Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.1.1. Không gian $\mathbf{R}^n$

1.1.1.1. Định nghĩa. Không gian Euclide n chiều $\mathbf{R}^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$) là tập hợp các bộ *có thứ tự* của n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tức là $\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2, \ldots,x_n)|\forall x_i\in\mathbf{R}\}$.

Khi n = 1 thì $\mathbf{R}^1$ là tập hợp các số thực $\mathbf{R}$.

Khi n = 2 thì $\mathbf{R}^2$ là tập hợp các cặp số thực (x_1,x_2) hay tập hợp các điểm của mặt phẳng. Theo thói quen từ trước, các điểm của $\mathbf{R}^2$ thường được ký hiệu là (x,y) thay cho (x_1,x_2).

Khi n = 3 thì $\mathbf{R}^3$ là tập hợp các bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) hay tập hợp các điểm của không gian. Theo thói quen từ trước, các điểm của $\mathbf{R}^3$ thường được ký hiệu là (x,y,z) thay cho (x_1,x_2,x_3).

Vì $\mathbf{R}^1$ là tập hợp các điểm của trục số, $\mathbf{R}^2$ là tập hợp các điểm của mặt phẳng, $\mathbf{R}^3$ là tập hợp các điểm của không gian thực nên $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$ được gọi lần lượt là "không gian Euclide 1 chiều", "không gian Euclide 2 chiều" và "không gian Euclide 3 chiều". Tổng quát, $\mathbf{R}^n$ được gọi là "không gian Euclide n chiều" hay ngắn gọn "không gian $\mathbf{R}^n$" và mỗi phần tử của nó được gọi là một điểm, còn $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ được gọi là tọa độ của một điểm của không gian $\mathbf{R}^n$.

1.1.1.2. Khoảng cách trong $\mathbf{R}^n$

Khoảng cách giữa hai điểm $M_1(x_1)$ và $M_2(x_2)$ trên trục số ($\mathbf{R}^1$) được định nghĩa là $d(M_1,M_2)=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$.

Khoảng cách giữa hai điểm $M_1(x_1,y_1)$ và $M_2(x_2,y_2)$ trong mặt phẳng ($\mathbf{R}^2$) được định nghĩa là $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Khoảng cách giữa hai điểm $M_1(x_1,y_1,z_1)$ và $M_2(x_2,y_2,z_2)$ trong không gian ($\mathbf{R}^3$) được định nghĩa là $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Tổng quát, khoảng cách giữa hai điểm $M_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ và $M_2(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ trong không gian $\mathbf{R}^n$ được định nghĩa là $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

Theo định nghĩa, khoảng cách giữa hai điểm trong $\mathbf{R}^n$ là ánh xạ từ $\mathbf{R}^n$ vào $\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$).

Khoảng cách giữa hai điểm được định nghĩa như trên được gọi là khoảng cách Euclide. Cũng như trên trục số, trong mặt phẳng và trong không gian thực, khoảng cách Euclide trong $\mathbf{R}^n$ có các tính chất:

(1) $d(M_1,M_2) \geq 0$, $d(M_1,M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 \equiv M_2$

(2) $d(M_1,M_2) = d(M_2,M_1)$

(3) $d(M_1,M_2) \leq d(M_1,M_3) + d(M_3,M_2)$ – bất đẳng thức tam giác

trong đó M_1, M_2, M_3 là 3 điểm bất kỳ của $\mathbf{R}^n$.

1.1.1.3. Lân cận, tập mở, tập đóng và tập bị chặn trong $\mathbf{R}^n$

Giả sử M_o là một điểm của không gian $\mathbf{R}^n$, ε là một số thực dương, khi đó tập hợp tất cả các điểm $M\in\mathbf{R}^n$ sao cho $d(M_0,M) < \varepsilon$ được gọi là ε-lân cận của điểm M_0. Mọi tập hợp chứa một ε-lân cận nào đó của điểm M_0 được gọi là lân cận của điểm M_0.

Giả sử tập hợp $E\subset\mathbf{R}^n$, điểm $M\in E$ được gọi là điểm trong của E nếu tồn tại một ε-lân cận nào đó của điểm M nằm hoàn toàn trong E. Tập hợp E được gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

Giả sử tập hợp $E\subset\mathbf{R}^n$, điểm $N\in\mathbf{R}^n$ được gọi là điểm biên của tập hợp E nếu mọi ε-lân cận của điểm N vừa chứa những điểm thuộc E vừa chứa những điểm không thuộc E. Điểm biên của tập hợp E có thể thuộc E cũng có thể không thuộc E. Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là biên của nó.

Tập hợp $E\subset\mathbf{R}^n$ được gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó.

Ví dụ **1.1**. Nếu E là tập hợp tất cả các điểm $M\in\mathbf{R}^n$ sao cho $d(M_0,M) < r$ với $M_0\in\mathbf{R}^n$ là một điểm cố định và r là số thực dương, thì E là tập hợp mở.

Chứng minh. Giả sử M là một điểm bất kỳ của E, do đó $d(M_o,M) < r$. Đặt $\varepsilon = r - d(M_0,M)$, khi đó ε-lân cận của M nằm hoàn toàn trong E vì nếu P là một điểm của lân cận ấy thì chúng ta có $d(M,P) < \varepsilon$, do đó theo bất đẳng thức tam giác $d(M_0,P) \le d(M_0,M) + d(M,P) < d(M_0,M) + \varepsilon = r$.

Tập hợp E nói trong Ví dụ 1.1. được gọi là quả cầu mở tâm M_0 bán kính r. Biên của tập hợp E này gồm các điểm M sao cho $d(M_0,M) = r$ được gọi là mặt cầu tâm M_0 bán kính r. Tập hợp các điểm M sao cho $d(M_0,M) \le r$ là một tập hợp đóng, được gọi là quả cầu đóng tâm M_0 bán kính r.

Tập hợp $E\subset\mathbf{R}^n$ được gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.

Tập hợp $E\subset\mathbf{R}^n$ được gọi là liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kỳ của nó bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E. Tập hợp liên thông được gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín, được gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một.

1.1.2. Hàm số nhiều biến, hàm véc tơ

1.1.2.1. Hàm số nhiều biến

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbf{R}^n$, giả sử $D\subset\mathbf{R}^n$. Khi đó ánh xạ $f: D \to \mathbf{R}$ được xác định bởi $\{x = (x_1,x_2, \ldots,x_n)\in D\} \to \{y = f(x) \equiv f(x_1,x_2, \ldots,x_n)\in\mathbf{R}\}$ được gọi là hàm số n biến xác định trên D; D được gọi là *tập xác định* của hàm số f, ký hiệu là D(f); còn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến số độc lập. Tập tất cả các giá trị của hàm số $y = f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ trên tập xác định D(f) được gọi là *tập giá trị* của hàm số f, ký hiệu là R(f).

Như vậy, hàm số $y = f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ là ánh xạ $f: D(f) \to R(f)$.

Theo thói quen từ trước, với n = 1 chúng ta dùng ký hiệu y = f(x) đối với hàm số 1 biến, với n = 2 chúng ta dùng ký kiệu z = f(x,y) đối với hàm số 2 biến và với n = 3 chúng ta dùng ký hiệu u = f(x,y,z) đối với hàm số 3 biến.

Cũng như đối với hàm số 1 biến, hàm số 2 biến và hàm số 3 biến, tập xác định D(f) của hàm số n biến là tập hợp tất cả các điểm $x\in\mathbf{R}^n$ sao cho biểu thức của hàm số $y = f(x) \equiv f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ có nghĩa, tức là biểu thức này xác định được.

Từ đây về sau (trong Bài giảng học phần này), các vấn đề liên quan đến hàm số nhiều biến được trình bày cho trường hợp n = 2 (hàm số 2 biến) hoặc n = 3 (hàm số 3 biến). Các vấn đề ấy được mở rộng hoàn toàn tương tự đối với số nguyên dương $n \ge 4$ (hàm số n biến) bất kỳ, nếu không lưu ý gì thêm.

Ví dụ **1.2.** Tìm và vẽ tập xác định của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

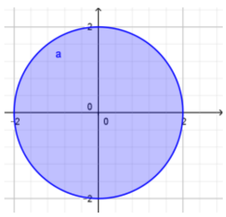
(b) $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{y-1}$

(c) $z = f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

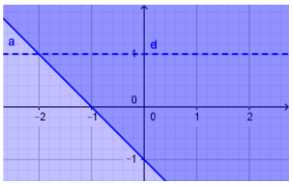
(d) $u = f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Bài giải.

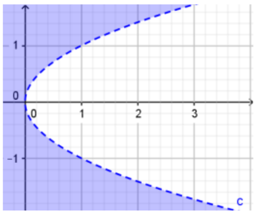
(a) Đối với hàm số $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ xét biểu thức $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, để biểu thức này xác định được thì biểu thức dưới căn bậc hai phải không âm, tức là $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, nên tập xác định $D(f) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le 2^2\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm thuộc hình tròn đóng tâm O(0,0) có bán kính r = 2.



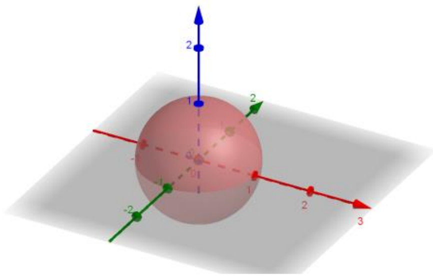
(b) Đối với hàm số $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{y-1}$ xét biểu thức $\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{y-1}$, để biểu thức này xác định được thì biểu thức dưới căn bậc hai ở tử số phải không âm ($x + y + 1 \geq 0$) và biểu thức ở mẫu số phải khác không ($y - 1 \neq 0$), nên tập xác định $D(f) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x + y + 1 \geq 0 \text{ và } y - 1 \neq 0\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm thuộc nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng $y = -x - 1$ (kể cả các điểm nằm trên đường thẳng này), nhưng không nằm trên đường thẳng $y = 1$.



(c) Đối với hàm số $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$, xét biểu thức $x\ln(y^2 - x)$, để biểu thức này xác định được thì đối số của hàm số loga phải dương, tức là $y^2 - x > 0$ hay $x < y^2$, nên tập xác định $D(f) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x < y^2\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm nằm bên trái đường parabol $x = y^2$



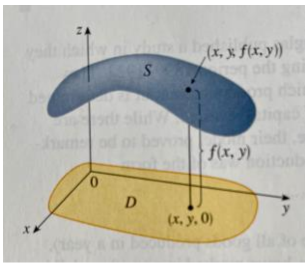
(d) Đối với hàm số $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, xét biểu thức $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, để biểu thức này xác định được thì biểu thức trong căn bậc hai ở mẫu số phải dương, tức là $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, nên tập xác định $D(f) = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < 1^2\}$. Trong không gian tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz thì D(f) là các điểm thuộc quả cầu mở tâm O(0,0,0) có bán kính $r = 1$.



Cũng như hàm số 1 biến, một hàm số nhiều biến thường được mô tả bằng 4 cách: (1) bằng công thức, (2) bằng đồ thị, (3) bằng lời, (4) bằng bảng các giá trị.

Đồ thị của hàm số 2 biến. Nếu $z = f(x,y)$ là hàm số 2 biến trên tập xác định D(f) thì đồ thị của hàm số f(x,y) là tập tất cả các điểm $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ sao cho $z = f(x,y)$ và $(x,y)\in D(f)$.

