Đề thi giữa kỳ học phần MAT1042

Câu 1. Tính $f''_{xy}(0,0)$ và $f''_{yx}(0,0)$ nếu $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x+y} & \text{khi} \quad x\neq -y\\ 0 & \text{khi} \quad x=-y\end{cases}$.

Câu 2. Cho hàm số z(x,y) xác định từ phương trình $xe^y+2yz+ze^x=0$, tính các đạo hàm riêng $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$.

Câu 3. Cho hàm số u = f(x,y,z) = $x^2y^2z^2$. Tính Gradf(x,y,z) và $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{e}}$ tại điểm $M_0(1,-1,3)$ với véc tơ $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$, điểm M có tọa độ (0,1,1).

Câu 4. Xác định cực trị của hàm số $z=f(x,y)=x+y$ với điều kiện $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$.

Câu 5. Tính $I=\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ với $D=\{(x,y)\in R^2 \,|\, 2x\le x^2+y^2\le 6x, y\ge x\}$.

Đáp án và Thang điểm

Câu 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x+y} & \text{khi} \quad x\neq -y\\ 0 & \text{khi} \quad x=-y\end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.**(0,25đ)**

Với $x\neq -y$, tính đạo hàm riêng theo quy tắc, chúng ta được $\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{y^3}{(x+y)^2}\\ f'_y(x,y)=\dfrac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}\end{cases}$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow f'_x(0,y)=\dfrac{y^3}{(0+y)^2}=y$ với $\forall y\neq 0$**(0,25đ)** và $f'_y(x,0)=\dfrac{2x^2.0+x.0^2}{(x+0)^2}=0$ với $\forall x\neq 0$**(0,25đ)**

Tính đạo hàm riêng tại điểm (0,0) theo định nghĩa, chúng ta được

$$\begin{cases} f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x.0^2}{x+0}-0}{x}=0\\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{2.0^2.y+0.y^2}{(0+y)^2}-0}{y}=0\end{cases} \quad \textbf{(0,5đ)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y-0}{y}=1\\ f''_{yx}(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0\end{cases} \quad \textbf{(0,5đ)}$$

Câu 2. Chúng ta có $F(x,y,z)=xe^y+2yz+ze^x=0 \Rightarrow$ Tập xác định D(F) = $\mathbf{R}^3$.**(0,25đ)**

$$\Rightarrow\begin{cases} F'_x(x,y,z)=\dfrac{\partial(xe^y+2yz+ze^x)}{\partial x}=e^y+ze^x\\ F'_y(x,y,z)=\dfrac{\partial(xe^y+2yz+ze^x)}{\partial y}=xe^y+2z\\ F'_z(x,y,z)=\dfrac{\partial(xe^y+2yz+ze^x)}{\partial z}=2y+e^x\end{cases} \textbf{(0,5đ)} \Rightarrow \begin{cases} z'_x(x,y)=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\dfrac{e^y+ze^x}{2y+e^x}\\ z'_y(x,y)=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\dfrac{xe^y+2z}{2y+e^x}\end{cases} \textbf{(0,25đ)}$$

với điều kiện $2y+e^x\neq 0$.**(0,25đ)**

Mặt khác, từ $xe^y + 2yz + ze^x = 0 \Rightarrow z(x,y) = -\dfrac{xe^y}{2y+e^x}$ **(0,25đ)** với điều kiện $2y + e^x \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x(x,y) = -\dfrac{e^y + ze^x}{2y+e^x} = -\dfrac{e^y - \dfrac{xe^y}{2y+e^x}e^x}{2y+e^x} = \dfrac{(x-1)e^x - 2y}{(2y+e^x)^2}e^y \\ z'_y(x,y) = -\dfrac{xe^y + 2z}{2y+e^x} = -\dfrac{xe^y - 2\dfrac{xe^y}{2y+e^x}}{2y+e^x} = \dfrac{2-2y-e^x}{(2y+e^x)^2}xe^y \end{cases}$$ **(0,5đ)**

Cách khác. Từ $xe^y + 2yz + ze^x = 0 \Rightarrow z(x,y) = -\dfrac{xe^y}{2y+e^x}$ **(0,25đ)** với điều kiện $2y + e^x \neq 0$**(0,25đ)**

