TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2
(Học kỳ II năm học 2022-2023)

Hệ CLC

Thời gian làm bài 120' (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.(1,5 điểm) Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Khảo sát sự liên tục của hàm số trên $\mathbf{R}^2$.

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm cực trị của hàm số $z=x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Câu 3.(1,5 điểm) Tính $I=\iint\limits_D x\,dxdy$, trong đó D là miền tam giác có các đỉnh O(0,0), A(1,1), B(2,4) bằng cách sử dụng phép đổi biến $\begin{cases}x=t+st\\ y=t+3st\end{cases}$.

Câu 4.(1,5 điểm) Sử dụng hệ tọa độ trụ để tính tích phân $I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int\limits_{3x^2+3y^2+1}^{7}e^{x^2+y^2}dzdydx$.

Câu 5.(1,5 điểm) Giải phương trình vi phân $(y^2-x^2)xy'+(3x^2+y^2)y=0$ với điều kiện $y(1)=1$.

Câu 6.(2,5 điểm) Cho tích phân $I=\int\limits_C h(y)[ydx+(2x-ye^y)dy]$

(**a**) Xác định hàm số h(y) thỏa mãn điều kiện h(1) = 1 sao cho I không phụ thuộc vào dạng của đường C nằm trong mặt phẳng Oxy.

(**b**) Tính I với hàm số h(y) được xác định ở (a) và C là đường bất kỳ nằm trong mặt phẳng Oxy, từ A(3,0) đến B(0,2).

==

Đáp án và Thang điểm

Câu 1.(1,5đ)

Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$ do đó việc khảo sát sự liên tục của hàm số f(x,y) trên $\mathbf{R}^2$ chính là khảo sát sự liên tục của hàm số f(x,y) trên tập xác định D(f) của nó.(**0,25đ**)

Trước tiên chúng ta tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

Chúng ta thấy

$0\le|f(x,y)|=\left|\dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right||\cos(x,y)|\le\left|\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.1=\left|\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\dfrac{x^2y}{\sqrt{y^2}}\right|=x^2\to 0$ khi (x,y) → (0,0) do đó, theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$; mặt khác chúng ta có $f(0,0)=0$ nên suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, theo định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm thì hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0).(**0,5đ**)

Bây giờ, chúng ta tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ với $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ tức là $(x_0,y_0)\in D(f)\backslash\{(0,0)\}$, khi đó chúng ta có

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x_0^2y_0\cos(x_0y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = f(x_0,y_0)$, theo định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm thì hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (x_0,y_0).(**0,25đ**)

Vì (x_0,y_0) là một điểm bất kỳ thuộc tập D(f)\{(0,0)} nên hàm số f(x,y) liên tục tại mọi điểm của tập D(f)\{(0,0)}.(**0,25đ**)

Như vậy, hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định D(f) của nó, tức là liên tục trên $\mathbf{R}^2$.(**0,25đ**)

Lưu ý. Có thể chứng minh hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ liên tục tại mọi điểm (x,y) ≠ (0,0) như sau: Vì hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2y\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ là hàm số sơ cấp nên nó liên tục tại mọi điểm mà hàm số này xác định được, tức là tại mọi điểm (x,y) ≠ (0,0).

Câu 2.(**1,5đ**)

Tập xác định của hàm số $z = f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ là D(f) ={(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|xy ≠ 0} tức là các điểm (x,y) thuộc mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc Oxy nằm ngoài các trục tọa độ Ox, Oy.(**0,25đ**)

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = 1 - 1/x^2 \\ f'_y(x,y) = 1 - 1/y^2 \end{cases}$ nên các điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_x(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1/x^2 = 0 \\ 1 - 1/y^2 = 0 \end{cases}$. Hệ phương trình $\begin{cases} 1 - 1/x^2 = 0 \\ 1 - 1/y^2 = 0 \end{cases}$ có 4 nghiệm $(x_1,y_1) = (-1,-1)$; $(x_2,y_2) = (-1,1)$; $(x_3,y_3) = (1,-1)$; $(x_4,y_4) = (1,1)$ tương ứng với 4 điểm dừng $M_1(-1,-1)$; $M_2(-1,1)$; $M_3(1,-1)$; $M_4(1,1)$ và cả 4 điểm dừng này đều thuộc D(f).(**0,25đ**)

