \cdot f(x_i)^2) \cdot \Delta x$$

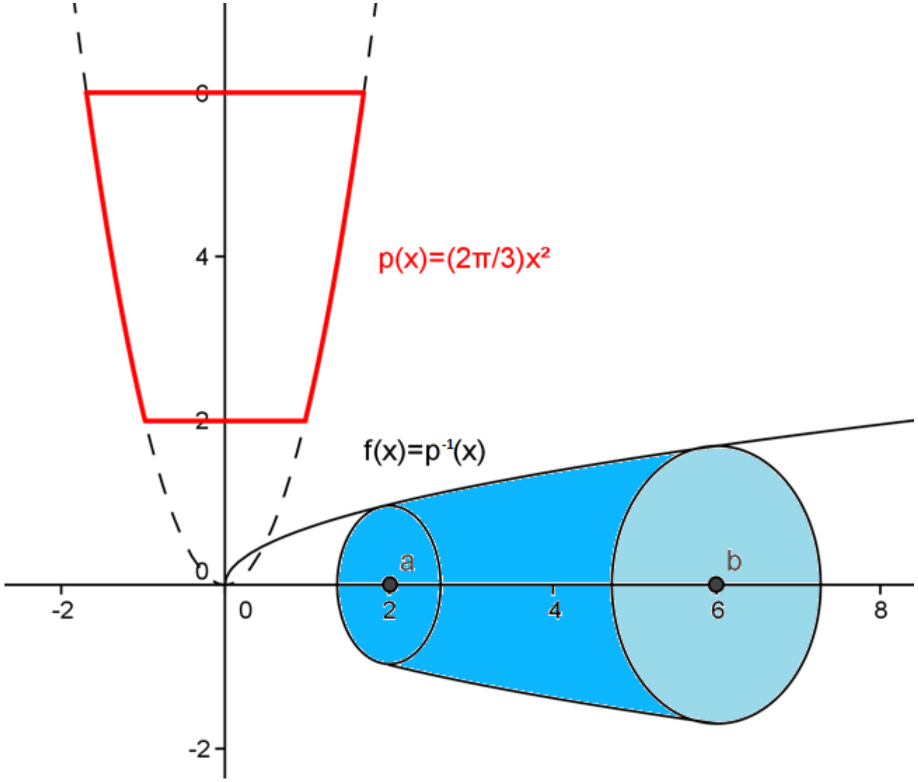
Volumen de revolución

La suma de los volúmenes de los discos se se aproximará al volumen de la figura cuando $n \to \infty$. El volumen de la figura de revolución es entonces la integral

$$V = \sum_{n \to \infty} \left(\pi \cdot f(x_i)^2 \Delta x\right) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

APLICACIONES. VOLÚMENES – EJEMPLO

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio $P(x)=(2\pi/3)x^2$ y las rectas $y=2$ e $y=6$



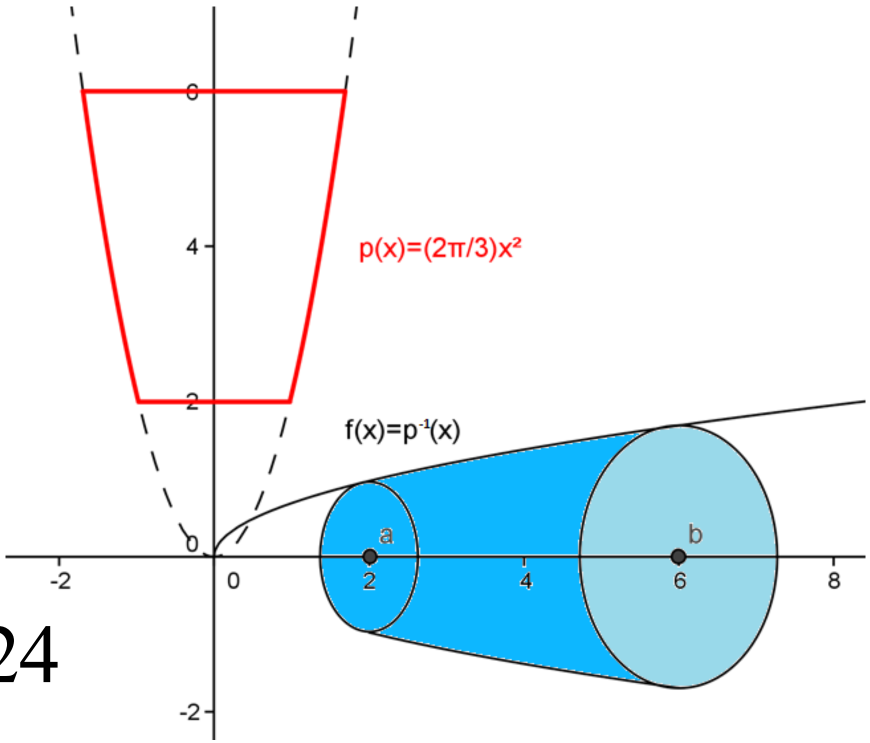
APLICACIONES. VOLÚMENES - EJEMPLO

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio *P(x)=(2π/3)x²* y las rectas *y=2* e *y=6*

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x}{2\pi}}$$

$$V=\pi\int_2^6 f(x)^2\,dx=\pi\int_2^6 \frac{3x}{2\pi}dx=$$

$$\int_2^6 \frac{3x}{2}dx=\left.\frac{3x^2}{4}\right]_2^6=\frac{108}{4}-\frac{12}{4}=24$$



APLICACIONES. VOLÚMENES

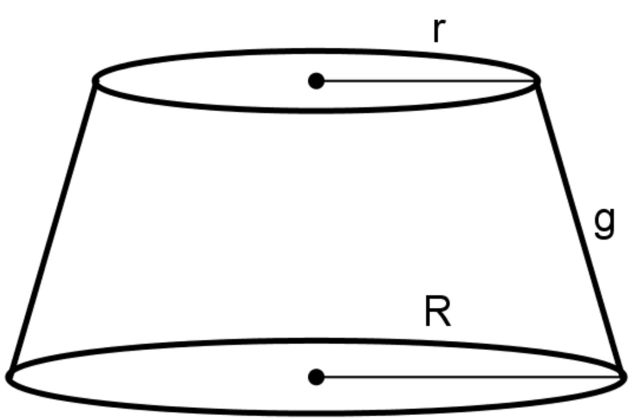
Superficie de revolución

Se sigue una estrategia similar a la de la suma de volúmenes, solo que esta vez con la superficie lateral de un tronco de cono

La superficie de un tronco de cono es la semisuma de los perímetros de las bases por la generatriz

$$S = \frac{2\pi r + 2\pi R}{2} g$$

$$S = \pi(r + R)g$$



APLICACIONES. VOLÚMENES

Superficie de revolución

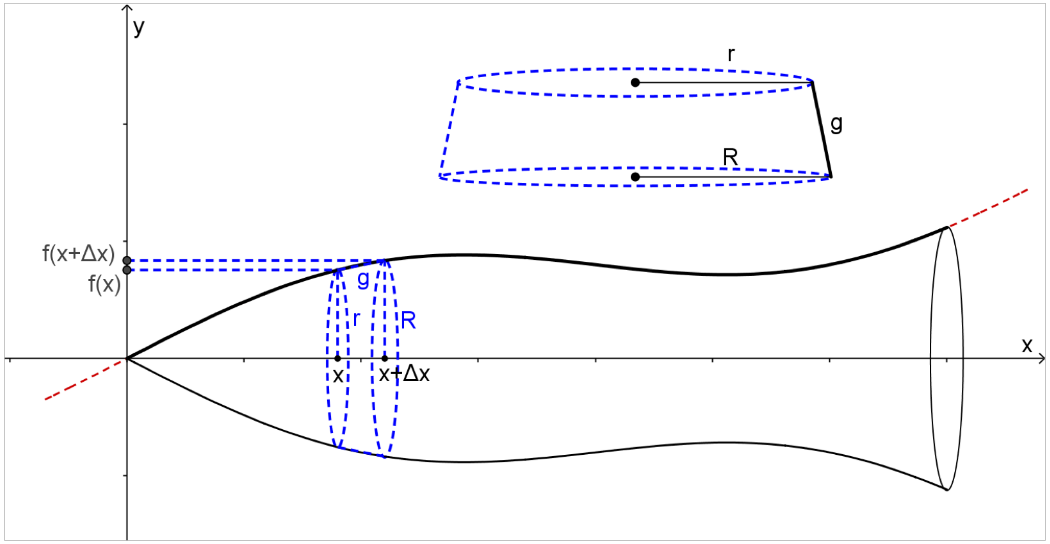
Para la rotación sobre el eje X, los radios y la generatriz son