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{xe^y}{2y+e^x}\right) = \dfrac{(x-1)e^x - 2y}{(2y+e^x)^2}e^y \\ z'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{xe^y}{2y+e^x}\right) = \dfrac{2-2y-e^x}{(2y+e^x)^2}xe^y \end{cases}$$ với điều kiện $2y + e^x \neq 0$.**(1,25đ)**

Câu 3. Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ là $D(f) = \mathbf{R}^3$.**(0,25đ)**

- Xác định véc tơ Gradf(x,y,z) tại điểm $M_0(1,-1,3)$:

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2xy^2z^2 \\ f'_y(x,y,z) = 2x^2yz^2 \\ f'_z(x,y,z) = 2x^2y^2z \end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \text{Grad}f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\vec{i} + f'_y(x,y,z)\vec{j} + f'_z(x,y,z)\vec{k} = 2xy^2z^2\vec{i} + 2x^2yz^2\vec{j} + 2x^2y^2z\vec{k}$$

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(1,-1,3) = 2.1.(-1)^2.3^2 = 18 \\ f'_y(1,-1,3) = 2.1^2.(-1).3^2 = -18 \\ f'_z(1,-1,3) = 2.1^2(-1)^2.3 = 6 \end{cases}$ **(0,25đ)** $\Rightarrow \text{Grad}f(1,-1,3) = 18\vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}$.**(0,25đ)**

- Tính đạo hàm theo hướng của véc tơ $\vec{e}$ tại điểm $M_0(1,-1,3)$ với $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$:

Chúng ta có $\overrightarrow{M_0M} = (0-1)\vec{i} + [1-(-1)]\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \equiv (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -1/3 \\ \cos\beta = 2/3 \\ \cos\gamma = -2/3 \end{cases}$ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \frac{\partial f(1,-1,3)}{\partial \vec{e}} = f'_x(1,-1,3)\cos\alpha + f'_y(1,-1,3)\cos\beta + f'_z(1,-1,3)\cos\gamma = 18\left(-\frac{1}{3}\right) - 18.\frac{2}{3} + 6\left(-\frac{2}{3}\right) = -22$$.**(0,25đ)**

Câu 4. Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y viết lại dưới dạng $g(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1 = 0$.

Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x + y$ với điều kiện $g(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1 = 0$ là

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \neq 0 \text{ và } y \neq 0\}$ là tập hợp các điểm (x,y) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, không kể các điểm nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy.**(0,25đ)**

Để giải bài toán này, chúng ta sử dụng Phương pháp nhân tử Lagrange.

- Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x + y + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1\right)$ **(0,25đ)**

- Chúng ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[x + y + \lambda\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1\right)\right] = 1 - \dfrac{\lambda}{x^2} \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x + y + \lambda\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1\right)\right] = 1 - \dfrac{\lambda}{y^2} \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left[x + y + \lambda\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1\right)\right] = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 1 \end{cases}$ **(0,25đ)** nên điểm dừng (nếu có) của hàm số $L(x,y,\lambda)$ là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0 \\ 1 - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x^2 = y^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$. Hệ phương trình này có nghiệm $(x_0,y_0) = (2,2)$ duy nhất tương ứng với điểm dừng $(x_0,y_0) = (2,2)$ của hàm số $L(x,y,\lambda)$ tương ứng với $\lambda_0 = 4$.**(0,25đ)**

- Với $\lambda_0 = 4$ chúng ta được $L(x,y,4) = f(x,y) + 4g(x,y) = x + y + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1\right)$ là hàm số của 2 biến x, y. Bây giờ, chúng ta xác định cực trị của hàm số $L(x,y,4)$ tại điểm dừng (2,2).

Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,4) = 1 - \dfrac{4}{x^2} \\ L'_y(x,y,4) = 1 - \dfrac{4}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L''_{x^2}(x,y,4) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,4)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right) = \dfrac{8}{x^3} \\ L''_{xy}(x,y,4) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,4)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right) = 0 \\ L''_{y^2}(x,y,4) = \dfrac{\partial L'_y(x,y,4)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{4}{y^2}\right) = \dfrac{8}{y^3} \end{cases}$ **(0,25đ)**