Chúng ta có $\begin{cases} A(x,y) \equiv f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x^3} \\ B(x,y) \equiv f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \\ C(x,y) \equiv f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right) = \dfrac{2}{y^3} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta(x,y) \equiv B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) = -4/x^3y^3$

- Điểm dừng $M_1(-1,-1)$: $\begin{cases} \Delta(-1,-1) = -4 < 0 \\ A(-1,-1) = -2 < 0 \\ f(-1,-1) = -4 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm này và $f_{cđ}$ = f(–1,–1) = –4.(**0,25đ**)

- Điểm dừng $M_2(-1,1)$: $\Delta(-1,1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm này.(**0,25đ**)

- Điểm dừng $M_3(1,-1)$: $\Delta(1,-1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm này.(**0,25đ**)

- Điểm dừng $M_4(1,1)$: $\begin{cases} \Delta(1,1) = -4 < 0 \\ A(1,1) = 2 > 0 \\ f(1,1) = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm này và f_{ct} = f(1,1) = 4.(**0,25đ**)

Cách khác. Thực hiện tương tự như trên, chúng ta tìm được

+ 4 điểm dừng của hàm số là $M_1(-1,-1)$; $M_2(-1,1)$; $M_3(1,-1)$; $M_4(1,1)$ và cả 4 điểm dừng này đều thuộc D(f).

$$+\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = 2/x^3 \\ f''_{xy}(x,y) = 0 \\ f''_{y^2}(x,y) = 2/y^3 \end{cases} \Rightarrow d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 =$$

$\frac{2}{x^3}dx^2 + 2.0.dxdy + \frac{2}{y^3}dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(x,y) = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 0 \\ 0 & 2/x^3 \end{pmatrix}$.

- Tại điểm dừng $M_1(-1,-1)$: Ma trận $A(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ có định thức con chính $A_1 = \det(-2) = -2 < 0$ và định thức con chính $A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$ dạng toàn phương $d^2f(-1,-1)$ xác định âm nên hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm này và $f_{cđ} = f(-1,-1) = -4$.

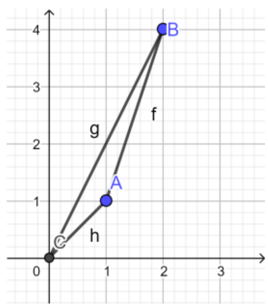
- Tại điểm dừng $M_2(-1,1)$: Ma trận $A(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ có định thức con chính $A_1 = \det(-2) = -2 < 0$ và định thức con chính $A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ dạng toàn phương $d^2f(-1,1)$ không xác định dấu nên hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này.

- Tại điểm dừng $M_3(1,-1)$: Ma trận $A(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ có định thức con chính $A_1 = \det(2) = 2 > 0$ và định thức con chính $A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ dạng toàn phương $d^2f(-1,1)$ không xác định dấu nên hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này.

- Tại điểm dừng $M_4(1,1)$: Ma trận $A(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ có định thức con chính $A_1 = \det(2) = 2 > 0$ và định thức con chính $A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$ dạng toàn phương $d^2f(-1,-1)$ xác định dương nên hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm này và $f_{ct} = f(1,1) = 4$.

