Chương 0

Trong toán học, một chứng minh là một cách trình bày thuyết phục (sử dụng những chuẩn mực đã được chấp nhận trong lĩnh vực đó) rằng một phát biểu toán học là đúng. Chứng minh có được từ lập luận suy diễn, chứ không phải là tranh luận kiểu quy nạp hoặc theo kinh nghiệm. Có nghĩa là, một chứng minh phải trình bày cho thấy một phát biểu là đúng với mọi trường hợp, không có ngoại lệ. Một mệnh đề chưa được chứng minh nhưng được chấp nhận đúng được gọi là một dự đoán.

Phát biểu đã được chứng minh thường được gọi là định lý. Một khi định lý đã được chứng minh, nó có thể được dùng làm nền tảng để chứng minh các phát biểu khác. Một định lý cũng có thể được gọi là bổ đề, nếu nó được dự định dùng làm bước đệm để chứng minh một định lý khác.

0.1. Một vài phương pháp chứng minh thường dùng trong toán học

0.1.1. Phương pháp *chứng minh trực tiếp*: Kết luận có được bằng cách phối hợp một cách lôgic các tiên đề, định nghĩa và các định lý trước đó.

0.1.2. Phương pháp *chứng minh bằng phản chứng (phương pháp phản chứng)*: Người ta sẽ chứng minh nếu một phát biểu nào đó xảy ra, thì dẫn đến mâu thuẫn về logic, vì vậy phát biểu đó không được xảy ra. Bản chất logic của phương pháp này là như sau: Giả sử ta có giả thiết A, cần chứng minh kết luận B đúng. Ta lập luận rằng, mặc dù giả thiết A là đúng, nhưng kết luận B là sai; khi đó, nếu bằng những lập luận logic từ việc B sai dẫn đến một kết luận khác mà ta biết chắc chắn sai (hoặc vô lý) thì việc kết luận B sai là không đúng và do đó B đúng.

0.1.3. Phương pháp *chứng minh bằng quy nạp toán học (phương pháp quy nạp toán học)*: Đầu tiên "trường hợp cơ sở" sẽ được chứng minh, sau đó sẽ dùng một "luật quy nạp" để chứng minh (thường là vô tận) các trường hợp khác. Vì trường hợp cơ sở là đúng, tất cả các trường hợp khác cũng phải đúng, thậm chí nếu ta không thể chứng minh trực tiếp tất cả chúng là đúng vì số lượng vô tận của nó.

Phương pháp quy nạp toán học thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề toán học liên quan đến tập hợp các số tự nhiên.

Muốn chứng minh mệnh đề f(n) là đúng với $\forall n \in \mathbf{N}$, ta cần tiến hành theo ba bước: (1) Chứng minh f(0) đúng; (2) Giả sử f(n) đúng (thường được gọi là *giả thiết quy nạp*); (3) Chứng minh f(n+1) đúng.

- Trong trường hợp, f(n) không phải đúng đối với $\forall n$ mà chỉ đúng với $\forall n \geq m$ ($m \in \mathbf{N}$) nào đó, thì trong Bước 1, ta phải chứng minh f(m) đúng.

- Nếu bài toán yêu cầu chứng minh mệnh đề f(n) đúng với $\forall n \in \mathbf{Z}$, thì trước hết ta chứng minh f(n) đúng với $\forall n \in \mathbf{N}$ bằng phương pháp quy nạp toán học, sau đó chứng tỏ rằng f(-n) cũng đúng.

0.2. Một số hàm và công thức

0.2.1. Hàm giá trị tuyệt đối: Nếu x là một số thực thì giá trị tuyệt đối của nó (ký hiệu là |x|) là một số không âm, được xác định như sau: $|x| = \begin{cases} -x & \text{khi} \quad x < 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \\ x & \text{khi} \quad x > 0 \end{cases}$

0.2.2. Hàm dấu (signum, viết tắt là sgn): $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi} \quad x < 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \\ 1 & \text{khi} \quad x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |x| = x\operatorname{sgn}(x)$ với $\forall x \in \mathbf{R}$.