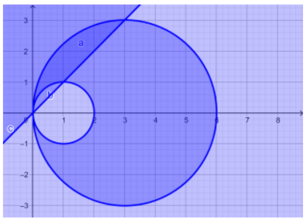
$\Rightarrow \begin{cases} A(2,2) = L''_{x^2}(2,2,4) = 1 \\ B(2,2) = L''_{xy}(2,2,4) = 0 \Rightarrow \Delta(2,2) = B^2(2,2) - A(2,2)C(2,2) = -1. \\ C(2,2) = L''_{y^2}(2,2,4) = 1 \end{cases}$**(0,25đ)**

Chúng ta thấy $\begin{cases} \Delta(2,2) = -1 < 0 \\ A(2,2) = 1 > 0 \end{cases}$ **(0,25đ)** nên hàm số L(x,y,4) đạt cực tiểu địa phương tại điểm (2,2) tức là hàm số $f(x,y) = x + y$ đạt cực tiểu địa phương tại điểm (2,2) và $f_{ct} = f(2,2) = 4$.**(0,25đ)**

Cách khác. Sau khi tìm được $\begin{cases} L''_{x^2}(2,2,4) = 1 \\ L''_{xy}(2,2,4) = 0 \\ L''_{y^2}(2,2,4) = 1 \end{cases}$ chúng ta có vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số L(x,y,4) là

$d^2L(2,2,4) = L''_{x^2}(2,2,4)dx^2 + 2L''_{xy}(2,2,4)dxdy + L''_{y^2}(2,2,4)dy^2 = dx^2 + dy^2 > 0$ là dạng toàn phương xác định dương của các biến dx, dy nên hàm số L(x,y,4) đạt cực tiểu địa phương tại điểm (2,2) tức là hàm số $f(x,y) = x + y$ đạt cực tiểu địa phương tại điểm (2,2) và $f_{ct} = f(2,2) = 4$.

Câu 5. Đồ thị của miền $D = \{(x,y) \in R^2 | 2x \le x^2 + y^2 \le 6x, y \ge x\}$ (mầu xanh đậm) là



Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1^2$ cắt đường thẳng y = x tại điểm O(0,0) và điểm A(1,1); còn đường tròn $x^2 + y^2 = 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ cắt đường thẳng y = x tại điểm O(0,0) và điểm B(3,3).**(0,25đ)**

Chiếu miền D lên trục Ox thì $D = D_2 \setminus D_1$ với $\begin{cases} D_2 = \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x \le y \le \sqrt{6x - x^2} \end{cases} \\ D_1 = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{2x - x^2} \end{cases} \end{cases}$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = I_2 - I_1$ với $\begin{cases} I_2 = \iint\limits_{D_2} \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ I_1 = \iint\limits_{D_1} \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$ **(0,25đ)**

- Tính I_2: Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Khi đó chúng ta có ảnh của miền D_2 là miền $D'_2 = \begin{cases} 0 \le r \le 6\cos\varphi \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$, định thức Jacobi J = r và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{1}{r}$.

$$\Rightarrow I_2 = \iint\limits_{D_2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint\limits_{D'_2} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} dr = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(r\Big|_{r=0}^{r=6\cos\varphi} \right) d\varphi = 6\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 6\sin\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} = 6 - 3\sqrt{2}.$$ **(0,5đ)**

- Tính I_1: Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Khi đó chúng ta có ảnh của miền D_1 là miền $D'_1 = \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$, định thức Jacobi J = r và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{1}{r}$.

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint\limits_{D'_1} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} dr = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(r\Big|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} \right) d\varphi = 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2\sin\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} = 2 - \sqrt{2}.$$ **(0,5đ)**

$\Rightarrow I = I_2 - I_1 = 6 - 3\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}$. **(0,25đ)**

Cách khác.

Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Để xác định ảnh của D, chúng ta thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào các bất đẳng thức $\begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 6x \\ y \ge x \end{cases}$ thì nhận được $\begin{cases} 2r\cos\varphi \le (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le 6r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \ge r\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi \\ \tan\varphi \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi \\ \varphi \ge \pi/4 \end{cases}$.

Mặt khác, từ đồ thị của miền D chúng ta thấy các điểm của miền D đều nằm trong góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy nên $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \ge 0 \\ y = r\sin\varphi \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/2$.

Khi đó chúng ta có ảnh của miền D là $D' = \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$, định thức Jacobi J = r và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{1}{r}$.

$$\Rightarrow I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{D'} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} dr = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(r\Big|_{r=2\cos\varphi}^{r=6\cos\varphi} \right) d\varphi = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 4\sin\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} = 4 - 2\sqrt{2}.$$