Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.1. Tích phân hai lớp

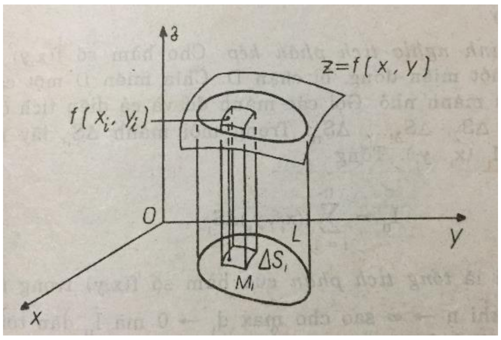
2.1.1. Định nghĩa và cách tính tích phân hai lớp

2.1.1.1. Định nghĩa

Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân hai lớp

Giả sử có một vật thể hình trụ, phía trên giới hạn bởi mặt cong được biểu diễn bằng phương trình z = f(x,y), mặt xung quanh là mặt của hình trụ có đường sinh song song với trục Oz, còn phía dưới giới hạn bởi hình phẳng đóng D nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy và được gọi là đáy của của hình trụ. Yêu cầu tính thể tích V của vật thể hình trụ này với giả thiết f(x,y) là hàm không âm, xác định và liên tục trên miền đóng D.

<u>Bài giải.</u> Chia D thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau (giao của 2 hai miền nhỏ bất kỳ bằng rỗng). Gọi diện tích của n miền nhỏ đó là ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n. Lấy mỗi miền nhỏ là đáy của hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với trục Oz và phía trên giới hạn bởi mặt cong được biểu diễn bằng phương trình f(x,y).



Như vậy, vật thể hình trụ đã được chia thành n hình trụ nhỏ. Trong mỗi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) chúng ta lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i,y_i)$. Chúng ta có tích $z_i.\Delta S_i = f(x_i,y_i).\Delta S_i$ là thể tích hình trụ có diện tích đáy ΔS_i và chiều cao $z_i = f(x_i,y_i)$. Nếu miền nhỏ ΔS_i khá bé, thì do hàm f(x,y) liên tục trên D nên giá trị của z = f(x,y) xấp xỉ bằng giá trị của $z_i = f(x_i,y_i)$ nên có thể coi thể tích của hình trụ nhỏ thứ i là $\Delta V_i \approx f(x_i,y_i)\Delta S_i$. Như vậy, nếu mọi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) đều khá bé thì có thể coi thể tích của hình trụ là $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$ sẽ có độ chính xác càng cao (tức là giá trị của biểu thức này càng gần thể tích thực V của hình trụ đang xét) nếu n càng lớn và tất cả các ΔS_i ($1 \le i \le n$) càng bé. Do đó, thể tích V của hình trụ đang xét bằng giới hạn (nếu có) của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ cùng với đường kính của mỗi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) bé dần về 0, tức là $V = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ với $d = \max_{1\le i\le n} d_i$, trong đó d_i là đường kính của mỗi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) (đường kính của một miền được định nghĩa là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên biên của miền ấy).

Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho hàm số f(x,y) xác định trên miền đóng D. Chia miền D một cách tùy ý thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau. Gọi diện tích của n miền nhỏ đó là ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n. Trên mỗi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) chúng ta lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i,y_i)$ và lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. I_n được gọi là tổng tích phân của hàm f(x,y) trên miền D nếu khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max_{1\le i\le n} d_i \to 0$ (trong đó d_i là đường kính của miền nhỏ ΔS_i) mà I_n dần đến một giá trị hữu hạn không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm $M_i(x_i,y_i)$ trên mỗi miền nhỏ ΔS_i, thì giá trị hữu hạn này được gọi là tích phân hai lớp của hàm số f(x,y) trên miền D và ký hiệu là $\iint_D f(x, y)dS$, khi đó D, f(x,y), dS, x và y lần lượt được gọi là miền tính tích phân, hàm số dưới dấu tích phân, vi phân diện tích, các biến tính tích phân.

Như vậy, chúng ta có $\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ 0\le i\le n}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, khi đó chúng ta nói rằng hàm số f(x,y) khả tích trên miền đóng D.

Định lý. Nếu hàm số f(x,y) xác định và liên tục trong miền đóng D thì nó khả tích trên đó.

Vì tích phân hai lớp nếu tồn tại thì không phụ thuộc vào cách chia miền D, nên chúng ta có thể chia D bởi lưới các đường thẳng song song với các trục tọa độ Ox, Oy. Khi đó, mỗi miền nhỏ ΔS_i ($1 \le i \le n$) nói chung là hình chữ nhật, do đó dS = dxdy $\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Nhận xét. Bản chất của phép tính tích phân là tính giới hạn, tuy nhiên việc tính tích phân bằng cách dùng định nghĩa không phải đơn giản, do đó các nhà toán học đã dùng định nghĩa để đưa ra các công thức tích phân cơ bản để việc tính tích phân đơn giản hơn.

Ý nghĩa hình học của tích phân hai lớp

Nếu hàm số z = f(x,y) > 0, xác định và liên tục với $\forall(x,y)\in D$ thì giá trị của tích phân hai lớp $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ là thể tích của hình trụ có đáy là miền D thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy, mặt xung quanh là mặt của hình trụ có đường sinh song song với trục Oz, còn mặt trên của hình trụ là mặt cong được biểu diễn bằng phương trình z = f(x,y).

Đặc biệt, nếu f(x,y) = 1 với $\forall(x,y)\in D$ thì giá trị của tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_D dxdy$ là diện tích S của miền D.

Các tính chất của tích phân hai lớp

(1) $\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (k là hằng số)

(3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ với $\begin{cases} D_1 \cap D_2 = \varnothing \\ D_1 \cup D_2 = D \end{cases}$

(4) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$ nếu f(x,y) ≤ g(x,y) với $\forall(x,y)\in D$

(5) $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

(6) $mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$ với S là diện tích của D, $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ và $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$

(7) Nếu f(x,y) xác định và liên tục trên D, S là diện tích của D thì $\exists(\overline{x}, \overline{y}) \in D$ sao cho $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = Sf(\overline{x}, \overline{y})$

2.1.1.2. Tích phân lặp

Như đã Nhận xét ở trên, việc tính một tích phân hai lớp trực tiếp từ định nghĩa là điều rất khó, tuy nhiên, các nhà toán học đã biểu diễn một tích phân hai lớp dưới dạng một tích phân lặp, để sau đó có thể tính được dễ dàng bằng cách tính 2 tích phân một lớp quen thuộc.

Giả sử hàm số f(x,y) khả tích trên hình chữ nhật $D = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\} \equiv [a,b]\times[c,d]$.

Chúng ta sử dụng ký hiệu $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ để hàm ý rằng x coi như hằng số và hàm số f(x,y) được lấy tích phân theo y từ y = c đến y = d. Như vậy, sau việc tính tích phân xác định một lớp đối với y thì $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ trở thành một biểu thức của x, vì a ≤ x ≤ b nên biểu thức của x là một hàm số của x và chúng ta có thể ký hiệu $g(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ với a ≤ x ≤ b.

Tiếp theo, chúng ta tính tích phân hàm số g(x) theo x từ x = a đến x = b thì $\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$. Tích phân bên phải của đẳng thức trên được gọi là *tích phân lặp*. Để đơn giản, cặp dấu [ ] không viết và dx được viết giữa hai dấu tích phân một lớp, tức là $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$. Đẳng thức này có nghĩa là: đầu tiên chúng ta tính tích phân biểu thức f(x,y) theo y từ y = c đến y = d khi coi x là hằng số, sau đó tính tích phân biểu thức vừa tính được theo x từ x = a đến x = b.

Tương tự, tích phân lặp $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$ có nghĩa là: đầu tiên chúng ta tính tích phân biểu thức f(x,y) theo x từ x = a đến x = b khi coi y là hằng số, sau đó tính tích phân biểu thức vừa tính được theo y từ y = c đến y = d.

Ví dụ **2.1.** Tính các tích phân lặp $I=\int_0^3 dx\int_1^2 f(x,y)dy$, $J=\int_1^2 dy\int_0^3 f(x,y)dx$ với $f(x,y) = x^2y$

Bài giải.

+ $I=\int_0^3 dx\int_1^2 x^2ydy=\int_0^3\left(x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=1}^{y=2}\right)dx=\int_0^3\frac{3}{2}x^2dx=\frac{3}{2}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=3}\right)=\frac{3}{2}.\frac{27}{3}=\frac{27}{2}$

+ $J=\int_1^2 dy\int_0^3 x^2ydx=\int_1^2\left(y\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=3}\right)dy=\int_1^2\frac{27}{3}ydy=\frac{27}{3}\left(\left.\frac{y^2y}{2}\right|_{y=1}^{y=2}\right)=\frac{27}{3}.\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$

Nhận xét: $I=\frac{27}{2}=J$ từ ví dụ trên và nếu thực hiện nhiều ví dụ khác có kết quả tương tự, vậy liệu $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ có luôn đúng với cùng f(x,y) không?

Định lý Fubini. Nếu hàm số f(x,y) xác định và liên tục trên hình chữ nhật D = [a,b]×[c,d] thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Hệ quả. Nếu f(x,y) = g(x)h(y) thì $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D g(x)h(y)dxdy=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$

Ví dụ **2.2.** Tính tích phân $I=\iint_D f(x,y)dxdy$ với $\begin{cases}f(x,y)=y\sin(xy)\\ D=[1,2]\times[0,\pi]\end{cases}$

Bài giải. Hàm số $f(x,y)=y\sin(xy)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nên liên tục trên $D\subset\mathbf{R}^2$, nên theo Định lý Fubini thì $I=\iint_D y\sin(xy)dxdy=\int_1^2 dx\int_0^\pi y\sin(xy)dy=\int_0^\pi dy\int_1^2 y\sin(xy)dx$.

- Chúng ta tính I theo y trước

$$\int_0^\pi y\sin(xy)dy=-\left.\frac{y\cos(xy)}{x}\right|_{y=0}^{y=\pi}+\frac{1}{x}\int_0^\pi\cos(xy)dy=-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}+\left.\frac{\sin(xy)}{x^2}\right|_{y=0}^{y=\pi}=-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow I=\int_1^2 dx\int_0^\pi y\sin(xy)dy=\int_1^2\left[-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right]dx=-\left.\frac{\sin(\pi x)}{x}\right|_{x=1}^{x=2}=-\frac{\sin 2\pi}{2}+\sin\pi=0.$$

- Bây giờ, chúng ta tính I theo x trước

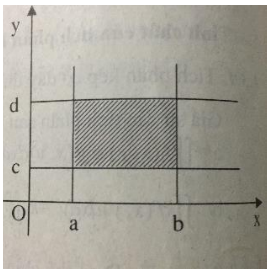
$$\int_1^2 y\sin(xy)dx = \int_1^2 \sin(xy)d(xy) = -\cos(xy)\Big|_{x=1}^{x=2} = -\cos 2y + \cos y$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} dy \int_1^2 y\sin(xy)dx = \int_0^{\pi}[-\cos 2y + \cos y]dy = \left(-\frac{\sin 2y}{2} + \sin y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\pi} = -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin 0 = 0.$$

Nhận xét. Ở Ví dụ 2.1. tính tích phân theo biến x hoặc biến y trước đều dễ như nhau, nhưng ở Ví dụ 2.2. việc tính tích phân theo biến x trước dễ hơn nhiều so với việc tính tích phân theo biến y trước. Do đó, khi tính tích phân hai lớp, chúng ta nên lựa chọn thứ tự tính tích phân sao cho quá trình tính tích phân theo mỗi lớp đơn giản hơn.

2.1.1.3. Cách tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ Descartes

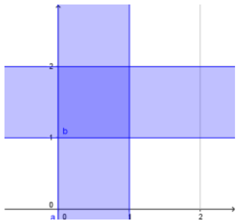
- Miền tính tích phân là hình chữ nhật $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ c \le y \le d\} = [a,b]\times[c,d]$



$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ (khi tính $\int_a^b f(x,y)dx$ thì coi y là hằng số, khi tính $\int_c^d f(x,y)dy$ thì coi x là hằng số).

Ví dụ **2.3.** Tính tích phân $I = \iint_D xydxdy$ với $D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$

Bài giải. Đồ thị của miền D là



Chúng ta có thể tính I bằng 3 cách:

Cách 1. $I = \iint_D xydxdy = \int_0^1\left(\int_1^2 xydy\right)dx = \int_0^1 dx\left(\int_1^2 xydy\right) = \int_0^1\left(\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=1}^{y=2}\right)dx = \int_0^1 \frac{3x}{2}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 xdx =$

$\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$

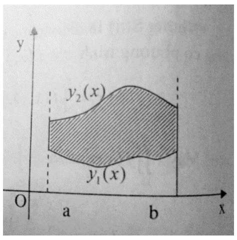
Cách 2. $I = \iint_D xydxdy = \int_1^2\left(\int_0^1 xydx\right)dy = \int_1^2 dy\left(\int_0^1 xydx\right) = \int_1^2\left(\frac{x^2y}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right)dy = \int_1^2 \frac{y}{2}dy = \frac{1}{2}\int_1^2 ydy =$

$= \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

Cách 3. $I = \iint_D xydxdy = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_1^2 ydy\right) = \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=1}^{y=2}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

- Miền tính tích phân là không phải là hình chữ nhật

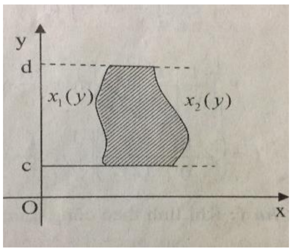
+ Trường hợp 1. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy đồ thị của miền D có dạng



Chiếu miền D lên trục Ox thì D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|a ≤ x ≤ b, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$}

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

+ Trường hợp 2. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy đồ thị của miền D có dạng

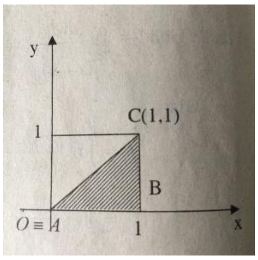


Chiếu miền D lên trục Oy thì D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|c ≤ y ≤ d, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$}

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

Ví dụ **2.4.** Tính tích phân $I = \iint_D x^2 ydxdy$ trên miền D xác định bởi tam giác ABC với A(0,0), B(1,0), C(1,1).

Bài giải. Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Chúng ta có thể tính I bằng 2 cách:

Cách 1. Chiếu miền D lên trục Ox thì $D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

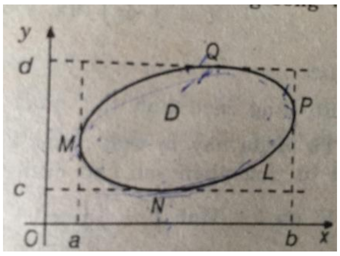
$$\Rightarrow I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 ydy = \int_0^1 \left(x^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2}\left. \frac{x^5}{5} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

Cách 2. Chiếu miền D lên trục Oy thì $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 x^2 ydx = \int_0^1 \left(y \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x=y}^{x=1} \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (y - y^4)dy = \frac{1}{3}\left. \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \right|_{y=0}^{x=1} =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3}\frac{5-2}{10} = \frac{1}{3}\frac{3}{10} = \frac{1}{10}.$$

+ Trường hợp 3. D là miền đóng, nội tiếp trong hình chữ nhật {x = a, x = b, y = c, y = d}, trong đó các điểm tiếp xúc M, Q, P, N có thể là một đoạn thẳng.



- Nếu cung MNP được biểu diễn bằng phương trình $y = y_1(x)$, còn cung MQP được biểu diễn bằng phương trình $y = y_2(x)$ và chiếu miền D lên trục Ox thì $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

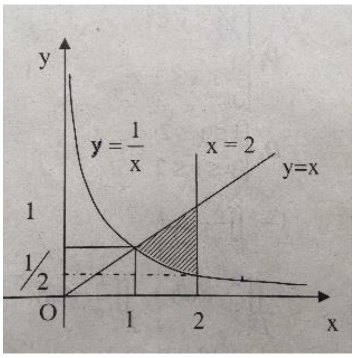
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

- Nếu cung QMN được biểu diễn bằng phương trình $x = x_1(y)$, còn cung QPN được biểu diễn bằng phương trình $x = x_2(y)$ và chiếu miền D lên trục Oy thì $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

Ví dụ **2.5.** Tính tích phân $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$ trên miền D giới hạn bởi các đường thẳng x = 2, y = x và đường hypecbol $y = 1/x$.