0.2.3. Hàm phần nguyên: Hàm floor và ceiling là các qui tắc cho tương ứng một số thực vào một số nguyên gần nhất bên trái và gần nhất bên phải số đã cho: floor(x) là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, còn ceiling(x) là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

Các hàm floor và ceiling có thể được định nghĩa bằng tập hợp như sau:

$$\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in Z | n \le x\}$$
$$\text{ceiling}(x) = \lceil x \rceil = \min\{n \in Z | n \ge x\}$$

Trong giáo trình này, chỉ sử dụng hàm floor(x) và theo thói quen, ta sẽ gọi hàm này là hàm phần nguyên, đồng thời sử dụng ký hiệu đã quen dùng $[x] \equiv \text{floor}(x)$.

Phát biểu hiển nhiên sau đây, thường được sử dụng trong các bài toán liên quan đến hàm phần nguyên: *Một số thực xác định, hoặc là số nguyên, hoặc không phải là số nguyên; nếu số thực này không phải là số nguyên thì nó nằm giữa hai số nguyên liên tiếp.*

Hàm phần lẻ của số thực x ký hiệu là $\{x\}$ được định nghĩa bằng công thức $\{x\} = x - [x]$

0.2.4. Hiệu hai lũy thừa

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + a^{n-k}b^{k-1} + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} \ (n,k \in N^*)$$

0.2.5. Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \ (n \in N^*)$$

trong đó $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$ ($k \in N$ với quy ước $0! = 1$); $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

0.2.6. Một cấp số cộng (*arithmetic progression* hoặc *arithmetic sequence*) là một dãy số thoả mãn điều kiện: Hiệu hai phần tử liên tiếp nhau là một hằng số, hằng số này được gọi là công sai của cấp số cộng. Các phần tử của dãy số được gọi là các số hạng của cấp số cộng. Ký hiệu số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng, tương ứng là a_1 và d; khi đó:

- Số hạng thứ n của cấp số cộng được xác định bằng công thức $a_n = a_1 + (n-1)d$

- Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng, được gọi là tổng riêng thứ n của cấp số cộng, được xác định bằng công thức $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

0.2.7. Một cấp số nhân (*geometric progression* hoặc *geometric sequence*) là một dãy số thoả mãn điều kiện: Tỷ số của hai phần tử liên tiếp là hằng số, hằng số này được gọi là công bội của cấp số nhân. Các phần tử của dãy số được gọi là các số hạng của cấp số nhân. Ký hiệu số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân, tương ứng là g_1 và q; khi đó:

- Số hạng thứ n của cấp số nhân được xác định bằng công thức $g_n = g_1q^{n-1}$

- Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân với công bội $q \neq 1$, được gọi là tổng riêng thứ n của cấp số nhân, được xác định bằng công thức $S_n = \sum_{k=1}^{n} g_k = \dfrac{g_1(1-q^n)}{1-q}$

0.3. Các ví dụ

Ví dụ **0.3.1.** Chứng minh các đẳng thức: (a) $C_n^k = C_n^{n-k}$, (b) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Bài giải. Dùng phương pháp chứng minh trực tiếp

(a) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$

(b) $C_n^k + C_n^{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} =$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\left(\frac{k+1}{n+1} + \frac{n-k}{n+1}\right) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = C_{n+1}^{k+1}$$

Ví dụ **0.3.2.** Chứng minh công thức hiệu hai lũy thừa: $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$

Bài giải. Dùng phương pháp quy nạp toán học

Khi n = 1 ta có $a^1 - b^1 = (a-b)\sum_{k=1}^{1} a^{n-k}b^{k-1} \Leftrightarrow a-b = (a-b)a^{1-1}b^{1-1} = a-b$ đẳng thức đúng

Giả sử đẳng thức đúng với n, tức là $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$

Phải chứng minh đẳng thức đúng với n+1, thật vậy:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ab^n + ab^n - b^{n+1} = (aa^n - ab^n) + (ab^n - b^{n+1}) = a(a^n - b^n) + b^n(a-b) =$$

$$= a(a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} + b^n(a-b) = (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^{k-1} + b^n\right) =$$

$$= (a-b)\left[(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1}) + b^n\right] = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n) =$$

$$= (a-b)\sum_{k=1}^{n+1} a^{(n+1)-k}b^{k-1}$$

Ví dụ **0.3.3.** Tính tổng $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$