Cũng giống như đồ thị của hàm số 1 biến là một đường (thẳng/cong) C có phương trình $y = f(x)$, đồ thị của hàm số 2 biến là một mặt S có phương trình $z = f(x,y)$.



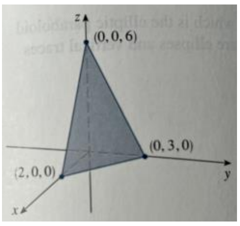
Ví dụ **1.3.** Vẽ đồ thị của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = 6 - 3x - 2y$ (b) $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Bài giải.

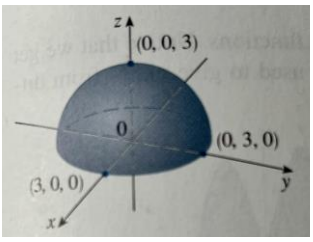
(a) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Đồ thị của hàm số $z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y \Leftrightarrow 3x + 2y + z = 6$ là mặt phẳng S giao với các trục tọa độ Ox, Oy và Oz lần lượt tại các điểm (2,0,0), (0,3,0) và (0,0,6). Nối 3 điểm này với nhau bởi các đường thẳng, chúng ta nhận được một phần của mặt phẳng S nằm trong góc phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxyz.



(b) Tập xác định D(f) = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \le 3^2\}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz thì D(f) là các điểm thuộc hình tròn đóng tâm O(0,0) có bán kính r = 3.

Bình phương hai vế của phương trình $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ và biến đổi tương đương, chúng ta được $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$, đây là phương trình của mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ O(0,0,0) và bán kính r = 3. Vì $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \ge 0$ nên đồ thị của hàm số $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ là mặt S chỉ có nửa trên (bán cầu trên) của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$.



Chúng ta nhận thấy rằng, trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz thì toàn bộ mặt cầu không thể được biểu diễn bởi một hàm số theo x và y. Như chúng ta thấy, trong Ví dụ 1.3.(b) ở trên, bán cầu trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ được biểu diễn bởi hàm số $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, còn bán cầu dưới của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ được biểu diễn bởi hàm số $z = g(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

1.1.2.2. Hàm véc tơ

Giả sử $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ tương ứng là không gian Euclide n, m chiều. Ánh xạ f: D $\to \mathbf{R}^m$, trong đó $D \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là hàm véc tơ n biến. Giá trị của hàm véc tơ f có m thành phần $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m) \subset \mathbf{R}^m$.

Trường hợp riêng, khi n = 1 và m = 1, hàm véc tơ chính là hàm số 1 biến đã được nghiên cứu trong học phần Giải tích 1; khi n > 1 và m = 1, hàm véc tơ chính là hàm số nhiều biến vừa được định nghĩa ở trên và sẽ được nghiên cứu trong học phần Giải tích 2 này.

1.2. Giới hạn và tính liên tục

1.2.1. Giới hạn

Chúng ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n,y_n)\}$ tiến đến điểm $M_0(x_0,y_0)$ trong $\mathbf{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi n $\to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(M_0, M_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0 \end{cases}$.

Giả sử hàm số z = f(x,y) xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$ (có thể không xác định tại M_0). Chúng ta nói rằng hàm số f(x,y) có giới hạn L (L là số thực hữu hạn) khi điểm M(x,y) tiến đến điểm $M_0(x_0,y_0)$ ($M \to M_0$) và viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ (khác M_0) thuộc lân cận V tiến đến M_0, chúng ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = L$.

Nói cách khác (bằng ngôn ngữ "ε-δ"): Giả sử hàm số z = f(x,y) xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$ (có thể không xác định tại điểm M_0). Chúng ta nói rằng hàm số f(x,y) có giới hạn L khi điểm M(x,y) tiến đến điểm $M_0(x_0,y_0)$ ($M \to M_0$) và viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ nếu với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $\forall(x,y)\in V$ thỏa mãn $0 < d(M,M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nhận xét. $|f(x) - L|$ là khoảng cách giữa các số f(x,y) và L, còn $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ là khoảng cách giữa điểm (x,y) và điểm (x_0,y_0); do đó, định nghĩa giới hạn bằng ngôn ngữ "ε-δ" nói lên rằng: Khoảng cách giữa f(x,y) và L có thể được làm nhỏ tùy ý bằng cách làm cho khoảng cách từ điểm (x,y) đến điểm (x_0,y_0) đủ nhỏ (nhưng không bằng không).

Lưu ý.

1. Giá trị của x_0, y_0 có thể nhận các giá trị thuộc tập {–∞, <hữu hạn>, +∞}.

2. Các định lý về giới hạn của tổng/hiệu, tích, thương, lũy thừa, căn đối với hàm số một biến (n = 1) trong học phần Giải tích 1 vẫn đúng đối với hàm số nhiều biến (n > 1). Cụ thể là:

Cho các hàm số f(x,y), g(x,y) và giả sử $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$ (các số hữu hạn M, L∈**R**), khi đó

+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$
+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y) = cL$ (hằng số c∈**R**)
+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = LM$
+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$
+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$ (n∈**N***)
+ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ (n∈**N***, nếu n là số chẵn thì thêm giả thuyết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > 0$)

3. Nguyên lý kẹp vẫn đúng đối với hàm số nhiều biến, cụ thể là:

Cho các hàm số h(x,y), f(x,y), g(x,y); giả sử h(x,y) ≤ f(x,y) ≤ g(x,y) với mọi điểm (x,y) trong một lân cận nào đó của điểm (x_0,y_0) và $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$ (hằng số L∈**R**) thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

4. Tích của một vô cùng bé (VCB) với một *hàm số/biểu thức* giới nội là một VCB.

5. Theo định nghĩa giới hạn của hàm số nhiều biến thì giá trị giới hạn L không phụ thuộc vào cách thức của điểm M tiến đến điểm M_0. Do đó, nếu $M \to M_0$ theo các cách thức khác nhau mà hàm số tiến đến các giá trị khác nhau thì hàm số không tồn tại giới hạn tại điểm M_0 khi $M \to M_0$.

Do đó, đối với hàm số 2 biến f(x,y), để chứng minh hàm số này không tồn tại giới hạn tại điểm M_0 khi $M \to M_0$, thường có 4 cách sau đây:

(1) Nếu chỉ ra được hai dãy điểm $\left(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\right)$, $\left(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right)$ cùng tiến đến điểm (x_0,y_0), cụ thể là $\left(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\right) \to (x_0, y_0)$ và $\left(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right) \to (x_0, y_0)$ khi n→+∞, đồng thời khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\right) = L_1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right) = L_2$ mà $L_1 \neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại.

(2) Nếu chỉ ra được hai đường (thẳng/cong) và nếu $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ dọc trên hai đường này mà $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ tương ứng nhận hai giá trị khác nhau thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại. Cụ thể là, chỉ ra được hàm số y = g(x) và hàm số y = h(x) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = y_0$, đồng thời khi đó

$\lim\limits_{x\to x_0} f\big(x, g(x)\big) = L_1$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(x, h(x)\big) = L_2$ mà $L_1 \neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại. Ở đây, x và y có vai trò như nhau.

(3) Nếu đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) (*thông thường*), bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$ với $\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ và khi đó $(x,y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow r \to 0^+$, hoặc sang tọa độ cực (r,φ) (*mở rộng*) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = x_0 + \alpha r\cos\varphi \\ y = y_0 + \beta r\sin\varphi \end{cases}$ với α, β là các số thực và $\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ và khi đó $(x,y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow r \to 0^+$, mà f(x,y) = g(φ) (chỉ phụ thuộc vào góc φ) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} g(\varphi)$ $= g(\varphi)$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại.

Cần lưu ý rằng, khi đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) (*thông thường/mở rộng*), đối với một hàm số f(x,y) cụ thể có tập xác định D(f) ở hệ tọa độ Descarter Oxy thì phải chuyển D(f) sang hệ tọa độ cực (r,φ).

(4) Nếu chỉ ra được dãy điểm (x_n,y_n) tiến đến điểm (x_0,y_0) $[(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ khi $n\to+\infty]$ mà $f(x_n,y_n) \to -\infty/+\infty$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại.

Ví dụ **1.4.** Tìm các giới hạn sau đây

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{2x^4 + x - xy + y^4}{x^2 + y^2}$　　(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/6)} \dfrac{x\sin y}{x^2+1}$　　(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$

Bài giải.

(a) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Chúng ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (2x^4 + x - xy + y^4) = 3$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^2+y^2) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x^4 + x - xy + y^4}{x^2+y^2} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (2x^4 + x - xy + y^4)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^2+y^2)} = \frac{3}{1} = 3.$$

(b) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2$.

$$\text{Vì } e > 1 \text{ nên } \begin{cases} 0 \leq \left|xe^{-(x^2+y^2)}\right| = \dfrac{|x|}{e^{x^2+y^2}} \leq \dfrac{|x|}{e^{x^2}} \to 0 \quad \text{khi} \quad x \to \infty \\ 0 \leq \left|ye^{-(x^2+y^2)}\right| = \dfrac{|y|}{e^{x^2+y^2}} \leq \dfrac{|y|}{e^{y^2}} \to 0 \quad \text{khi} \quad y \to \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x+y)e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} xe^{-(x^2+y^2)} + \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} ye^{-(x^2+y^2)} = 0 + 0 = 0.$$

(c) Tập xác định là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Chúng ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/6)} x\sin y = 1.\sin\dfrac{\pi}{6} = 1.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/6)} (x^2+1) = 1^2 + 1 = 2$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,\pi/6)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,\pi/6)} \frac{x\sin y}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/6)} x\sin y}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi/6)} (x^2+1)} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}.$$

(d) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Chúng ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy} = e^{-1.(-1)} = e$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \cos(x+y) = \cos(1-1) = \cos 0 = 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y) = \left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \cos(x+y)\right) = e.1 = e.$$

Ví dụ **1.5.** Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ của các hàm số sau đây

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $f(x,y)=(x+2y)\cos\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}$

Bài giải.

(a) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Theo định nghĩa, khoảng cách từ điểm M(x,y) đến điểm O(0,0) là $d(O,M)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\equiv d\to 0 \Leftrightarrow M(x,y)\to O(0,0)\Leftrightarrow (x,y)\to(0,0)$.

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-1}=\frac{d^2}{\sqrt{d^2+1}-1}=\frac{d^2(\sqrt{d^2+1}+1)}{(\sqrt{d^2+1}-1)(\sqrt{d^2+1}+1)}=\frac{d^2(\sqrt{d^2+1}+1)}{d^2}=\sqrt{d^2+1}+1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{d\to 0}(\sqrt{d^2+1}+1)=2.$$

(b) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Vì $x^2\le x^2+y^2 \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$ với $\forall(x,y)\neq(0,0)$ nên $|f(x,y)|=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\le 1.|y|=|y|$

$\Rightarrow 0\le|f(x,y)|\le|y|\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$. Theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(c) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Chúng ta có

$$0\le|f(x,y)|=\left|(x+2y)\cos\frac{x+2y}{x^2+2y^2}\right|=|x+2y|\left|\cos\frac{x+2y}{x^2+2y^2}\right|\le|x+2y|.1=|x+2y|\le 2(|x|+|y|)$$

vì $\left|\cos\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2}\right|\le 1$ và $|x+2y|\le|x|+|2y|\le 2|x|+2|y|=2(|x|+|y|)$ với $\forall(x,y)\in D(f)$.