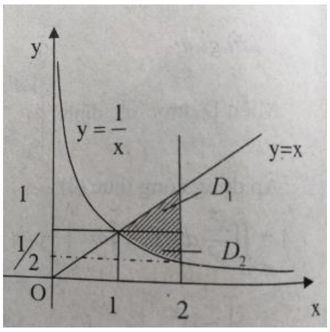
Bài giải. Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Chúng ta có thể tính I bằng hai cách:

Cách 1. Chiếu miền D lên trục Ox thì $D = \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ (1/x) \le y \le x \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 \left(-x^2 \left.\frac{1}{y}\right|_{y=1/x}^{y=x} \right) dx = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\right|_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}.$$



Cách 2. Chiếu miền D lên trục Oy thì $D = D_1 \cup D_2$ với $D_1 = \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 2 \end{cases}$ và $D_2 = \begin{cases} (1/2) \le y \le 1 \\ (1/y) \le x \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2}dxdy + \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}dx + \int_{1/2}^1 dy \int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2}dx =$$

$$\int_1^2\left(\frac{1}{y^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=y}^{x=2}\right)dy+\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{y^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1/y}^{x=2}\right)dy=\frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{8}{y^2}-y\right)dy+\frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{8}{y^2}-\frac{1}{y^5}\right)dy=$$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{y}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}+\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{y}+\frac{1}{4y^4}\right)\Big|_{y=1/2}^{y=1}=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}.$$

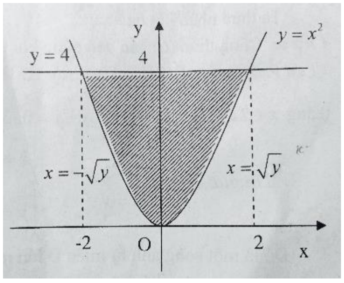
Nhận xét. (1) Với miền D ở Ví dụ 2.5. nếu sử dụng công thức $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ thì tính toán cồng kềnh hơn sử dụng công thức $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

(2) Nếu biết các cận của tích phân hai lớp, chúng ta có thể suy ra miền tính tích phân D, do đó đổi được thứ tự tính tích phân.

Ví dụ **2.6.** Đổi thứ tự tính tích phân của tích phân $I=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy$

Bài giải.

Từ các cận của tích phân $I=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy \Rightarrow D=\begin{cases}-2\le x\le 2\\ x^2\le y\le 4\end{cases}$ nên đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



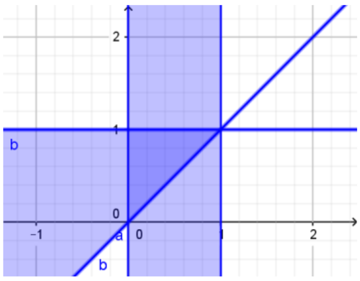
Đường thẳng y = 4 giao với đường parabol y = x^2 tại 2 điểm (–2,4) và (2,4).

Nếu chiếu miền D lên trục tung Oy thì miền $D=\begin{cases}0\le y\le 4\\ -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\end{cases}$, khi đó $I=\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

Ví dụ **2.7.** Tính tích phân $\iint\limits_D\frac{xdxdy}{\sqrt{1+y^3}}$ trên miền đóng D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|0 ≤ x ≤ 1, x ≤ y ≤ 1}

Bài giải.

Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Nếu chiếu miền D lên trục Ox thì $D=\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^1 dx\int_x^1\frac{xdy}{\sqrt{1+y^3}}=\int_0^1 xdx\int_x^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}$

Nếu chiếu miền D lên trục Oy thì $D=\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x\le y\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^1 dy\int_0^y\frac{xdx}{\sqrt{1+y^3}}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}\int_0^y xdx$

Chúng ta nhận thấy, tính $I=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}\int_0^y xdx$ đơn giản hơn tính $I=\int_0^1 xdx\int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}$.

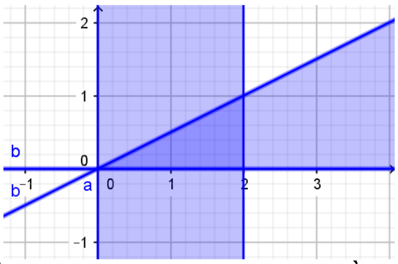
$$I=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}\int_0^y xdx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d(y^3)}{\sqrt{1+y^3}}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{1}{2}}d(1+y^3)=\frac{1}{6}\frac{1}{(-1/2)+1}(1+y^3)^{(-1/2)+1}\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$

Ví dụ **2.8.** Tính tích phân $I=\int_0^1 dy\int_{2y}^2 e^{x^2}dx$

Bài giải. Các nhà toán học đã chứng minh rằng, biểu thức dưới dấu tích phân trong tích phân $\int e^{x^2}dx$ không có nguyên hàm sơ cấp, tức là nguyên hàm của tích phân $\int e^{x^2}dx$ không thể biểu diễn qua các hàm số sơ cấp được, mặc dù về mặt lý thuyết thì tích phân $\int e^{x^2}dx$ là khả tích.

Từ các cận của tích phân $I=\int_0^1 dy\int_{2y}^2 e^{x^2}dx \Rightarrow D=\begin{cases}0\le y\le 1\\ 2y\le x\le 2\end{cases}$ nên đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Bây giờ, chúng ta chiếu miền D lên trục Ox thì miền D được mô tả bằng cách khác là

$$D=\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le x/2\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^2 dx\int_0^{x/2} e^{x^2}dy=\int_0^2\left(e^{x^2}y\Big|_{y=0}^{y=x/2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{e^4-1}{4}.$$

Nhận xét. Nếu tính tích phân $I=\int_0^1 dy\int_{2y}^2 e^{x^2}dx$ theo thứ tự đã cho thì không tính được, nhưng nếu đổi thứ tự tính tích phân thành $I=\int_0^2 dx\int_0^{x/2} e^{x^2}dy$ thì tính được.

2.1.2. Phép đổi biến trong tích phân hai lớp

2.1.2.1. Công thức đổi biến trong tích phân hai lớp

Xét tích phân hai lớp $\iint_D f(x,y)dxdy$, trong đó hàm số f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng D.

Giả sử chúng ta thực hiện phép đổi biến $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(1) Phép đổi biến $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ là ánh xạ 1-1 từ miền D lên miền D' (miền D' là ảnh của miền D qua phép đổi biến này);

(2) Các hàm x(u,v), y(u,v) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 $x'_u(u,v), x'_v(u,v), y'_u(u,v), y'_v(u,v)$ liên tục trên miền đóng D' = {(u,v)∈$\mathbf{R}^2$} nào đấy;

(3) Định thức Jacobi $J=\det\begin{pmatrix}x'_u(u,v) & x'_v(u,v)\\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v)\end{pmatrix}\ne 0$ trong miền D';

Khi đó $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]|J|dudv$.

Lưu ý.

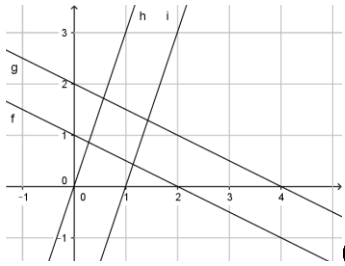
(1) Nếu phép đổi biến là ánh xạ 1-1 thì một điểm trong của miền D tương ứng với một điểm trong của miền D' và ngược lại, một điểm trên biên của miền D tương ứng với một điểm trên biên của miền D' và ngược lại.

(2) Nhà toán học Carl Gustav Jacob Jacobi (người Đức) đã chứng minh: Giá trị của định thức Jacobi của phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ là nghịch đảo giá trị của định thức Jacobi của phép đổi biến ngược $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ của phép biến đổi trên, tức là $J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det\begin{pmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{pmatrix}}$ và ngược lại $\dfrac{1}{J} = \det\begin{pmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{pmatrix}$.

Ví dụ **2.9.** Tính tích phân $I = \iint\limits_D (3x^2 + 4xy)dxdy$ trên miền D là hình bình hành giới hạn bởi các đường thẳng {x + 2y = 2, x + 2y = 4, 3x – y = 0, 3x – y = 3}.

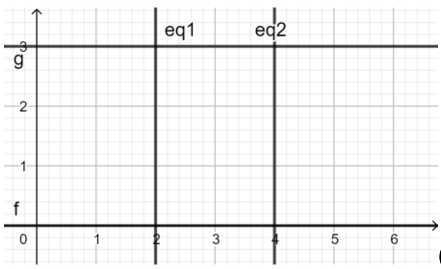
Bài giải.

Đồ thị của miền $D = \begin{cases} 2 \le x + 2y \le 4 \\ 0 \le 3x - y \le 3 \end{cases}$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



(miền D)

Nếu tính tích phân này trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì việc chia miền D thành các miền nhỏ bởi các đường song song với các trục tọa độ là phức tạp (phải tìm tọa độ điểm giao của các đường thẳng chứa các cạnh của hình bình hành, sau đó chiếu miền D lên trục Ox hoặc trục Oy), dẫn đến việc tính toán cồng kềnh, do đó chúng ta thực hiện đổi biến sao cho miền D là hình bình hành trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy chuyển thành miền D' là hình chữ nhật trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Ouv bằng phép đổi biến $\begin{cases} u = x + 2y \equiv u(x,y) \\ v = 3x - y \equiv v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u/7 + 2v/7 \equiv x(u,v) \\ y = 3u/7 - v/7 \equiv y(u,v) \end{cases} \Rightarrow D' = \begin{cases} 2 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le 3 \end{cases}$ vì $D = \begin{cases} 2 \le x + 2y \le 4 \\ 0 \le 3x - y \le 3 \end{cases}$.



(miền D')

Để tìm định thức Jacobi $J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{pmatrix}$ từ phép đổi biến $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 3x - y \end{cases}$ chúng ta có thể thực hiện bằng 2 cách sau đây:

- *Cách 1.* $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 3x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u/7 + 2v/7 \\ y = 3u/7 - v/7 \end{cases} \Rightarrow J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{Vmatrix} = -\dfrac{1}{7}$

- *Cách 2.* $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 3x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{J} = \det\begin{pmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -7 \Rightarrow J = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$

$$\Rightarrow I = \iint_D (3x^2 + 4xy)dxdy = \iint_{D'} [3x^2(u,v) + 4x(u,v)y(u,v)]|J|dudv =$$

$$\int_2^4 du \int_0^3 [3(u/7 + 2v/7)^2 + 4(u/7 + 2v/7)(3u/7 - v/7)]|-1/7|dv =$$

$$\frac{1}{7^3}\int_2^4 du \int_0^3 (15u^2 + 32uv + 4v^2)dv = \frac{1}{7^3}\int_2^4 \left(15u^2v + 32u\frac{v^2}{2} + 4\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=3} du =$$

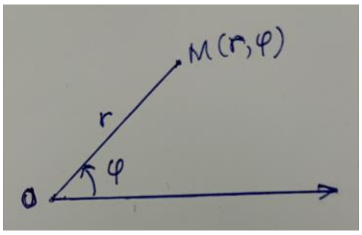
$$\frac{1}{7^3}\int_2^4 \left(15u^2v + 16uv^2 + \frac{4v^3}{3}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=3} du = \frac{1}{343}\int_2^4 (45u^2 + 144u + 36)du =$$

$$\frac{1}{343}\left(45\frac{u^3}{3} + 144\frac{u^2}{2} + 36u\right)\Bigg|_{u=2}^{u=4} = \frac{1}{343}(15u^3 + 72u^2 + 36u)\Big|_{u=2}^{u=4} = \frac{1776}{343}.$$

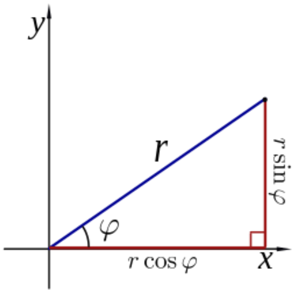
2.1.2.2. Tính tích phân hai lớp trong tọa độ cực

Tọa độ cực

Hệ tọa độ cực là một hệ tọa độ hai chiều, trong đó mỗi điểm M bất kỳ trên một mặt phẳng được biểu diễn duy nhất bằng hai thành phần: Khoảng cách từ điểm đó tới một điểm gốc O (được gọi là *gốc cực*) gọi là bán kính r ($0 \le r < +\infty$, r = 0 khi điểm M trùng với điểm gốc O) và góc φ ($0 \le \varphi \le 2\pi$) tạo bởi hướng gốc cho trước (được gọi là *trục cực*) với đường thẳng chứa OM (gọi là đường thẳng OM) theo chiều dương (trục cực quay quanh gốc cực theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, cho đến khi trùng với đường thẳng OM), trục cực thường được vẽ theo chiều ngang và hướng về bên phải.



Hình sau đây thể hiện mối quan hệ giữa tọa độ Descartes (x,y) với tọa độ cực (r,φ) của cùng một điểm trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ trong trường hợp gốc của hai hệ tọa độ này trùng nhau và trục hoành Ox của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy trùng với trục cực của hệ tọa độ cực cả phương và hướng.



Khi đó, phép biến đổi từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) là $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{cases}$, vì các hàm số lượng giác cosφ, sinφ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên với $\begin{cases} r > 0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ thì phép biến đổi này xác định một ánh xạ 1-1 giữa tọa độ Descarter (x,y) và tọa độ cực (r,φ) của cùng một điểm trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$, riêng điểm gốc tọa độ O(0,0) tương ứng với r = 0 và φ tùy ý. Còn phép biến đổi từ tọa độ cực (r,φ) sang tọa độ Descartes (x,y) là $\begin{cases} r = r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \varphi(x,y) = \arctan(y/x) \end{cases}$ cũng xác định một ánh xạ 1-1 giữa tọa độ cực (r,φ) và tọa độ Descartes (x,y) của cùng một điểm trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$.

Nhận xét. Hệ tọa độ cực có ích trong những trường hợp mà trong đó, quan hệ giữa hai điểm được mô tả dưới dạng khoảng cách và góc. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, quan hệ này được biểu diễn dưới dạng công thức lượng giác.

Nói chung, có thể đơn giản hơn khi tính tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$, nếu hàm số mô tả biên của miền D có biểu thức x^2+y^2 hoặc biểu thức px^2+qy^2 (trong các tham số p > 0, q > 0 phải có ít nhất một tham số có giá trị khác 1, khi p = q = 1 thì $px^2+qy^2=x^2+y^2$) thì nên đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) hoặc tọa độ cực (r,φ) mở rộng.

Đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ)

Nếu hàm số mô tả biên của miền D có biểu thức x^2+y^2 thì đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$, trong đó (x_0,y_0) là tọa độ (trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy) của điểm gốc cực của hệ tọa độ cực.

Phép biến đổi ngược của $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$ là $\begin{cases} r = r(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ \varphi = \varphi(x,y) = \arctan[(y-y_0)/(x-x_0)] \end{cases}$.

Nếu 0 ≤ r < +∞ và 0 ≤ φ ≤ 2π thì phép đổi biến $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$ xác định một ánh xạ 1-1 giữa tọa độ Descarter (x,y) và tọa độ cực (r,φ), riêng điểm gốc cực có tọa độ (x_0,y_0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, tương ứng với r = 0 và φ tùy ý.

Chúng ta có

$$J = \det\begin{pmatrix} x'_r(r,\varphi) & x'_\varphi(r,\varphi) \\ y'_r(r,\varphi) & y'_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(x_0+r\cos\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial(x_0+r\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial(y_0+r\sin\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial(y_0+r\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r > 0$$

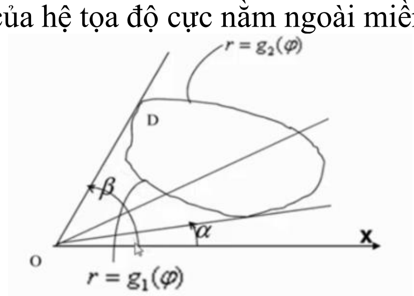
trừ điểm gốc cực có tọa độ (x_0,y_0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy. Đối với phép đổi biến này, chúng ta không cần tính J nữa, mà sử dụng |J| = r > 0 luôn.

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \iint_{D'} rf(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)drd\varphi$, miền D' trong hệ tọa độ cực (r,φ) là ảnh của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Để đơn giản, nhưng không mất tính tổng quát, các trình bày sau đây khi đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ), chúng ta chọn $(x_0,y_0) = (0,0)$, tức là điểm gốc cực của hệ tọa độ cực trùng với điểm gốc của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

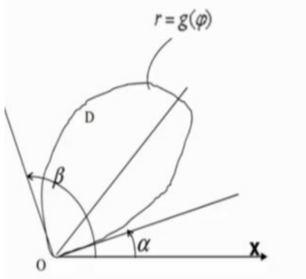
Có 3 trường hợp xảy ra, khi đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ).