Bài giải. Dùng phương pháp chứng minh trực tiếp

Hiển nhiên ta có đẳng thức $(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}$ (0.1)

- Áp dụng Nhị thức Newton đối với hai thừa số ở vế trái của (0.1):

$$(1+x)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} 1^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\right)$$

$$= \left(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n\right)\left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^{n-1}x + C_n^n\right)$$

suy ra hệ số của x^n trong biểu thức trên là $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$ (0.2)

- Áp dụng Nhị thức Newton đối với vế phải của (0.1):

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k 1^{2n-k} x^k = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k =$$

$$= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{n-1}x^{n-1} + C_{2n}^n x^n + C_{2n}^{n+1}x^{n+1} + ... + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

suy ra hệ số của x^n của biểu thức trên là C_{2n}^n (0.3)

Vì hệ số của x^n ở vế trái và vế phải của (0.1) là như nhau, nên từ (0.2) và (0.3) ta suy ra $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

Ví dụ **0.3.4.** Chứng minh $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, trong đó x_k (k = 1,2,…,n) là các số cùng dấu, lớn hơn -1.

Bài giải. Dùng phương pháp quy nạp toán học

Khi n = 1: $\prod_{k=1}^{1}(1+x_k) = 1 + x_1 = 1 + \sum_{k=1}^{1} x_k$, dấu bằng xảy ra.

Khi n = 2: $\prod_{k=1}^{2}(1+x_k) = (1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2 = 1 + \sum_{k=1}^{2} x_k$, bất đẳng thức đúng, do $x_1x_2 > 0$ theo giả thiết x_1, x_2 là các số cùng dấu, lớn hơn -1.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n, tức là ta có $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với n+1. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp và với mọi x_k cùng dấu, lớn hơn -1, ta có

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)=\left[\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right](1+x_{n+1})\geq\left(1+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)(1+x_{n+1})=\left(1+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)+\left(1+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)x_{n+1}=$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)+x_{n+1}+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)x_{n+1}=\left(1+\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right)+\sum_{k=1}^{n}x_kx_{n+1}\geq 1+\sum_{k=1}^{n+1}x_k$$

vì $\sum_{k=1}^{n}x_kx_{n+1}\geq 0$ do mọi x_k ($k = 1,2,\ldots,n+1$) là các số cùng dấu, lớn hơn -1. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = 0$ với $n \geq 2$.

Ví dụ **0.3.5.** Chứng minh rằng, nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương sao cho $\prod_{k=1}^{n}a_k=1$ thì $\sum_{k=1}^{n}a_k\geq n$.

Bài giải. Dùng phương pháp quy nạp toán học

Khi n = 1: $\prod_{k=1}^{1}a_k=a_1=1$, dấu bằng xảy ra.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n, tức là ta có $\sum_{k=1}^{n}a_k\geq n$ nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương sao cho $\prod_{k=1}^{n}a_k=1$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với n+1. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\prod_{k=1}^{n+1}a_k=1$ được sắp xếp theo thứ tự $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$ thế thì $a_1 \leq 1$ và $a_{n+1} \geq 1$. Vì $1 = a_1a_2\ldots a_na_{n+1} = a_2a_3\ldots a_n(a_1a_{n+1})$, sử dụng giả thiết quy nạp với n số $a_2, a_3, \ldots, a_n, (a_1a_{n+1})$ suy ra $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + (a_1a_{n+1}) \geq n$, do đó

$$a_1 + [a_2 + a_3 + \ldots + a_n + (a_1a_{n+1})] + a_{n+1} \geq a_1 + n + a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_1a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}a_k\geq n+a_1+a_{n+1}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n+1}a_k\geq n+a_1+a_{n+1}-a_1a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n+1}a_k\geq n+a_{n+1}(1-a_1)+a_1-1+1=n+1+(1-a_1)(a_{n+1}-1)\geq n+1$$

vì $(1-a_1)(a_{n+1}-1) \geq 0$ do $a_1 \leq 1$ và $a_{n+1} \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

Ví dụ **0.3.6.** Tính tổng $S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)$ với m là số tự nhiên tùy ý.