Câu 3.(1,5đ)

Chúng ta có: Đoạn thẳng OA nằm trên đường thẳng có phương trình là $y = x$ $(0 \le x \le 1)$, đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng có phương trình là $y = 3x - 2$ $(1 \le x \le 2)$ và đoạn thẳng OB nằm trên đường thẳng có phương trình là $y = 2x$ $(0 \le x \le 2)$. Khi đó, đồ thị của miền (đóng) D (tam giác OAB, kể cả các điểm trên cạnh) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là

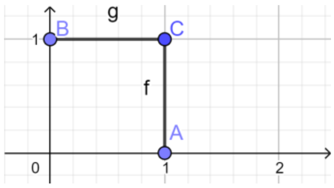


Nếu sử dụng phép đổi biến $\begin{cases} x = t + st \\ y = t + 3st \end{cases}$, đối với điểm bất kỳ $M(x,y) \in D$, chúng ta có:

- So với cạnh OA thuộc đường thẳng $y = x$ thì $y \ge x \Leftrightarrow t + 3st \ge t + st \Leftrightarrow st \ge 0$

- So với cạnh AB thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$ thì $y \geq 3x - 2 \Leftrightarrow t + 3st \geq 3(t + st) - 2 \Leftrightarrow t \leq 1$
- So với cạnh OB thuộc đường thẳng $y = 2x$ thì $y \leq 2x \Leftrightarrow t + 3st \leq 2(t + st) \Leftrightarrow t(s-1) \leq 0$ (**0,5đ**)

Khi đó, ảnh của điểm M(x,y) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là điểm M'(s,t) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc O'st thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} st \geq 0 \\ t \leq 1 \\ t(s-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$, tức là điểm M'(s,t) thuộc miền (đóng) D' (hình vuông O'A'CB', kể cả các điểm trên cạnh) là ảnh của miền D. Miền D' có đồ thị trong hệ tọa độ Descartes vuông góc O'st là



Định thức Jacobi của phép đổi biến $\begin{cases} x(s,t) = t + st \\ y(s,t) = t + 3st \end{cases}$ là $J = \begin{vmatrix} x'_s(s,t) & x'_t(s,t) \\ y'_s(s,t) & y'_t(s,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1+s \\ 3t & 1+3s \end{vmatrix} = -2t$.(**0,5đ**)

$$\Rightarrow I = \iint_D xdxdy = \iint_{D'} x(s,t)|J|dsdt = \iint_{D'} (t+st)2tdsdt = 2\int_0^1 dt \int_0^1 t^2(1+s)ds = 2\left(\int_0^1 t^2 dt\right)\left[\int_0^1 (1+s)ds\right] =$$

$$2\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1}\right)\left[\left(s + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_{s=0}^{s=1}\right] = 2.\frac{1}{3}.\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1.(\mathbf{0{,}5đ})$$

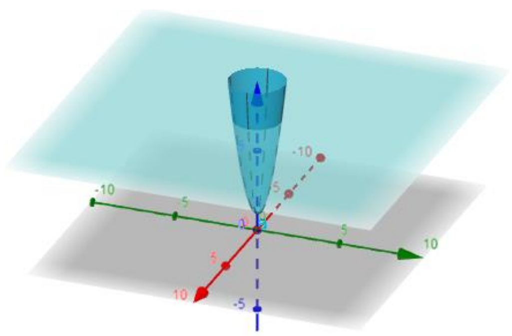
Câu 4.(**1,5đ**) Theo cách tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz thì

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{3x^2+3y^2+1}^{7} e^{x^2+y^2} dzdydx = \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy\right) \int_{3x^2+3y^2+1}^{7} e^{x^2+y^2} dz = \left(\iint_D dxdy\right) \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

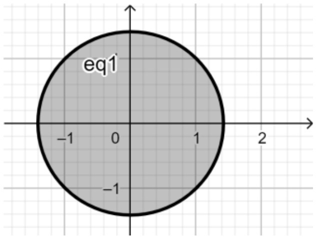
chúng ta xác định được hàm số dưới dấu tích phân là $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}$ và miền lấy tích phân là $V = \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\ 3x^2 + 3y^2 + 1 \leq z \leq 7 \end{cases}$.