Trường hợp 1. Điểm gốc cực của hệ tọa độ cực nằm ngoài miền D



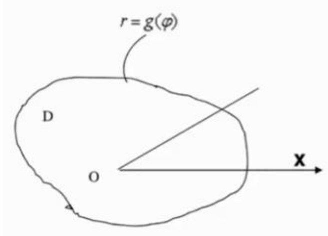
$$D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ g_1(\varphi) \le r \le g_2(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr.$$

Trường hợp 2. Điểm gốc cực của hệ tọa độ cực nằm trên biên của miền D



$$D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr\,.$$

Trường hợp 3. Điểm gốc cực của hệ tọa độ cực là điểm trong của miền D

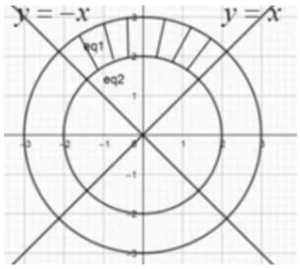


$$D' = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr\,.$$

Ví dụ **2.10.** Tính tích phân $I = \iint_D ydxdy$ trên miền $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 4 \le x^2 + y^2 \le 9, -y \le x \le y\}$

Bài giải.

Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) theo công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc cực của hệ tọa độ cực nằm ngoài miền D (Trường hợp 1), khi đó $D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ g_1(\varphi) \le r \le g_2(\varphi) \end{cases}$.

Để xác định các góc α, β (tạo bởi trục Ox với các đường thẳng y = x, y = –x tương ứng, với chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ) và các hàm $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$ chúng ta thực hiện như sau

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $-y \le x \le y \Rightarrow -r\sin\varphi \le r\cos\varphi \le r\sin\varphi \Leftrightarrow -1 \le \cot\varphi \le 1 \Leftrightarrow$ $\text{arccot}(-1) \ge \varphi \ge \text{arccot}(1) \Leftrightarrow \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4 \Rightarrow \alpha = \pi/4$ và $\beta = 3\pi/4$, hoặc bằng cách khác: đường thẳng y = x có hệ số góc $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = \pi/4$, còn đường thẳng y = –x có hệ số góc $\tan\beta = -1 \Rightarrow \beta = \arctan(-1) = 3\pi/4 \Rightarrow \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4$. Căn cứ vào đồ thị của miền D, chúng ta cũng có thể suy ra được $\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4$.

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $4 \le x^2 + y^2 \le 9 \Rightarrow 2^2 \le (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le 3^2 \Leftrightarrow$ $2^2 \le r^2 \le 3^2 \Rightarrow 2 \le r \le 3$ (vì $r \ge 0$) $\Rightarrow g_1(\varphi) = 2$ và $g_2(\varphi) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi/4 \\ \beta = 3\pi/4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} g_1(\varphi) = 2 \\ g_2(\varphi) = 3 \end{cases} \Rightarrow D' = \begin{cases} \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4 \\ 2 \le r \le 3 \end{cases}.$$

Chúng ta có |J| = r và vì f(x,y) = y $\Rightarrow$ f(rcosφ,rsinφ) = rsinφ $\Rightarrow I = \iint_D y dxdy = \iint_{D'} (r\sin\varphi)|J| drd\varphi =$

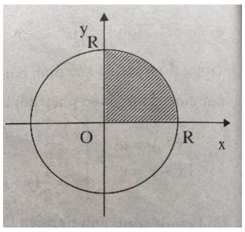
$$\iint_{D'} (r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^2 \sin\varphi dr = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi d\varphi \int_2^3 r^2 dr = \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_2^3 r^2 dr\right) =$$

$$\left(-\cos\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=3\pi/4}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=2}^{r=3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)\frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{3}.(27-8) = \frac{19\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ **2.11.** Tính tích phân $I = \iint_D y dxdy$ trên miền D là một phần tư đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính R nằm trong góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Bài giải.

Đường tròn có tâm tại gốc tọa độ O(0,0) và bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$, do đó một phần tư đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính R nằm trong góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là miền $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$. Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) theo công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc cực của hệ tọa độ cực nằm trên biên của miền D (Trường hợp 2), đồng thời trùng với điểm gốc của hệ tọa độ Descartes, khi đó $D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases}$.

Để xác định các góc α, β (tạo bởi trục Ox với các đường thẳng y = 0, x = 0 tương ứng, với chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ) và hàm g(φ) chúng ta thực hiện như sau

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\cos\varphi \ge 0 \\ r\sin\varphi \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le \varphi \le \pi/2$,

$\Rightarrow \alpha = 0$ và $\beta = \pi/2$. Căn cứ vào đồ thị của miền D, chúng ta cũng có thể suy ra được $0 \le \varphi \le \pi/2$.

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le R^2 \Rightarrow (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le R^2 \Leftrightarrow r^2 \le R^2 \Rightarrow 0 \le r \le R$ (vì $r \ge 0$) $\Rightarrow$ g(φ) = R.

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \pi/2 \end{cases}$ và $g(\varphi) = R \Rightarrow D' = \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le R \end{cases}$.

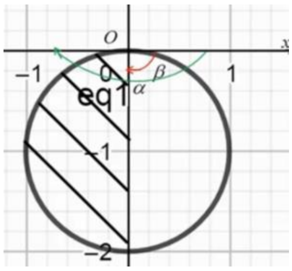
Chúng ta có |J| = r và vì f(x,y) = y nên f(rcosφ,rsinφ) = rsinφ $\Rightarrow I = \iint_D y dxdy = \iint_{D'} (r\sin\varphi)|J| drd\varphi =$

$$\iint_{D'} (r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} r^2 \sin\varphi dr = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^R r^2 dr\right) =$$

$$\left(-\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = (-0+1)\frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$

Ví dụ **2.12.** Tính tích phân $I = \iint_D (2x + 3y) dxdy$ trên miền $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le -2y, x \le 0, y \le 0\}$

Bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le -2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 \le 1 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 \le 1^2$ là hình tròn có tâm tại điểm (0,–1) và bán kính R = 1, do đó đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Cách 1. Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) theo công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc cực của hệ tọa độ cực nằm trên biên của miền D (Trường hợp 2), đồng thời trùng với điểm gốc của hệ tọa độ Descartes, khi đó $D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases}$.

Để xác định các góc α, β (tạo bởi trục Ox với các đường thẳng x = 0, y = 0 tương ứng, với chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ) và hàm g(φ) chúng ta thực hiện như sau

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\cos\varphi \le 0 \\ r\sin\varphi \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \le 0 \\ \sin\varphi \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\pi \le \varphi \le -\pi/2$, $\Rightarrow \alpha = -\pi$ và $\beta = -\pi/2$. Căn cứ vào đồ thị của miền D, chúng ta cũng có thể suy ra được $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$.

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le -2y \Rightarrow (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le -2r\sin\varphi \Leftrightarrow r^2 + 2r\sin\varphi \le 0 \Leftrightarrow r(r + 2\sin\varphi) \le 0 \Rightarrow 0 \le r \le -2\sin\varphi$ (vì $r \ge 0$) $\Rightarrow g(\varphi) = -2\sin\varphi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\pi \\ \beta = -\pi/2 \end{cases} \text{ và } g(\varphi) = -2\sin\varphi \Rightarrow D' = \begin{cases} -\pi \le \varphi \le -\pi/2 \\ 0 \le r \le -2\sin\varphi \end{cases}.$$

Chúng ta có $|J| = r$ và vì $f(x,y) = 2x + 3y$ nên $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(2\cos\varphi + 3\sin\varphi)$

$$\Rightarrow I = \iint_D (2x+3y)dxdy = \iint_{D'} r(2\cos\varphi + 3\sin\varphi)|J|drd\varphi = \iint_{D'} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)r^2 drd\varphi =$$

$$\int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)r^2 dr = \int_{-\pi}^{-\pi/2} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)d\varphi \int_0^{-2\sin\varphi} r^2 dr =$$

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_{r=0}^{r=-2\sin\varphi}\right)d\varphi = -\frac{8}{3}\int_{-\pi}^{-\pi/2} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)\sin^3\varphi d\varphi$$

Hạ bậc biểu thức lượng giác $(2\cos\varphi + 3\sin\varphi)\sin^3\varphi = \frac{9}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{3\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{3\cos 4\varphi}{8}$

$$\Rightarrow I = -\frac{8}{3}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \left(\frac{9}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{3\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{3\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi =$$

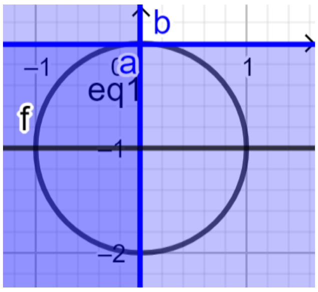
$$-3\int_{-\pi}^{-\pi/2} d\varphi - \frac{4}{3}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi + 4\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{2}{3}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 4\varphi d\varphi - \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos 4\varphi d\varphi =$$

$$-3\varphi\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{4}{3.2}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 2\varphi d(2\varphi) + 2\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos 2\varphi d(2\varphi) + \frac{2}{3.4}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin 4\varphi d(4\varphi) - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos 4\varphi d(4\varphi) =$$

$$-\frac{3\pi}{2} + \frac{2}{3}\cos 2\varphi\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + 2\sin 2\varphi\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{1}{6}\cos 4\varphi\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} =$$

$$-\frac{3\pi}{2} + \frac{2}{3}(-1-1) + 2(-0+0) - \frac{1}{6}(1-1) - \frac{1}{4}(-0+0) = -\frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

Cách 2. Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) theo công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = -1 + r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc cực của hệ tọa độ cực vẫn nằm trên biên của miền D (Trường hợp 2), nhưng ở điểm (0,–1) trong hệ tọa độ Descartes, khi đó $D' = \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases}$.



Để xác định các góc α, β (tạo bởi đường thẳng y = 1 với đường thẳng x = 0 tương ứng, với chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ) và hàm g(φ) chúng ta thực hiện như sau

- Thay x = rcosφ vào các bất đẳng thức x ≤ 0 ⇒ rcosφ ≤ 0 ⇔ cosφ ≤ 0 (vì r ≥ 0) $\Leftrightarrow \pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2 \Rightarrow \alpha = \pi/2$ và $\beta = 3\pi/2$. Căn cứ vào đồ thị của miền D, chúng ta cũng có thể suy ra được $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$.

- Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = -1 + r\sin\varphi \end{cases}$ vào bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le -2y \Rightarrow (r\cos\varphi)^2 + (-1 + r\sin\varphi)^2 \le -2.(-1 + r\sin\varphi) \Leftrightarrow r^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1) \le 0 \Rightarrow 0 \le r \le 1$ (vì $r + 1 \ge 0$) ⇒ g(φ) = 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi/2 \\ \beta = 3\pi/2 \end{cases} \text{ và } g(\varphi) = 1 \Rightarrow D' = \begin{cases} \pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}.$$

Chúng ta có |J| = r và f(rcosφ,–1 + rsinφ) = 2rcosφ + 3(–1 + rsinφ) = –3 + 2rcosφ + 3rsinφ

$$\Rightarrow I = \iint_D (2x+3y)dxdy = \iint_{D'} (-3 + 2r\cos\varphi + 3r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \iint_{D'} (-3 + 2r\cos\varphi + 3r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$\int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} (-3 + 2r\cos\varphi + 3r\sin\varphi)rdr = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^1 (-3r + 2r^2\cos\varphi + 3r^2\sin\varphi)dr =$$

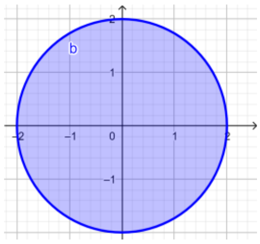
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(-3\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}\cos\varphi + 3\frac{r^3}{3}\sin\varphi \right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\cos\varphi + \sin\varphi \right) d\varphi =$$

$$\left(-\frac{3}{2}\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi - \cos\varphi \right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\frac{3}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{3}(-1-1) - (0-0) = -\frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

Ví dụ **2.13.** Tính tích phân $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$ trên miền D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|$x^2 + y^2 \le 4$}

Bài giải.

Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2^2$ có tâm tại gốc tọa độ O(0,0) và bán kính R = 2



Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) theo công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc cực của hệ tọa độ cực là điểm trong của miền D (Trường hợp 3), khi đó $D' = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le g(\varphi) \end{cases}$.

Để xác định hàm g(φ) chúng ta thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le 4 \Rightarrow (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow r^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 0 \le r \le 2$ (vì $r \ge 0$) $\Rightarrow g(\varphi) = 2 \Rightarrow g(\varphi) = 2 \Rightarrow D' = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$.

Chúng ta có $|J| = r$ và vì $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ nên $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sqrt{4 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{4 - r^2} \Rightarrow I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{4 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2}\,|J|\,drd\varphi =$

$$\iint\limits_{D'} \sqrt{4 - r^2}\,rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{4 - r^2}\,dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^2 r\sqrt{4 - r^2}\,dr\right) = \left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left(-\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\,d(4 - r^2)\right) =$$

$$2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^2 (4 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(4 - r^2) = -\pi \frac{1}{(1/2) + 1}(4 - r^2)^{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{r=0}^{r=2} = -\frac{2\pi}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r=2} = -\frac{2\pi}{3}(-8) = \frac{16\pi}{3}.$$

Đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) mở rộng

Nếu hàm số mô tả biên của miền D có biểu thức $px^2 + qy^2$ (trong các tham số $p > 0$, $q > 0$ phải có ít nhất một tham số có giá trị khác 1) thì đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = x_0 + \dfrac{r}{\sqrt{p}}\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = y_0 + \dfrac{r}{\sqrt{q}}\sin\varphi \end{cases}$, trong đó (x_0, y_0) là tọa độ (trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy) của điểm gốc cực của hệ tọa độ cực.

Lưu ý. Căn cứ toán học của phép đổi biến này là: Vì $px^2 + qy^2 = (\sqrt{p}x)^2 + (\sqrt{q}y)^2$ nên nếu đổi biến

$$\begin{cases} \sqrt{p}x = r\cos\varphi \\ \sqrt{q}y = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{r}{\sqrt{p}}\cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{q}}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{p}x)^2 + (\sqrt{q}y)^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2 \text{ thì } px^2 + qy^2 = r^2.$$

Khi đó $J = \det\begin{pmatrix} x'_r(r,\varphi) & x'_\varphi(r,\varphi) \\ y'_r(r,\varphi) & y'_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(x_0 + \dfrac{r}{\sqrt{p}}\cos\varphi\right) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(x_0 + \dfrac{r}{\sqrt{p}}\cos\varphi\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(y_0 + \dfrac{r}{\sqrt{q}}\sin\varphi\right) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(y_0 + \dfrac{r}{\sqrt{q}}\sin\varphi\right) \end{pmatrix} =$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{p}}\cos\varphi & -\dfrac{r}{\sqrt{p}}\sin\varphi \\ \dfrac{1}{\sqrt{q}}\sin\varphi & \dfrac{r}{\sqrt{q}}\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{pq}} > 0$$

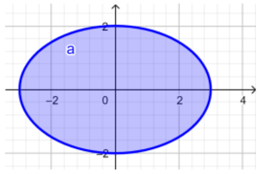
Phép biến đổi ngược của $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = x_0 + \dfrac{r}{\sqrt{p}}\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = y_0 + \dfrac{r}{\sqrt{q}}\sin\varphi \end{cases}$ là $\begin{cases} r = r(x,y) = \sqrt{p(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2} \\ \varphi = \varphi(x,y) = \arctan\dfrac{\sqrt{q}(y - y_0)}{\sqrt{p}(x - x_0)} \end{cases}$.

Đối với phép đổi biến này, chúng ta không cần tính J nữa, mà sử dụng $|J| = r/\sqrt{pq} > 0$ luôn.

Ví dụ **2.14.** Tính tích phân $I=\iint_D x^2dxdy$ trên miền $D=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$

Bài giải.

Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là hình ellips $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}\le 1$ có tâm tại gốc tọa độ O(0,0), hai bán trục có độ dài là 3 và 2



Chúng ta có $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}\le 1 \Leftrightarrow px^2+qy^2\le 1$ với $\begin{cases} p=1/3^2 \\ q=1/2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/\sqrt{p}=3 \\ 1/\sqrt{q}=2 \end{cases}$

Nếu đổi biến từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) mở rộng theo công thức $\begin{cases} x=3r\cos\varphi \\ y=2r\sin\varphi \end{cases}$ thì điểm gốc của hệ tọa độ cực là điểm trong của miền D, khi đó $D'=\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le g(\varphi) \end{cases}$.

