

Nội dung

Thời gian: 120p, không sử dụng tài liệu

Ôn tập lại toàn bộ nội dung học, có thể tập trung hơn vào:

Giới hạn: kết hợp nhiều định lý, phương pháp để tìm giới hạn

Liên tục: định nghĩa liên tục thông qua giới hạn

Đạo hàm: định nghĩa của đạo hàm thông qua giới hạn, đạo hàm theo phương trình tham số, phương trình tiếp tuyến, đạo hàm bậc cao

Tích phân: ứng dụng tính thể tích vật thể tròn xoay

Tích phân suy rộng: giới hạn + tích phân thông thường

Dãy và chuỗi: chuỗi số, chuỗi lũy thừa

Ví dụ và Bài tập

Câu hỏi

Tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{1 - \cos x} = ?$$

Gợi ý: sử dụng công thức $1 - ab = (1 - a)b + (1 - b)$

$$\frac{1 - \cos x \cos 2x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x) \cos 2x + 1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$$

$$= 5$$

Ví dụ

Tính $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$

Gợi ý: kiểm tra xem giới hạn trên có dạng vô định không?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right\}^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= e$$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(\sqrt{1+x} - 1) \ln(1+x)}{x^4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{(\sqrt{1+x} - 1)}{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

1. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Khảo sát sự liên tục và có đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x_0 = 0$.

2. Find the numbers at which f is discontinuous. At which of these numbers is f continuous from the right, from the left, or neither? Sketch the graph of f .

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ 1/x & \text{if } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

f is continuous on $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, and $(3, \infty)$, where it is a polynomial, a rational function, and a composite of a root function with a polynomial,

$$\text{Now } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \text{ and } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1/x) = 1$$

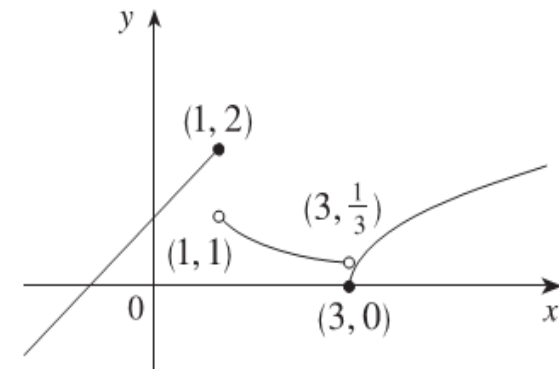
so f is discontinuous at 1

Since $f(1) = 2$, f is continuous from the left at 1

$$\text{Also, } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1/x) = 1/3, \text{ and}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x - 3} = 0 = f(3), \text{ so } f \text{ is discontinuous at 3}$$

but it is continuous from the right at 3.



3. Evaluate the limit, if it exists.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x} / x^3}{(x^3 + 1) / x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{(9x^6 - x) / x^6}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 1/x^3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{9 - 1/x^5}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^3)} = \frac{-\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 9 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^5)}}{1 + 0} \\ &= -\sqrt{9 - 0} = -3 \end{aligned}$$

4. Evaluate the limit, if it exists.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1)}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$$

Applying L'Hospital's rule

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{2 \sin(x) \cos(x)} = 2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = 2$$

5. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{1 - \cos(4x)} \right)$$

6. Cho đường cong (C) được xác định bởi phương trình: $\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$.
- Viết phương trình tham số của (C), tính $y'(x)$.
 - Viết phương trình tiếp tuyến (T) với (C) tại $A\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.
-

$$\text{Phương trình tham số (C): } \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \rightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-3\tan t}{4}.$$

$$A \in (C), A\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}. \text{ Do đó, } y'(x_A) = -3/4$$

$$\text{Suy ra pt (T): } y = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{4}(x - \sqrt{2}) \text{ hoặc (T): } \begin{cases} x = \sqrt{2} + t \\ y = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{4}t \end{cases}.$$

7. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f^{(2021)}(3) = ?$

Giải: Khai triển Taylor hàm số $f(x)$ tại lân cận của điểm $a = 3$, hoặc khai triển $f(x)$ theo các lũy thừa của $(x - 3)$. Đặt $X = x - 3$:

$$f(X) = \frac{X+3}{X+2} = 1 + \frac{1}{X+2} = 1 + \frac{1}{2\left(1 + \frac{X}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{2}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{2}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2^2} - \frac{X^3}{2^3} + \dots - \frac{X^{2021}}{2^{2021}} + o\left(X^{2021}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{X}{2}\right)^k$$

Đổi biến: $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x-3}{2^2} + \frac{(x-3)^2}{2^3} - \dots - \frac{(x-3)^{2021}}{2^{2022}} + o\left((x-3)^{2021}\right)$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-3)^k}{2^{k+1}}$$