$\Rightarrow V = \begin{cases} D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases} \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases}$, trong đó miền phẳng D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0), $\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} y_1(x) = -\sqrt{2-x^2} \\ y_2(x) = \sqrt{2-x^2} \end{cases}$ và $\begin{cases} z_1(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 1 \\ z_2(x,y) = 7 \end{cases}$.(**0,5đ**)

Chúng ta nhận thấy V là vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit $z_1(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 1$ (mặt dưới) và mặt phẳng $z_2(x,y) = 7$ (mặt trên). Đồ thị của vật thể V trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Các điểm (x,y) thuộc giao của mặt paraboloit $z = 3x^2 + 3y^2 + 1$ và mặt phẳng z = 7 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z = 3x^2 + 3y^2 + 1 \\ z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 1 = 7 \\ z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 7 \end{cases}$ là đường tròn tâm (0,0,7) bán kính $\sqrt{2}$ (nằm trong mặt phẳng z = 7), do đó nếu chúng ta chiếu vật thể V lên mặt phẳng tọa độ Oxy thì hình chiếu nhận được là miền phẳng $D = \{x^2 + y^2 \le 2\} \in Oxy$ là hình tròn tâm (0,0) bán kính $\sqrt{2}$.



$\Rightarrow D = \begin{cases} -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ -\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2} \end{cases}$ là hình chiếu của đường tròn $D = \{x^2 + y^2 \le 2\} \in Oxy$ lên trục Ox.(**0,25đ**)

Bây giờ, chúng ta đổi tọa độ Descartes (x,y,z) sang tọa độ trụ (r,φ,z) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ thì chúng ta có:

- Định thức Jacobi đã biết là J = r.

- Hàm dưới dấu tích phân $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = e^{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = e^{r^2}$.

- Ảnh của miền V trong hệ tọa độ trụ (r,φ,z) là $V' = \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 3r^2 + 1 \le z \le 7 \end{cases}$ được xác định bằng cách thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ vào các biểu thức tương ứng ở miền V và căn cứ vào đồ thị của các miền V, D.(**0,25đ**)

$$\Rightarrow I = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)|J|drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{3r^2+1}^{7} re^{r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} re^{r^2} \left(z\Big|_{z=3r^2+1}^{z=7} \right) dr =$$

$$3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2)e^{r^2} dr = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)e^{r^2} d(r^2) = \frac{3}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right)\left[\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)e^{r^2} d(r^2) \right].$$

Chúng ta tính:

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi,$$

$$+ \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)e^{r^2} d(r^2) = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)d(e^{r^2}) = (2 - r^2)e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2} d(2 - r^2) = -2 + \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2} d(r^2) =$$

$$-2 + e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = e^2 - 3$$

$\Rightarrow I = \frac{3}{2}.2\pi(e^2 - 3) = 3\pi(e^2 - 3)$.(**0,5đ**)

Câu 5.(**1,5đ**) Chúng ta có

$$(y^2 - x^2)xy' + (3x^2 + y^2)y = 0 \Leftrightarrow (y^2 - x^2)x\frac{dy}{dx} + (3x^2 + y^2)y = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + y^2)ydx + (y^2 - x^2)xdy = 0.$$

Nếu ký hiệu $\begin{cases} P(x,y) = (3x^2 + y^2)y \\ Q(x,y) = (y^2 - x^2)x \end{cases}$ thì phương trình vi phân $(3x^2 + y^2)ydx + (y^2 - x^2)xdy = 0$ trở thành P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 là phương trình vi phân thuần nhất vì các hàm số P(x,y), Q(x,y) là các hàm số thuần nhất có cùng bậc 3.

Do đó, để giải phương trình vi phân $(3x^2 + y^2)ydx + (y^2 - x^2)xdy = 0$, chúng ta đổi biến y = xt ⇒ dy = xdt + tdx và thay vào phương trình này thì được

$[3x^2 + (xt)^2]xtdx + [(xt)^2 - x^2]x(xdt + tdx) = 0 \Leftrightarrow 2x^3t(t^2+1)dx + x^4(t^2-1)dt = 0$ (**0,5đ**)

Chia cả hai vế của phương trình vi phân vừa nhận được cho $x^4t(t^2 + 1)$, chúng ta được phương trình vi phân có biến số phân ly $2\dfrac{dx}{x} + \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt = 0$ với điều kiện $xt \neq 0$.