$\Rightarrow 0\le|f(x,y)|\le 2(|x|+|y|)\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$. Theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(d) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Vì $|\sin\alpha|\le|\alpha|$ khi $\alpha\to 0$ nên $\begin{cases}|\sin(x^3)|\le|x^3|=|x|^3\\ |\sin(y^3)|\le|y^3|=|y|^3\end{cases}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

$$\Rightarrow 0\le|f(x,y)|=\left|\frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|\sin(x^3)-\sin(y^3)|}{x^2+y^2}\le\frac{|\sin(x^3)|+|-\sin(y^3)|}{x^2+y^2}=\frac{|\sin(x^3)|+|\sin(y^3)|}{x^2+y^2}$$

$\le\dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}=\dfrac{|x|^3}{x^2+y^2}+\dfrac{|y|^3}{x^2+y^2}\le\dfrac{|x|^3}{x^2}+\dfrac{|y|^3}{y^2}=|x|+|y|\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$. Theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Cách khác.

$$0\le|f(x,y)|=\left|\frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|\sin(x^3)-\sin(y^3)|}{x^2+y^2}\le\frac{|\sin(x^3)|+|-\sin(y^3)|}{x^2+y^2}=\frac{|\sin(x^3)|}{x^2+y^2}+\frac{|\sin(y^3)|}{x^2+y^2}\le$$

$$\frac{|\sin(x^3)|}{x^2}+\frac{|\sin(y^3)|}{y^2}=\frac{|x||\sin(x^3)|}{|x|^3}+\frac{|y||\sin(y^3)|}{|y|^3}=|x|\left|\frac{\sin(x^3)}{x^3}\right|+|y|\left|\frac{\sin(y^3)}{y^3}\right|\to|x|.1+|y|.1=|x|+|y|\to 0$$

khi (x,y) $\to$ (0,0) vì $\lim\limits_{x^3\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}=1$ và $\lim\limits_{y^3\to 0}\frac{\sin(y^3)}{y^3}=1$. Theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Ví dụ **1.6.** Chứng minh rằng, đối với các hàm số f(x,y) sau đây, không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(a) $z=f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $z=f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$

Bài giải.

(a) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Cách 1. Xét dãy điểm $(x_n,y_n)=\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$ với n$\in$**N***, khi đó $(x_n,y_n)\to(0,0)\Leftrightarrow n\to\infty$

$$\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{(2/n)^2-(1/n)^2}{(2/n)^2+(1/n)^2}=\frac{3/n^2}{5/n^2}=\frac{3}{5}\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

Tương tự, xét dãy điểm $(x'_n,y'_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$ với n$\in$**N***, khi đó $(x'_n,y'_n)\to(0,0)\Leftrightarrow n\to\infty$

$$\Rightarrow f(x'_n,y'_n)=\frac{(1/n)^2-(2/n)^2}{(1/n)^2+(2/n)^2}=\frac{-3/n^2}{5/n^2}=-\frac{3}{5}\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{5}$$

Do đó, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Nhận xét. Chúng ta có thể thực hiện việc chứng minh trên ngắn gọn hơn, bằng cách xét dãy điểm $(x_n,y_n)=\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right)$ với n$\in$**N*** và p, q là các tham số thực không đồng thời bằng 0, khi đó $(x_n,y_n)\to(0,0)\Leftrightarrow n\to\infty$.

$$\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{(p/n)^2-(q/n)^2}{(p/n)^2+(q/n)^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

$\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, khi cho p hoặc/và q thay đổi thì giá trị biểu thức $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ thay đổi, điều này chứng tỏ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cách 2. Khi (x,y) $\to$ (0,0) dọc theo trục hoành Ox (y = 0) thì $f(x,0)=\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\frac{x^2}{x^2}=1$ với $\forall x\neq 0$ $\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=1$, còn khi (x,y) $\to$ (0,0) dọc theo trục tung Oy (x = 0) thì $f(0,y)=\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\frac{-y^2}{y^2}=-1$ với $\forall y\neq 0$ $\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0} f(0,y)=-1$. Do đó, theo định nghĩa thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Cách 3. Đổi tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ): $\begin{cases}x=0+r\cos\varphi=r\cos\varphi\\ y=0+r\sin\varphi=r\sin\varphi\end{cases}$ với $\begin{cases}r\geq 0\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\end{cases}$, khi đó $D(f)=\{(r,\varphi)\in R^2 | r>0, 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$ và (x,y) $\to$ (0,0) $\Leftrightarrow$ r $\to 0^+$.

Bây giờ, chúng ta thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào biểu thức của hàm số f(x,y) thì được

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \frac{r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0^+}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, nên khi φ nhận các giá trị khác nhau thì f(x,y) dần đến các giới hạn khác nhau. Do đó, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

(b) Tập xác định D(f) = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Cách 1. Xét dãy điểm $(x_n, y_n) = \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n^2}\right)$ với $n\in\mathbf{N}^*$ và p, q là các tham số thực không đồng thời bằng 0, khi đó $(x_n, y_n) \to (0,0) \Leftrightarrow n \to \infty$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{2\left(\frac{p}{n}\right)^2 \cdot \frac{q}{n^2}}{\left(\frac{p}{n}\right)^4 + \left(\frac{q}{n^2}\right)^2} = \frac{\frac{2p^2q}{n^4}}{\frac{p^4 + q^2}{n^4}} = \frac{2p^2q}{p^4 + q^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2p^2q}{p^4 + q^2} = \frac{2p^2q}{p^4 + q^2}$, khi cho p hoặc/và q thay đổi thì giá trị biểu thức $\frac{2p^2q}{p^4 + q^2}$ thay đổi, điều này chứng tỏ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ không tồn tại.

Cách 2. Nếu cho (x,y) $\to$ (0,0) dọc theo đường parabol $y = kx^2$ với tham số $k \neq 0$ thì chúng ta nhận được $f(x, kx^2) = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{(1+k^2)x^4} = \frac{2k}{1+k^2} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}$ nên giới hạn này sẽ thay đổi khi k thay đổi; chẳng hạn, nếu (x,y) $\to$ (0,0) dọc theo đường parabol $y = x^2$ (k = 1) thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$, còn nếu (x,y) $\to$ (0,0) dọc theo đường parabol $y = 2x^2$ (k = 2) thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{4}{5}$. Do đó, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ không tồn tại.

1.2.2. Tính liên tục

1.2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm số hai biến z = f(x,y) có tập xác định $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, chúng ta nói hàm số f(x,y) liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ nếu (1) tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ và (2) giá trị của giới hạn này bằng giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0,y_0), tức là $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Khi đó, điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm liên tục của hàm số f(x,y).

Hàm số f(x,y) được gọi là hàm số liên tục trên tập xác định D(f) nếu nó liên tục tại mọi điểm của tập xác định D(f).

Lưu ý. Các tính chất liên tục đối với hàm số một biến (n = 1) đã học trong học phần Giải tích 1 vẫn đúng đối với hàm số nhiều biến (n > 1).

Ví dụ **1.7.** Xét tính liên tục của các hàm số f(x,y) sau đây, trên tập xác định D(f) của nó

(a) $z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ với tham số $\alpha \in \mathbf{R}$

Bài giải.

(a) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

- Tại điểm O(0,0) có f(0,0) = 0, nhưng như chúng ta đã chứng minh ở Ví dụ 1.6.a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại, theo định nghĩa, hàm số f(x,y) không liên tục tại điểm O(0,0).

- Tại điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0)$ nên hàm số f(x,y) liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Kết luận: Hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ không liên tục tại điểm O(0,0) và liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0) \Leftrightarrow D(f)\backslash\{(0,0)\}$.

(b) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ với $\alpha \in \mathbf{R}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

- Tại điểm $(x_0,y_0) = (0,0)$: Theo Bất đẳng thức Cauchy với $\forall(x,y) \in \mathbf{R}^2$, chúng ta có

$$\sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Leftrightarrow \frac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^{\alpha}}(x^2+y^2)^{\alpha-1} \text{ với } \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

+ Nếu $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ thì $0 \leq |f(x,y| = \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2^{\alpha}}(x^2+y^2)^{\alpha-1} \to 0$ khi $(x,y) \to (0,0)$, do đó theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ mà f(0,0) = 0 $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ nên theo định nghĩa, hàm số f(x,y) liên tục tại điểm O(0,0).

+ Nếu $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ thì $f(x,y) = \dfrac{|xy|^1}{x^2+y^2} = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}$, bây giờ chúng ta cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng y = kx (với tham số $k \neq 0$) thì

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{|xkx|}{x^2+(kx)^2} = \frac{|k|x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{|k|x^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{|k|}{1+k^2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to0} f(x,kx) = \dfrac{|k|}{1+k^2}$ giá trị này thay đổi khi k thay đổi, do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nên theo định nghĩa, hàm số f(x,y) không liên tục tại điểm O(0,0).

+ Nếu $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha > 0$, bây giờ cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng y = x thì $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{|x.x|^{\alpha}}{x^2+x^2} = \dfrac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x^{2(1-\alpha)}} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{2(1-\alpha)}} = +\infty$ tức là không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nên theo định nghĩa, hàm số f(x,y) không liên tục tại điểm O(0,0).

- Tại điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} = \dfrac{|x_0y_0|^{\alpha}}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0)$ nên theo định nghĩa, hàm số f(x,y) liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Kết luận: Khi $\alpha > 1$ thì hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ liên tục trên D(f), còn khi $\alpha \leq 1$ thì f(x,y) không liên tục tại điểm O(0,0) và liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0) \Leftrightarrow D(f)\backslash\{(0,0)\}$.

1.2.2.2. Điểm gián đoạn của hàm số

Hàm số f(x,y) được gọi là gián đoạn tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu nó không liên tục tại điểm đó và điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

Như vậy, khái niệm hàm số gián đoạn tại một điểm là *phủ định* khái niệm hàm số liên tục tại điểm đó, tức là hàm số f(x,y) gián đoạn tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu:

(1) hoặc nó không xác định tại điểm $M_0(x_0,y_0)$;

(2) hoặc nó xác định tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$;

(3) hoặc nó xác định tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ nhưng giá trị giới hạn này khác giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0,y_0) , tức là $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$.

Ví dụ **1.8.** Xác định các điểm gián đoạn và các điểm liên tục của các hàm số sau đây

(a) $z=f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$ (b) $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Bài giải.

(a) Hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$ xác định được khi $y^2 - 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ nên miền xác định của nó là $D(f)=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| x\neq \dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm trừ các điểm nằm trên đường parabol $x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Theo định nghĩa, các điểm $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ nằm trên đường parabol $x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ là các điểm gián đoạn của hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$. Các điểm gián đoạn này thuộc trường hợp (1).

Tại điểm (x_0,y_0) không nằm trên đường parabol $x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ thì

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}=\frac{x_0^2+2x_0y_0+5}{y_0^2-2x_0+1}=f(x_0,y_0).$$

Theo định nghĩa, hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$ liên tục trên tập xác định D(f) của nó.

(b) Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Hàm số f(x,y) này xác định tại điểm (0,0), tức là f(0,0) = 0. Tuy nhiên, như chúng ta đã chứng minh ở Ví dụ 1.6.a, hàm số này không tồn tại giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$, nên điểm (0,0) là điểm gián đoạn của nó.

Hơn nữa, như chúng ta đã chứng minh ở Ví dụ 1.7.a, hàm số f(x,y) này liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Như vậy, đối với hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, điểm gián đoạn duy nhất của nó là điểm gốc tọa độ O(0,0). Điểm gián đoạn này thuộc trường hợp (2).