Bài giải

<u>Cách 1.</u> Đặt $u_k=k(k+1)...(k+m-1)$ với $k = 1,2,3,\ldots,n \Rightarrow S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}u_k$

Xét $\dfrac{u_k}{u_{k-1}}=\dfrac{k(k+1)...(k-1+m-1)(k+m-1)}{(k-1)k(k+1)...(k-1+m-1)}=\dfrac{k+m-1}{k-1}$

$$\Rightarrow (k-1)u_k=(k+m-1)u_{k-1}=[(k-2)+(m+1)]u_{k-1} \text{ với } k = 2,3,\ldots,n$$

hay

$$+\begin{cases}1u_2 = [0+(m+1)]u_1\\ 2u_3 = [1+(m+1)]u_2\\ 3u_4 = [2+(m+1)]u_3\\ \ldots\\ (n-3)u_{n-2} = [(n-4)+(m+1)]u_{n-3}\\ (n-2)u_{n-1} = [(n-3)+(m+1)]u_{n-2}\\ (n-1)u_n = [(n-2)+(m+1)]u_{n-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (n-1)u_n = (m+1)(u_1+u_2+\ldots+u_{n-2}+u_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow (n-1)u_n = (m+1)(S_n^{(m)} - u_n) \Rightarrow S_n^{(m)} = \frac{(n+m)u_n}{m+1}$$

Thay $u_n = n(n+1)\ldots(n+m-1)$ vào đẳng thức trên và sau khi biến đổi ta được

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)(n+m)}{m+1}$$

Cách 2. Tính $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)$ lần lượt với m = 1, 2, 3, 4; ứng với mỗi giá trị cụ thể của m = 1, 2, 3, 4 ta tính tổng lần lượt với n = 1, 2, 3, 4. Từ các kết quả nhận được ta dự đoán được tổng cần tính và sau đó chứng minh tính đúng đắn của tổng cần tính đã dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

+ m = 1: $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} k$

+	$S_n^{(1)}$	=	1	+	2	+	3	+	…	+	(n-2)	+	(n-1)	+	n
	$S_n^{(1)}$	=	n	+	(n-1)	+	(n-2)	+	…	+	3	+	2	+	1
$2S_n^{(1)}$		=	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+	…	+	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)

$$\Rightarrow 2S_n^{(1)} = n(n+1) \Rightarrow S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

+ m = 2: $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$$n=1: S_1^{(2)} = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = \frac{1.2.3}{3}$$

$$n=2: S_2^{(2)} = \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = S_1^{(2)} + 2.3 = \frac{1.2.3}{3} + 2.3 = \frac{2.3.4}{3}$$

$$n=3: S_3^{(2)} = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = S_2^{(2)} + 3.4 = \frac{2.3.4}{3} + 3.4 = \frac{3.4.5}{3}$$

$$n=4: S_4^{(2)} = \sum_{k=1}^{4} k(k+1) = S_3^{(2)} + 4.5 = \frac{3.4.5}{3} + 4.5 = \frac{4.5.6}{3}$$

Dự đoán $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

+ m = 3: $S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$$n=1: S_1^{(3)} = \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1.2.3 = \frac{1.2.3.4}{4}$$

$$n=2: S_2^{(3)} = \sum_{k=1}^{2} k(k+1)(k+2) = S_1^{(3)} + 2.3.4 = \frac{1.2.3.4}{4} + 2.3.4 = \frac{2.3.4.5}{4}$$

$$n=3: S_3^{(3)}=\sum_{k=1}^{3}k(k+1)(k+2)=S_2^{(3)}+3.4.5=\frac{2.3.4.5}{4}+3.4.5=\frac{3.4.5.6}{4}$$

$$n=4: S_4^{(3)}=\sum_{k=1}^{4}k(k+1)(k+2)=S_3^{(3)}+4.5.6=\frac{3.4.5.6}{4}+4.5.6=\frac{4.5.6.7}{4}$$