Thay $\begin{cases} x=3r\cos\varphi \\ y=2r\sin\varphi \end{cases}$ vào bất đẳng thức $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}\le 1 \Rightarrow \frac{(3r\cos\varphi)^2}{3^2}+\frac{(2r\sin\varphi)^2}{2^2}\le 1 \Leftrightarrow$

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\le 1\Leftrightarrow r^2\le 1\Leftrightarrow |r|\le 1\Rightarrow 0\le r\le 1 \text{ (vì } r\ge 0) \Rightarrow g(\varphi)=1\Rightarrow D'=\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \end{cases}.$$

Vì |J| =|2.3r| = 6r và f(x,y) = x^2 $\Rightarrow f(3r\cos\varphi,2r\sin\varphi)=(3r\cos\varphi)^2=9r^2\cos^2\varphi$

$$\Rightarrow I=\iint_D x^2dxdy=\iint_{D'}9r^2\cos^2\varphi|J|drd\varphi=\iint_{D'}9r^2\cos^2\varphi 6rdrd\varphi=54\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^3dr\right)=$$

$$54\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1}\right)=27\left(\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)\frac{1}{4}=\frac{27}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=\frac{27}{4}2\pi=\frac{27\pi}{2}.$$

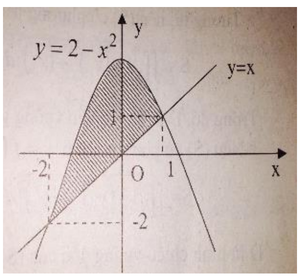
2.1.3. Ứng dụng hình học của tích phân hai lớp

2.1.3.1. Tính diện tích hình phẳng

$S=\iint_D dxdy$ là diện tích của miền phẳng D.

Ví dụ **2.15.** Tính diện tích S của miền phẳng giới hạn bởi các đường y = x và y = 2 – x^2.

Bài giải. Đồ thị của miền phẳng D là



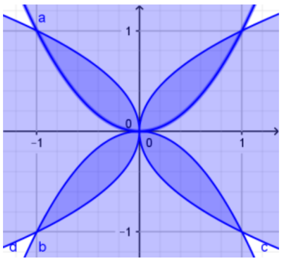
Đường thẳng y = x giao với đường parabol y = 2 – x^2 tại các điểm (1,1); (–2,–2) và khi chiếu miền D lên trục Ox chúng ta được $D=\begin{cases} -2\le x\le 1 \\ x\le y\le 2-x^2 \end{cases}$ nên diện tích S của miền D là

$$S=\iint_D dxdy=\int_{-2}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\int_{-2}^{1}\left(y\Big|_{y=x}^{y=2-x^2}\right)dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=-2}^{x=1}=\frac{9}{2}.$$

Lưu ý. Nếu miền phẳng có tính đối xứng thì chỉ cần tính diện tích một phần của nó rồi suy ra diện tích của cả miền phẳng.

Ví dụ **2.16.** Tính diện tích S của miền phẳng $D = \{y = \pm x^2, x = \pm y^2\}$.

Bài giải. Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Các đường parabol $y = \pm x^2$, $x = \pm y^2$ giao nhau tại các điểm (1,1), (–1,1), (–1,–1), (1,–1).

Ký hiệu D^+ là phần của miền D nằm trong góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy ($x \ge 0$ và $y \ge 0$). Do tính đối xứng miền D nên diện tích S của miền D bằng 4 lần diện tích của miền D^+, tức là $S = \iint_D dxdy = 4\iint_{D^+} dxdy$.

Chiếu miền D^+ lên trục Ox thì $D^+ = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow S = 4\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = 4\int_0^1 \left(y\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = 4\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = 4\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx = 4\left(\frac{x^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$4\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

2.1.3.2. Tính diện tích mặt cong

Nếu mặt cong z = f(x,y) có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng tọa độ Oxy là miền đóng D, còn hàm số f(x,y) và các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ liên tục trên miền D thì diện tích S của mặt cong z = f(x,y) được tính bằng công thức

$$S = \iint_D \sqrt{1 + [f'_x(x,y)]^2 + [f'_y(x,y)]^2}\, dxdy.$$

Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên tương tự, với mặt cong x = f(y,z) có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng tọa độ Oyz là miền đóng D, còn hàm số f(y,z) và các đạo hàm riêng $f'_y(y,z), f'_z(y,z)$ liên tục trên miền D thì diện tích của mặt cong x = f(y,z) được tính bằng công thức

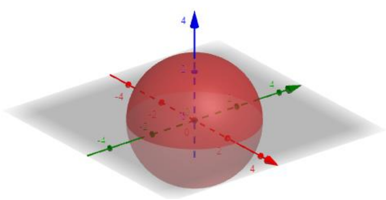
$$S = \iint_D \sqrt{1 + [f'_y(y,z)]^2 + [f'_z(y,z)]^2}\, dydz.$$

Cũng như vậy, với mặt cong y = f(x,z) có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng tọa độ Oxz là miền đóng D, còn hàm số f(x,z) và các đạo hàm riêng $f'_x(x,z), f'_z(x,z)$ liên tục trên miền D thì diện tích của mặt cong y = f(x,z) được tính bằng công thức

$$S = \iint_D \sqrt{1 + [f'_x(x,z)]^2 + [f'_z(x,z)]^2}\, dxdz.$$

Ví dụ **2.17.** Tính diện tích mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ bằng tích phân hai lớp

Bài giải. Đồ thị của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ bán kính R và tâm tại điểm O(0,0,0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Hình chiếu của hai nửa mặt cầu này lên mặt phẳng tọa độ Oxy là D = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le R^2\}$ (tương ứng với z = 0).

Chúng ta có $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \text{khi} \quad z \ge 0 \\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \text{khi} \quad z \le 0 \end{cases}$ tương ứng với nửa mặt cầu phía trên và nửa mặt cầu phía dưới mặt phẳng tọa độ Oxy.

Hai nửa mặt cầu đối xứng qua mặt phẳng tọa độ Oxy nên diện tích của mặt cầu là

$S = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + [f'_x(x,y)]^2 + [f'_y(x,y)]^2}\,dxdy$ với $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

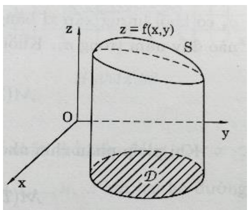
$$\Rightarrow S = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\,dxdy = 2R\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Để tính tích phân $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, chúng ta đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) có định thức Jacobi J = r, khi đó miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy trở thành miền $D' = \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ trong hệ tọa độ cực (r,φ).

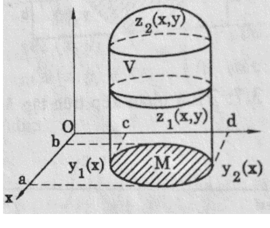
$$\Rightarrow S = 2R\iint\limits_{D'} \frac{|J|drd\varphi}{\sqrt{R^2 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2}} = 2R\iint\limits_{D'} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2R\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) =$$

$$2R\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left(-\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2)\right) = 2R.2\pi\left(-\frac{1}{2}\frac{(R^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = 4\pi R^2.$$

2.1.3.3. Tính thể tích vật thể



Trường hợp 1. Thể tích V của hình trụ có đường sinh song song với trục Oz, có mặt đáy là hình phẳng D trong mặt phẳng Oxy và mặt trên là mặt cong z = f(x,y) ≥ 0 liên tục trên miền D, được tính bằng công thức $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.



Trường hợp 2. Thể tích V của vật thể có đường sinh song song với trục Oz, còn mặt dưới và mặt trên của vật thể tương ứng là mặt cong z ≡ $f_1(x,y) \equiv z_1(x,y)$ và mặt cong z = $f_2(x,y) \equiv z_2(x,y)$, trong đó $f_1(x,y)$ và $f_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, với D là hình chiếu vuông góc của vật thể lên mặt phẳng Oxy, được tính bằng công thức $V = \iint\limits_D |f_2(x,y) - f_1(x,y)|dxdy \equiv \iint\limits_D |z_2(x,y) - z_1(x,y)|dxdy$.

Lưu ý.

(1) Nếu vật thể có tính đối xứng thì chỉ cần tính thể tích một phần của nó rồi suy ra thể tích của cả vật thể.

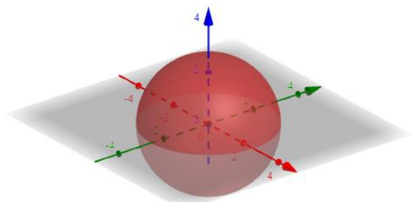
(2) Nếu vật thể có dạng không thuộc hai trường hợp cơ bản trên thì chia vật thể thành các phần nhỏ bằng các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ chứa trục Oz, khi đó các phần nhỏ của vật thể có dạng thuộc một trong trường hợp cơ bản trên, tính thể tích mỗi phần xong rồi cộng lại.

(3) Vì vai trò của x, y và z là như nhau nên nếu hình trụ có các đường sinh song song với trục Ox hoặc Oy thì đổi vai trò x với z hoặc y với z trong các công thức trên.

Ví dụ **2.18.** Tính thể tích hình cầu $x^2+y^2+z^2\le R^2$ bằng tích phân hai lớp.

Bài giải.

Đồ thị của hình cầu $x^2+y^2+z^2\le R^2$ bán kính R và tâm tại điểm O(0,0,0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Hình chiếu của hình cầu này lên mặt phẳng tọa độ Oxy là $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+y^2\le R^2\}$ (tương ứng với z = 0).

Chúng ta có $x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow z=f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2-y^2} & \text{khi } z\ge 0\\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2} & \text{khi } z\le 0\end{cases}$ tương ứng với nửa mặt cầu phía trên và nửa mặt cầu phía dưới mặt phẳng tọa độ Oxy.

Từ đồ thị của hình cầu chúng ta có $\begin{cases}z_2(x,y)\equiv f_2(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2} & \text{khi } z\ge 0\\ z_1(x,y)\equiv f_1(x,y)=-\sqrt{R^2-x^2-y^2} & \text{khi } z\le 0\end{cases}$

$$\Rightarrow V=\iint_D |f_2(x,y)-f_1(x,y)|dxdy=2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

Để tính tích phân $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$, chúng ta đổi biến $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) có định thức Jacobi J = r, khi đó miền D là hình tròn $x^2+y^2\le R^2$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy trở thành miền $D'=\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$ trong hệ tọa độ cực (r,φ).

$$\Rightarrow V=2\iint_{D'}\sqrt{R^2-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}|J|drd\varphi=2\iint_{D'} r\sqrt{R^2-r^2}drd\varphi=2\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr\right)=$$

$$2\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left[-\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2-r^2)\right]=2.2\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right]=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Hướng dẫn.

(1) Tính tích phân hai lớp $\iint_D f(x,y)dxdy$

Bước 1. Vẽ đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Bước 2. Căn cứ vào đồ thị của miền D và biểu thức của một/nhiều hàm số biểu diễn biên của miền D để quyết định tính trực tiếp tích phân này trong hệ tọa độ Descartes vuông góc này, hoặc đổi biến sang hệ tọa độ Descartes vuông góc khác, hoặc đổi biến sang hệ tọa độ cực/hệ tọa độ cực mở rộng trước khi tính tích phân. Khi đổi biến cần phải biết giá trị của định thức Jacobi (nếu đã biết giá trị của định thức Jacobi thì không cần tính mà chỉ việc sử dụng, nếu chưa biết thì phải tính) và xác định miền D’ là ảnh của miền D qua phép đổi biến.

Bước 3. Nếu tính tích phân trong hệ tọa độ Descartes, để xác định các cận của mỗi tích phân một lớp, chúng ta chiếu miền D lên một trong hai trục tọa độ, sao cho việc tính tích phân đơn giản hơn. Nếu tính tích phân trong hệ tọa độ cực/hệ tọa độ cực mở rộng, chúng ta thay x và y qua các biến mới vào một/nhiều hàm số biểu diễn biên của miền D để tìm miền D'. Xác định thứ tự tính tích phân theo nguyên tắc: Tích phân một lớp nào có cả hai cận là hằng số thì tính sau.

Bước 4. Lần lượt tính các tích phân một lớp từ phải sang trái.

(2) Để đổi thứ tự tính tích phân của tích phân hai lớp khi đã biết trước một thứ tự tính

Bước 1. Từ các cận của tích phân hai lớp theo thứ tự tính đã cho, chúng ta xác định miền tính tích phân D theo chiều đã được chiếu lên trục tọa độ Ox/Oy của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Bước 2. Vẽ đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Bước 3. Chiếu miền D lên trục tọa độ Oy/Ox của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, xác định miền tính tích phân D theo chiều chiếu này.

Bước 4. Từ miền tính tích phân D được xác định ở Bước 3, chúng ta viết tích phân theo thứ tự tính còn lại so với thứ tự tính tích phân đã biết.

(3) Tính diện tích của miền phẳng D

Bước 1. $S = \iint\limits_D dxdy$ là diện tích của miền phẳng D.

Bước 2. Nếu D có tính đối xứng thì tính diện tích một phần của D rồi suy ra diện tích của D.

Bước 3. Nếu miền D có dạng không thuộc các trường hợp cơ bản thì chia miền này thành các miền nhỏ bằng các đường thẳng song song với một trong hai trục tọa độ Ox hoặc Oy (sao cho việc tính tích phân đơn giản hơn), khi đó các miền nhỏ của D có dạng thuộc một trong các trường hợp cơ bản, tính diện tích của mỗi phần xong rồi cộng lại.

Ví dụ **2.19.** Đổi thứ tự tính tích phân của $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$ và tính I với f(x,y) = 3(x + y).

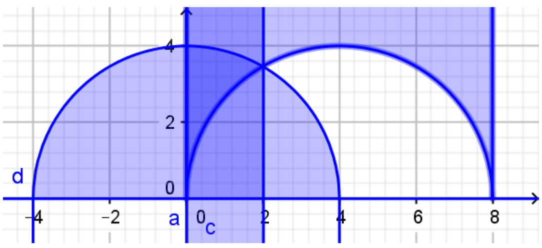
Bài giải.

(1) Đổi thứ tự tính tích phân

Từ $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \Rightarrow D = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{8x-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2} \end{cases}$

Chúng ta có $\begin{cases} \sqrt{8x-x^2} \le y \Rightarrow 8x - x^2 \le y^2 \Leftrightarrow 4^2 \le (x-4)^2 + y^2 \\ y \le \sqrt{16-x^2} \Rightarrow y^2 \le 16 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4^2 \end{cases}$ nên nửa đường tròn $\sqrt{8x-x^2} \le y$ giao với nửa đường tròn $y \le \sqrt{16-x^2}$ tại điểm $(2, 2\sqrt{3})$.

Đồ thị của miền D trong hệ tọa độ Descartes Oxy là



Chiếu miền D lên trục Oy chúng ta được $\begin{cases} D = D_1 \cup D_2 \\ D_1 \cap D_2 = \varnothing \end{cases}$, trong đó $D_1 = \begin{cases} 0 \le y \le 2\sqrt{3} \\ 0 \le x \le 4 - \sqrt{16-x^2} \end{cases}$ và

$D_2 = \begin{cases} 2\sqrt{3} \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \sqrt{16-y^2} \end{cases} \Rightarrow I = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\sqrt{3}} dy \int\limits_0^{4-\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{2\sqrt{3}}^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx$

(2) Tính I với f(x,y) = 3(x + y)

$$I=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}3(x+y)dy=3\int_0^2 dx\int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}(x+y)dy=3\int_0^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\sqrt{8x-x^2}}^{y=\sqrt{16-x^2}}dx=$$

$$=3\int_0^2(x\sqrt{16-x^2}-x\sqrt{8x-x^2}-4x+8)dx=3\left[\int_0^2 x\sqrt{16-x^2}dx-4\int_0^2(x-2)dx-\int_0^2 x\sqrt{8x-x^2}dx\right]=$$

$= 3(I_1 + I_2 + I_3)$ với $I_1=\int_0^2 x\sqrt{16-x^2}dx$, $I_2=-4\int_0^2(x-2)dx$ và $I_3=-\int_0^2 x\sqrt{8x-x^2}dx$

+ $I_1=\int_0^2 x\sqrt{16-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{16-x^2}d(16-x^2)=-\frac{1}{3}\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{64}{3}-8\sqrt{3}$

+ $I_2=-4\int_0^2(x-2)dx=-4\int_0^2(x-2)d(x-2)=-4.\frac{(x-2)^2}{2}\Big|_0^2=8$

+ $I_3=-\int_0^2 x\sqrt{8x-x^2}dx=-\int_0^2[(x-4)+4]\sqrt{16-(x-4)^2}dx=$

$=-\int_0^2(x-4)\sqrt{16-(x-4)^2}dx-4\int_0^2\sqrt{16-(x-4)^2}dx=I_{31}+I_{32}$

với $I_{31}=-\int_0^2(x-4)\sqrt{16-(x-4)^2}dx$ và $I_{32}=-4\int_0^2\sqrt{16-(x-4)^2}dx$

* $I_{31}=-\int_0^2(x-4)\sqrt{16-(x-4)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{16-(x-4)^2}d\left[16-(x-4)^2\right]=$

$\frac{1}{3}\left[16-(x-4)^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left\{\left[16-(2-4)^2\right]^{\frac{3}{2}}-\left[16-(0-4)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}=8\sqrt{3}$