(c) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Hàm số f(x,y) này xác định tại điểm (0,0), tức là f(0,0) = 0; tuy nhiên, như chúng ta đã chứng minh ở Ví dụ 1.5.a, hàm số này có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$, do đó $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$ nên theo định nghĩa, điểm gốc tọa độ O(0,0) là điểm gián đoạn của nó.

Hơn nữa, hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0) \neq (0,0)$. Thật vậy, chúng ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1} - 1} = f(x_0, y_0)$.

Như vậy, hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ có điểm gián đoạn duy nhất của nó là điểm gốc tọa độ O(0,0), điểm gián đoạn này thuộc trường hợp (3).

1.3. Phép tính vi phân

1.3.1. Định nghĩa đạo hàm riêng, đạo hàm riêng của hàm hợp

1.3.1.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f) \subset \mathbf{R}^2$, giả sử điểm $M_0(x_0,y_0) \in D(f)$.

Cho $y = y_0$ thì hàm số hai biến $z = f(x,y_0) \equiv g(x)$ trở thành hàm số một biến đối với x, khi đó nếu hàm số g(x) có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm số f(x,y) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và ký hiệu là $z'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ hoặc $f'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ tùy từng trường hợp khi sử dụng, nếu không gây ra bất kỳ sự hiểu nhầm nào.

Như vậy, $f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, nếu ký hiệu $\Delta x = x - x_0$ thì $x = x_0 + \Delta x$ và gọi Δx là số gia của đối số x thì $\Delta x \to 0$ khi $x \to x_0$.

Suy ra hiệu $g(x) - g(x_0) = f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia riêng của hàm số f(x,y) theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và ký hiệu là $\Delta_x f(x_0,y_0)$.

Do đó, chúng ta có thể viết $f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$.

Tương tự, đạo hàm riêng theo biến y của hàm số f(x,y) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ là

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Nhận xét.

(1) Định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ theo một biến x_i $(1 \le i \le n)$ chính là định nghĩa đạo hàm của hàm số một biến, khi coi các biến $x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ là các hằng số. Do đó,

khi tính đạo hàm riêng của một hàm số nhiều biến theo một biến nào đấy, chúng ta coi các biến còn lại là hằng số và tính đạo hàm thông thường như đối với hàm số một biến.

(2) Vì (x_0,y_0) là một điểm bất kỳ thuộc tập xác định D(f) nên ta có thể dùng $(x,y)\in D(f)$ thay cho (x_0,y_0) và để tiện sử dụng, người ta thường ký hiệu đạo hàm riêng của hàm số f(x,y) tại điểm (x,y) bằng một trong các biểu thức $z'_x(x,y)$ hoặc $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ hoặc $f'_x(x,y)$ hoặc $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ tùy từng trường hợp khi sử dụng, nếu không gây ra bất kỳ sự hiểu nhầm nào.

Khi đó $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ f'_y(x_0,y_0) = f'_y(x,y)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \end{cases}$

Nếu dùng định nghĩa để tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, tại một điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ thì chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Lập các số gia $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta_x f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) \\ \Delta y = y - y_0 \\ \Delta_y f(x_0,y_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \end{cases}$

Bước 2. Tìm các giới hạn $\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \equiv f'_x(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \equiv f'_y(x_0,y_0) \end{cases}$

Nếu dùng định nghĩa để tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số z = f(x,y) xác định trong xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, tại nhiều điểm $(x,y)\in D(f)$ thì chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Lập các số gia $\begin{cases} \Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \\ \Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{cases}$

Bước 2. Tìm các giới hạn $\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \equiv f'_x(x,y) \\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \equiv f'_y(x,y) \end{cases}$

Bước 3. Các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số f(x,y) tại điểm $(x_0,y_0)\in D(f)$ là

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ f'_y(x_0,y_0) = f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \end{cases}$$

Ví dụ **1.9.** Tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số $z = f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y$ tại điểm $(x_0,y_0) = (1,2)$ bằng 2 cách: (1) dùng định nghĩa, (2) dùng các công thức tính đạo hàm đã biết.

Bài giải.

- Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

- Điểm cần tính đạo hàm riêng có hoành độ $x_0 = 1$ và tung độ $y_0 = 2$ và là một điểm thuộc D(f).

- Tính bằng định nghĩa

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x} \\ f'_y(1,2) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y} \end{cases}$$

Chúng ta có $\begin{cases} f(1+\Delta x,2)=(1+\Delta x)^3-2(1+\Delta x).2^2+2=-5-5\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 \\ f(1,2+\Delta y)=1^3-2.1.(2+\Delta y)^2+(2+\Delta y)=-5-7\Delta y-2(\Delta y)^2 \\ f(1,2)=1^3-2.1.2^2+2=-5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-5-5\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-(-5)}{\Delta x}= \\ f'_y(1,2)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-5-7\Delta y-2(\Delta y)^2-(-5)}{\Delta y}= \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-5+3.\Delta x+(\Delta x)^2\right]=-5+3.0+0^2=-5 \\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\left[-7-2.\Delta y\right]=-7-2.0=-7 \end{cases}$$

- Tính bằng quy tắc $\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{\partial(x^3-2xy^2+y)}{\partial x}=3x^2-2.1.y^2+0=3x^2-2y^2 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{\partial(x^3-2xy^2+y)}{\partial y}=0-2x.2y+1=-4xy+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2)=f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(1,2)}=\left(3x^2-2y^2\right)\big|_{(x,y)=(1,2)}=3.1^2-2.2^2=-5 \\ f'_y(1,2)=f'_y(x,y)\big|_{(x,y)=(1,2)}=\left(-4xy+1\right)_{(x,y)=(1,2)}=-4.1.2+1=-7 \end{cases}$$

Nhận xét.

(1) Bản chất của việc tính đạo hàm là tính giới hạn, nhưng việc tính giới hạn của một biểu thức toán học, nói chung là không đơn giản.

(2) Qua Ví dụ 1.9. chúng ta thấy rằng việc tính đạo hàm riêng bằng cách dùng các công thức tính đạo hàm (quy tắc) đã biết đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính nó bằng cách dùng định nghĩa.

(3) Để tính đạo hàm riêng tại điểm của một hàm số, có thể không tính bằng công thức tính đạo hàm (quy tắc) được, mà chỉ có thể tính bằng định nghĩa.

Ví dụ **1.10.** Tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số $z=f(x,y)=\dfrac{\cos(y^2)}{x}$ tại điểm $(1,\sqrt{\pi})$.

Bài giải. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\cos(y^2)}{x}$ xác định được khi $x\neq 0$ nên tập xác định của nó là $D(f)=\{(x,y)\in R^2 \big| x\neq 0\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm nằm ngoài trục tung Oy, do đó điểm $(1,\sqrt{\pi})\in D(f)$.

Chúng ta sẽ tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số f(x,y) bằng cách dùng các công thức tính đạo hàm (quy tắc) đã biết tại điểm bất kỳ (x,y)∈D(f), sau đó thay giá trị cụ thể tại điểm yêu cầu tính đạo hàm riêng.

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\cos(y^2)}{x}=\cos(y^2)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\cos(y^2)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{\cos(y^2)}{x^2} \\ f'_y(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\cos(y^2)}{x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{d\cos(y^2)}{dy}=\dfrac{1}{x}2y[-\sin(y^2)]=-\dfrac{2y\sin(y^2)}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x\left(1,\sqrt{\pi}\right)=f'_x(x,y)\big|_{(x,y)=(1,\sqrt{\pi})}=-\dfrac{\cos(y^2)}{x^2}\Bigg|_{(x,y)=(1,\sqrt{\pi})}=-\dfrac{\cos\pi}{1^2}=1 \\ f'_y\left(1,\sqrt{\pi}\right)=f'_y(x,y)\big|_{(x,y)=(1,\sqrt{\pi})}=-\dfrac{2y\cos(y^2)}{x}\Bigg|_{(x,y)=(1,\sqrt{\pi})}=-\dfrac{2\sqrt{\pi}\sin\pi}{1}=0 \end{cases}$$

Ví dụ **1.11.** Tính các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ của hàm số $z = f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+8y^3}$ tại điểm (0,0).

Bài giải. D(f) = $\mathbf{R}^2 \Rightarrow (0,0)\in D(f)$

Chúng ta không thể tính các đạo hàm riêng $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ của hàm số này bằng cách dùng các công thức tính đạo hàm (quy tắc) đã biết tại điểm bất kỳ (x,y)∈D(f), sau đó thay (x,y) = (0,0) vào các biểu thức của $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ vừa tính được; mà phải tính bằng định nghĩa.

Thật vậy, giả sử chúng ta tính $f'_x(x,y)$ và $f'_y(x,y)$ bằng công thức tính đạo hàm đã biết tại điểm bất kỳ (x,y)∈D(f)

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{x^3+8y^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3+8y^3)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}(x^3+8y^3)^{\frac{1}{3}-1}3x^2 = \dfrac{x^2}{(x^3+8y^3)^{2/3}} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt[3]{x^3+8y^3} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3+8y^3)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}(x^3+8y^3)^{\frac{1}{3}-1}24y^2 = \dfrac{8y^2}{(x^3+8y^3)^{2/3}} \end{cases}$$

, nếu thay (x,y) = (0,0) vào các biểu thức của $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ vừa tính được thì không thể xác định được giá trị của các biểu thức này.

Bây giờ, chúng ta tính $f'_x(0,0)$ và $f'_y(0,0)$ bằng định nghĩa

$$\begin{cases} f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^3+8.0^3}-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}1 = 1 \\ f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{0^3+8(0+\Delta y)^3}-0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(\Delta y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}2 = 2 \end{cases}$$

1.3.1.2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Cho z = f(x,y) trong đó x, y là các hàm số của hai biến độc lập u, v: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, khi đó $z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ được gọi là hàm hợp của hai biến độc lập u, v.

Giả sử các hàm số x(u,v), y(u,v) có các đạo hàm riêng $x'_u(u,v),\ x'_v(u,v),\ y'_u(u,v),\ y'_v(u,v)$ tại điểm (u,v) và hàm số f(x,y) có các đạo hàm riêng tương ứng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ tại điểm $(x,y) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ thì $\begin{cases} f'_u\big(x(u,v),y(u,v)\big) = f'_x(x,y)x'_u(u,v) + f'_y(x,y)y'_u(u,v) \\ f'_v\big(x(u,v),y(u,v)\big) = f'_x(x,y)x'_v(u,v) + f'_y(x,y)y'_v(u,v) \end{cases}$

Ví dụ **1.12.** Tính các đạo hàm riêng $f'_u\big(x(u,v),y(u,v)\big), f'_v\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ của hàm hợp z = f(x,y) = xlny với $\begin{cases} x = x(u,v) = 3u - v \\ y = y(u,v) = \ln(u^2+v^2) \end{cases}$.

Bài giải. Hàm số f(x,y) = xlny xác định được khi y > 0 nên tập xác định của nó là $D(f) = \{(x,y)\in R^2 \mid y > 0\}$. Trên mặt phẳng tọa độ của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy thì D(f) là các điểm thuộc nửa mặt phẳng nằm phía trên trục hoành Ox và không kể các điểm thuộc trục hoành Ox.