$$\mathrm{r} = f(x)$$

$$\mathrm{R} = f(x + \Delta x)$$

$$\mathrm{g} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

donde $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

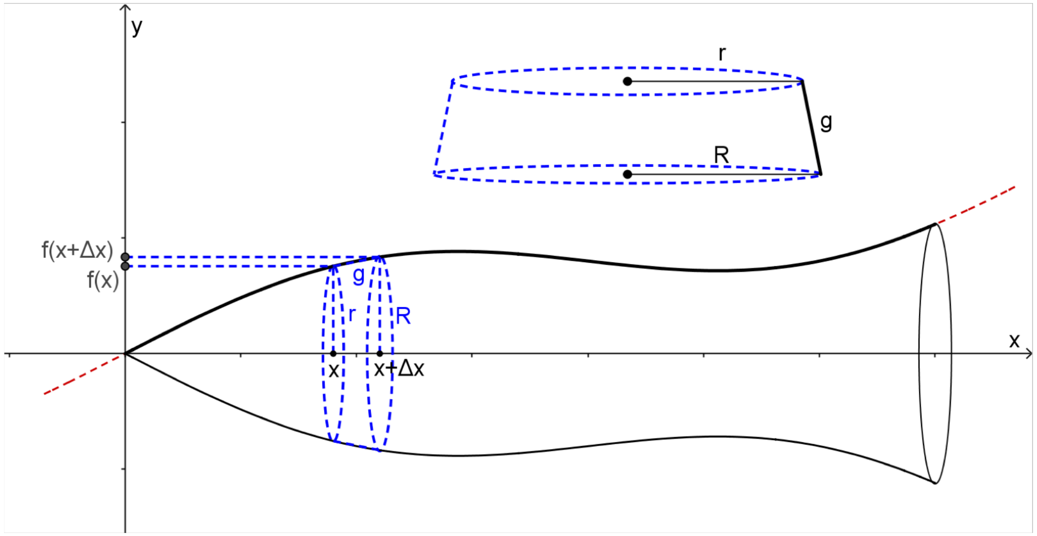


Superficie de revolución

La superficie total será el límite del sumatorio de las superficies S_i cuando $n \to \infty$

$$S_i = \pi(r+R)g$$

$$S_i = \pi\big(f(x) + f(x+\Delta x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$



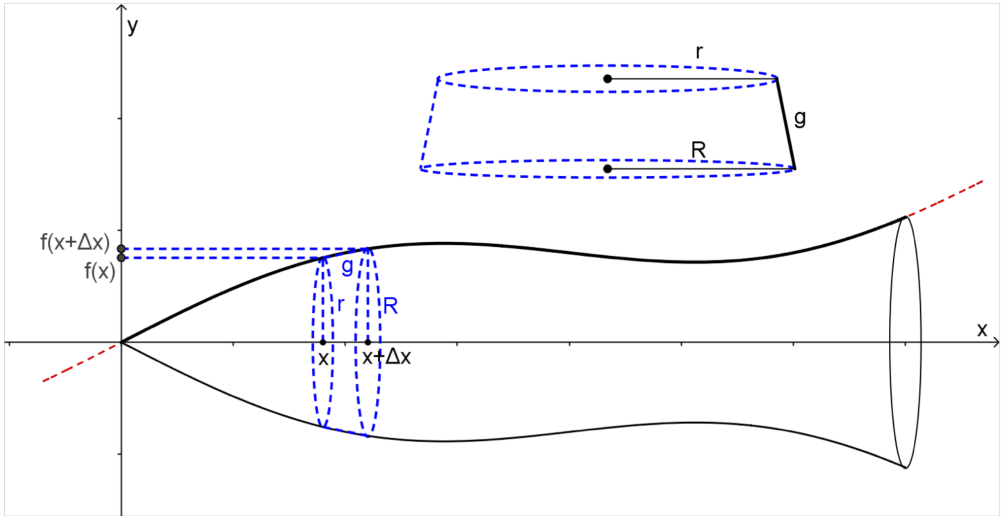
APLICACIONES. VOLÚMENES

Superficie de revolución

$n \to \infty$ cuando $\Delta x \to 0$ y el límite del sumatorio es la integral

$$S_i = \pi\big(f(x) + f(x+\Delta x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum S_i = \int \pi\, 2\, f(x)\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

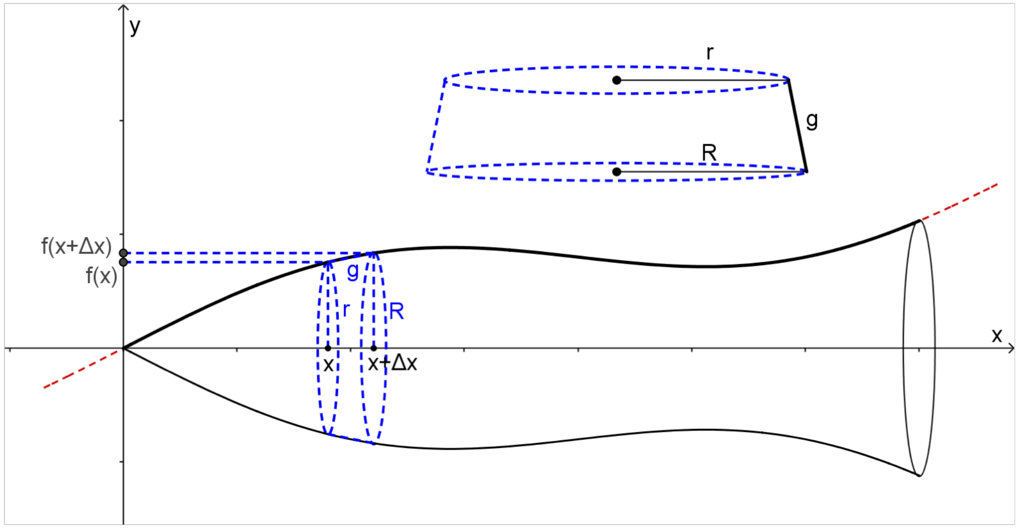


APLICACIONES. VOLÚMENES

Superficie de revolución

La superficie de revolución sobre el eje X que genera la gráfica de una función f(x) en un intervalo [a, b] es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

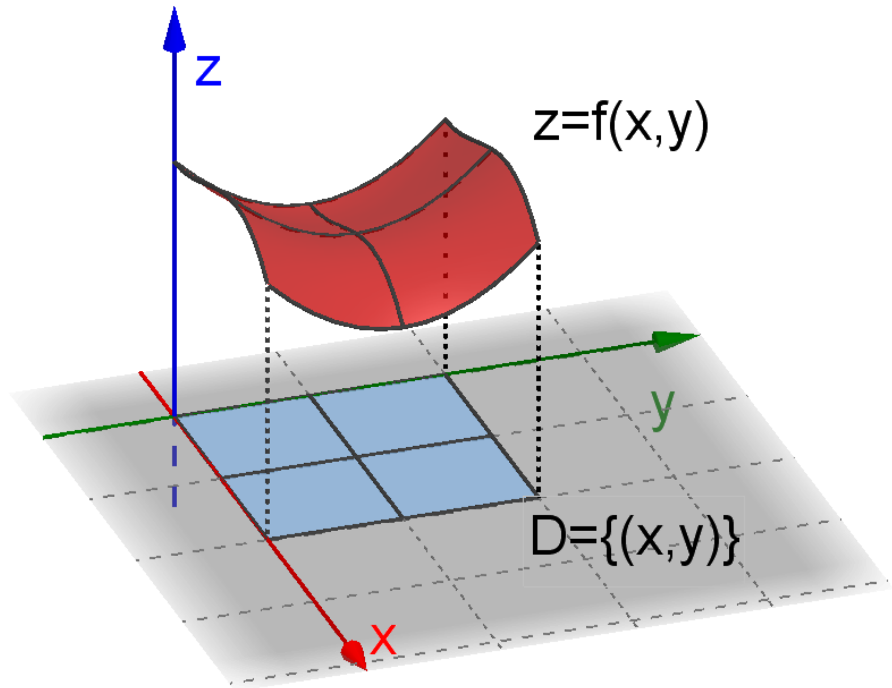
- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias
- Aplicaciones. Áreas, longitudes y volúmenes
- Integrales múltiples

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRALES DOBLES

Un función $f(x, y)$ de dos variables representa una superficie en el espacio, cuya proyección sobre el plano XY es el dominio D sobre el que está definida la función

$$\begin{aligned} f(x,y)\colon D \subseteq \ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to z \end{aligned}$$

