

## Đề thi giữa kỳ MAT1042

### A.

- Cho hàm số  $f(x, y) = (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy+x^2}}$ 
  - Tìm và vẽ đồ thị của tập xác định  $D(f)$ .
  - Tính  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} f(x, y)$ .
- Cho hàm số  $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ . Tính  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial \vec{e}}$  theo hướng của  $\text{Grad}f(x, y, z)$  tại điểm  $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .
- Chứng minh rằng, hàm số  $u = f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  là nghiệm của phương trình  $\nabla u = 0$ , trong đó  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  là toán tử Laplace.
- Xác định cực trị của hàm số  $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 36xy$ .
- Cho  $D$  là hình viên phân  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x + y \geq a \end{cases}$  ( $a > 0$ ). Xác định giá trị của  $a$  để  $\iint_D (x + y) dx dy = \frac{1}{3}$ .

### B.

- Tính  $f''_{xy}(0,0)$  và  $f''_{yx}(0,0)$  nếu  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0,0) \end{cases}$
- Cho hàm số  $f(x, y) = \frac{x^m \sin(2y)}{x^2 + 2y^2}$  với  $x > 0, m > 0$ . Tìm  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0)} f(x, y)$  khi  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases}$ .
- Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số  $f(x, y) = xy + x + y$  trên miền đóng  $D$  là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 1, x = 2, y = 2$  và  $y = 3$ .
- Xác định cực trị của hàm số  $f(x, y) = 6x^2y - 24xy - 6x^2 + 24x + 4y^3 - 15y^2 + 36y + 1$ .
- Tìm giá trị của tham số  $m \neq 0$  sao cho  $\int_0^1 dy \int_0^1 \sin(mx^2) dx = 0$ .

### C.

- Cho hàm số  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{xy} & \text{khi } xy \neq 0 \\ q & \text{khi } xy = 0 \end{cases}$ 
  - Tìm tập xác định  $D(f)$  và xác định giá trị của tham số  $p$  để hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $D(f)$ .
  - Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số  $f(x, y)$  tại điểm  $(0,0)$  với giá trị của tham số  $q$  được xác định ở 1.1.
- Cho hàm số  $u = f(x, y, z) = x \sin(yz)$ . Tính  $\text{Grad}f(x, y, z)$  và  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial \vec{e}}$  tại điểm  $M_0(1, 3, 0)$  với véc tơ  $\vec{e}$  là véc tơ đơn vị của véc tơ  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .
- Tính  $f''_{xy}(x, y)$  nếu  $f(u) = u^3$  và  $u(x, y) = 2xy + e^{2x}$ .
- Xác định cực trị của hàm số  $f(x, y) = (x - y)e^{-2x - y^2}$ .
- Cho hình chóp có các đỉnh  $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$  trong hệ tọa độ Descartes Oxyz với  $a, b, c$  là các số dương.
  - Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm  $A, B$  và phương trình mặt phẳng đi qua các điểm  $A, B, C$ .
  - Tính diện tích  $\Delta ABC$  và thể tích của hình chóp  $OABC$  bằng tích phân hai lớp.

**D.**

1. Cho hàm số  $f(x, y) = (ax + by) \sin \frac{a}{x} \sin \frac{b}{y}$

1.1. Tìm và vẽ đồ thị của tập xác định  $D(f)$ .

1.2. Tính  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

2. Cho hàm số  $f(x, y) = \frac{x^m}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$  với  $x > 0, m > 0$ . Tìm  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0)} f(x, y)$  khi  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases}$ .

3. Cho hàm số  $f(x, y) = y\sqrt{y/x}$ , chứng minh rằng  $x^2 f''_{x^2}(x, y) = y^2 f''_{y^2}(x, y)$ .

4. Xác định cực trị của hàm số  $f(x, y) = xy \ln(x + 2y)$  trên miền  $x > 0, y > 0$ .

5. Cho miền  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x, y^2 = 2x, y = ax\} \ (a > 0)$ . Xác định  $a$  nếu diện tích của  $D$  bằng  $\frac{1}{2}$  đvdt.

**E.**

1. Cho hàm số  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + y^3}{\ln(1 + x^2 + y^2)} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số  $f(x, y)$  tại điểm  $(0, 0)$ .

2. Cho hàm số  $f(x, y) = \frac{x^m y(x^2 + y^2)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$  với  $x > 0, m > 0$ . Tìm  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0)} f(x, y)$  khi  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases}$ .

3. Cho hàm số  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ . Chứng minh rằng, các hàm số  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  không liên tục tại điểm  $(0, 0)$ .

4. Xác định cực trị của hàm số  $z = f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$  trên miền  $x > 0, y > 0$ .

5. Đổi thứ tự tích phân để tính  $I = \int_0^1 dx \int_1^{2-x} \cos\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) dy$

**F.**

1. Tính  $f''_{xy}(0, 0)$  và  $f''_{yx}(0, 0)$  nếu  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x + y} & \text{khi } x \neq -y \\ 0 & \text{khi } x = -y \end{cases}$

2. Cho hàm số  $z(x, y)$  xác định từ phương trình  $xe^y + 2yz + ze^x = 0$ , tính các đạo hàm riêng  $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ .

3. Cho hàm số  $u = f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ . Tính  $\text{Grad} f(x, y, z)$  và  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial \vec{e}}$  tại điểm  $M_0(1, -1, 3)$  với véc tơ  $\vec{e}$  là véc tơ đơn vị của véc tơ  $\overrightarrow{M_0 M}$ , điểm  $M$  có tọa độ  $(0, 1, 1)$ .

4. Xác định cực trị của hàm số  $z = f(x, y) = x + y$  với điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ .

5. Tính  $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  với  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \geq x\}$