* $I_{32}=-4\int_0^2\sqrt{16-(x-4)^2}dx$

Đặt x – 4 = 4sint $\Rightarrow\begin{cases}x=4+4\sin t\\dx=4\cos tdt\end{cases}$ và $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-\pi/2\\x=2\Rightarrow t=-\pi/6\end{cases}$

$\Rightarrow I_{32}=-4\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\sqrt{16-(4\sin t)^2}\,4\cos tdt=-4\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}4\cos t.4\cos tdt=-64\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\cos^2 tdt=$

$-\frac{64}{2}\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}(1+\cos 2t)dt=-32\left(\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}dt+\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\cos 2tdt\right)=-32\left(t\Big|_{-\pi/2}^{-\pi/6}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{-\pi/6}\right)=$

$-32\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{32}{3}\pi+8\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow I=3\left(I_1+I_2+I_{31}+I_{32}\right)=3\left(\frac{64}{3}-8\sqrt{3}+8+8\sqrt{3}-\frac{32}{3}\pi+8\sqrt{3}\right)=88+24\sqrt{3}-32\pi.$$

Cách khác: Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow$ J = r và 3(x + y) = 3r(cosφ + sinφ)

Tìm miền D’:

+ Từ $I=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}f(x,y)dy\Rightarrow\sqrt{8x-x^2}\le y\le\sqrt{16-x^2}\Rightarrow 8x-x^2\le y^2\le 16-x^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi \le r^2\sin^2\varphi \le 16 - r^2\cos^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi \le r^2\sin^2\varphi \\ r^2\sin^2\varphi \le 16 - r^2\cos^2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos\varphi \le r \\ r^2 \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos\varphi \le r \\ r^2 \le 16 \end{cases} \Rightarrow 8\cos\varphi \le r \le 4$$

+ Từ đồ thị của miền D chúng ta có $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ và $\tan\varphi_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$ do đó $\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow D' = \begin{cases} 8\cos\varphi \le r \le 4 \\ \pi/3 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 3(x+y)dy = \iint_{D'} 3(r\cos\varphi + r\sin\varphi)|J|drd\varphi =$$

$$3\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_{8\cos\varphi}^{4} r^2 dr = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{8\cos\varphi}^{4} 3(r\cos\varphi + r\sin\varphi)rdr = 3\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{8\cos\varphi}^{4} (\cos\varphi + \sin\varphi)r^2 dr =$$

$$3\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=8\cos\varphi}^{r=4} \right) d\varphi = 3\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{64(1 - 8\cos^3\varphi)}{3} d\varphi =$$

$$64\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)(1 - 8\cos^3\varphi)d\varphi$$

Hạ bậc biểu thức lượng giác

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)(1 - 8\cos^3\varphi) = -3 + \cos\varphi + \sin\varphi - 4\cos 2\varphi - 2\sin 2\varphi - \cos 4\varphi - \sin 4\varphi$$

$$\Rightarrow I = 64\int_{\pi/3}^{\pi/3} \left(-3 + \cos\varphi + \sin\varphi - 4\cos 2\varphi - 2\sin 2\varphi - \cos 4\varphi - \sin 4\varphi \right) d\varphi =$$

$$64\left(-3\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi - 2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{\cos 4\varphi}{4} \right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = 88 + 24\sqrt{3} - 32\pi.$$

2.2. Tích phân ba lớp

2.2.1. Định nghĩa và cách tính tích phân ba lớp

2.2.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x,y,z) xác định trong miền hữu hạn V của không gian $\mathbf{R}^3$. Chia miền V một cách tùy ý thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau. Gọi thể tích của n miền nhỏ đó là $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Trong mỗi miền nhỏ ΔV_i $(1 \le i \le n)$ chúng ta lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i,y_i,z_i)$ và lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i$.

I_n được gọi là tổng tích phân của hàm số f(x,y,z) trên miền V nếu khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max_{1\le i\le n} d_i \to 0$ (trong đó d_i là đường kính của miền nhỏ ΔV_i) mà I_n dần đến một giá trị hữu hạn không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách lấy điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ trên mỗi miền nhỏ ΔV_i, thì giá trị hữu hạn này được gọi là tích phân ba lớp của hàm số f(x,y,z) trên miền V và ký hiệu là $\iiint_V f(x,y,z)dV$; khi đó V, f(x,y,z), dV, x, y và z lần lượt được gọi là miền lấy tích phân, hàm số dưới dấu tích phân, vi phân thể tích, các biến tính tích phân.

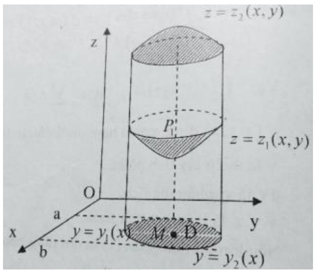
Như vậy, chúng ta có $\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ 0\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i$ nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn và khi đó chúng ta nói rằng hàm số f(x,y,z) khả tích trên miền V.

Nếu hàm số f(x,y,z) liên tục trong miền V thì nó khả tích trên miền V.

Tích phân ba lớp có đầy đủ các tính chất của tích phân hai lớp.

Vì tích phân ba lớp nếu tồn tại thì không phụ thuộc vào cách chia miền V, nên chúng ta có thể chia V bởi lưới các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz. Khi đó, mỗi miền nhỏ ΔV_i $(1 \le i \le n)$ nói chung là hình hộp chữ nhật, do đó dV = dxdydz $\Rightarrow \iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$.

2.2.1.2. Cách tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ Descartes



Giả sử miền V giới hạn bởi các mặt có các phương trình $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ tương ứng. Gọi miền phẳng D là hình chiếu của V lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0). Giả sử $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục và $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ với $\forall(x,y)\in D$.

Nếu từ một điểm bất kỳ $M(x,y)\in D$ vẽ một đường thẳng song song với trục tọa độ Oz, đường thẳng này sẽ cắt các mặt $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ tại các điểm P_1, P_2 tương ứng; khi điểm M thay đổi trong miền D thì các điểm P_1, P_2 thay đổi tương ứng với độ cao $P_1P_2 = z$ với $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$.

Nếu f(x,y,z) là hàm số liên tục với $\forall(x,y,z)\in V$ thì $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ (khi tính $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ thì coi x, y là các hằng số).

Vì $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y) \Rightarrow \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iint_D F(x,y)dxdy$ nên việc tính tích phân ba lớp $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ tiếp tục được về việc tính tích phân hai lớp $\iint_D F(x,y)dxdy$ đã biết.

Ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp. Nếu f(x,y,z) = 1 với $\forall(x,y,z)\in V$ thì $\iiint_V dxdydz$ là thể tích của miền V.

Định lý Fubini. Nếu hàm số f(x,y,z) xác định và liên tục trên hình hộp chữ nhật
$V = \{(x,y,z)\in R^3 \mid a \le x \le b, c \le y \le d, p \le z \le q\} = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_p^q f(x,y,z)dz = \int_c^d dy\int_p^q dz\int_a^b f(x,y,z)dx = \int_p^q dz\int_a^b dx\int_c^d f(x,y,z)dy.$$

Hệ quả. Nếu f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z) thì $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)\left(\int_p^q k(z)dz\right)$.

Ví dụ **2.20.** Tính tích phân $I = \iiint_V xyz^2dxdydz, V = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$

Bài giải.

Chúng ta có 4 phương án khác nhau khi tính $I = \iiint_V xyz^2dxdydz, V = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$ bằng cách sử dụng 4 công thức tính khác nhau sau đây

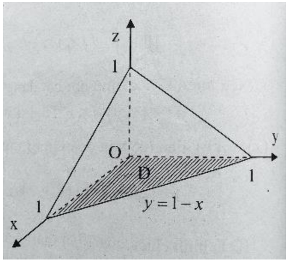
$$I = \iiint_V xyz^2dxdydz = \int_0^1 dx\int_{-1}^2 dy\int_0^3 xyz^2dz = \int_{-1}^2 dy\int_0^3 dz\int_0^1 xyz^2dx = \int_0^3 dz\int_0^1 dx\int_{-1}^2 xyz^2dy =$$

$$\left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_{-1}^2 ydy\right)\left(\int_0^3 z^2dz\right) = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^{y=2}\right)\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{z=0}^{z=3}\right) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{27}{3} = \frac{27}{4}.$$

Ví dụ **2.21.** Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z dxdydz$, V = {(x,y,z)∈$\mathbf{R}^3$|x = 0, y = 0, z = 0 và x + y + z = 1}.

Bài giải.

Đồ thị của miền V trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Chúng ta có z = z_1(x,y) = 0, z = z_2(x,y) = 1 – x – y và nếu gọi D là hình chiếu của mặt phẳng x + y + z = 1 xuống mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) thì D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1 – x}.

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V z dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} z dz = \iint\limits_D \left(\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (1-x-y)^2 dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 d(1-x-y) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{3}(1-x-y)^3\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3 d(1-x) = -\frac{1}{6}.\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

2.2.1.3. Công thức đổi biến trong tích phân ba lớp

Xét tích phân ba lớp $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, trong đó hàm số f(x,y,z) liên tục trên miền đóng V.

Giả sử chúng ta thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ với các giả thiết

(1) Các hàm x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 $x'_u(u,v,w), x'_v(u,v,w), x'_w(u,v,w), y'_u(u,v,w), y'_v(u,v,w), y'_w(u,v,w), z'_u(u,v,w),$ $z'_v(u,v,w), z'_w(u,v,w)$ liên tục trên miền đóng V' = {(u,v,w)∈$\mathbf{R}^3$} nào đấy;

(2) Phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ là ánh xạ 1-1 từ miền V lên miền V';

(3) Định thức Jacobi $J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{pmatrix} \neq 0$ trong miền V'

Khi đó $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]|J|dxdydz$

Lưu ý.

(1) Nếu phép đổi biến là ánh xạ 1-1 thì một điểm trong của miền V tương ứng với một điểm trong của miền V' và ngược lại, một điểm trên biên của miền V tương ứng với một điểm trên biên của miền V' và ngược lại.

(2) Nhà toán học Carl Gustav Jacob Jacobi (người Đức) đã chứng minh: Giá trị của định thức Jacobi của phép đổi biến $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ là nghịch đảo giá trị của định thức Jacobi của phép đổi biến ngược $\begin{cases} u = u(x,y,w) \\ v = v(x,y,w) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$ của phép biến đổi trên, tức là $J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{\det\begin{pmatrix} u'_x(x,y,z) & u'_y(x,y,z) & u'_z(x,y,z) \\ v'_x(x,y,z) & v'_y(x,y,z) & v'_z(x,y,z) \\ w'_x(x,y,z) & w'_y(x,y,z) & w'_z(x,y,z) \end{pmatrix}} \text{ hay } \frac{1}{J} = \det\begin{pmatrix} u'_x(x,y,z) & u'_y(x,y,z) & u'_z(x,y,z) \\ v'_x(x,y,z) & v'_y(x,y,z) & v'_z(x,y,z) \\ w'_x(x,y,z) & w'_y(x,y,z) & w'_z(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ **2.22.** Tính thể tích của vật thể V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng {x + y + z = ±3, x + 2y – z = ±1, x + 4y + z = ±2}.

Bài giải.

Theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp thì thể tích của vật thể là $V = \iiint\limits_V dxdydz$ với V là một hình hộp xiên giới hạn bởi các mặt phẳng {x + y + z = ±3, x + 2y – z = ±1, x + 4y + z = ±2} trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz $V = \begin{cases} -3 \le x+y+z \le 3 \\ -1 \le x+2y-z \le 1 \\ -2 \le x+4y+z \le 2 \end{cases}$ nên để tính tích phân ba lớp được dễ dàng, chúng ta dùng phép đổi biến $\begin{cases} u = x+y+z \equiv u(x,y,z) \\ v = x+2y-z \equiv v(x,y,z) \\ w = x+4y+z = w(x,y,z) \end{cases}$, do đó ảnh của miền V là miền $V' = \begin{cases} -3 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \\ -2 \le w \le 2 \end{cases}$ là một hình hộp chữ nhật trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Ouvw.

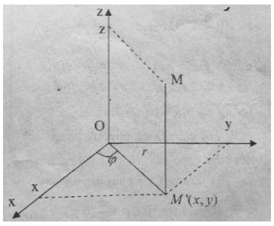
Để tính định thức Jacobi, chúng ta không cần phải tìm $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ từ phép đổi biến trên rồi tính ra $J = \det\begin{pmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{pmatrix}$ mà từ $\begin{cases} u = x+y+z \equiv u(x,y,z) \\ v = x+2y-z \equiv v(x,y,z) \\ w = x+4y+z = w(x,y,z) \end{cases}$ chúng ta tính được

$$\frac{1}{J} = \det\begin{pmatrix} u'_x(x,y,z) & u'_y(x,y,z) & u'_z(x,y,z) \\ v'_x(x,y,z) & v'_y(x,y,z) & v'_z(x,y,z) \\ w'_x(x,y,z) & w'_y(x,y,z) & w'_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} |J| dudvdw = \iiint\limits_{V'} \frac{1}{6} dudvdw = \frac{1}{6}\left(\int_{-3}^{3} du\right)\left(\int_{-1}^{1} dv\right)\left(\int_{-2}^{2} dw\right) =$$

$$\frac{1}{6}\left(u\Big|_{u=-3}^{u=3}\right)\left(v\Big|_{v=-1}^{v=1}\right)\left(w\Big|_{w=-2}^{w=2}\right) = \frac{1}{6}.6.2.4 = 8.$$

2.2.1.4. Tính tích phân ba lớp trong tọa độ trụ



Tọa độ trụ của một điểm M(x,y,z) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là bộ ba số (r,φ,z) trong đó (r,φ) là tọa độ cực của điểm M'(x,y) (là hình chiếu của điểm M xuống mặt phẳng tọa độ Oxy). Khi đó, chúng ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x,y,z) và tọa độ trụ (r,φ,z) của cùng một điểm M(x,y,z)∈$\mathbf{R}^3$ là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$, còn miền V trong hệ tọa độ Descartes (x,y,z) biến thành miền V' trong hệ tọa độ trụ (r,φ,z).

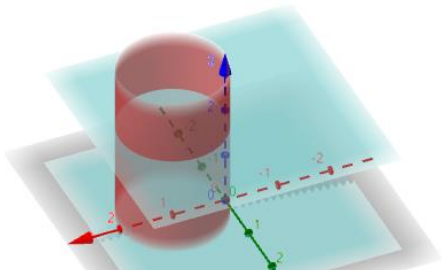
Định thức Jacobi là $J = \det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = r > 0$, do đó theo công thức đổi biến trong tích phân ba lớp từ trường hợp tổng quát áp dụng cho trường hợp này là

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)|J|drd\varphi dz = \iiint\limits_{V'} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)drd\varphi dz\,.$$

Ví dụ **2.23.** Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$, $y \ge 0$ và các mặt phẳng z = 0, z = 2.

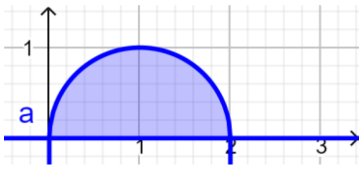
Bài giải.

Phương trình của mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1^2$ nên đồ thị của miền V trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ trụ (r,φ,z), định thức Jacobi J = r.

Hình chiếu D của miền V xuống mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là nửa trên của hình tròn $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ $(y \ge 0)$ có đồ thị là



Ảnh của D là $D' = \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ z = 0 \end{cases}$ trong hệ tọa độ trụ (r,φ,z), được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình hình tròn $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ chúng ta được

$r^2 - 2r\cos\varphi \le 0 \Leftrightarrow r(r - 2\cos\varphi) \le 0 \Rightarrow 0 \le r \le 2\cos\varphi$ (vì $r \ge 0$).

- Đối với tọa độ φ: Từ đồ thị của miền D suy ra $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Còn đối với tọa độ z: $0 \le z \le 2$

Do đó, ảnh của V là $V' = \begin{cases} D' \\ 0 \le z \le 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$ trong hệ tọa độ trụ (r,φ,z).