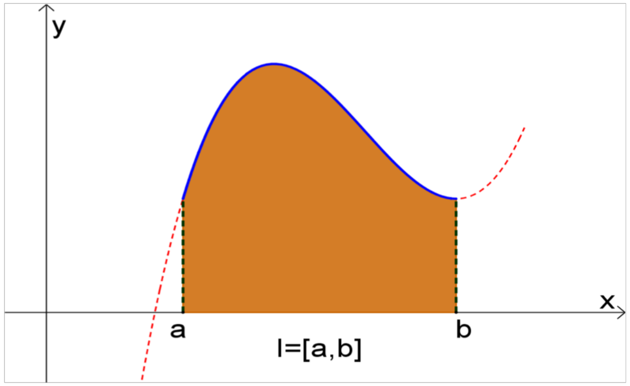


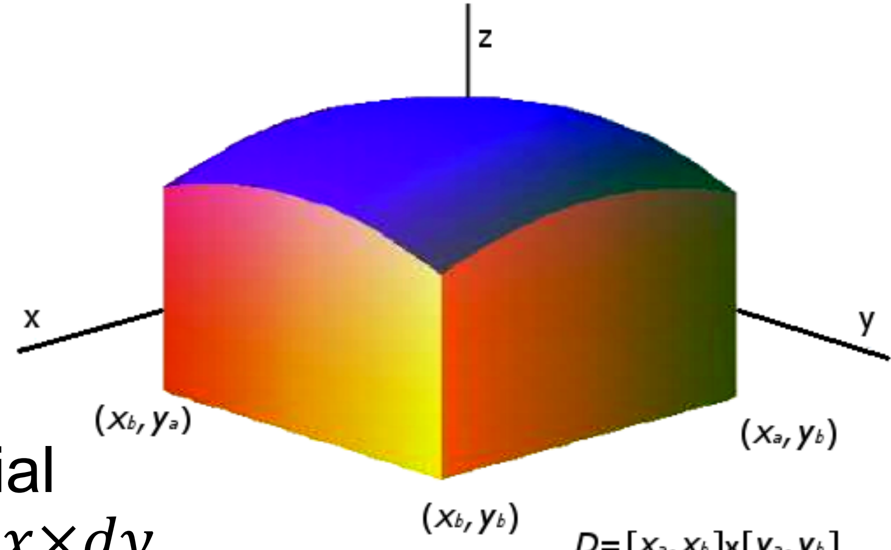
INTEGRALES DOBLES

Mientras una integral simple definida en un intervalo I=[a, b] es la superficie que queda entre una función $f(x)$ y el eje X, una integral doble en un dominio $D = [x_a, x_b]\times[y_a, y_b]$ es el volumen comprendido entre la función $f(x,y)$ y el plano XY

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$V = \iint_D f(x,y)dA$$





donde $dA = dxdy$ es un diferencial de área rectangular de tamaño $dx\times dy$

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

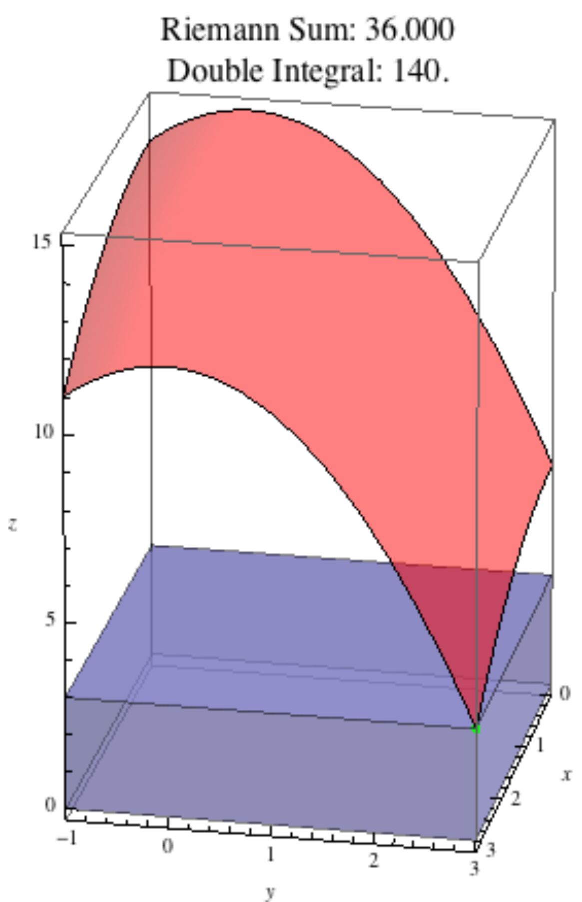
Sea $f(x,y)$ definida en el siguiente rectángulo *D* del plano XY
$D = [x_a, x_b]\times[y_a, y_b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x_a \leq x \leq x_b \,, y_a \leq y \leq y_b\}$

Si $P \; = \; \{[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\}$ es una partición en subrentángulos de D con $x_a = x_0 \leq x_i \leq x_n = x_b$ y $y_a = y_0 \leq y_j \leq y_m = y_b$ entonces se define la integral doble de f sobre *D*, denotada por $\iint_D f(x,y)dA$,
como

$$\iint_D f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_i)\Delta A_{ij}$$

donde
$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \times \Delta y_j$ es el área del subrectángulo ij de la partición *P* de *D*, y $\|P\|$ es la máxima longitud de la diagonal de los subrectángulos

INTERPRETACIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE COMO VOLUMEN



INTEGRALES DOBLES

La resolución de una integral doble, por definición, es un cálculo complejo, ya que es el resultado del límite de un doble sumatorio que se puede aproximar mediante dobles sumas de Riemann

Un nuevo concepto, el de integral iterada, nos va a facilitar un método de cálculo de las integrales dobles mediante la evaluación sucesiva de integrales simples

INTEGRALES DOBLES

Recordemos que llamamos derivadas iteradas a las que resultan de derivar primero respecto a una variable, y después respecto a la otra, considerando en ambos casos que la otra variable es constante

De forma similar podemos definir las integrales iteradas como las antiderivadas iteradas, es decir, las integrales respecto a una variable, primero, y después respecto a la otra, considerando en los dos casos la variable respecto a la que no se integra como constante

$$\iint f(x,y)dxdy = \int \left(\int f(x,y)dx \right) dy$$

INTEGRALES ITERADAS

Las integrales iteradas cumplen con la misma propiedad que las derivadas iteradas respecto al orden en que se escogen las variables, es decir, no importa respecto a qué variable se integre primero

En el caso de integrales iteradas definidas, esta propiedad se refleja en la siguiente igualdad

$$\int_{y_a}^{y_b} \int_{x_a}^{x_b} f(x,y)dx\,dy = \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)dy\,dx$$

Teorema de Fubini

Sea $f(x,y)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real y continua en el rectángulo $D = [x_a, x_b]\times[y_a, y_b]$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b} f(x,y)dx\,dy = \int_{x_a}^{x_b}\int_{y_a}^{y_b} f(x,y)dy\,dx$$

El cálculo de la integral doble, se resuelve mediante la integral iterada, que es la evaluación sucesiva de dos integrales simples

Teorema de Fubini. Demostración

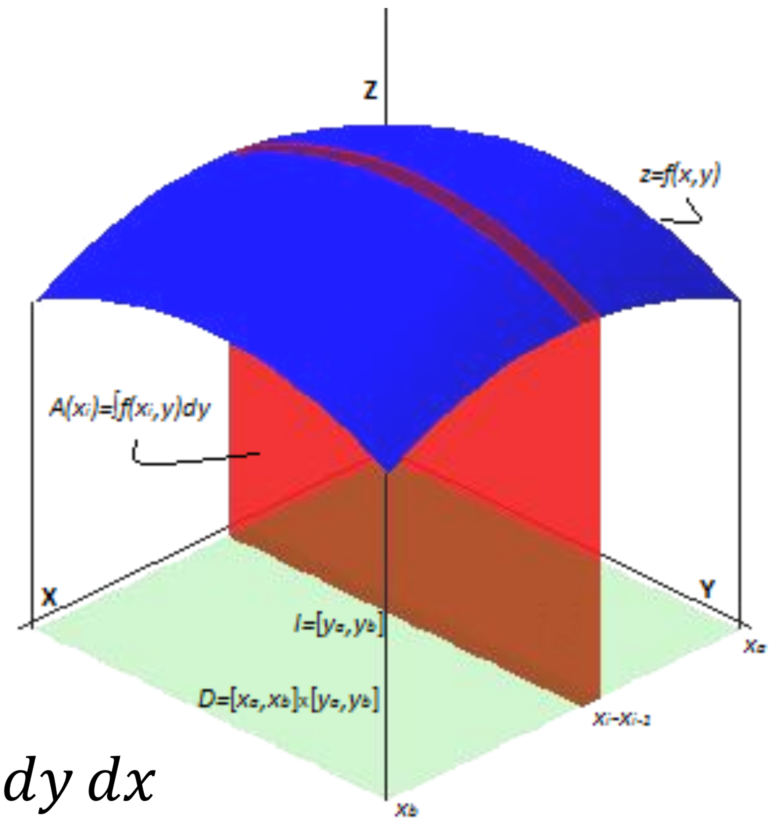
Calculamos el volumen por secciones planas

$$V = \int_{x_b}^{x_b} A(x)dx$$

$$A(x) = \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)dy$$

$$V = \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$V = \iint_D f(x,y)dA = \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)\,dy\,dx$$