Mặt khác: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(3)}{k!} (x-3)^k + o\left((x-3)^n\right)$

Do đó: $\frac{f^{(2021)}(3)}{2021!} = -\frac{1}{2^{2022}} \rightarrow f^{(2021)}(3) = -\frac{2021!}{2^{2022}}$

7a. Tính $f^{(20)}(4)$ với $f(x) = x^4/(x - 2)$

8. Find the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by the given curves about the specified line. Sketch the region, the solid, and a typical disk or washer.

$$x = y^2, \quad x = 1 - y^2; \quad \text{about } x = 3$$

we see they intersect at $x = \frac{1}{2}$ and so $y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

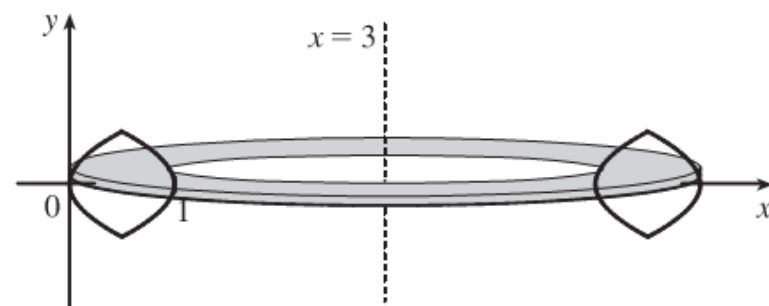
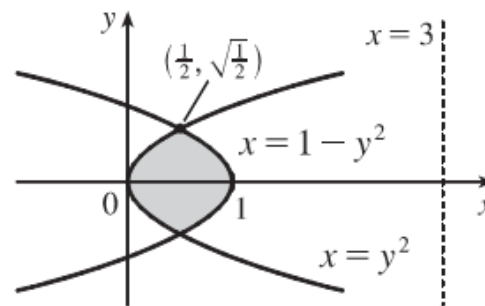
A cross-section is a washer with inner radius $3 - (1 - y^2)$ and outer radius $3 - y^2$

$$A(y) = \pi[(3 - y^2)^2 - (2 + y^2)^2] = \pi(5 - 10y^2).$$

$$V = \int_{-\sqrt{1/2}}^{\sqrt{1/2}} A(y) dy$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{1/2}} 5\pi(1 - 2y^2) dy \quad [\text{by symmetry}]$$

$$= 10\pi \left[y - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}\pi$$



9. Evaluate the integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx. \text{ Integrate by parts:}$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \frac{-\tan^{-1} x}{x} + \int \frac{1}{x} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{-\tan^{-1} x}{x} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \frac{-\tan^{-1} x}{x} + \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\tan^{-1} t}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right] = 0 + \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

10. Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng sau

$$I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}{x} dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x^2} dx$$

11. Tìm miền HT của chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}} (3x-1)^n$

Chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$; $a_n = \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$, $X = 3x-1$

$$\text{Ta có: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

Do đó, khoảng HT của chuỗi: $-1 < X < 1$

Tại $X = 1$: ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$; $b_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x \in [8, +\infty)$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{x(2 - \ln x)}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} < 0, x \in [8, +\infty) \rightarrow f(x) \downarrow, x \in [8, +\infty)$$

Vậy $\{b_n\}$ là dãy đơn điệu giảm với $n \geq 8$

$$\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ HT theo tiêu chuẩn Leinitz, do đó } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ HT}$$

Tại $X = -1$: ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; $b_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$; $c_n = \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$

Mà $\sum_{n=8}^{\infty} c_n$ PK $\left(a = \frac{1}{2} < 1\right)$, nên $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK theo tiêu chuẩn so sánh.

Do đó, miền HT của chuỗi: $-1 < X \leq 1 \leftrightarrow 0 < x \leq 2/3$

12. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 2n} x^{2n}$$

Luyện thêm ở nhà

1. Find the values of a and b that make f continuous everywhere.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{if } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị của a để hàm số liên tục trên \mathbb{R} .

3. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

4. Tìm giới hạn

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan^2 x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan^2 x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln(2x)}}$$

5. Cho hàm số $y(x)$ thỏa mãn phương trình: $(1+2x)y' = x + 2y^2$; $y(0) = 1$.

Tính $y'(0), y''(0), y^{(3)}(0)$.

6. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$, tính $f^{(8)}(-2)$.

7. Cho $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$. Tính $f^{(10)}(2)$.

8. Xét tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^{n^2}$$

9. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 2n} x^{2n}$$

10. Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân suy rộng sau:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

11. Tìm bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n5^n} (x-2)^n$$

12. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo bởi miền $D = \{(x, y): y \leq x, y \geq x^2\}$ khi quay quanh trục Oy

13. Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Ox giới hạn bởi đường elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

14. Tìm bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n5^n} (x-2)^n$$