Hàm số dưới dấu tích phân $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

$$\Rightarrow I = \iint_{D'} dr d\varphi \int_0^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J| dz = \iint_{D'} dr d\varphi \int_0^2 r r^2 dz = \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^3 dz = \int_0^2 dz \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$\int_0^2 dz \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^2 dz \int_0^{\pi/2} 16\cos^4\varphi d\varphi = 4\left(\int_0^2 dz\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi\right)$$

Hạ bậc biểu thức lượng giác $\cos^4\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)$

$$\Rightarrow I = \left(\int_0^2 dz\right)\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi\right]$$

Chúng ta có

$$+ \int_0^2 dz = z\Big|_{z=0}^{z=2} = 2$$

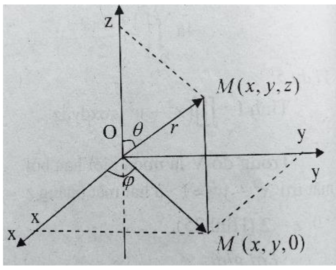
$$+ \int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi d(2\varphi) + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \cos 4\varphi d(4\varphi) =$$

$$\frac{3}{2}\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} + \sin 2\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = 2.\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Lưu ý. Nếu miền tính tích phân có dạng hình trụ/hình nón thì đổi tọa độ Descartes (x,y,x) sang tọa độ trụ (r,φ,z) thì việc tính tích phân có khả năng dễ tính toán hơn.

2.2.1.5. Tính tích phân ba lớp trong tọa độ cầu



Tọa độ cầu của một điểm M(x,y,z) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là bộ ba số (r,φ,θ) trong đó r = OM, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$ (M’ là hình chiếu của M lên mặt phẳng tọa độ Oxy), θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$. Khi đó, chúng ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x,y,z) và tọa độ cầu (r,φ,θ) của cùng một điểm $M(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ là $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$, còn miền V trong hệ tọa độ Descartes (x,y,z) biến thành miền V’ trong hệ tọa độ cầu (r,φ,θ).

Định thức Jacobi là $J = \det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{Vmatrix} = r^2\sin\theta > 0$,

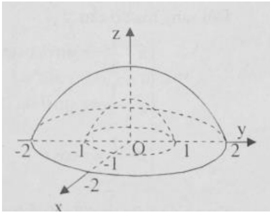
do đó theo công thức đổi biến trong tích phân ba lớp từ trường hợp tổng quát áp dụng cho trường hợp này là $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)|J|drd\varphi d\theta =$

$$\iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\cos\theta drd\varphi d\theta$$

Ví dụ **2.25.** Tính $I = \iiint\limits_V z^3dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi $\{1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0\}$.

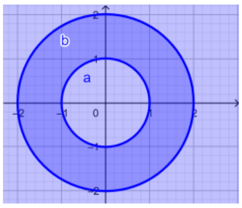
Bài giải.

$1^2 \le x^2 + y^2 + z^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 2^2$ là phương trình của hai hình cầu cùng có tâm O(0,0,0) có bán kính tương ứng bằng R = 1 và R = 2, do đó đồ thị của miền V trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ cầu (r,φ,θ), định thức Jacobi J = $r^2\sin\theta$.

Hình chiếu D của miền V xuống mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là hình vành khăn $\{1^2 \le x^2 + y^2 \le 2^2\}$ có đồ thị là



Ảnh của miền D là $D' = \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$ trong hệ tọa độ cầu (r,φ,θ), được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ chúng ta được $1 \le r^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le r \le 2$ (vì $r \ge 0$).

- Đối với tọa độ φ: $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Còn đối với tọa độ θ: $0 \le \theta \le \pi/2$ (vì $z \ge 0$) $\Rightarrow V' = \begin{cases} D' \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases} = \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$ trong hệ tọa độ cầu (r,φ,θ).

Hàm số dưới dấu tích phân $f(x,y,z) = z^3 \Rightarrow f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\cos\theta) = (r\cos\theta)^3 = r^3\cos^3\theta$.

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} drd\varphi \int_0^{\pi/2} r^3\cos^3\theta |J| d\theta = \iint\limits_{D'} drd\varphi \int_0^{\pi/2} r^3\cos^3\theta(r^2\sin\theta)d\theta =$$

$$\int_1^2 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} r^5\cos^3\theta\sin\theta d\theta = \left(\int_1^2 r^5dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta d\theta\right) =$$

$$\left(\frac{r^6}{6}\Big|_{r=1}^{r=2}\right)\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left[-\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d(\cos\theta)\right] = \frac{2^6-1^6}{6}.2\pi\left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\right) = 21\pi\left(-\frac{0-1}{4}\right) = \frac{21\pi}{4}.$$

Lưu ý. Nếu miền tính tích phân có dạng hình cầu hoặc paraboloit thì đổi tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ cầu (r,φ,θ) thì việc tính tích phân có khả năng dễ tính toán hơn.

2.2.2. Ứng dụng của tích phân ba lớp

2.2.2.1. Tính thể tích của vật thể

Theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp thì $\iiint\limits_V dxdydz$ là thể tích của miền V.

2.2.2.2. Tính khối lượng của vật thể

Ý nghĩa vật lý của tích phân ba lớp. Nếu hàm số f(x,y,z) > 0 xác định và liên tục với $\forall(x,y,z)\in V$, là khối lượng riêng của miền V tại điểm (x,y,z) thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ là khối lượng của miền V.

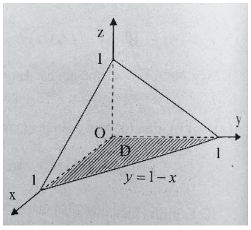
Ví dụ **2.25.** Vật thể là hình chóp tam giác giới hạn bởi các mặt phẳng {x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1}.

(a) Tính thể tích của vật thể.

(b) Tính khối lượng m của vật thể nếu khối lượng riêng tại điểm (x,y,z) của vật thể là f(x,y,z) = xy.

Bài giải.

Đồ thị của vật thể trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Dễ thấy rằng $z_1(x,y) = 0$ và $z_2(x,y) = 1 - x - y$ tương ứng là phương trình của mặt dưới và mặt trên của hình chóp tam giác. Hình chiếu của mặt phẳng x + y + z = 1 lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) là miền D và nếu chiếu miền D lên trục Ox thì $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$.

(a) Theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp thì thể tích của hình chóp tam giác là $\iiint\limits_V dxdydz =$

$$\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D dxdy\int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy =$$

$$-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)d(1-x-y) = -\int_0^1\left(\frac{(1-x-y)^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx = -\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2d(1-x) =$$

$$-\frac{1}{2}.\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

(b) Theo ý nghĩa vật lý của tích phân ba lớp thì $m = \iiint\limits_V xydxdydz = \iint\limits_D xydxdy\int_0^{1-x-y} dz =$

$$\iint\limits_D xy\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dxdy = \iint\limits_D xy(1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy(1-x-y)dy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(xy - x^2y - xy^2)dy =$$

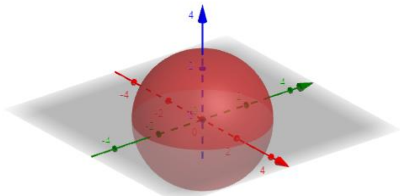
$$\int_0^1\left(x\frac{y^2}{2} - x^2\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1\left(\frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{x^2(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3}\right)dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}-3.\frac{x^3}{3}+3.\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{30}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{120}.$$

Ví dụ **2.26.** Tính thể tích của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ bằng tích phân ba lớp.

Bài giải

Đồ thị của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ có bán kính R và tâm tại gốc O(0,0,0) của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz là



Hình chiếu của hình cầu lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) là D = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Chúng ta có $x^2+y^2+z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow z_1(x,y) = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ là phương trình mặt dưới và $z_2(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ là phương trình mặt trên của hình cầu.

Theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp thì thể tích của hình cầu là $V = \iiint\limits_V dxdydz =$

$$\iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D dxdy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(z\Big|_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) dxdy = 2\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Để tính tích phân này, chúng ta đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) có định thức Jacobi J = r, khi đó miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy có ảnh là miền $D' = \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$.

$$\Rightarrow 2\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} = 2\iint\limits_{D'} \sqrt{R^2-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\,|J|drd\varphi = 2\iint\limits_{D'} r\sqrt{R^2-r^2}drd\varphi =$$

$$2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr = 2\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr\right) = 2\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left[-\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2-r^2)\right] =$$

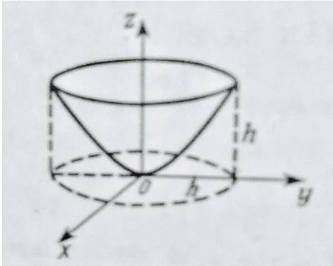
$$2.2\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right] = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Nhận xét. Để tính thể tích V của hình cầu này, chúng ta có thể đổi tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ cầu (r,φ,θ): $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, khi đó ảnh của miền V là miền $V' = \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$, định thức Jacobi J = $r^2\sin\theta$.

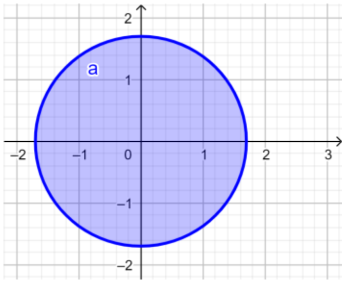
$$\Rightarrow V = \iiint\limits_{V'} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2\sin\theta dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^R r^2 dr\right) =$$

$$\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left(-\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = 2\pi.2.\frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Ví dụ **2.23.** Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = hz$, z = h.



Vật thể giới hạn dưới bởi paraboloit $z_1(x,y) = (x^2 + y^2)/h$ và giới hạn trên bởi mặt phẳng $z_2(x,y) = h$. Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng tọa độ Oxy là miền $D = \{x^2 + y^2 \le h^2\}$ có đồ thị là



Theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp thì thể tích của vật thể này là

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D dxdy \int_{(x^2+y^2)/h}^{h} dz = \iint_D \left(z\Big|_{z=(x^2+y^2)/h}^{h} \right) dxdy = \iint_D \left(h - \frac{x^2+y^2}{h} \right) dxdy$$

Để tính tích phân này, chúng ta đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ từ tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) có định thức Jacobi $J = r$, khi đó miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \le h^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy có ảnh là miền $D' = \begin{cases} 0 \le r \le h \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$.

$$\Rightarrow V = \iint_{D'} \left[h - \frac{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}{h} \right] r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(hr - \frac{r^3}{h} \right) dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left[\int_0^h \left(hr - \frac{r^3}{h} \right) dr \right] =$$

$$\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) \left[\left(\frac{hr^2}{2} - \frac{r^4}{4h} \right)\Bigg|_{r=0}^{r=h} \right] = 2\pi.\frac{h^3}{4} = \frac{\pi h^3}{2}.$$

Nhận xét. Để tính thể tích V của vật thể này, chúng ta có thể đổi tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ trụ (r,φ,z): $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, khi đó ảnh của miền V là miền $V' = \begin{cases} 0 \le r \le h \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r^2/h \le z \le h \end{cases}$, định thức Jacobi $J = r^2\sin\theta$.

Miền V' được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của hình tròn $x^2 + y^2 \le h^2$ chúng ta được $r^2 \le h^2 \Rightarrow 0 \le r \le h$.

- Đối với tọa độ φ: $0 \le \varphi \le 2\pi$.

- Đối với tọa độ z: Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình mặt dưới $z = (x^2 + y^2)/h$ của vật thể, chúng ta được $z = r^2/h$, còn phương trình mặt trên của vật thể là $z = h$, do đó $r^2/h \le z \le h$.

$$\Rightarrow V = \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} |J| dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dr \int_{r^2/h}^{h} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(rz\Big|_{z=r^2/h}^{z=h} \right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r\left(h - \frac{r^2}{h} \right) dr =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{hr^2}{2}-\frac{r^4}{4h}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=h}\right]d\varphi=\frac{h^3}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{h^3}{4}\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=\frac{\pi h^3}{2}.$$

Hướng dẫn. Để tính tích phân ba lớp $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$ chúng ta thực hiện các bước sau đây

Bước 1. Vẽ đồ thị của miền V trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz.

Bước 2. Xác định phương trình của mặt dưới $z_1(x,y)$ và của mặt trên $z_2(x,y)$ của miền V.

Bước 3. Chiếu miền V lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) nhận được hình chiếu là một miền phẳng D $\Rightarrow I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Bước 4. Chiếu miền D lên một trong hai trục tọa độ Ox/Oy, sao cho việc tính tích phân đơn giản hơn, chúng ta sẽ nhận được $\iint\limits_D dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy$ hoặc $\iint\limits_D dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx$

$$\Rightarrow I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \text{ hoặc } I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Bước 5. Căn cứ vào đồ thị của miền V, biểu thức của các hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ hoặc $x_1(y)$, $x_2(y)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ để quyết định tính trực tiếp tích phân này trong hệ tọa độ Descartes vuông góc này, hoặc đổi biến sang hệ tọa độ Descartes vuông góc khác, hoặc đổi biến sang hệ tọa độ trụ/hệ tọa độ cầu trước khi tính tích phân. Khi đổi biến cần phải biết giá trị của định thức Jacobi (nếu đã biết giá trị của định thức Jacobi thì không cần tính mà chỉ việc sử dụng, nếu chưa biết thì phải tính) và xác định miền D’ là ảnh của miền D qua phép đổi biến.

Bước 6. Lần lượt tính các tích phân một lớp từ phải sang trái.

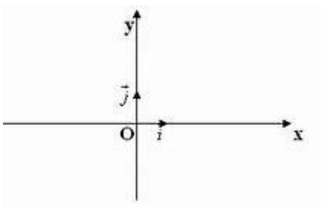
Chú ý. Ngoài ứng dụng hình học của tích phân hai lớp/ba lớp như đã trình bày ở các phần ở 2.1. và 2.2., tích phân hai/ba lớp còn dùng để tính khối lượng/trọng tâm của vật thể trong lĩnh vực Cơ học và Vật lý, hoặc dùng để tính các tích phân trong lĩnh vực Xác suất thống kê, …

PHỤ LỤC

1. Phương trình của đường và mặt

1.1. Đường trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$

1.1.1. Phương trình tổng quát của đường trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$



Hệ tọa độ trực chuẩn Oxy

Trong mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho một đường (L). Phương trình F(x,y) = 0 được gọi là phương trình của đường (L) nếu điểm M(x,y) nằm trên đường (L) khi và chỉ khi tọa độ (x,y) của nó thỏa mãn phương trình F(x,y) = 0.

Nếu từ phương trình F(x,y) = 0 giải ra được duy nhất y = f(x) hoặc được cho dưới dạng y = f(x) tức là F(x,y) = y – f(x) = 0 thì phương trình y = f(x) được gọi là phương trình dạng hiển của đường (L). Còn nếu từ phương trình F(x,y) = 0 không giải ra được duy nhất y = f(x) thì phương trình F(x,y) = 0 được gọi là phương trình dạng ẩn của đường (L).

Cần lưu ý rằng, vai trò của các tọa độ x và y là như nhau nên khi hoán đổi x và y cho nhau, chúng ta cũng có định nghĩa tương tự.

1.1.2. Phương trình tham số của đường trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$

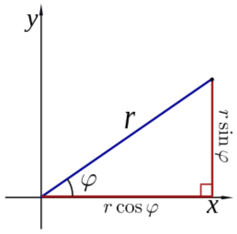
Trong mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho một đường (L). Nếu điểm M(x,y) nằm trên đường (L) khi và chỉ khi có một giá trị t để $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ được gọi là phương trình tham số của đường (L), t được gọi là tham số, còn f(t) và g(t) là các hàm số của biến t ($\alpha \le t \le \beta$).

Ví dụ **1.** Phương trình tham số của đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ có tâm tại điểm có tọa độ (a,b) và bán kính R là $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, khi đó $\begin{cases} f(t) = a + R\cos t \\ g(t) = b + R\sin t \end{cases}$ và $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2\pi \end{cases}$.

Ví dụ **2.** Phương trình tham số của đường Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có tâm tại gốc tọa độ (0,0) và các bán trục a > 0, b > 0 là $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, khi đó $\begin{cases} f(t) = a\cos t \\ g(t) = b\sin t \end{cases}$ và $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2\pi \end{cases}$.

1.1.3. Phương trình của đường trong hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho một đường (L). Mỗi điểm M(x,y) nằm trên đường (L) được hoàn toàn xác định bởi bộ hai số (r,φ) có thứ tự, trong đó $0 \le r = \sqrt{x^2 + y^2} < +\infty$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$ (φ là góc tạo bởi Ox và OM theo chiều dương). Bộ hai số (r,φ) được gọi là tọa độ cực của điểm M.

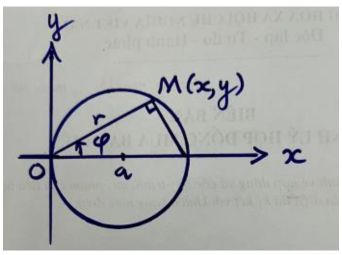


Liên hệ giữa tọa độ (x,y) và tọa cực (r,φ) là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ và ngược lại $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$

Trong hệ tọa độ cực cho một đường (L). Phương trình $\Phi(r,\varphi) = 0$ được gọi là phương trình của đường (L) trong hệ tọa độ cực, nếu điểm $M(r,\varphi)$ nằm trên đường (L) khi và chỉ khi tọa độ (r,φ) của nó thỏa mãn phương trình $\Phi(r,\varphi) = 0$.