Sử dụng công thức trên ta tính được

$$f'_u\big(x(u,v),y(u,v)\big) = f'_x(x,y)x'_u(u,v) + f'_y(x,y)y'_u(u,v) = \frac{\partial(x\ln y)}{\partial x}\frac{\partial(3u-v)}{\partial u} + \frac{\partial(x\ln y)}{\partial y}\frac{\partial\big(\ln(u^2+v^2)\big)}{\partial u} =$$

$$(\ln y)3 + \frac{x}{y}\frac{1}{u^2+v^2}2u = 3\ln y + \frac{x}{y}\frac{2u}{u^2+v^2} = 3\ln\big(\ln(u^2+v^2)\big) + \frac{2(3u-v)u}{(u^2+v^2)\ln(u^2+v^2)}$$

$$f'_v\big(x(u,v),y(u,v)\big) = f'_x(x,y)x'_v(u,v) + f'_y(x,y)y'_v(u,v) = \frac{\partial(x\ln y)}{\partial x}\frac{\partial(3u-v)}{\partial v} + \frac{\partial(x\ln y)}{\partial y}\frac{\partial\big(\ln(u^2+v^2)\big)}{\partial v} =$$

$$(\ln y)(-1) + \frac{x}{y}\frac{1}{u^2+v^2}2v = -\ln y + \frac{x}{y}\frac{2v}{u^2+v^2} = -\ln\big(\ln(u^2+v^2)\big) + \frac{2(3u-v)v}{(u^2+v^2)\ln(u^2+v^2)}$$

Hệ quả 1. Nếu hàm số z = f(x,y) với $\begin{cases} x = x(u,v) = x \\ y = y(u,v) = y(x) \end{cases}$ thì nó là hàm hợp của biến x, tức là

$$z = f(x, y(x)) \Rightarrow f'(x, y(x)) \equiv \frac{df(x, y(x))}{dx} = f'_x(x,y)x'_x + f'_y(x,y)y'(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'(x) \text{ vì } x'_x = 1.$$

Ví dụ **1.13.** Tính đạo hàm theo biến độc lập x của hàm hợp $z = f(x,y) = xe^y$ với $y = y(x) = 2x$

Bài giải. Dễ thấy rằng, tập xác định của hàm số f(x,y) = xe^y là D(f) = $\mathbf{R}^2$, còn tập xác định của hàm số y(x) = 2x là D(y) = **R**.

- Nếu tính đạo hàm theo biến x của hàm số $f(x,y) = xe^y$ với $y = y(x) = 2x$ theo công thức

$$f'(x, y(x)) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'(x) = \frac{\partial(xe^y)}{\partial x} + \frac{\partial(xe^y)}{\partial y}(2x)' = e^y + xe^y 2 = (1+2x)e^y = (1+2x)e^{2x}.$$

- Nếu thay y = 2x vào hàm số $f(x,y) = xe^y = xe^{2x}$ trước khi tính đạo hàm thì

$$f'(x, y(x)) \equiv \frac{d(xe^{2x})}{dx} = x'_x e^{2x} + x(e^{2x})' = 1.e^{2x} + xe^{2x}(2x)' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}.$$

Hệ quả 2. Nếu hàm số z = f(x,y) có $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì nó là hàm hợp của biến t, tức là $z = f(x(t), y(t))$,

khi đó $f'(x(t), y(t)) \equiv \dfrac{df(x(t), y(t))}{dt} = f'_x(x,y)\dfrac{dx}{dt} + f'_y(x,y)\dfrac{dy}{dt} = f'_x(x,y)x'(t) + f'_y(x,y)y'(t)$.

Ví dụ **1.14.** Tính đạo hàm theo biến t của hàm hợp $z = f(x,y) = x\sqrt{y^2+1}$ với $\begin{cases} x = x(t) = te^{2t} \\ y = y(t) = e^{-t} \end{cases}$

Bài giải. Dễ thấy rằng tập xác định của hàm số f(x,y) là D(f) = $\mathbf{R}^2$, còn tập xác định của các hàm số x(t) và y(t) tương ứng là D(x) = **R** và D(y) = **R**.

Tính $f'(x(t), y(t)) = f'_x(x,y)x'(t) + f'_y(x,y)y'(t)$ với $f(x,y) = x\sqrt{y^2+1}$ và $\begin{cases} x = x(t) = te^{2t} \\ y = y(t) = e^{-t} \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(x\sqrt{y^2+1})}{\partial x} = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{(e^{-t})^2+1} = \sqrt{e^{-2t}+1} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(x\sqrt{y^2+1})}{\partial y} = x\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{xy}{\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{te^{2t}e^{-t}}{\sqrt{(e^{-t})^2+1}} = \dfrac{te^t}{\sqrt{e^{-2t}+1}} \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} x'(t) = (te^{2t})' = e^{2t} + te^{2t}2 = (2t+1)e^{2t} \\ y'(t) = (e^{-t})' = -e^{-t} \end{cases} \Rightarrow f'(x(t), y(t)) = \sqrt{e^{-2t}+1}(2t+1)e^{2t} + \frac{te^t}{\sqrt{e^{-2t}+1}}(-e^{-t}) =$$

$$\frac{(e^{-2t}+1)(2t+1)e^{2t} + te^t(-e^{-t})}{\sqrt{e^{-2t}+1}} = \frac{(2t+1)(e^{2t}+1) - t}{\sqrt{e^{-2t}+1}}$$

1.3.2. Khái niệm vi phân toàn phần, Gradient

1.3.2.1. Vi phân toàn phần cấp 1

Giả sử hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở D(f)$\subset\mathbf{R}^2$ đối với hai biến độc lập x và y. Giả sử điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ và điểm M(x,y) thuộc lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ [vì D(f) là tập mở nên $M(x,y)\in D(f)$] tức là $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, trong đó $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = y - y_0$ là các số gia của các biến x và y. Biểu thức $\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ được gọi là *số gia toàn phần* của hàm số f(x,y) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$.

Hàm số f(x,y) được gọi là *khả vi* tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu có thể biểu diễn

$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(\Delta x) + f'_y(x_0,y_0)(\Delta y) + \varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon_2(\Delta y)$ với $\varepsilon_1\to 0$ và $\varepsilon_2\to 0$ khi $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$, trong đó $f'_x(x_0,y_0)(\Delta x) + f'_y(x_0,y_0)(\Delta y)$ được gọi là các thành phần chính của số gia toàn phần.

Nếu hàm số z = f(x,y) khả vi tại mọi điểm $M(x,y)\in D(f)$ thì nó khả vi trên D(f).

Khi đó, *vi phân toàn phần cấp 1* của hàm số f(x,y) tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$, ký hiệu là $df(x_0,y_0)$ được định nghĩa bởi các thành phần chính của số gia toàn phần $df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$.

Mặt khác, nếu xem x và y là các hàm của hai biến x, y thì nếu tính vi phân toàn phần cấp 1 của x và y theo định nghĩa trên, chúng ta được

$$\begin{cases} dx = x'_x\Delta x + x'_y\Delta y = 1.\Delta x + 0.\Delta y = \Delta x \\ dy = y'_x\Delta x + y'_y\Delta y = 0.\Delta x + 1.\Delta y = \Delta y \end{cases} \Rightarrow df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

Chúng ta có thể dùng điểm $M(x,y)\in D(f)$ thay cho điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$, khi đó vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số f(x,y) tại điểm $M(x,y)\in D(f)$ là $df(x,y)=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

$$\Rightarrow df(x_0,y_0) = \left(f'_x(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}\right)dx + \left(f'_y(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}\right)dy.$$

Định lý **1.3.1.** Nếu hàm số z = f(x,y) khả vi tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ thì nó liên tục tại điểm này.

Chú ý. Điều kiện hàm số z = f(x,y) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ và các giá trị này là các số hữu hạn, chưa phải là ***điều kiện đủ*** để hàm này khả vi tại điểm $M_0(x_0,y_0)$. Định lý sau đây chỉ ra điều kiện đủ cho hàm số f(x,y) khả vi.

Định lý **1.3.2.** Nếu hàm số z = f(x,y) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ trong lân cận điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ thì hàm số f(x,y) khả vi tại điểm này.

Ví dụ **1.15.** Chứng minh rằng, hàm số $z = f(x,y) = xe^{xy}$ khả vi tại điểm (1,0).

Bài giải. $D(f) = \mathbf{R}^2 \Rightarrow (1,0)\in D(f)$

Trước hết, chúng ta tính $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(xe^{xy})}{\partial x} = e^{xy}+xye^{xy} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(xe^{xy})}{\partial y} = x^2e^{xy} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,0) = f'_x(x,y)\Big|_{(x,y)=(1,0)} = (e^{xy}+xye^{xy})\Big|_{(x,y)=(1,0)} = e^{1.0}+1.0.e^{1.0} = 1+0 = 1 \\ f'_y(1,0) = f'_y(x,y)\Big|_{(x,y)=(1,0)} = x^2e^{xy}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 1^1.e^{1.0} = 1 \end{cases}$$

Hiển nhiên là các hàm số $f'_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$, $f'_y(x,y)=x^2e^{xy}$ liên tục tại điểm (1,0).

Theo Định lý 1.3.2. thì hàm số $f(x,y) = xe^{xy}$ khả vi tại điểm (1,0).

Định lý **1.3.3.** Nếu hàm số z = f(x,y) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ trong lân cận điểm $(x_0,y_0)\in D(f)$ thì điều kiện cần và đủ để hàm số z = f(x,y) khả vi tại điểm $(x_0,y_0)\in D(f)$ là

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(\Delta x)-f'_y(x_0,y_0)(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

Từ Định lý 1.3.3. suy ra, để xét tính khả vi của hàm số z = f(x,y) tại điểm $(x_0,y_0)\in D(f)$, chúng ta thực hiện các Bước sau.

Bước 1. Tính các giới hạn $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \equiv A \\ f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \equiv B \end{cases}$

- Trường hợp 1. Nếu có ít nhất một giới hạn trên không tồn tại hoặc tồn tại nhưng vô hạn thì kết luận hàm số f(x,y) không khả vi tại điểm (x_0,y_0) và kết thúc quá trình xét.

- Trường hợp 2. Ngược lại, nếu cả hai giới hạn trên tồn tại và có giá trị hữu hạn thì chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A(\Delta x)-B(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\equiv C$

Nếu giới hạn trên tồn tại và có giá trị bằng không (C = 0) thì kết luận hàm số f(x,y) khả vi tại điểm (x_0,y_0); ngược lại, tức là giới hạn trên tồn tại và có giá trị khác không ($C\neq 0$) hoặc giới hạn trên không tồn tại thì kết luận hàm số f(x,y) không khả vi tại điểm (x_0,y_0).

Ví dụ **1.16.** Xét tính khả vi của hàm số $z=f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+8y^3}$ tại điểm $(x_0,y_0)\equiv(0,0)$.