$\Rightarrow 2\int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt = C$ (C là hằng số tùy ý)(**0,25đ**)

Bây giờ chúng tính:

$+2\int \dfrac{dx}{x} = 2\ln|x| = \ln x^2$,

$+\int \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt = \int \dfrac{2t^2-(t^2+1)}{t(t^2+1)}dt = \int\left(\dfrac{2t}{t^2+1} - \dfrac{1}{t}\right)dt = \int \dfrac{2tdt}{t^2+1} - \int\dfrac{dt}{t} = \int \dfrac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \ln|t| =$
$\ln(t^2+1) - \ln|t|$.

$\Rightarrow \ln x^2 + \ln(t^2+1) - \ln|t| = C \Leftrightarrow \ln x^2(t^2+1) = \ln e^C + \ln|t| \Leftrightarrow \ln x^2(t^2+1) = \ln(e^C|t|)$

$\Rightarrow x^2(t^2+1) = e^C|t|$.

Để trở về các biến ban đầu, chúng ta thay t = y/x vào biểu thức trên thì nhận được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(y^2 - x^2)xy' + (3x^2+y^2)y = 0$ là $x(x^2+y^2) = e^Cy$ với C là hằng số tùy ý.(**0,5đ**)

Thay điều kiện $y(1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ vào nghiệm tổng quát vừa tìm được, chúng ta có phương trình để xác định hằng số C là $1(1^2+1^2) = e^C.1 \Leftrightarrow e^C = 2 \Rightarrow C = \ln 2$.

Thay C = ln2 vào nghiệm tổng quát, chúng ta được nghiệm riêng cần tìm là $2y = x(x^2+y^2)$ (**0,25đ**)

Cách khác. Chúng ta có

$(y^2-x^2)xy' + (3x^2+y^2)y = 0 \Leftrightarrow (y^2-x^2)x\dfrac{dy}{dx} + (3x^2+y^2)y = 0 \Leftrightarrow (3x^2+y^2)ydx + (y^2-x^2)xdy = 0$.

Nếu ký hiệu $\begin{cases} P(x,y) = (3x^2 + y^2)y \\ Q(x,y) = (y^2 - x^2)x \end{cases}$ thì phương trình vi phân $(3x^2 + y^2)ydx + (y^2 - x^2)xdy = 0$ trở thành phương trình vi phân P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.

Chúng ta nhận thấy $\begin{cases} P'_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2 \\ Q'_x(x,y) = y^2 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{-P(x,y)} = \dfrac{3x^2+3y^2-(y^2-3x^2)}{-(3x^2+y^2)y} = -\dfrac{2}{y}$, do đó phương trình vi phân $(3x^2+y^2)ydx + (y^2-x^2)xdy = 0$ có thừa số tích phân α(y) được xác định bằng phương trình vi phân cấp 1 sau đây:

$\dfrac{d\ln\alpha(y)}{dy} = \dfrac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{-P(x,y)} = -\dfrac{2}{y} \Rightarrow d\ln\alpha(y) = -2\dfrac{dy}{y} \Rightarrow \int d\ln\alpha(y) = -2\int\dfrac{dy}{y} + C$

$\Rightarrow \ln\alpha(y) = -2\ln|y| + C = \ln\dfrac{1}{y^2} + \ln e^C = \ln\dfrac{e^C}{y^2} \Rightarrow \alpha(y) = \dfrac{e^C}{y^2}$ với C là hằng số tùy ý.

Không mất tính tổng quát, chúng ta chọn thừa số tích phân $\alpha(y) = 1/y^2$ (ứng với C = 1).(**0,5đ**)

Bây giờ, chúng ta nhân cả hai vế của phương trình vi phân $(3x^2+y^2)ydx+(y^2-x^2)xdy=0$ với thừa số tích phân $\alpha(y)=1/y^2$ thì chúng ta được phương trình vi phân toàn phần $\left(y+\dfrac{3x^2}{y}\right)dx+\left(x-\dfrac{x^3}{y^2}\right)dy=0$.