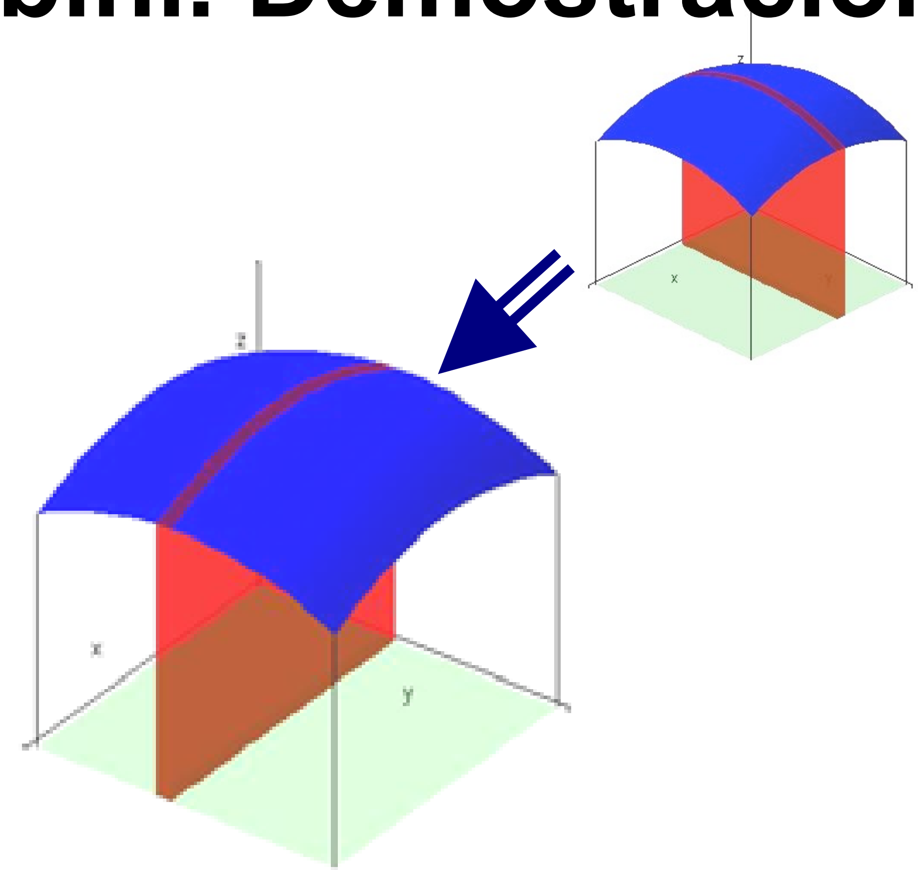
Teorema de Fubini. Demostración

O de forma análoga…

$$V = \int_{y_b}^{y_b} A(y)dy$$

$$A(y) = \int_{x_a}^{x_b} f(x,y)dx$$

$$V = \int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b} f(x,y)\,dx\,dy$$



$$V = \iint_D f(x,y)dA = \int_{x_a}^{x_b}\int_{y_a}^{y_b} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b} f(x,y)\,dx\,dy$$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula la integral iterada $\int_1^4 \int_2^7 dx\, dy$

INTEGRALES DOBLES - EJEMPLO

Calcula la integral iterada $\int_1^4 \int_2^7 dx\, dy$

$$\int_1^4 \left(\int_2^7 dx \right) dy = \int_1^4 [x]_2^7\, dy = \int_1^4 (7-2)\, dy =$$

$$[(7-2)y]_1^4 = \big((7-2)4 - (7-2)1\big) = (7-2)(4-1) = 5 \cdot 3 = 15$$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

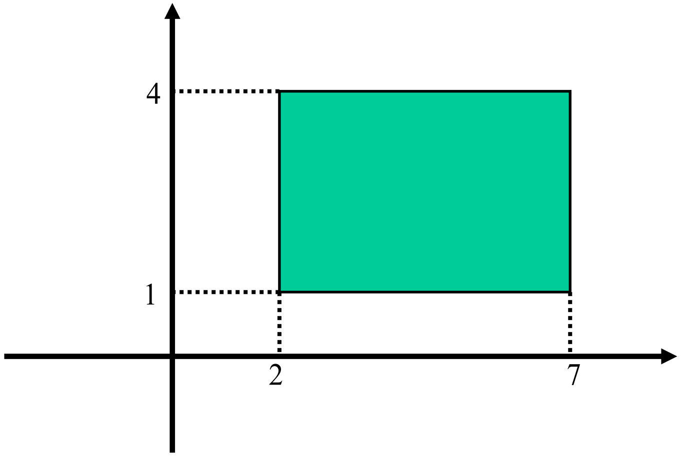
Calcula la integral iterada $\int_1^4 \int_2^7 dx\, dy$

$$\int_1^4 \left(\int_2^7 dx \right) dy = \int_1^4 [x]_2^7\, dy = \int_1^4 (7-2)\, dy =$$

$$[(7-2)y]_1^4 = \big((7-2)4 - (7-2)1\big) = (7-2)(4-1) = 5 \cdot 3 = 15$$

El cálculo coincide con el área de un rectángulo

$$[2,7]\times[1,4]$$



INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de
$f(x,y) = k$ con $D = [2,7]\times[1,4]$

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de
$f(x,y) = k$ con $D = [2,7]\times[1,4]$

$$\iint_D f(x,y)\, dA$$

$$\iint_D k\, dA = \int_1^4 \int_2^7 k\, dx\, dy = \int_1^4 [kx]_2^7 dy = [[kx]_2^7 y]_1^4 =$$

$$= [(7k - 2k)y]_1^4 = [(7-2)ky]_1^4 = \big((7-2)4k - (7-2)k\big) =$$

$$= (7-2)(4-1)k = 5 \cdot 3 \cdot k$$

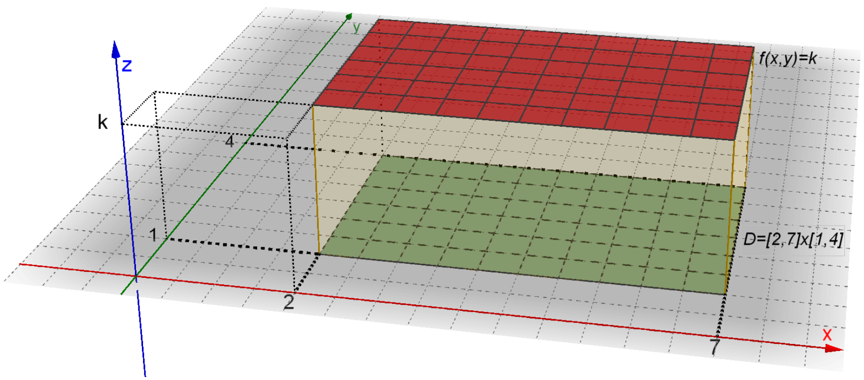
INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $f(x,y) = k$ con $D = [2,7]\times[1,4]$

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

$$\iint_D k\,dA = \int_1^4 \int_2^7 k\,dx\,dy = [[kx]_2^7 y]_1^4 = (7-2)(4-1)k = 5 \cdot 3 \cdot k$$

El resultado es el volumen de un ortoedro de altura k y base $[2,7]\times[1,4]$



k es también la diferencia en altura entre las superficies que representan $f(x,y)$ en $z = k$ y D en $z = 0$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula el volumen que queda entre las funciones $f(x,y) = 3$ y $g(x,y) = 1$ en el dominio $D = [2,7]\times[1,4]$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula el volumen que queda entre las funciones $f(x,y)=3$ y $g(x,y)=1$ en el dominio $D=[2,7]\times[1,4]$

$$V_f=\iint_D f(x,y)\,dA \qquad V_g=\iint_D g(x,y)\,dA$$

$$V=V_f-V_g=\iint_D f(x,y)dA-\iint_D g(x,y)dA$$

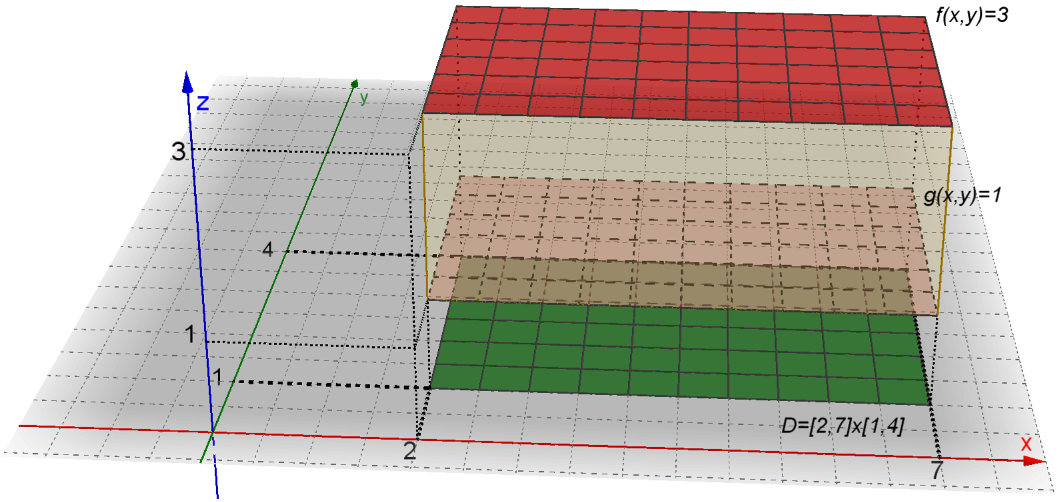
$$V=\int_1^4\int_2^7 3\,dx\,dy-\int_1^4\int_2^7 1\,dx\,dy=$$