Dự đoán $S_n^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

+ m = 4: $S_n^{(4)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)$

$$n=1: S_1^{(4)}=\sum_{k=1}^{1}k(k+1)(k+2)(k+3)=1.2.3.4=\frac{1.2.3.4.5}{5}$$

$$n=2: S_2^{(4)}=\sum_{k=1}^{2}k(k+1)(k+2)(k+3)=S_1^{(4)}+2.3.4.5=\frac{1.2.3.4.5}{5}+2.3.4.5=\frac{2.3.4.5.6}{5}$$

$$n=3: S_3^{(4)}=\sum_{k=1}^{3}k(k+1)(k+2)(k+3)=S_2^{(4)}+3.4.5.6=\frac{2.3.4.5.6}{5}+3.4.5.6=\frac{3.4.5.6.7}{5}$$

$$n=4: S_4^{(4)}=\sum_{k=1}^{4}k(k+1)(k+2)(k+3)=S_3^{(4)}+4.5.6.7=\frac{3.4.5.6.7}{5}+4.5.6.7=\frac{4.5.6.7.8}{5}$$

Dự đoán $S_n^{(4)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

Từ các kết quả trên ta dự đoán tổng cần tính là

$$S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)=\frac{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)}{m+1} \quad (0.4)$$

Bây giờ ta chứng minh (0.4) trên bằng phương pháp quy nạp toán học:

(1) Khi n = 1 ta có

$$S_1^{(m)}=\sum_{k=1}^{1}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)=\frac{1(1+1)(1+2)...(1+m-1)(1+m)}{m+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1(1+1)(1+2)...(1+m-1)=\frac{1.2.3...m(m+1)}{m+1}\Leftrightarrow 1.2.3...m=\frac{(m+1)!}{m+1}\Leftrightarrow m!=m!$$

Vậy, công thức (0.4) là đúng với n = 1.

(2) Giả sử công thức (0.4) đúng với n, tức là

$$S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)=\frac{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)}{m+1}$$

(3) Ta phải chứng minh công thức (0.4) đúng với n+1, thật vậy

$$S_{n+1}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n+1}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)...(k+m-1)\right]+(n+1)(n+1+1)...(n+1+m-2)(n+1+m-1)=$$

$$=S_n^{(m)}+(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)}{m+1}+(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)(n+1+m)}{m+1}\left(\frac{n}{n+1+m}+\frac{m+1}{n+1+m}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)...(n+m-1)(n+m)(n+1+m)}{m+1} \text{ (đpcm).}$$

Bài tập

0.1. Chứng minh các bất đẳng thức:

(a) $|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$ với $\forall a,b \in \mathbf{R}$

(b) $\big||a|-|b|\big| \le |a-b| \le |a|+|b|$ với $\forall a,b \in \mathbf{R}$

(c) $\left|x+\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \ge |x|-\sum_{k=1}^{n}|x_k|$ với $\forall x \in \mathbf{R}$ và $\forall x_k$ (k=1,2,…,n) $\in \mathbf{R}$

0.2. Chứng minh rằng $|x| = x.\mathrm{sgn}(x)$ với $\forall x \in \mathbf{R}$

0.3. Chứng minh rằng $0 \le \{x\} < 1$ với $\forall x \in \mathbf{R}$

0.4. Chứng minh đẳng thức $C_n^{k-1} + 2C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+2}^{k+1}$

0.5. Chứng minh Nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

HD: Dùng phương pháp quy nạp toán học.

0.6. Chứng minh (a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$, (c) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, (d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

HD: (a) Dùng Nhị thức Newton với a = b = 1; (b) Dùng Nhị thức Newton với a = 1 và b= -1; (c) Chứng minh $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ và sử dụng (a); (d) Chứng minh $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$ và sử dụng (a).

0.7. Chứng minh bất đẳng thức Bernoulli $(1 + x)^n \ge 1 + nx$ với $x > -1$ và mọi số tự nhiên $n \ge 1$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi (n = 1 hoặc x = 0).