Nếu từ phương trình $\Phi(r,\varphi) = 0$ giải ra được duy nhất $r = f(\varphi)$ hoặc được cho dưới dạng $r = f(\varphi)$ tức là $\Phi(r,\varphi) = r - f(\varphi) = 0$ thì phương trình $r = f(\varphi)$ được gọi là phương trình dạng hiển của đường (L) trong hệ tọa độ cực. Còn nếu từ phương trình $\Phi(r,\varphi) = 0$ không giải ra được duy nhất $r = f(\varphi)$ thì phương trình $\Phi(r,\varphi) = 0$ được gọi là phương trình dạng ẩn của đường (L) trong hệ tọa độ cực.

Ví dụ **3.** Viết phương trình trong hệ tọa độ cực của đường tròn có tâm tại điểm có tọa độ (a,0) trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy và có bán kính a > 0, nếu lấy gốc cực là điểm O và trục cực là trục Ox.

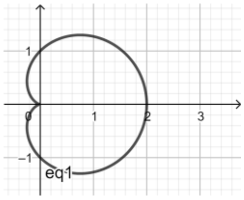


Từ hình vẽ trên chúng ta có ngay $r = 2a\cos\varphi$ $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$.

Hoặc thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của đường tròn này $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy, chúng ta được $(r\cos\varphi - a)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2 \Rightarrow r = 2a\cos\varphi$ $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$.

Ví dụ **4.** Tìm phương trình trong hệ tọa cực (r,φ) của đường Cacdioit nếu biết phương trình của đường này trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy là $(x^2+y^2-2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$, a > 0 khi lấy gốc cực là điểm O và trục cực là trục Ox.

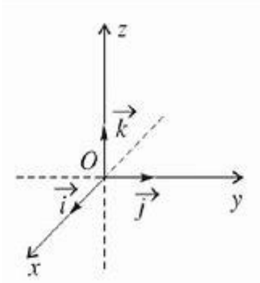
Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của đường Cacdioit $(x^2+y^2-2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy, chúng ta được $(r^2-2ar\cos\varphi)^2 = 4a^2r^2 \Rightarrow r = 2a(1+\cos\varphi)\,(0 \le \varphi \le 2\pi)$.



Đường Cacdioit tương ứng với a = 1/2

1.2. Mặt trong không gian $\mathbf{R}^3$

1.2.1. Phương trình tổng quát của mặt trong không gian $\mathbf{R}^3$



Hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz

Cho mặt (S) trong không gian $\mathbf{R}^3$ với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz. Phương trình F(x,y,z) = 0 được gọi là phương trình của mặt (S) nếu điểm M(x,y,z) nằm trên mặt (S) khi và chỉ khi tọa độ (x,y,z) của nó thỏa mãn phương trình F(x,y,z) = 0.

Nếu từ phương trình F(x,y,z) = 0 giải ra được duy nhất z = f(x,y) hoặc được cho dưới dạng z = f(x,y) tức là F(x,y,z) = z – f(x,y) = 0 thì phương trình z = f(x,y) được gọi là phương trình dạng hiển của mặt (S). Còn nếu từ phương trình F(x,y,z) = 0 không giải ra được duy nhất z = f(x,y) thì phương trình F(x,y,z) = 0 được gọi là phương trình dạng ẩn của mặt (S).

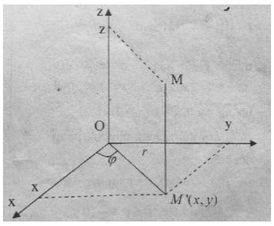
Cần lưu ý rằng, vai trò của các tọa độ x, y và z là như nhau nên khi hoán vị vòng quanh x, y và z cho nhau, chúng ta cũng có định nghĩa tương tự.

1.2.2. Phương trình tham số của mặt trong không gian $\mathbf{R}^3$

Cho mặt (S) trong không gian $\mathbf{R}^3$ với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz. Nếu điểm M(x,y,z) nằm trên mặt (S) khi và chỉ khi có cặp giá trị (u,v) để $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$ được gọi là phương trình tham số của mặt (L), u và v được gọi là các tham số, còn f(u,v), g(u,v) và h(u,v) là các hàm số của hai biến (u,v).

1.2.3. Phương trình của mặt trong hệ tọa độ trụ

Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz cho một mặt (S). Hình chiếu của điểm M(x,y,z) nằm trên mặt (S) chiếu xuống mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm M’(x,y,0), khi đó mỗi điểm M(x,y,z) được hoàn toàn xác định bởi bộ ba số có thứ tự (r,φ,z), trong đó $0 \le r = \sqrt{x^2+y^2} < +\infty$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$ (φ là góc tạo bởi Ox và OM’ theo chiều dương). Bộ ba số (r,φ,z) được gọi là tọa độ trụ của điểm M

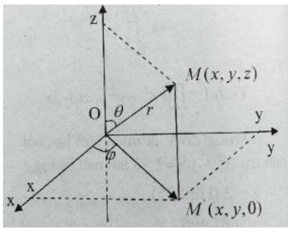


Cho mặt (S) trong hệ tọa độ trụ. Phương trình F(r,φ,z) = 0 được gọi là phương trình của mặt (S) nếu điểm M(r,φ,z) nằm trên mặt (S) khi và chỉ khi tọa độ (r,φ,z) của nó thỏa mãn phương trình F(r,φ,z) = 0.

Nếu từ phương trình F(r,φ,z) = 0 giải ra được duy nhất z = f(r,φ) hoặc được cho dưới dạng z = f(r,φ) tức là F(r,φ,z) = z – f(r,φ) = 0 thì phương trình z = f(r,φ) được gọi là phương trình dạng hiển của mặt (S). Còn nếu từ phương trình F(r,φ,z) = 0 không giải ra được duy nhất z = f(r,φ) thì phương trình F(r,φ,z) = 0 được gọi là phương trình dạng ẩn của mặt (S).

1.2.4. Phương trình của mặt trong hệ tọa độ cầu

Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz cho một mặt (S). Hình chiếu của điểm M(x,y,z) nằm trên mặt (S) chiếu xuống mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm M'(x,y,0), khi đó mỗi điểm M(x,y,z) được hoàn toàn xác định bởi bộ ba số có thứ tự (r,φ,θ), trong đó $0 \le r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < +\infty$, 0 ≤ φ ≤ 2π (φ là góc tạo bởi Ox và OM' theo chiều dương) và 0 ≤ θ ≤ π (θ là góc giữa trục Oz và OM). Bộ ba số (r,φ,θ) được gọi là tọa độ cầu của điểm M



Cho mặt (S) trong hệ tọa độ cầu. Phương trình F(r,φ,θ) = 0 được gọi là phương trình của mặt (S) nếu điểm M(r,φ,θ) nằm trên mặt (S) khi và chỉ khi tọa độ (r,φ,θ) của nó thỏa mãn phương trình F(r,φ,θ) = 0.

Nếu từ phương trình F(r,φ,θ) = 0 giải ra được duy nhất r = f(φ,θ) hoặc được cho dưới dạng r = f(φ,θ) tức là F(r,φ,θ) = r – f(φ,θ) = 0 thì phương trình r = f(φ,θ) được gọi là phương trình dạng hiển của mặt (S). Còn nếu từ phương trình F(r,φ,θ) = 0 không giải ra được duy nhất r = f(φ,θ) thì phương trình F(r,φ,θ) = 0 được gọi là phương trình dạng ẩn của mặt (S).

1.3. Đường trong không gian $\mathbf{R}^3$

1.3.1. Phương trình tổng quát của đường trong không gian

Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz cho mặt (S_1) có phương trình $F_1(x,y,z) = 0$ và mặt (S_2) có phương trình $F_2(x,y,z) = 0$. Giả sử đường (L) là giao của hai mặt (S_1), (S_2); khi đó điểm M(x,y,z) nằm trên đường (L) khi và chỉ khi nó đồng thời nằm trên cả hai mặt (S_1), (S_2) tức là tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ và hệ phương trình này được gọi là phương trình tổng quát của đường (L) trong không gian $\mathbf{R}^3$.

1.3.2. Phương trình tham số của đường trong không gian

Cho đường (L) trong không gian $\mathbf{R}^3$ với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz. Nếu điểm M(x,y,z) nằm trên đường (L) khi và chỉ khi có một giá trị t để $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ được gọi là phương trình tham số của đường (L), t được gọi là tham số, còn f(t), g(t) và h(t) là các hàm số của biến t.

2. Các đường bậc hai trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$

2.1. Phương trình tổng quát của đường bậc hai

Phương trình tổng quát của đường bậc hai (L) trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy là

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ trong đó số hạng có tích xy được gọi là số hạng chữ nhật, còn các hệ số A, B, C không đồng thời bằng không, tức là $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Giả sử B ≠ 0, tức là trong phương trình của (L) có số hạng chữ nhật, khi đó chúng ta đổi biến $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ trở thành

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \text{ trong đó } \begin{cases} A' = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha \\ B' = (C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha \\ C' = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha \\ D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha \\ E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\ F' = F \end{cases}$$

Để phương trình của (L): $A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$ trong hệ tọa độ trực chuẩn O'x'y' không có số hạng chữ nhật x'y' thì ta phải tìm góc α sao cho B' = 0, tức là

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Vì B ≠ 0 nên nếu lấy $\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{A - C}{B}$ trong phép đổi biến $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ thì phương trình của (L) trong hệ tọa độ trực chuẩn O'x'y' trở thành $A'(x')^2 + C(y')^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$.

Như vậy, không mất tính tổng quát, đối với đường bậc hai (L), chúng ta coi như phương trình của nó là $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

2.2. Phương trình chính tắc của đường bậc hai

Giả sử phương trình tổng quát của đường bậc hai (L) là $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, bây giờ chúng ta sẽ đơn giản phương trình này trong những trường hợp có thể được.

(1) A ≠ 0 và C ≠ 0:

Trong trường hợp này $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \Leftrightarrow$

$$A\left[x^2 + 2x\frac{D}{A} + \left(\frac{D}{A}\right)^2\right] + C\left[y^2 + 2y\frac{E}{C} + \left(\frac{E}{C}\right)^2\right] + F - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{C}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = F' \text{ với } F' = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{C}\right)^2 - F$$

Đổi biến $\begin{cases} X = x + D/A \\ Y = y + E/C \end{cases} \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ trở thành $AX^2 + CY^2 = F'$

- Nếu F' ≠ 0: $AX^2 + CY^2 = F' \Leftrightarrow \frac{A}{F'}X^2 + \frac{C}{F'}Y^2 = 1$, đặt $a^2 = \left|\frac{F'}{A}\right|$ và $b^2 = \left|\frac{F'}{C}\right|$

Tùy theo dấu của A, C và F' phương trình $\frac{A}{F'}X^2 + \frac{C}{F'}Y^2 = 1$ có một trong 3 dạng sau

+ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ (a > 0, b > 0) (L) là đường ellipse, trong trường hợp này, nếu a = b thì đường ellipse suy biến thành đường tròn $X^2 + Y^2 = a^2$.

+ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ (L) là đường ellipse ảo.

+ $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ hoặc $-\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (L) là đường hypebol.

- Nếu F' = 0: $AX^2 + CY^2 = F' \Leftrightarrow AX^2 + CY^2 = 0$, đặt $a^2 = \left|\dfrac{1}{A}\right|$ và $b^2 = \left|\dfrac{1}{C}\right|$

Tùy theo dấu của A và C phương trình $AX^2 + CY^2 = 0$ có một trong 2 dạng sau

+ $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ (L) là một cặp đường thẳng giao nhau

+ $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ (L) là một cặp đường thẳng ảo giao nhau

(2) Một trong hai số A và C khác không, số còn lại bằng không, chẳng hạn A ≠ 0 và C = 0 (thực hiện tương tự với trường hợp A = 0 và C ≠ 0):

Trong trường hợp này $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \Leftrightarrow Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

- Nếu E ≠ 0 thì $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \Leftrightarrow A\left[x^2 + 2x\dfrac{D}{A} + \left(\dfrac{D}{A}\right)^2\right] + 2Ey + F - \left(\dfrac{D}{A}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$A\left(x + \dfrac{D}{A}\right)^2 + 2E\left(y + \dfrac{F}{2E} - \dfrac{D^2}{2AE}\right) = 0$, đổi biến $\begin{cases} X = x + \dfrac{D}{A} \\ Y = y + \dfrac{F}{2E} - \dfrac{D^2}{2AE} \end{cases}$, khi đó phương trình này trở thành $AX^2 + 2EY = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2pY$ $(p = -E/A)$ (L) là đường parabol.

- Nếu E = 0 thì $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \Leftrightarrow Ax^2 + 2Dx + F = 0 \Leftrightarrow$

$A\left[x^2 + 2x\dfrac{D}{A} + \left(\dfrac{D}{A}\right)^2\right] + F - \left(\dfrac{D}{A}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow A\left(x + \dfrac{D}{A}\right)^2 + F - \left(\dfrac{D}{A}\right)^2 = 0$, đổi biến $\begin{cases} X = x + \dfrac{D}{A} \\ Y = y \end{cases}$, khi đó phương trình này trở thành $X^2 - F' = 0$ với $F' = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{D^2}{A^2} - F\right)$.

+ Nếu F' > 0, đặt a^2 = F' thì $X^2 - F' = 0 \Leftrightarrow X^2 - a^2 = 0$ (L) là cặp đường thẳng song song.
+ Nếu F' = 0 thì $X^2 - F' = 0 \Leftrightarrow X^2 = 0$ (L) là cặp đường thẳng trùng nhau.
+ Nếu F' < 0, đặt a^2 = –F' thì $X^2 - F' = 0 \Leftrightarrow X^2 + a^2 = 0$ (L) là cặp đường thẳng ảo song song.

Như vậy, chúng ta luôn tìm được hệ tọa độ trực chuẩn thích hợp sao cho có thể đưa phương trình đã cho của đường bậc hai về một trong 9 dạng phương trình dưới đây, gọi là các dạng phương trình chính tắc của đường bậc hai trong hệ tọa độ trực chuẩn. Các nhà toán học đã chứng minh được rằng mỗi đường bậc hai tồn tại một và chỉ một dạng phương trình chính tắc.

STT	Phương trình chính tắc	Tên đường bậc hai	Ghi chú
1	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Đường ellipse	a > 0 b > 0
2	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$	Đường ellipse ảo	a > 0 b > 0
3	$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Đường hypebol	a > 0 b > 0
4	$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$	Cặp đường thẳng giao nhau	a > 0 b > 0
5	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$	Cặp đường thẳng ảo giao nhau	a > 0 b > 0
6	$X^2 = 2pY$	Đường parabol	

STT	Phương trình chính tắc	Tên đường bậc hai	Ghi chú
7	$X^2 - a^2 = 0$	Cặp đường thẳng song song	a > 0
8	$X^2 = 0$	Cặp đường thẳng trùng nhau	
9	$X^2 + a^2 = 0$	Cặp đường thẳng ảo song song	a > 0

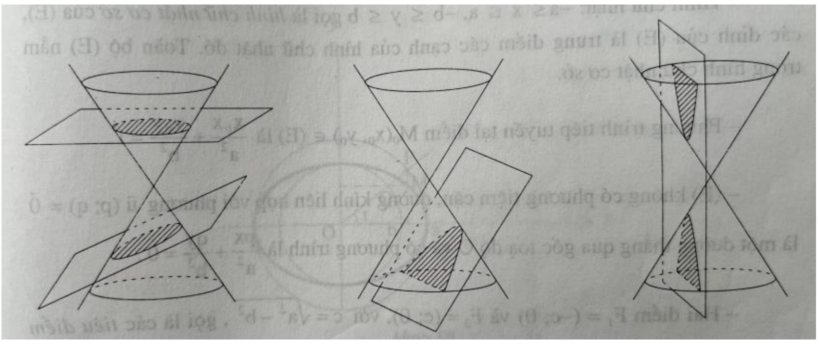
2.3. Ba đường conic

Các đường cong bậc hai ellipse, parabol, hyperbol được gọi là các đường conic. Nguồn gốc của từ "conic" là khi cắt một mặt nón "cone" tròn xoay bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là:

- Đường ellipse nếu mặt cắt không song song với một đường sinh nào đó của mặt nón (đặc biệt, ellipse là đường tròn nếu mặt cắt vuông góc với trục của mặt nón).

- Đường parabol nếu mặt cắt song song với một đường sinh của mặt nón.

- Đường hyperbol nếu mặt cắt song song với hai đường sinh của mặt nón.