$$=(7-2)(4-1)3-(7-2)(4-1)1=$$
$$=(7-2)(4-1)(3-1)=5\cdot3\cdot2$$

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula el volumen que queda entre las funciones $f(x,y) = 3$ y $g(x,y) = 1$ en el dominio $D = [2,7]\times[1,4]$

$$\int_1^4 \int_2^7 3\,dx\,dy - \int_1^4 \int_2^7 1\,dx\,dy = (7-2)(4-1)(3-1) = 5 \cdot 3 \cdot 2$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRALES DOBLES – EJEMPLO

Calcula el volumen que queda entre las funciones $f(x,y)=3$ y $g(x,y)=1$ en el dominio $D=[2,7]\times[1,4]$

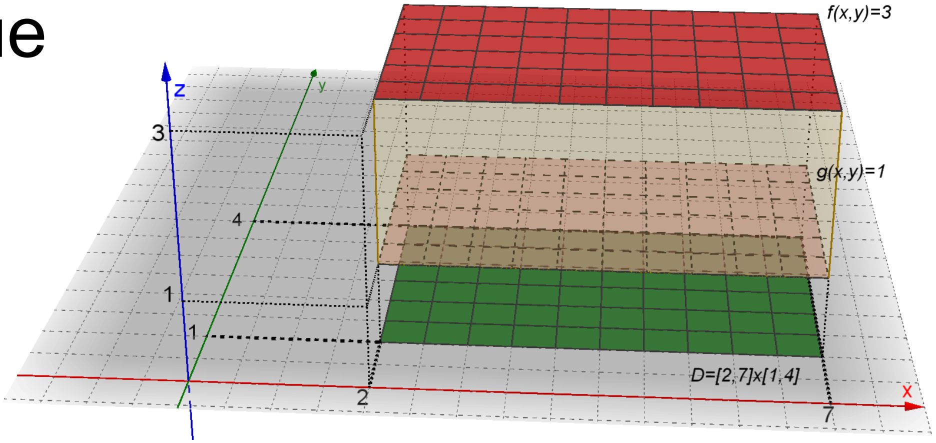
$$\int_1^4\int_2^7 3\,dx\,dy-\int_1^4\int_2^7 1\,dx\,dy=(7-2)(4-1)(3-1)=5\cdot 3\cdot 2$$

El resultado es el mismo que el de la integral iterada:

$$\int_1^2\int_1^4\int_2^7 dx\,dy\,dz$$

o integral tripe $\iiint_D dx\,dy\,dz$

en el dominio $D=[2,7]\times[1,4]\times[1,2]$



INTEGRALES MÚLTIPLES

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Generalización de integral múltiple y su dominio

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, el dominio de una integral múltiple puede ser un intervalo, si está definido en $\mathbb{R}$, una superficie, si está definido en $\mathbb{R}^2$, un volumen, si está definido en $\mathbb{R}^3$, y en general, un hipervolumen si está definido en $\mathbb{R}^n$

La integral múltiple definida es el cálculo de una superficie, volumen o hipervolumen que queda entre la curva, superficie, volumen o hipervolumen que define la función, y el eje, plano, espacio o hiperespacio sobre el que está definido el dominio

INTEGRALES MÚLTIPLES

Generalización de integral múltiple y su dominio

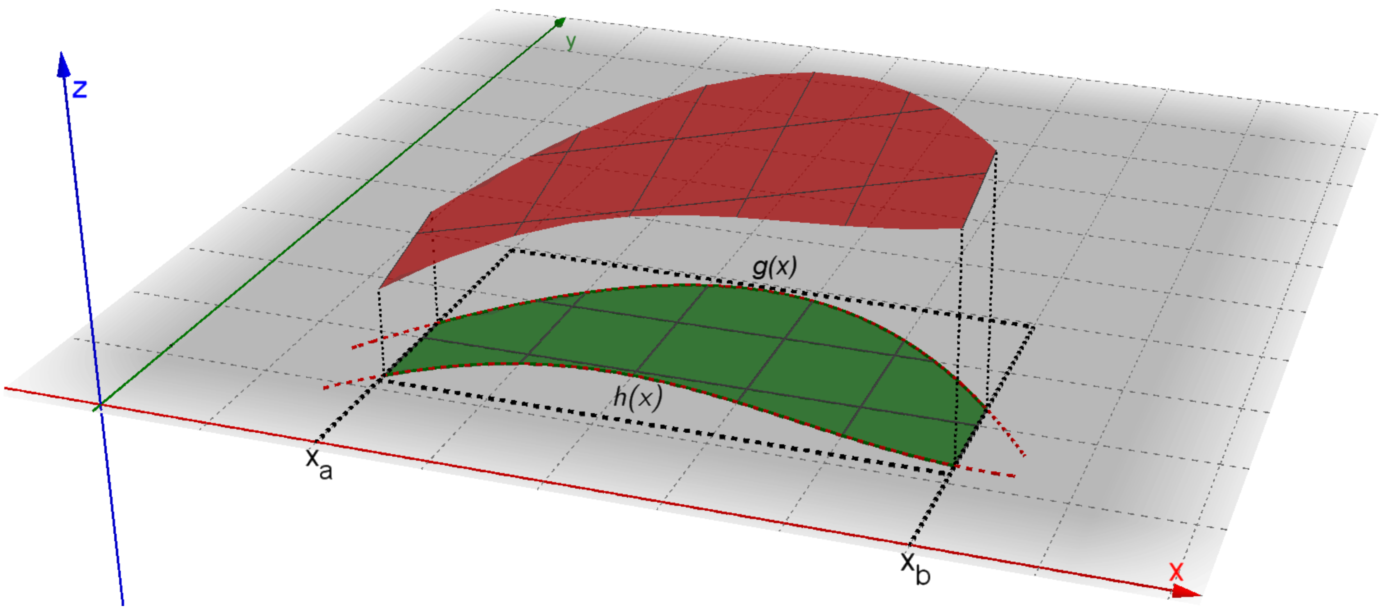
La superficie, volumen o hipervolumen del propio dominio se puede calcular integrando la constante 1 o función unidad, es decir, sólo los diferenciales de cada una de sus dimensiones

También puede interpretarse la integración de la función unidad (sólo los diferenciales), como la superficie contenida entre dos curvas, el volumen contenido entre dos superficies, el hipervolumen contenido entre dos volúmenes, etc

INTEGRALES MÚLTIPLES

Límites de integración en integrales múltiples

El dominio no necesariamente tiene que ser una recta, rectángulo, ortoedro, etc. Puede ser una región o figura definida por funciones



INTEGRALES MÚLTIPLES

Límites de integración en integrales múltiples

Dependiendo de qué variables se usen para definir esas funciones, se pueden seguir unas estrategias u otras.