Bài giải. $D(f)=\mathbf{R}^2\Rightarrow(0,0)\in D(f)$

Bước 1. Như đã tính ở Ví dụ 1.11. chúng ta có $\begin{cases}f'_x(0,0)=1\equiv A\\ f'_y(0,0)=2\equiv B\end{cases}$

Bước 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A(\Delta x)-B(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-1(\Delta x)-2(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^3+8(0+\Delta y)^3}-0-\Delta x-2(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+8(\Delta y)^3}-\Delta x-2(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

Xét dãy điểm $(\Delta x_n,\Delta y_n)=\left(\dfrac{p}{n},\dfrac{q}{n}\right)$ với $n\in\mathbf{N}^*$ và p, q là các tham số thực không đồng thời bằng không; khi đó $(\Delta x_n,\Delta y_n)\to(0,0)\Leftrightarrow n\to\infty$

$$\Rightarrow\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+8(\Delta y)^3}-\Delta x-2(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(p/n)^3+8(q/n)^3}-(p/n)-2(q/n)}{\sqrt{(p/n)^2+(q/n)^2}}=$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{p^3+8q^3}-p-2q}{\sqrt{p^2+q^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{p^3+8q^3}-p-2q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, khi p và q thay đổi thì giá trị giới hạn này thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+8(\Delta y)^3}-\Delta x-2(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ không tồn tại, tức là không tồn tại C. Do đó, hàm số $z=f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+8y^3}$ không khả vi tại điểm (0,0).

Giả sử x, y là các hàm số của hai biến độc lập u và v: $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$, khi đó chúng ta có hàm hợp $z=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ đối với hai biến độc lập u và v. Bây giờ, chúng ta tìm vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ đối với hai biến độc lập u và v theo định nghĩa trên

$$df\big(x(u,v),y(u,v)\big)=f'_u\big(x(u,v),y(u,v)\big)du+f'_v\big(x(u,v),y(u,v)\big)dv$$

$$\text{mà }\begin{cases}f'_u\big(x(u,v),y(u,v)\big)=f'_x(x,y)x'_u(u,v)+f'_y(x,y)y'_u(u,v)\\ f'_v\big(x(u,v),y(u,v)\big)=f'_x(x,y)x'_v(u,v)+f'_y(x,y)y'_v(u,v)\end{cases}$$

$$\Rightarrow df\big(x(u,v),y(u,v)\big)=[f'_x(x,y)x'_u(u,v)+f'_y(x,y)y'_u(u,v)]du+$$

$$[f'_x(x,y)x'_v(u,v)+f'_y(x,y)y'_v(u,v)]dv=$$

$$[f'_x(x,y)x'_u(u,v)du+f'_x(x,y)x'_v(u,v)dv]+[f'_y(x,y)y'_u(u,v)du+f'_y(x,y)y'_v(u,v)dv]=$$

$$f'_x(x,y)[x'_u(u,v)du+x'_v(u,v)dv]+f'_y(x,y)[y'_u(u,v)du+y'_v(u,v)dv]=$$

$$f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=df(x,y)\ \text{ vì }\begin{cases}x'_u(u,v)du+x'_v(u,v)dv=dx\\ y'_u(u,v)du+y'_v(u,v)dv=dy\end{cases}.$$

$\Rightarrow df\big(x(u,v),y(u,v)\big)=df(x,y),$ đẳng thức này chứng tỏ dạng vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số f(x,y) không thay đổi khi x và y là các biến độc lập hay là các biến phụ thuộc, điều này được gọi là tính bất biến của dạng vi phân toàn phần cấp 1.

1.3.2.2. Gradient

Giả sử hàm số z = f(x,y) có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$. Biểu thức $f'_x(x_0,y_0)\vec{i}+f'_y(x_0,y_0)\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị tương ứng với các trục tọa độ Ox, Oy của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy) được gọi là Gradient của hàm số z = f(x,y) tại điểm M_0, tức là véc tơ đi qua điểm M_0 và có các tọa độ là các đạo hàm riêng của hàm số f(x,y) tại điểm M_0 và được ký hiệu là Gradf(x_0,y_0).

Chúng ta có thể dùng điểm $M(x,y)\in D(f)$ thay cho điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ và khi đó Gradient của hàm số f(x,y) tại điểm M là véc tơ $\mathrm{Grad}f(x,y)=f'_x(x,y)\vec{i}+f'_y(x,y)\vec{j}$ nếu hàm số f(x,y) có các đạo riêng tại điểm M.

$$\Rightarrow \mathrm{Grad}f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}\right)\vec{i}+\left(f'_y(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}\right)\vec{j}$$

Tương tự, đối với hàm số 3 biến u = f(x,y,z) có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D(f)$. Biểu thức $f'_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f'_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f'_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$ ($\vec{i}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$ là các véc tơ đơn vị tương ứng với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz) được gọi là Gradient của hàm số u = f(x,y,z) tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$, tức là véc tơ đi qua điểm M_0 và có các tọa độ là các đạo hàm riêng của hàm số f(x,y,z) tại điểm M_0 và được ký hiệu là Gradf(x_0,y_0,z_0).

Chúng ta có thể dùng điểm $M(x,y,z)\in D(f)$ thay cho điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D(f)$ và khi đó Gradient của hàm số f(x,y,z) tại điểm M là véc tơ $\mathrm{Grad}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\vec{i}+f'_y(x,y,z)\vec{j}+f'_z(x,y,z)\vec{k}$ nếu hàm số f(x,y,z) có các đạo hàm riêng tại điểm M. Khi đó

$$\mathrm{Grad}f(x_0,y_0,z_0)=\left(f'_x(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}\right)\vec{i}+\left(f'_y(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}\right)\vec{j}+\left(f'_z(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}\right)\vec{k}$$

Ví dụ **1.17.** Cho u = f(x,y,z) = $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, tính Gradf(1,2,–1)

Bài giải. Chúng ta có $f'_x(x,y,z)=3x^2+3yz$, $f'_y(x,y,z)=3y^2+3zx$ và $f'_z(x,y,z)=3z^2+3xy$

$$\Rightarrow \mathrm{Grad}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\vec{i}+f'_y(x,y,z)\vec{j}+f'_z(x,y,z)\vec{k}=$$

$$(3x^2+3yz)\vec{i}+(3y^2+3zx)\vec{j}+(3z^2+3xy)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Grad}f(1,2,-1)=\mathrm{Grad}f(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)}=$$

$$(3x^2+3yz)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)}\vec{i}+(3y^2+3zx)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)}\vec{j}+(3z^2+3xy)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)}\vec{k}=$$

$$[3.1^2+3.2.(-1)]\vec{i}+[3.2^2+3.(-1).1]\vec{j}+[3.(-1)^2+3.1.2]\vec{k}=-3\vec{i}+9\vec{j}+9\vec{k}.$$

1.3.3. Định nghĩa đạo hàm theo hướng, ý nghĩa và công thức tính

1.3.3.1. Định nghĩa

Cho hàm số 2 biến z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, giả sử điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$. Từ điểm M_0 vẽ một đường thẳng định hướng có véc tơ đơn vị là $\vec{e}$, giả sử điểm $M(x,y)\in D(f)$ là một điểm trên đường thẳng này và là điểm lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$, tức là $\begin{cases}x=x_0+\Delta x\\ y=y_0+\Delta y\end{cases}$, do đó $\overrightarrow{M_0M}=\rho\vec{e}$ với $\rho=d(M_0M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Bây giờ, chúng ta cho $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ dọc theo đường thẳng định hướng trên thì $\rho\to 0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$ khi đó, nếu tồn tại giới hạn

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0,y_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ và giá trị của giới hạn này là một số hữu hạn, thì giá trị này được gọi là đạo hàm của hàm số f(x,y) theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ tại điểm M_0 và ký hiệu là $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}}$.

Tương tự, đối với hàm số 3 biến u = f(x,y,z) xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^3$, giả sử điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D(f)$. Từ điểm M_0 vẽ một đường thẳng định hướng có véc tơ đơn vị là $\vec{e}$, giả sử điểm $M(x,y,z)\in D(f)$ là một điểm trên đường thẳng này và là điểm lân cận của điểm M_0, tức là $\begin{cases} x = x_0+\Delta x\\ y=y_0+\Delta y\\ z=z_0+\Delta z\end{cases}$,

do đó $\overrightarrow{M_0M}=\rho\vec{e}$ với $\rho=d(M_0M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$. Bây giờ, chúng ta cho $M(x,y,z)\to M_0(x_0,y_0,z_0)$ dọc theo đường thẳng định hướng trên thì $\rho\to 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0\end{cases}$

khi đó, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}=\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}$$ và

giá trị của giới hạn này là một số hữu hạn, thì giá trị này được gọi là đạo hàm của hàm số f(x,y,z) theo hướng $\overrightarrow{M_0M}$ tại điểm M_0 và ký hiệu là $\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \vec{e}}$.

Đối với hàm số n biến cũng có định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Nhận xét. Việc tính đạo hàm theo hướng của một hàm số bằng cách dùng định nghĩa là không đơn giản.

1.3.3.2. Ý nghĩa và công thức tính

Ý nghĩa. Đạo hàm của hàm số f(x,y) theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ biểu thị tốc độ biến thiên của hàm số đó theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$.

Công thức tính. Nếu hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở D(f) có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$ thì tại điểm ấy nó có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{M_0M}$ và được tính bằng công thức $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec{e}}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta$; trong đó $\cos\alpha$ và $\cos\beta$ là các thành phần của véc tơ đơn vị $\vec{e}$ của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$, trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, tức là $\vec{e}=(\cos\alpha)\,\vec{i}+(\cos\beta)\,\vec{j}$. Nếu chúng ta gọi $\cos\alpha$ và $\cos\beta$ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$, thì các cosin chỉ phương có tính chất: Tổng các bình phương của cosin chỉ phương bằng 1, tức là $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

Nhận xét. (1) Đạo hàm của hàm số f(x,y) theo hướng $\overrightarrow{M_0M}$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ của hàm số f(x,y) tại điểm M_0 chính là tích vô hướng của véc tơ $\vec{e}$ với véc tơ $\mathrm{Grad}f(x_0,y_0)$.

Thật vậy, chúng ta có $\begin{cases}\vec{e}=(\cos\alpha)\,\vec{i}+(\cos\beta)\,\vec{j}\\ \mathrm{Grad}f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\,\vec{i}+f'_y(x_0,y_0)\,\vec{j}\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{e}.\mathrm{Grad}f(x_0,y_0)=[(\cos\alpha)\,\vec{i}+(\cos\beta)\,\vec{j}].[f'_x(x_0,y_0)\,\vec{i}+f'_y(x_0,y_0)\,\vec{j}]=$

$$(\cos\alpha)f'_x(x_0,y_0)(\vec{i}\,.\,\vec{i}) + (\cos\alpha)f'_y(x_0,y_0)(\vec{i}\,.\,\vec{j}) + (\cos\beta)f'_x(x_0,y_0)(\vec{j}\,.\,\vec{i}) + (\cos\beta)f'_y(x_0,y_0)(\vec{j}\,.\,\vec{j}) =$$

$f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta \equiv \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}}$ vì các tích vô hướng $\vec{i}\,.\,\vec{i} = 1,\ \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0$ và $\vec{j}\,.\,\vec{j} = 1$.

(2) Tích vô hướng của véc tơ $\vec{a}$ với véc tơ $\vec{b}$ tạo thành với nhau một góc φ là $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$\Rightarrow -1 \le \vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \le 1 \Rightarrow \max|\vec{a}\,.\,\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ khi $\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$.

Từ Nhận xét trên, chúng ta thấy rằng $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}}$ đạt giá trị lớn nhất và bằng $|\mathrm{Grad} f(x_0,y_0)|$ khi véc tơ $\vec{e}$ cùng phương và cùng chiều với véc tơ $\mathrm{Grad} f(x_0,y_0)$.

$$\Rightarrow \max \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}} = |\vec{e}||\mathrm{Grad} f(x_0,y_0)| = 1|\mathrm{Grad} f(x_0,y_0)| =$$

$$|\mathrm{Grad} f(x_0,y_0)| = \sqrt{[f'_x(x_0,y_0)]^2 + [f'_y(x_0,y_0)]^2}.$$

Kết quả tương tự cũng đúng đối với hàm số 3 biến trở lên.