Nếu ký hiệu $\begin{cases} p(x,y)=y+\dfrac{3x^2}{y} \\ q(x,y)=x-\dfrac{x^3}{y^2} \end{cases}$ thì phương trình vi phân trên trở thành $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ và phương trình này có nghiệm tổng quát u(x,y) = C với C là hằng số tùy ý, còn hàm số u(x,y) được xác định bằng công thức $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}p(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}q(x,t)dt$.(**0,5đ**)

Khi đó nếu chọn $x_0 = 0$ và $y_0 = 1$ thì chúng ta được $u(x,y)=\int_0^x\left(1+\dfrac{3t^2}{1}\right)dt+\int_1^y\left(x-\dfrac{x^3}{t^2}\right)dt=$

$$\int_0^x(1+3t^2)dt+x\int_1^y dt-x^3\int_1^y\frac{dt}{t^2}=(t+t^3)\Big|_{t=0}^{t=x}+xt\Big|_{t=1}^{t=y}+\frac{x^3}{t}\Big|_{t=1}^{t=y}=xy+\frac{x^3}{y}.$$

Như vậy, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(y^2-x^2)xy'+(3x^2+y^2)y=0$ là

$xy+\dfrac{x^3}{y}=C\Leftrightarrow x(x^2+y^2)=Cy$ với C là hằng số tùy ý.

Thay điều kiện $y(1)=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ vào nghiệm tổng quát vừa tìm được, chúng ta có phương trình để xác định hằng số C là $1(1^2+1^2)=C.1\Leftrightarrow C=2$.

Thay C = 2 vào nghiệm tổng quát, chúng ta được nghiệm riêng cần tìm là $2y=x(x^2+y^2)$.(**0,5đ**)

Câu 6.(**2,5đ**)

(**a**)(**1,5đ**) Chúng ta có $I=\int_C h(y)[ydx+(2x-ye^y)dy]=\int_C yh(y)dx+(2x-ye^y)h(y)dy$

Nếu ký hiệu $\begin{cases}P(x,y)=yh(y)\\Q(x,y)=(2x-ye^y)h(y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'_y(x,y)=h(y)+yh'(y)\\Q'_x(x,y)=2h(y)\end{cases}$ thì $I=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Khi đó, để I không phụ thuộc vào dạng của đường C nằm trong mặt phẳng Oxy thì các hàm số P(x,y), Q(x,y) phải thỏa mãn điều kiện $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)\Rightarrow h(y)+yh'(y)=2h(y)\Leftrightarrow y\dfrac{dh(y)}{dy}-h(y)=0$.

Chúng ta nhận thấy $y\dfrac{dh(y)}{dy}-h(y)=0$ là phương trình vi phân cấp 1 để xác định hàm số h(y) là nghiệm của phương trình này thỏa mãn điều kiện h(1) = 1.

Chúng ta có $y\dfrac{dh(y)}{dy}-h(y)=0\Leftrightarrow\dfrac{dh(y)}{h(y)}-\dfrac{dy}{y}=0\Rightarrow\int\dfrac{dh(y)}{h(y)}-\int\dfrac{dy}{y}=C$ (C là hằng số tùy ý)

$\Rightarrow\ln|h(y)|-\ln|y|=C\Leftrightarrow\ln|h(y)|=\ln e^C+\ln|y|\Rightarrow|h(y)|=e^C|y|\Rightarrow h(y)=e^Cy$.

Thay điều kiện $h(1)=1\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\h=1\end{cases}$ vào biểu thức $h(y)=e^Cy$, chúng ta có phương trình để xác định hằng số C là $1=e^C.1\Leftrightarrow e^C=1\Rightarrow C=0$. Sau đó, thay C = 0 vào biểu thức $h(y)=e^Cy$, chúng ta nhận được $h(y)=y$.