Hay dos casos especiales a destacar. Son los casos en que se usa una de las variables para delimitar mediante funciones a la otra variable, y se dice entonces que la región está delimitada por secciones transversales

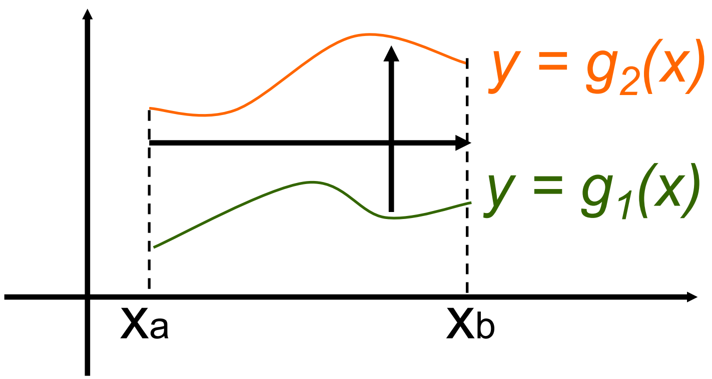
INTEGRALES MÚLTIPLES

Límites de integración en integrales múltiples

Secciones transversales verticales

La región R está limitada por las gráficas $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en el intervalo $[x_a, x_b]$. Si R está descrita por

$$R: \quad x_a \leq x \leq x_b \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x_a}^{x_b} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

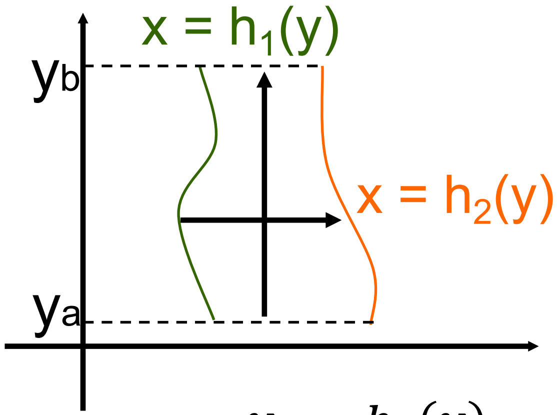
INTEGRALES MÚLTIPLES

Límites de integración en integrales múltiples

Secciones transversales horizontales

La región R está limitada por las gráficas de $h_1(y)$ y $h_2(y)$ en el intervalo $[y_a, y_b]$. Si R es descrita por

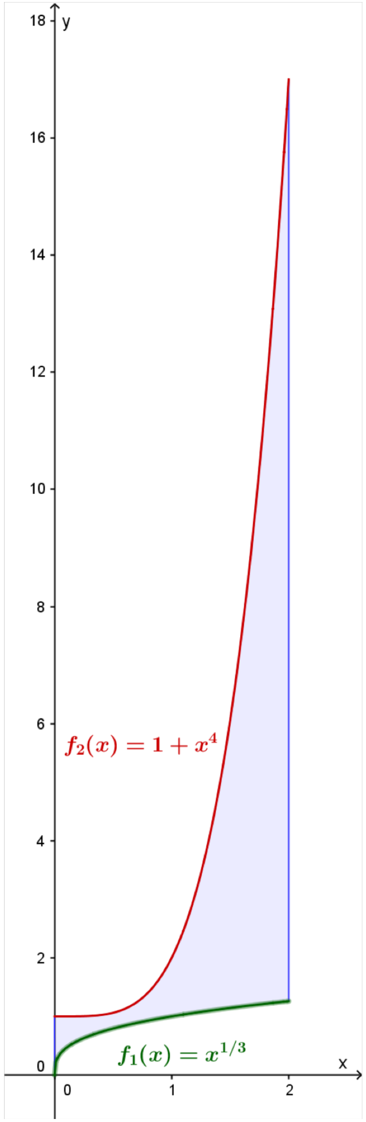
$$R\colon\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \quad y_a \leq y \leq y_b$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y_a}^{y_b} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula el área de una región delimitada por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f_2(x) = 1 + x^4$ en el intervalo $[0,2]$

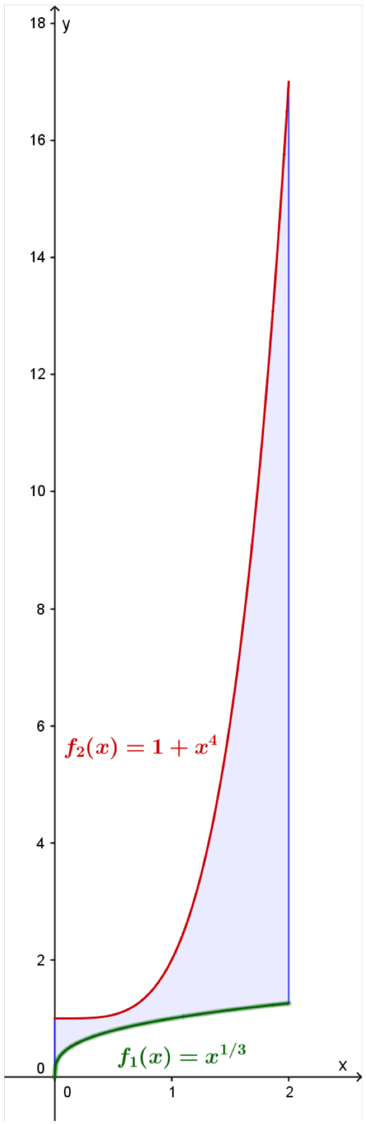


INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula el área de una región delimitada por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f_2(x) = 1 + x^4$ en el intervalo $[0,2]$

$$R: [0,2]\times[f_1(x), f_2(x)] \qquad S = \iint_R dA =$$

$$= \int_0^2 \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_{x^{1/3}}^{1+x^4} dy \right) dx = \int_0^2 F(x) dx$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula el área de una región delimitada por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f_2(x) = 1 + x^4$ en el intervalo $[0,2]$

$$R: [0,2] \times [f_1(x), f_2(x)] \qquad S = \iint_R dA =$$

$$= \int_0^2 \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_{x^{1/3}}^{1+x^4} dy \right) dx = \int_0^2 F(x) dx$$

$$F(x) = \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{1+x^4} dy = \left[y \right]_{\sqrt[3]{x}}^{1-x^4} = 1 + x^4 - x^{1/3}$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula el área de una región delimitada por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f_2(x) = 1 + x^4$ en el intervalo $[0,2]$

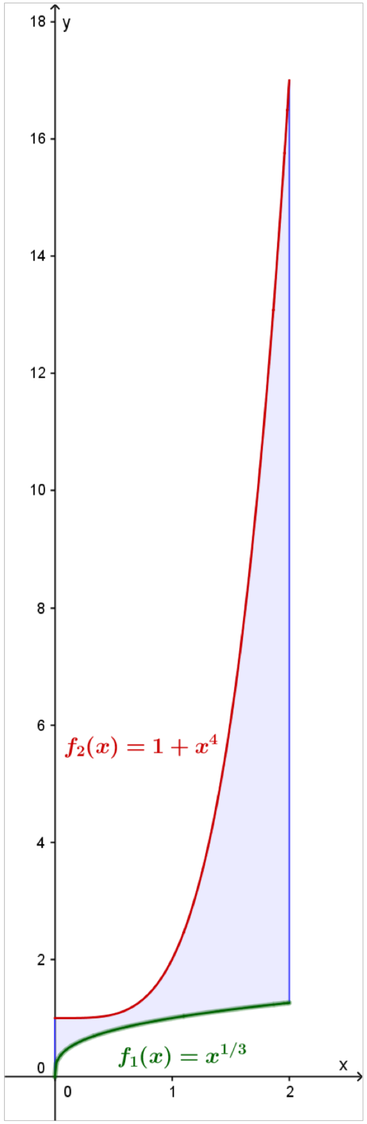
$$R: [0,2]\times[f_1(x), f_2(x)] \qquad S = \iint_R dA =$$

$$= \int_0^2 \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_{x^{1/3}}^{1+x^4} dy \right) dx = \int_0^2 F(x) dx$$

$$F(x) = \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{1+x^4} dy = \Big[y \Big]_{\sqrt[3]{x}}^{1-x^4} = 1 + x^4 - x^{1/3}$$

$$S = \int_0^2 (1 + x^4 - x^{1/3}) dx = \left[x + \frac{1}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^2$$

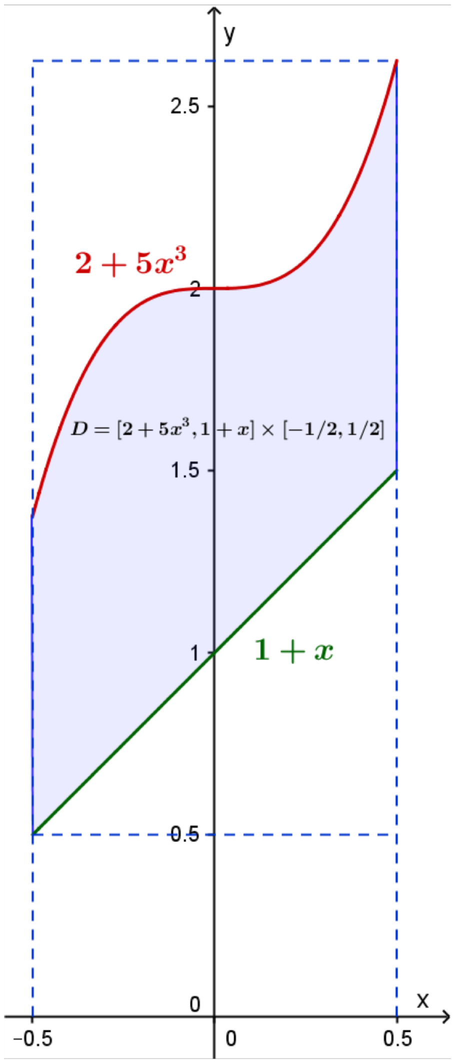
$$= 2 + \frac{32}{5} - \frac{6}{4} \sqrt[3]{2} = 6{,}51$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