Đối với hàm số n biến cũng có ý nghĩa, công thức tính, nhận xét và kết quả tương tự. Chẳng hạn, đối với hàm số 3 biến, nếu hàm số z = f(x,y,z) xác định trên tập mở D(f) có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D(f)$ thì tại điểm ấy nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{e}$ và được tính bằng công thức $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta + f'_z(x_0,y_0)\cos\gamma$; trong đó cosα, cosβ và cosγ là các thành phần của véc tơ đơn vị $\vec{e}$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, tức là $\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$. Nếu chúng ta gọi cosα, cosβ và cosγ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$, các cosin chỉ phương có tính chất: Tổng các bình phương của cosin chỉ phương là bằng 1, tức là $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ví dụ **1.18.**

(a) Tìm đạo hàm của hàm số $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ tại điểm $M_0(1,1)$ theo hướng của véc tơ $\vec{e}$ lập với hướng dương của trục Ox (trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy) một góc $\alpha = 60^o$.

(b) Tìm đạo hàm của hàm số $u = f(x,y,z) = xy^2z^3$ tại điểm $M_0(3,2,1)$ theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ với M(5,4,2).

(c) Cho hàm số $u = f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, tính $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}}$ nếu $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ với $M_0(1,2,-1)$ và M(2,0,1).

Bài giải.

(a) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 - y^2$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Nếu $\vec{e}$ lập với hướng dương của trục Ox một góc $\alpha = 60^o$ thì $\vec{e}$ sẽ lập với hướng dương của trục Oy một góc $\beta = 30^o$, do đó các cosin chỉ phương của $\vec{e}$ là $\begin{cases} \cos 60^o = 1/2 \\ \cos 30^o = \sqrt{3}/2 \end{cases}$.

Chúng ta lại có $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} = 2x \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,1) = 2x\big|_{(x,y)=(1,1)} = 2.1 = 2 \\ f'_y(1,1) = -2y\big|_{(x,y)=(1,1)} = -2.1 = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(1,1)}{\partial \vec{e}} = f'_x(1,1)\cos\alpha + f'_y(1,1)\cos\beta = 2.\frac{1}{2} + (-2).\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$$

(b) Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = xy^2z^3$ là $D(f) = \mathbf{R}^3$.

- Xác định véc tơ đơn vị $\vec{e}$ của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ và các cosin chỉ phương của nó:

Vì điểm M có tọa độ (5,4,2) và điểm M_0 có tọa độ (3,2,1) nên véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ có các thành phần $(5-3,4-2,2-1) = (2,2,1) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$\Rightarrow \vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \dfrac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}$, mặt khác $\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ với $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$

$$\Rightarrow (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k} \equiv \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 2/3 \\ \cos\beta = 2/3 \\ \cos\gamma = 1/3 \end{cases}$$

- Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy^2z^3)}{\partial x} = y^2z^3 \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y} = 2xyz^3 \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy^2z^3)}{\partial z} = 3xy^2z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(3,2,1) = y^2z^3\big|_{(x,y,z)=(3,2,1)} = 2^2.1^3 = 4 \\ f'_y(3,2,1) = 2xyz^3\big|_{(x,y,z)=(3,2,1)} = 2.3.2.1^3 = 12 \\ f'_z(3,2,1) = 3xy^2z^2\big|_{(x,y,z)=(3,2,1)} = 3.3.2^2.1^2 = 36 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(3,2,1)}{\partial \vec{e}} = f'_x(3,2,1)\cos\alpha + f'_y(3,2,1)\cos\beta + f'_z(3,2,1)\cos\gamma = 4.\frac{2}{3} + 12.\frac{2}{3} + 36.\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

(c) Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ là $D(f) = \mathbf{R}^3$.

- Xác định véc tơ đơn vị $\vec{e}$ của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ và các cosin chỉ phương của nó:

Vì điểm M có tọa độ (2,0,1) và điểm M_0 có tọa độ (1,2,–1) nên véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ có các thành phần $(2-1,0-2,1-(-1)) = (1,-2,2) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$

$\Rightarrow \vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \dfrac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{3} = \dfrac{1}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{2}{3}\vec{k}$, mặt khác $\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ với $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$

$$\Rightarrow (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k} \equiv \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1/3 \\ \cos\beta = -2/3 \\ \cos\gamma = 2/3 \end{cases}$$

- Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{\partial(x^3+y^3+z^3+3xyz)}{\partial x} = 3x^2+3yz \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{\partial(x^3+y^3+z^3+3xyz)}{\partial y} = 3y^2+3xz \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{\partial(x^3+y^3+z^3+3xyz)}{\partial z} = 3z^2+3xy \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2,-1) = (3x^2+3yz)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = 3.1^2+3.2.(-1) = -3 \\ f'_y(1,2,-1) = (3y^2+3xz)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = 3.2^2+3.1.(-1) = 9 \\ f'_z(1,2,-1) = (3z^2+3xy)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = 3.(-1)^2+3.1.2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(1,2,-1)}{\partial \vec{e}} = f'_x(1,2,-1)\cos\alpha + f'_y(1,2,-1)\cos\beta + f'_z(1,2,-1)\cos\gamma = -3.\frac{1}{3} + 9.\left(-\frac{2}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} = -1.$$

Ví dụ **1.19.**

(a) Tìm đạo hàm của hàm số $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ tại điểm M(3,4) theo hướng Gradient của hàm số f(x,y).

(b) Tìm giá trị và hướng của Gradient của hàm số $u = f(x,y,z) = \tan x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \cot z$ tại điểm $M(\pi/4, \pi/3, \pi/2)$.

Bài giải.

(a) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(3,4) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\Big|_{(x,y)=(3,4)} = \dfrac{2.3}{3^2+4^2} = \dfrac{6}{25} \\ f'_y(3,4) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}\Big|_{x,y)=(3,4)} = \dfrac{2.4}{3^2+4^2} = \dfrac{8}{25} \end{cases}$

Vì véc tơ $\vec{e}$ cùng hướng với véc tơ Gradf(x,y) nên giá trị $\dfrac{\partial f(3,4)}{\partial \vec{e}}$ đạt cực đại và

$$\frac{\partial f(3,4)}{\partial \vec{e}} = |\mathrm{Grad} f(3,4)| = \sqrt{[f'_x(3,4)]^2 + [f'_y(3,4)]^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

(b) Để hàm số $f(x,y,z) = \tan x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \cot z$ xác định được thì

$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq (1+2k)\pi/2 \\ z \neq n\pi \end{cases}$ với k, n ∈ **Z**

$\Rightarrow D(f) = \left\{ (x,y,z) \in R^3 \middle| \begin{cases} x \neq (1+2k)\pi/2 \\ z \neq n\pi \end{cases} \right\}$ với k, n ∈ **Z.**

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{\partial(\tan x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \cot z)}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{\partial(\tan x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \cot z)}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y\cos y = 3\cos^3 y \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{\partial(\tan x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \cot z)}{\partial z} = 1 - \dfrac{1}{\sin^2 z} = -\cot^2 z \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(\pi/4,\pi/3,\pi/2) = \tan^2 x\Big|_{(x,y,z)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)} = \tan^2\frac{\pi}{4} = 1^2 = 1 \\ f'_y(\pi/4,\pi/3,\pi/2) = 3\cos^3 y\Big|_{(x,y,z)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)} = 3\cos^3\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} \\ f'_z(\pi/4,\pi/3,\pi/2) = -\cot^2 z\Big|_{(x,y,z)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)} = -\cot^2\frac{\pi}{2} = -0^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{Gradf}\left(\pi/4,\pi/3,\pi/2\right) = f'_x\left(\pi/4,\pi/3,\pi/2\right)\vec{i} + f'_y\left(\pi/4,\pi/3,\pi/2\right)\vec{j} + f'_z\left(\pi/4,\pi/3,\pi/2\right)\vec{k} = \vec{i} + \frac{3}{8}\vec{j}$ và

$\left|\text{gradf}\,(\pi/4,\pi/3,\pi/2)\right| = \sqrt{[f'_x(\pi/4,\pi/3,\pi/2)]^2 + [f'_y(\pi/4,\pi/3,\pi/2)]^2 + [f'_z(\pi/4,\pi/3,\pi/2)]^2} =$

$\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}$.

Chúng ta có $\vec{e} = \dfrac{\text{Gradf}\,(\pi/4,\pi/3,\pi/2)}{\left|\text{Gradf}\,(\pi/4,\pi/3,\pi/2)\right|} = \dfrac{\vec{i} + \frac{3}{8}\vec{j}}{\sqrt{73}/8} = \dfrac{8}{\sqrt{73}}\vec{i} + \dfrac{3}{\sqrt{73}}\vec{j} \equiv (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$

Suy ra hướng của véc tơ $\text{Gradf}\left(\pi/4,\pi/3,\pi/2\right)$ được xác định bởi các cosin chỉ phương $\begin{cases} \cos\alpha = 8/\sqrt{73} \\ \cos\beta = 3/\sqrt{73} \\ \cos\gamma = 0 \end{cases}$

1.3.4. Đạo hàm riêng cấp cao, vi phân toàn phần cấp cao, khai triển Taylor

1.3.4.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm số 2 biến z = f(x,y) có D(f)$\in\mathbf{R}^2$ và có các đạo hàm riêng $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Các đạo hàm riêng này được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số f(x,y).

Nói chung, các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ là các hàm số của 2 biến (x,y), nếu các đạo hàm riêng cấp 1 này lại có đạo hàm riêng thì được gọi là các đạo hàm riêng cấp 2, …

Trong trường hợp tổng quát nhất, hàm số f(x,y) có 4 đạo hàm riêng cấp 2 là $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right)$ và $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)$ tương ứng được ký hiệu là

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x,y) \equiv f''_{x^2}(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x,y) \equiv f''_{y^2}(x,y).$$

Ví dụ **1.20.** Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số z = f(x,y) = $x^2y^3 + x^4$

Bài giải. Tập xác định của hàm số f(x,y) = $x^2y^3 + x^4$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Bước 1. Tính các đạo riêng cấp 1

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(x^2y^3 + x^4)}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3 \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(x^2y^3 + x^4)}{\partial y} = 3x^2y^2 \end{cases}$$

Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 2

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2xy^3+4x^3)}{\partial x} = 2y^3 + 12x^2 \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2xy^3+4x^3)}{\partial y} = 6xy^2 \\ f''_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x} = 6xy^2 \\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y} = 6x^2y \end{cases}$$

Nhận xét. Trong ví dụ này, chúng ta thấy $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, liệu điều này có luôn luôn đúng với mọi hàm số 2 biến không? Trả lời cho câu hỏi này, nhà toán học Schwarz đã chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1.3.4. Nếu trong một lân cận nào đó của điểm $M(x,y)\in D(f)$ mà hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$; đồng thời các đạo hàm riêng này liên tục tại điểm M thì $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ tại điểm này.