Định lý. (*Dấu hiệu nhận biết các đường conic*) Giả sử phương trình tổng quát của đường bậc hai (L) là $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$ trong đó các hệ số A, B, C không đồng thời bằng không. Xét dấu của biểu thức $\Delta = B^2 - 4AC$

- Nếu $\Delta < 0$: (L) là đường ellipse
- Nếu $\Delta = 0$: (L) là đường parabol
- Nếu $\Delta > 0$: (L) là đường hyperbol

3. Các mặt bậc hai trong không gian R^3

3.1. Phương trình tổng quát của mặt bậc hai

Phương trình tổng quát của mặt bậc hai (S) trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz là $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$ trong đó các hệ số của các số hạng bậc hai (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}) không đồng thời bằng không, tức là $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 > 0.$

3.2. Phương trình chính tắc của mặt bậc hai

Chúng ta sẽ đơn giản phương trình $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$ này trong những trường hợp có thể được.

Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng, có thể tìm được phép đổi biến sao cho phương trình này không có các số hạng chữ nhật xy, yz, zx.

Trường hợp 1. Một trong các hệ số a_{11}, a_{22}, a_{33} khác không, chẳng hạn a_{11}, khi đó chúng ta biến đổi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy = a_{11}\left[x^2 + 2x\frac{a_{12}}{a_{11}}y + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2\right] = a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2,$$ do đó nếu chúng ta đổi biến $x' = x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y$ và $\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) trong hệ tọa độ trực

chuẩn O'x'y'z' sẽ không có số hạng chữ nhật x'y'. Tiếp tục tương tự như vậy, chúng ta sẽ nhận được phương trình của mặt (S) không có các số hạng chữ nhật trong một hệ tọa độ trực chuẩn mới nào đó.

Trường hợp 2. Các hệ số a_{11}, a_{22}, a_{33} đều bằng không, tức là $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, khi đó các hệ số a_{12}, a_{23}, a_{31} không đồng thời bằng không, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$ (thực hiện tương tự với trường hợp $a_{23} \neq 0$ và $a_{31} \neq 0$). Do đó, nếu chúng ta đổi biến x = x' + y', y = x' – y' và z = z' thì $2a_{12}xy = 2a_{12}(x' + y')(x' - y') = 2a_{12}[(x')^2 - (y')^2]$ nên phương trình của mặt bậc hai (S) trong hệ tọa độ trực chuẩn O'x'y'z' có hệ số của $(x')^2$ là $a'_{11} = 2a_{12} \neq 0,$ tức là đã đưa trở về trường hợp 1.

Như vậy, chúng ta luôn tìm được hệ tọa độ trực chuẩn thích hợp sao cho có thể đưa phương trình đã cho của mặt bậc hai về dạng không có các số hạng chữ nhật xy, yz, zx. Do đó, không mất tính tổng quát, chúng ta có thể coi như phương trình của mặt bậc hai (S) là $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$ trong đó các hệ số của các số hạng bậc hai (a_{11}, a_{22}, a_{33}) không đồng thời bằng không, tức là $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 > 0.$

Bây giờ, chúng ta xét dạng của mặt bậc hai (S) có phương trình trên trong các trường hợp có thể xảy ra.

Trường hợp (a): $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ và $a_{33} \neq 0$

Khi đó $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$$a_{11}\left[x^2 + 2x\frac{a_1}{a_{11}} \pm \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2\right] + a_{22}\left[y^2 + 2y\frac{a_2}{a_{22}} \pm \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2\right] + a_{33}\left[z^2 + 2z\frac{a_3}{a_{33}} \pm \left(\frac{a_3}{a_{33}}\right)^2\right] + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 + a_{33}\left(z + \frac{a_3}{a_{33}}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \frac{a_3^2}{a_{33}} = 0.$$

Đổi biến $x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, z' = z + \frac{a_3}{a_{33}}$ và đặt $a'_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \frac{a_3^2}{a_{33}}$, khi đó phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + a'_0 = 0.$

- Nếu $a'_0 \neq 0$ bằng phép đổi biến $X = \sqrt{\left|\frac{a_{11}}{a'_0}\right|}x', Y = \sqrt{\left|\frac{a_{22}}{a'_0}\right|}y', Z = \sqrt{\left|\frac{a_{33}}{a'_0}\right|}z'$ thì tùy theo dấu của a_{11}, a_{22}, a_{33} và a'_0 chúng ta đưa phương trình của mặt bậc hai (S) về một trong bốn dạng sau:

+ $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ (S) là mặt ellipxoit.
+ $X^2 + Y^2 + Z^2 = -1$ (S) là mặt ellipxoit ảo.
+ $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$ (S) là mặt hypeboloit một tầng.
+ $X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$ (S) là mặt hypeboloit hai tầng.

- Nếu $a'_0 = 0$ bằng phép đổi biến $X = \sqrt{|a_{11}|}x', Y = \sqrt{|a_{22}|}y', Z = \sqrt{|a_{33}|}z'$ thì tùy theo dấu của a_{11}, a_{22}, a_{33} chúng ta đưa phương trình của mặt bậc hai (S) về một trong hai dạng sau:

+ $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ (S) là mặt nón
+ $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ (S) là mặt nón ảo

Trường hợp (b): $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ và $a_{33} = 0$

Khi đó $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \Leftrightarrow$

$$a_{11}\left[x^2 + 2x\frac{a_1}{a_{11}} \pm \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2\right] + a_{22}\left[y^2 + 2y\frac{a_2}{a_{22}} \pm \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2\right] + 2a_3z + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 + 2a_3z + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0$$

Đổi biến $x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, z' = z$ và đặt $a'_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}}$, khi đó phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_3z' + a'_0 = 0.$

- Nếu $a_3 \neq 0$ thì đổi biến $X = \sqrt{|a_{11}|}x', Y = \sqrt{|a_{22}|}y', Z = a_3 z' + \frac{a'_0}{2}$, khi đó tùy theo dấu của a_{11}, a_{22}, a_3 chúng ta đưa phương trình của mặt bậc hai (S) về một trong hai dạng sau:

+ $X^2 + Y^2 + 2Z = 0$ (S) là mặt paraboloit elliptic.
+ $X^2 – Y^2 + 2Z = 0$ (S) là mặt paraboloit hyperbolic.

- Nếu $a_3 = 0$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) là $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a'_0 = 0$.

* $a'_0 \neq 0$ thì đổi biến $X = \sqrt{\left|\frac{a_{11}}{a'_0}\right|}x', Y = \sqrt{\left|\frac{a_{22}}{a'_0}\right|}y', Z = z'$, khi đó tùy theo dấu của a_{11}, a_{22}, a'_0 chúng ta đưa phương trình của mặt bậc hai (S) về một trong ba dạng sau

+ $X^2 + Y^2 = 1$ (S) là mặt trụ ellipse.
+ $X^2 + Y^2 = –1$ (S) là mặt trụ ellipse ảo.
+ $X^2 – Y^2 = \pm 1$ (S) là mặt trụ hypebol.

* $a'_0 = 0$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) là $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 = 0$, đổi biến $X = \sqrt{|a_{11}|}x', Y = \sqrt{|a_{22}|}y', Z = z'$, khi đó tùy theo dấu của a_{11}, a_{22} chúng ta đưa phương trình của mặt bậc hai (S) về một trong hai dạng sau

+ $X^2 – Y^2 = 0$ (S) là cặp mặt phẳng giao nhau.
+ $X^2 + Y^2 = 0$ (S) là cặp mặt phẳng ảo.

Trường hợp (c): $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$ và $a_{33} = 0$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) là

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{22}\left[y^2 + 2y\frac{a_2}{a_{22}} \pm \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2\right] + 2a_1x + 2a_3z + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_{22}\left(y + \frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 + 2a_1x + 2a_3z + a_0 - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0,$$

đổi biến $x' = x, y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, z' = z$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành

$$a_{22}(y')^2 + 2a_1x' + 2a_3z' + a'_0 = 0 \text{ với } a'_0 = a_0 - \frac{a_2^2}{a_{22}}.$$

- Nếu a_1 và a_3 không đồng thời bằng không, chẳng hạn $a_1 \neq 0$ (thực hiện tương tự với trường hợp $a_3 \neq 0$) thì $a_{22}(y')^2 + 2a_1x' + 2a_3z' + a'_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{a_{22}}{a_1}(y')^2 + 2\left(x' + \frac{a_3}{a_1}z' + \frac{a'_0}{2a_1}\right) = 0$.

Đổi biến $X = x' + \frac{a_3}{a_1}z' + \frac{a'_0}{2a_1}, Y = \sqrt{\left|\frac{a_{22}}{a_1}\right|}y', Z = z'$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành

$Y^2 \pm 2X = 0$ (S) là mặt trụ parabol.

- Nếu $a_1 = a_3 = 0$ và $a'_0 \neq 0$ thì đổi biến $X = x', Y = \sqrt{\left|\frac{a_{22}}{a'_0}\right|}y', Z = z'$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành một trong hai dạng sau

+ $Y^2 – 1 = 0$ (S) là cặp mặt phẳng song song.
+ $Y^2 + 1 = 0$ (S) là cặp mặt phẳng song song ảo.

- Nếu $a_1 = a_3 = a'_0 = 0$ thì đổi biến $X = x', Y = \sqrt{|a_{22}|}y', Z = z'$ thì phương trình của mặt bậc hai (S) trở thành $Y^2 = 0$ (S) là cặp mặt phẳng trùng nhau.

Như vậy, chúng ta luôn tìm được hệ tọa độ trực chuẩn thích hợp sao cho có thể đưa phương trình đã cho của mặt bậc hai về một trong 17 dạng phương trình dưới đây, gọi là các dạng phương trình chính tắc của mặt bậc hai trong hệ tọa độ trực chuẩn. Các nhà toán học đã chứng minh được rằng mỗi mặt bậc hai tồn tại một và chỉ một dạng phương trình chính tắc.

STT	Phương trình chính tắc	Tên mặt bậc hai
1	$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$	**Mặt ellipxoit**

STT	Phương trình chính tắc	Tên mặt bậc hai
2	$X^2 + Y^2 + Z^2 = -1$	Mặt ellipxoit ảo
3	$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$	**Mặt hypeboloit một tầng**
4	$X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$	**Mặt hypeboloit hai tầng**
5	$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$	**Mặt nón**
6	$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$	Mặt nón ảo
7	$X^2 + Y^2 + 2Z = 0$	**Mặt paraboloit elliptic**
8	$X^2 - Y^2 + 2Z = 0$	**Mặt paraboloit hyperbolic**
9	$X^2 + Y^2 = 1$	**Mặt trụ elliptic**
10	$X^2 + Y^2 = -1$	Mặt trụ ellipse ảo
11	$X^2 - Y^2 = \pm 1$	**Mặt trụ hypebolic**
12	$X^2 - Y^2 = 0$	Cặp mặt phẳng giao nhau
13	$X^2 + Y^2 = 0$	Cặp mặt phẳng ảo
14	$Y^2 \pm 2X = 0$	**Mặt trụ parabolic**
15	$Y^2 - 1 = 0$	Cặp mặt phẳng song song
16	$Y^2 + 1 = 0$	Cặp mặt phẳng song song ảo
17	$Y^2 = 0$	Cặp mặt phẳng trùng nhau

3.3. Mặt bậc hai không suy biến

Như đã chỉ ra ở Phần 3.2. Phương trình chính tắc của mặt bậc hai, có những mặt bậc hai là cặp mặt phẳng, chúng ta gọi chúng là mặt bậc hai suy biến, các mặt bậc hai còn lại và không phải là ảo, được gọi là mặt bậc hai không suy biến.

3.3.1. Mặt ellipxoit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, b > 0, c > 0)$$

3.3.2. Mặt hypeboloit một tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, b > 0, c > 0)$$

3.3.3. Mặt hypeboloit hai tầng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, b > 0, c > 0)$$

3.3.4. Mặt paraboloit elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2kz = 0 \ (a > 0, b > 0, k \neq 0)$$

3.3.5. Mặt paraboloit hyperbolic (mặt yên ngựa)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2kz = 0 \ (a > 0, b > 0, k \neq 0)$$

3.3.6. Mặt nón

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ (a > 0, b > 0, c > 0)$$

3.3.7. Mặt trụ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0, -\infty < z < +\infty) \text{ – mặt trụ elliptic}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0, -\infty < z < +\infty) \text{ – mặt trụ hyperbolic}$$

$y^2 - 2px = 0$ ($p \neq 0$, $-\infty < z < +\infty$) – mặt trụ parabolic

Bài tập

2.1. Tính các tích phân hai lớp trên miền tương ứng

(a) $I = \iint_D xydxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y = 1, y = 3, y = x, y = x + 1\}$

(b) $I = \iint_D (x+y)dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | y = 0,\ y = x^2,\ y + x = 2\}$

(c) $I = \iint_D xydxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | xy = 1,\ xy = 3,\ y^2 = 2x,\ y^2 = 4x\}$

(d) $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

(e) $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le 2Rx,\ R > 0\}$

(f) $I = \iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, $D = \left\{(x,y)\in R^2 \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

(g) $I = \iint_D (x-y)dxdy$, $D = \{(x,y)\in R^2 | (x-3)^2+(y-2)^2 \le 1\}$

(h) $I = \iint_D |x+y|dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$

(i) $I = \iint_E (2x+y)(x-2y)dxdy$, E là hình vuông ABCD có các đỉnh A(1,0), B(3,1), C(2,3), D(0,2)

2.2. Đổi thứ tự tính tích phân của các tích phân hai lớp sau đây

(a) $I = \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx$ (b) $I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$ (c) $I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(d) $I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ (e) $I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{y} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

2.3. Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi các đường bậc nhất/bậc hai sau đây

(a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x = 4y - y^2,\ x + y = 6\}$ (b) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | xy = 1,\ x + y = 5/2\}$

(c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | y^2 = 2x,\ y^2 = 3x,\ x^2 = y,\ x^2 = 4y\}$

2.4. Các đề thi Giải tích 2 về tính tích phân hai lớp

(a) Tính $I = \iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, D là miền giới hạn bởi trục hoành Ox, trục tung Oy, đường thẳng y = 1 và đường parabol $y^2 = x$.(năm học 2017-2018)

(b) Tính $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{1-x^2}dx$. (năm học 2018-2019)

(c) Tính $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, $D = \left\{1 \le x^2+y^2 \le 4, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$. (năm học 2019-2020)

(d) Cho $D = \{x^2+y^2 \le 2ax, a > 0\}$, xác định a nếu $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4$. (năm học 2020-2021)

2.5. (a) Tính $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng x + y + z = 1. Ký hiệu A, B, C tương ứng là các điểm giao của các trục tọa độ Ox, Oy, Oz với mặt phẳng x + y + z = 1. Tính diện tích S của tam giác ABC và so sánh kết quả tính được với kết quả tính theo công thức sơ cấp đã biết ở Trường phổ thông. Tính thể tích V của hình chóp OABC và so sánh kết quả tính được với kết quả tính theo công thức sơ cấp đã biết ở Trường phổ thông.

(b) Tính $I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, miền V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le x$. Tính diện tích mặt cầu và thể tích của hình cầu V, so sánh kết quả tính được với kết quả tính theo công thức sơ cấp đã biết ở Trường phổ thông.

2.6. Các đề thi Giải tích 2 về tính tích phân ba lớp

(a) Tính thể tích khối vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng z = 0.(năm học 2017-2018)

(b) Tính $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ với V là khối cầu $x^2+y^2+z^2 \le x$. (năm học 2018-2019)

(c) Cho mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (S) và mặt phẳng z = 2 (P). Tính $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ với V là miền giới hạn bởi (S) và (P).(năm học 2019-2020)

(d) Chứng minh $\frac{a^2}{6}\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ với miền $V = \{\sqrt{x^2+y^2} \le z \le a, a > 0\}$. (năm học 2020-2021)

(e) Tính $I = \iiint\limits_V zdxdydz$ với V là khối nón cụt $\begin{cases} z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \le z \le 3 \end{cases}$.(năm học 2021-2022)

2.7. Tính thể tích miền V bằng tích phân hai lớp

(a) V là miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

(b) V là miền nằm dưới mặt paraboloit $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt phẳng z = 0 và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

2.8. Tính thể tích miền V bằng tích phân ba lớp

(a) V là miền giới hạn bởi các mặt x = 0, y = 0, z = 0, $z = x^2 + y^2$ và nằm trong góc vuông phần tám thứ nhất.

(b) V là miền nằm phía sau mặt phẳng x + y + z = 8, phía trước mặt phẳng x = 0 và bị chặn bởi các mặt phẳng $z = \frac{3}{2}\sqrt{y}, z = \frac{3}{4}y$.

(c) V là miền nằm dưới mặt phẳng z = x + 2, trên mặt phẳng z = 0 và giữa hai hình trụ $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

(d) $V = \left\{(x,y,z) \in R^3 \middle| \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{3a^2} \le 1\right\}$.