HD: Cách 1. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức của Ví dụ 0.3.4 (coi như là một Bổ đề) với $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x > -1$.

0.8. Ký hiệu A_n, G_n và H_n lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hòa của n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \ge G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$, với $a_k \ge 0$ (k = 1,2,…,n) (bất đẳng thức Cauchy: Trung bình cộng của các số không âm, không nhỏ hơn trung bình nhân của chính các số ấy). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(b) $G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \ge H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$, với $a_k \ge 0$ (k = 1,2,…,n) (trung bình nhân của các số dương, không nhỏ hơn trung bình điều hòa của chính các số ấy). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

HD: (a) Đặt $b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} b_i = 1$, áp dụng kết quả đã được chứng minh ở Ví dụ 0.3.5 (coi như là một Bổ đề) đối với n số $b_1, b_2, \ldots, b_n$; (b) Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đặt $b_k = \frac{1}{a_k}$ (k = 1,2,…,n). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

0.9. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$, với a_k, b_k ($k = 1,2,\ldots,n$) là các số thực tùy ý. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}$.

HD: Từ bất đẳng thức hiển nhiên đúng $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x \pm b_k)^2 \ge 0$ với $\forall x$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2 \pm 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \ge 0$ với $\forall x$, từ bất đẳng thức này suy ra rằng biệt thức Δ' của tam thức bậc hai f(x) là không dương.

0.10. Chứng minh các bất đẳng thức

$$\text{(a)}\quad n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ với } n > 1,\ \text{(b)}\ (n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n \text{ với } n > 1.$$

HD: (a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, …, $a_k = k$, …, $a_n = n$; (b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, …, $a_k = k^2$, …, $a_n = n^2$.

0.11. Tính các tổng (a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$; (b) $S_{\cos} = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$; (c) $S_{\sin} = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$

HD: (a) Cách 1. Để ý rằng $\frac{1}{2k^2} = \frac{2}{4k^2} = \frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}$. Cách 2. Tính S_1, S_2, S_3, S_4 và dự đoán kết quả, sau đó chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Trong quá trình biến đổi, sử dụng công thức $\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\frac{\alpha \mp \beta}{1 \pm \alpha\beta}$; (b) và (c) Nhân tổng cần tính với $\sin\frac{x}{2}$.

0.12. Tính tổng $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}$ với m là số tự nhiên tùy ý.

HD: Cách 1. Đặt $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}$ và xét tỷ số $\frac{u_{k+1}}{u_k}$

Cách 2. Như cách làm ở Ví dụ 0.3.6, tức là: Tính $S_n^{(m)}$ lần lượt với m = 1,2,3,4; ứng với mỗi giá trị cụ thể của m ta tính tổng lần lượt n = 1,2,3,4. Từ các kết quả nhận được ta dự đoán được tổng cần tính và chứng minh tính đúng đắn của dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

0.13. Tính tổng $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k^m$ với m là số tự nhiên tùy ý, nếu biết $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \ldots, S_n^{(m-1)}$. Đã biết $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+2)}{2}$, dùng công thức tìm được hãy lần lượt tính $S_n^{(2)}, S_n^{(3)}, S_n^{(4)}$.

HD: Sử dụng Nhị thức Newton đối với $(k+1)^{m+1}$ lần lượt với k = 0,1,2,…,n; sau đó cộng (n+1) đẳng thức này với nhau.

0.14. Tính tổng $S_n(a_1, d) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$, trong đó $\{a_n\}$ là cấp số cộng với $a_1 \ne 0$ và công sai $d \ne 0$.

HD: Đặt $u_k = \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ và vì $a_{k+1} - a_k = d$ nên $u_k = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

0.15. Tính tổng $S_n^{(a)} = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \ldots + \underbrace{\overline{a\ldots aa}}_{n-1} + \underbrace{\overline{a\ldots aaa}}_{n}$ với a ={1, 2, …, 9}.

HD: Để ý rằng $\underbrace{\overline{a\ldots aaa}}_{n} = a(\underbrace{1\ldots 111}_{n}) = \frac{a}{9}(\underbrace{9\ldots 999}_{n}) = \frac{a}{9}(10^n - 1)$.