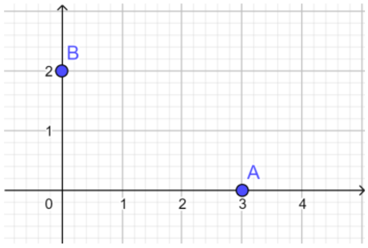
(**b**)(**1,0đ**) Bây giờ thay h(y) = y vừa xác định được ở (a) vào biểu thức dưới dấu tích phân của I, chúng ta nhận được $I=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ với $\begin{cases}P(x,y)=yh(y)=yy=y^2\\Q(x,y)=(2x-ye^y)h(y)=(2x-ye^y)y\end{cases}$.

Đương nhiên, các hàm số P(x,y), Q(x,y) phải thỏa mãn điều kiện $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$, đẳng thức này chứng tỏ I không phụ thuộc vào dạng của đường C nằm trong mặt phẳng Oxy hoặc biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy và khi đó I = u(B) – u(A) = u(0,2) – u(3,0). Đến đây, chúng ta có hai cách tính giá trị của I.

Cách 1.

Vì I không phụ thuộc vào dạng của đường C nằm trong mặt phẳng Oxy nên không phụ thuộc vào đường nối điểm A(3,0) đến điểm B(0,2), do đó chúng ta sẽ chọn con đường nối điểm A(3,0) đến điểm B(0,2) sao cho việc tính I được đơn giản.

Lấy điểm O(0,0) và chọn con đường nối điểm A(3,0) đến điểm B(0,2) là: C_1 là đoạn thẳng nối điểm A(3,0) đến điểm O(0,0) và C_2 là đoạn thẳng nối điểm O(0,0) đến điểm B(0,2).



Khi đó $C = C_1 \cup C_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2$ với $\begin{cases} I_1 = \int\limits_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{C_1} y^2dx + (2x - ye^y)ydy \\ I_2 = \int\limits_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{C_2} y^2dx + (2x - ye^y)ydy \end{cases}$.

Trên đoạn thẳng C_1 thì $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ 3 \ge x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int\limits_3^0 0dx + (2x - 0e^0)0.0 = 0$, còn trên đoạn thẳng C_2 thì

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int\limits_0^2 y^2 0 + (2.0 - ye^y)ydy = \int\limits_2^0 y^2 d(e^y) = y^2e^y\Big|_{y=2}^{y=0} - 2\int\limits_2^0 ye^y dy = -4e^2 + 2\int\limits_0^2 yd(e^y) = -4e^2$$

$$+ 2ye^y\Big|_{y=0}^{y=2} - 2\int\limits_0^2 e^y dy = -2e^y\Big|_{y=0}^{y=2} = 2(1-e^2).$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0 + 2(1-e^2) = 2(1-e^2).$$

Cách 2.

Xác định hàm số u(x,y) bằng công thức $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$, khi đó nếu chọn $x_0 = 0$ và $y_0 = 1$ thì chúng ta được

$$u(x,y) = \int\limits_0^x 1^2 dt + \int\limits_1^y (2x - te^t)tdt = t\Big|_{t=0}^{t=x} + 2x\int\limits_1^y tdt - \int\limits_1^y t^2 d(e^t) = x + xt^2\Big|_{t=1}^{t=y} - t^2e^t\Big|_{t=1}^{t=y} + 2\int\limits_1^y te^t dt =$$

$$xy^2 - y^2e^y + e + 2\int\limits_1^y td(e^t) = xy^2 - y^2e^y + e + 2te^t\Big|_{t=1}^{t=y} - 2\int\limits_1^y e^t dt =$$

$$xy^2 - y^2e^y + 2ye^y - e - 2e^t\Big|_{t=1}^{t=y} = xy^2 - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + e.$$

$$\Rightarrow I = u(0,2) - u(3,0) = (0.2^2 - 2^2e^2 + 2.2e^2 - 2e^2 + e) - (3.0^2 - 0^2e^2 + 2.0e^0 - 2e^0 + e) = 2(1-e^2).$$

==