$$D = [-1/2, 1/2] \times [1 + x, 2 + 5x^3]$$



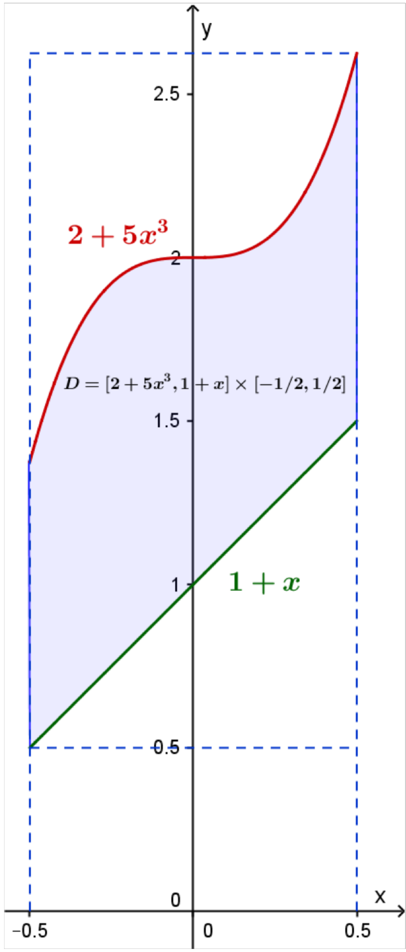
INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

$$D = [-1/2, 1/2] \times [1+x, 2+5x^3]$$

$$\iint_D 4xy^2 dA = 4 \iint_D xy^2 dA = 4\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \iint_D xy^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{1+x}^{2+5x^3} xy^2 dy\, dx$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

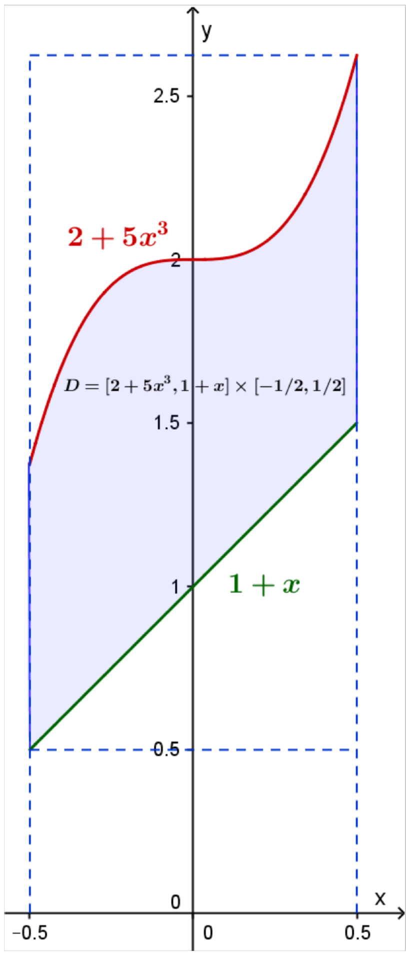
$$D = [-1/2, 1/2] \times [1+x, 2+5x^3]$$

$$\iint_D 4xy^2 dA = 4\iint_D xy^2 dA = 4\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \iint_D xy^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{1+x}^{2+5x^3} xy^2 dy\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x \int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x\, F(x))\, dx$$

$$F(x) = \int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

$$D = [-1/2, 1/2] \times [1+x, 2+5x^3]$$

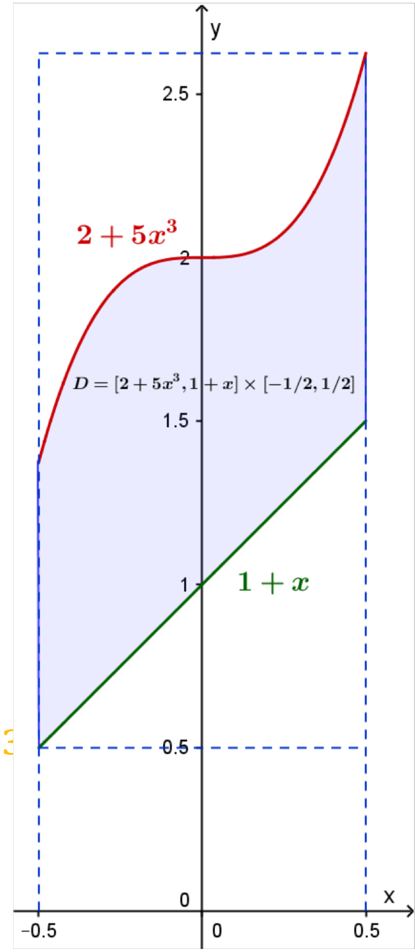
$$\iint_D 4xy^2 dA = 4 \iint_D xy^2 dA = 4\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \iint_D xy^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{1+x}^{2+5x^3} xy^2 dy\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x \int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x\, F(x))\, dx$$

$$F(x) = \int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy = \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{1+x}^{2+5x^3} = \left[\frac{1}{3}(2+5x^3)^3 - \frac{1}{3}(1+x)^3\right.$$

$$= \frac{125}{3}x^9 + 50x^6 + \frac{59}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{7}{3}$$

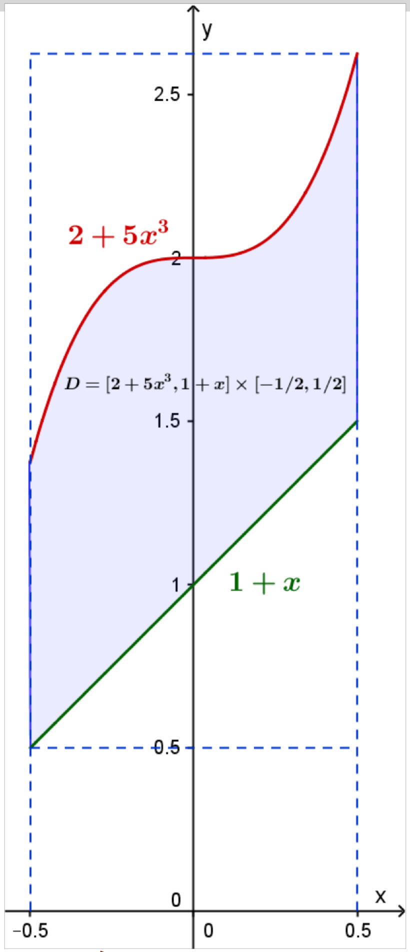


Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

$$D = [-1/2, 1/2] \times [1+x, 2+5x^3]$$



$$\iint_D 4xy^2 dA = 4\iint_D xy^2 dA = 4\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \iint_D xy^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{1+x}^{2+5x^3} xy^2 dy\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x \int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x\, F(x))\, dx$$

$$\mathrm{F(x)} = \frac{125}{3} x^9 + 50x^6 + \frac{59}{3} x^3 - x^2 - x + \frac{7}{3}$$

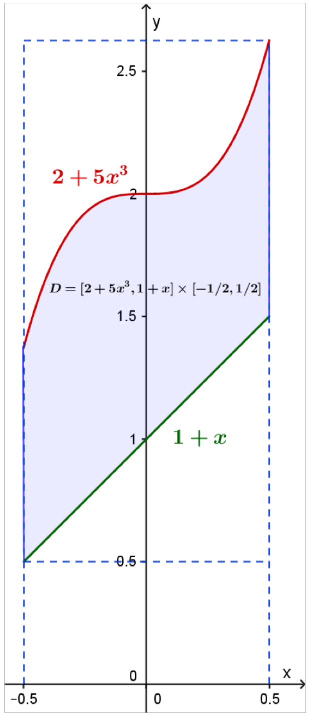
$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left(x(125/3\, x^9 + 50x^6 + 59/3\, x^3 - x^2 - x + 7/3) \right) dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} ((125/3)\, x^{10} + 50x^7 + (59/3)x^4 - x^3 - x^2 + (7/3)x) dx$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Calcula la integral doble de $4xy^2$ en el dominio

$$D = [-1/2, 1/2]\times[1+x, 2+5x^3]$$



$$\mathrm{I} = \iint_D xy^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{1+x}^{2+5x^3} xy^2 dy\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x\int_{1+x}^{2+5x^3} y^2 dy\right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x\, F(x))\, dx$$

$$\mathrm{F(x)} = \frac{125}{3}x^9 + 50x^6 + \frac{59}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{7}{3}$$

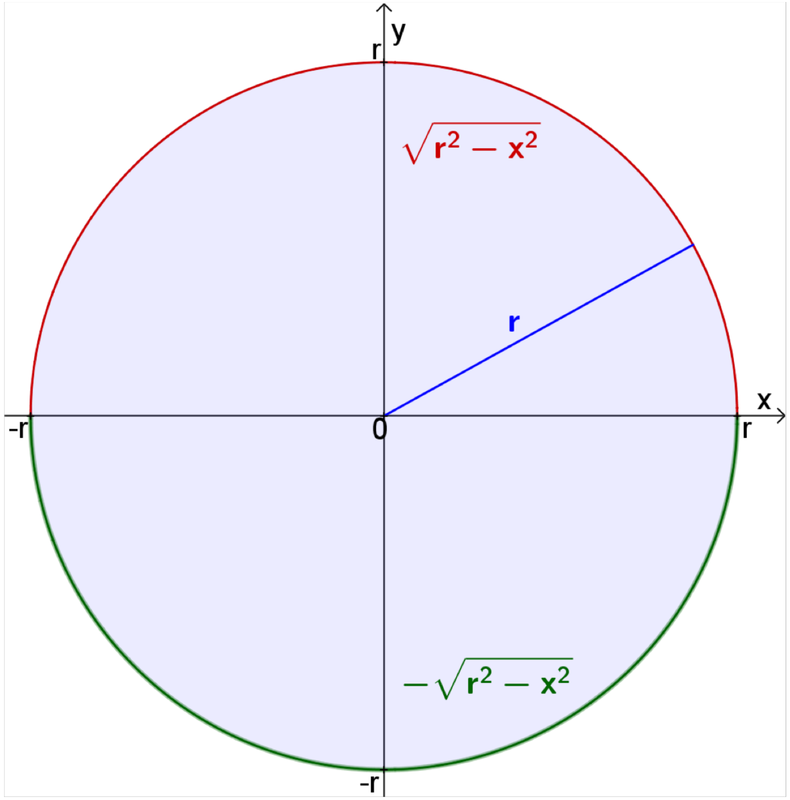
$$= \int_{-1/2}^{1/2}(x(125/3\, x^9 + 50x^6 + 59/3\, x^3 - x^2 - x + 7/3))dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2}((125/3)\, x^{10} + 50x^7 + (59/3)x^4 - x^3 - x^2 + (7/3)x)dx =$$

$$= (2/3)\int_0^{1/2}(125x^{10} + 59x^4 - 3x^2)dx = 28081/168960$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

$$\mathrm{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\mathrm{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint\limits_{\mathrm{Círculo}} dA$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint\limits_{\text{Círculo}} dA = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint_{\text{Círculo}} dA = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \Big[y\Big]_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

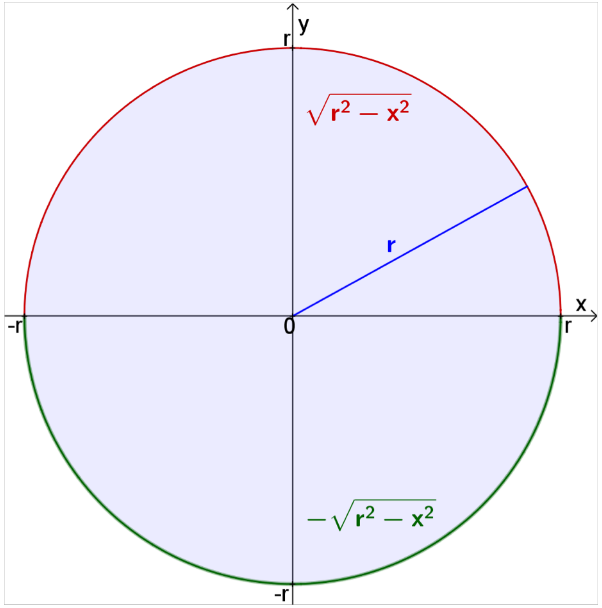
Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint_{\text{Círculo}} dA = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \Big[y \Big]_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$



$$S = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4I$$

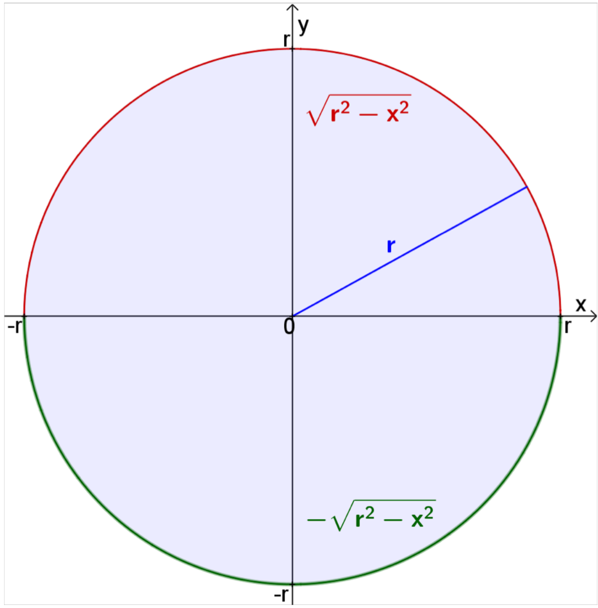
INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint_{\text{Círculo}} dA = 4I$$

$$I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

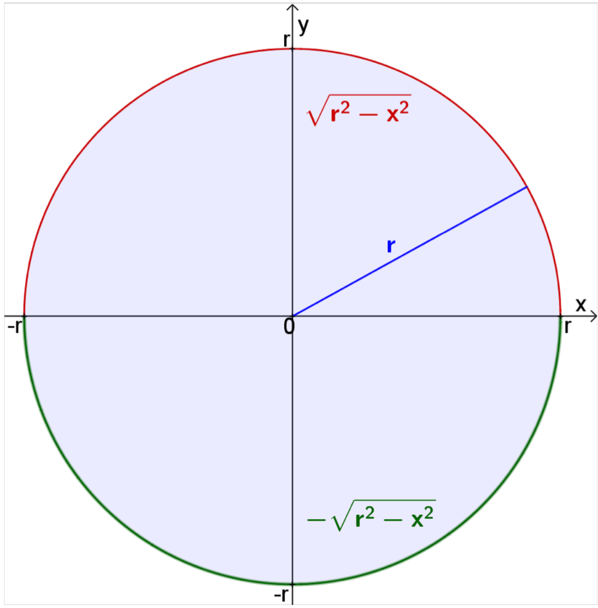
$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint\limits_{\text{Círculo}} dA = 4I$$

$$I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = \frac{r^2\pi}{4}$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJEMPLO

Deduce la superficie del círculo mediante la integral doble en el dominio comprendido entre la semicircunferencia positiva y negativa de $-r$ a r

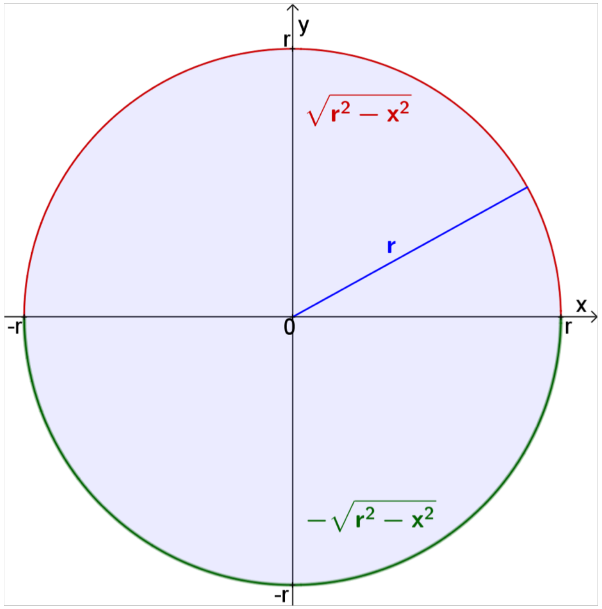
$$\text{Semicircunferencia}(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Círculo} = [-r, r] \times \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$S = \iint_{\text{Círculo}} dA = 4I$$

$$I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = \frac{r^2 \pi}{4}$$



INTEGRALES MÚLTIPLES – EJERCICIO

Calcula $\iint_R \ xdA$ donde *R* es la región limitada por $y = 2x, y = x^2$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJERCICIO

Calcula $\iint_R \; x dA$ donde *R* es la región limitada por $y = 2x, y = x^2$

INTEGRALES MÚLTIPLES – EJERCICIO

Calcula $\iint_R (2x+1)dA$ donde *R* es el triángulo que tiene por vértices los puntos (-1, 0), (0, 1) y (1, 0)

EJERCICIOS

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2, x + y = 2$

3. Calcular el volumen de un cono circular recto con radio r en la base y altura h considerado como volumen de revolución.

4. $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^y \sin(x)\, dxdy$

5. $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 \;\; dydx$

6. $\int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dxdy$

7. Calcular $\iint_R \; dA$ donde $\begin{cases} y = x \\ y = 1/x \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $\frac{\pi}{2}$
2. $\frac{9}{2}$
3. $\frac{1}{3}\pi h r^2$
4. $e-1$
5. 6
6. $\frac{e}{2}-1$
7. $\frac{1}{2}+\ln(2)$