Tiếp tục định nghĩa tương tự, nếu đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 2 tồn tại thì được gọi là các đạo hàm riêng cấp 3, …

1.3.4.2. Vi phân toàn phần cấp cao

Xét hàm số 2 biến $z = f(x,y)$ có tập xác định $D(f)\in \mathbf{R}^2$ và x, y là các biến độc lập, *vi phân toàn phần cấp 1* của hàm số f(x,y) tại điểm $M(x,y)\in D(f)$ là $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$. Vì x và y là các biến độc lập nên dx và dy trong biểu thức $f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$ là các đại lượng không phụ thuộc vào các biến x và y, còn các đạo hàm riêng $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ là các hàm số của 2 biến x, y nên vi phân toàn phần cấp 1 là df(x,y), nói chung là hàm số của 2 biến x,y.

Bây giờ chúng ta coi df(x,y) là hàm số của 2 biến x, y độc lập và tính vi phân toàn phần cấp 1 của nó, tức là tính $d[df(x,y)] \equiv d^2f(x,y)$

$$d^2f(x,y) = d[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy] =$$

$$\frac{\partial[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy]}{\partial x}dx + \frac{\partial[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy]}{\partial y}dy =$$

$$[f''_{x^2}(x,y)dx + f''_{yx}(x,y)dy]dx + [f''_{xy}(x,y)dx + f''_{y^2}(x,y)dy]dy =$$

$$[f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + f''_{yx}(x,y)dydx] + [f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2] \equiv$$

$$f''_{x^2}(x,y)dx^2 + f''_{yx}(x,y)dydx + f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$$

Nếu các đạo hàm riêng cấp 2 $f''_{yx}(x,y), f''_{xy}(x,y)$ liên tục, theo Định lý 1.3.4. thì chúng bằng nhau, tức là $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$

$$\Rightarrow d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$$

Biểu thức $d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$ được gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại điểm $M(x,y)\in D(f)$.

Tương tự, chúng ta định nghĩa vi phần toàn phần cấp 3 của hàm số f(x,y) tại điểm $M(x,y)\in D(f)$ là $d^3f(x,y) = d(d^2f(x,y))$, … và để cho tiện khi viết công thức đối với vi phân toàn phần cấp n trong trường hợp x, y là các biến độc lập, chúng ta dùng ký hiệu tượng trưng $d^nf(x,y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial}{\partial y}.dy\right)^n f(x,y)$ với $n\in \mathbf{N}^*$.

Khi x và y không phải là các biến độc lập mà là các hàm số của các biến u và v, tức là $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ thì dx và dy không phải là các đại lượng độc lập nữa

$$\Rightarrow d^2f(x,y) = d[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy] = d[f'_x(x,y)dx] + d[f'_y(x,y)dy] =$$
$$d[f'_x(x,y)]dx + f'_x(x,y)d(dx) + d[f'_y(x,y)]dy + f'_y(x,y)d(dy) =$$
$$[f''_{x^2}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy]dx + f'_x(x,y)d^2x + [f''_{yx}(x,y)dx + f''_{y^2}(x,y)dy]dy + f'_y(x,y)d^2y =$$
$$f''_{x^2}(x,y)dx^2 + [f''_{xy}(x,y) + f''_{yx}(x,y)]dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 + f'_x(x,y)d^2x + f'_y(x,y)d^2y$$

Đẳng thức trên chứng tỏ, ký hiệu tượng trưng $d^nf(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^n f(x,y)$ không còn phù hợp khi x và y không phải là các biến độc lập.

Như vậy, vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số nhiều biến không có dạng bất biến.

Ví dụ **1.21.** Tính vi phân toàn phần cấp 1 và vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số z = f(x,y) = sinxsiny tại điểm $(\pi/4, \pi/4)$.

Bài giải. Tập xác định của hàm số f(x,y) = sinxsiny là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

- Tính vi phân toàn phần cấp 1

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(\sin x \sin y)}{\partial x} = \cos x \sin y \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(\sin x \sin y)}{\partial y} = \sin x \cos y \end{cases}$

$$\Rightarrow df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = (\cos x \sin y)dx + (\sin x \cos y)dy$$
$$\Rightarrow df(\pi/4, \pi/4) = (\cos x \sin y)\big|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}dx + (\sin x \cos y)\big|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}dy =$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}dx + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}dy = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}dy = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$$

- Tính vi phân toàn phần cấp 2

Chúng ta có $f'_x(x,y) = \cos x \sin y \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(\cos x \sin y)}{\partial x} = -\sin x \sin y \\ f''_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\cos x \sin y)}{\partial y} = \cos x \cos y \end{cases}$

và $f'_y(x,y) = \sin x \cos y \Rightarrow \begin{cases} f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(\sin x \cos y)}{\partial x} = \cos x \cos y \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\sin x \cos y)}{\partial y} = -\sin x \sin y \end{cases}$

$$\Rightarrow d^2f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 =$$
$$f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y dxdy - \sin x \sin y dy^2$$
$$\Rightarrow d^2f(\pi/4, \pi/4) = (-\sin x \sin y)\big|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}dx^2 + (2\cos x \cos y)\big|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}dxdy +$$
$$(-\sin x \sin y)\big|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}dy^2 = -\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}dx^2 + 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}dxdy - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}dy^2 =$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}dx^2 + 2.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}dy^2 = -\frac{1}{2}dx^2 + dxdy - \frac{1}{2}dy^2.$$

1.3.4.3. Khai triển Taylor

Khai triển Taylor đối với hàm số một biến cũng được mở rộng cho hàm số nhiều biến, chẳng hạn đối với hàm số 2 biến: Giả sử hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f)\in\mathbf{R}^2$ và có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)\in D(f)$. Nếu điểm $M(x,y)\in D(f)$ nằm trong lân cận này, tức là $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x - x_0$ và $y = y_0 + \Delta y \Rightarrow \Delta y = y - y_0$ thì chúng ta có

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}.\Delta y\right)^n f(x_0,y_0)$$

Ví dụ **1.22.**

(a) Khai triển Taylor hàm số $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ ở lân cận điểm $M_0(1,-2)$.

(b) Khai triển Taylor hàm số $f(x,y) = x^y$ (x > 0) ở lân cận điểm $M_0(1,1)$ đến các số hạng bậc 3.

Bài giải.

(a) Hàm số $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ có tập xác định là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Chúng ta có $f(1,-2) = 2.1^2 - 1.(-2) - (-2)^2 - 6.1 - 3.(-2) + 5 = 5$, các đạo hàm riêng cấp 1

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{\partial(2x^2-xy-y^2-6x-3y+5)}{\partial x}=4x-y-6 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{\partial(2x^2-xy-y^2-6x-3y+5)}{\partial y}=-x-2y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,-2)=4.1-(-2)-6=0 \\ f'_y(1,-2)=-1-2.(-2)-3=0 \end{cases}$$

và các đạo hàm riêng cấp 2

$$\begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=\dfrac{\partial[f'_x(x,y)]}{\partial x}=\dfrac{\partial(4x-y-6)}{\partial x}=4 \\ f''_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial[f'_x(x,y)]}{\partial y}=\dfrac{\partial[f'_y(x,y)]}{\partial x}=f''_{yx}(x,y)=\dfrac{\partial(4x-y-6)}{\partial y}=-1 \\ f''_{y^2}(x,y)=\dfrac{\partial[f'_y(x,y)]}{\partial y}=\dfrac{\partial(-x-2y-3)}{\partial y}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(1,-2)=4 \\ f''_{xy}(1,-2)=f''_{yx}(1,-2)=-1 \\ f''_{y^2}(1,-2)=-2 \end{cases}$$

còn các đạo hàm riêng cấp 3 trở lên đều bằng không.

Do đó, khai triển Taylor của hàm số f(x,y) ở lân cận điểm (1,–2) là

$$f(x,y)=f(1,-2)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}.\Delta y\right)^n f(1,-2)=f(1,-2)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(1,-2)}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial f(1,-2)}{\partial y}.\Delta y\right]+$$

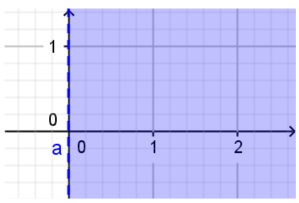
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x^2}.(\Delta x)^2+2\frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x\partial y}.\Delta x.\Delta y+\frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial y^2}.(\Delta y)^2\right]=$$

$$5+0.\Delta x+0.\Delta y+\frac{4(\Delta x)^2+2.(-1)\Delta x\Delta y-2(\Delta y)^2}{2}=5+2(\Delta x)^2-\Delta x\Delta y-(\Delta y)^2$$

với $\Delta x = x - x_0 = x - 1$ và $\Delta y = y - y_0 = y - (-2) = y + 2$.

$$\Rightarrow f(x,y)=2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+5$$

(b) Hàm số $f(x,y) = x^y$ (x > 0) có tập xác định là $D(f) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x > 0\}$ là nửa mặt phẳng bên phải trục tung Oy trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.



Chúng ta có $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y - 1$ và khai triển Taylor hàm số $f(x,y) = x^y$ (x > 0) ở lân lân cận điểm $M_0(1,1)$ đến các số hạng bậc 3 là

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}.\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}.\Delta y\right)^n f(1,1)=f(1,1)+\left[\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1)\right]+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x\partial y}(x-1)(y-1)+\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}(y-1)^2\right]+$$

$$\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}(x-1)^3+3\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2\partial y}(x-1)^2(y-1)+3\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x\partial y^2}(x-1)(y-1)^2+\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}(y-1)^3\right]$$

$$+\ f(x,y)=x^y \Rightarrow f(1,1)=1^1=1,\ \begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{\partial(x^y)}{\partial x}=yx^{y-1} \\ f'_y(x,y)=\dfrac{\partial(x^y)}{\partial y}=x^y\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,1)=1.1^{1-1}=1 \\ f'_y(1,1)=1^1\ln 1=0 \end{cases}$$

$$+\ \begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=\dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(yx^{y-1}\right)}{\partial x}=y(y-1)x^{y-2} \\ f''_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(yx^{y-1}\right)}{\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x) \\ f''_{y^2}(x,y)=\dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(x^y\ln x\right)}{\partial y}=x^y(\ln x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}\Big|_{(x,y)=(1,1)}=1.(1-1).1^{1-2}=0 \\ f''_{xy}(1,1)=x^{y-1}(1+y\ln x)\Big|_{(x,y)=(1,1)}=1^{1-1}(1+1.\ln 1)=1 \\ f''_{y^2}(1,1)=x^y(\ln x)^2\Big|_{(x,y)=(1,1)}=1^1.(\ln 1)^2=0 \end{cases}$$

$$+\ \begin{cases} f'''_{x^3}(x,y)=\dfrac{\partial f''_{x^2}(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(y(y-1)x^{y-2}\right)}{\partial x}=y(y-1)(y-2)x^{y-3} \\ f'''_{x^2y}(x,y)=\dfrac{\partial f''_{x^2}(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(y(y-1)x^{y-2}\right)}{\partial y}=\left[2y-1+y(y-1)\ln x\right]x^{y-2} \\ f'''_{xy^2}(x,y)=\dfrac{\partial f''_{y^2}(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(x^y(\ln x)^2\right)}{\partial y}=(2+y\ln x)x^{y-1}\ln x \\ f'''_{y^3}(x,y)=\dfrac{\partial f''_{y^2}(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(x^y(\ln x)^2\right)}{\partial y}=x^y(\ln x)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''_{x^3}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}\Big|_{(x,y)=(1,1)}=1(1-1)(1-2).1^{1-3}=0 \\ f'''_{x^2y}(1,1)=\left[2y-1+y(y-1)\ln x\right]x^{y-2}\Big|_{(x,y)=(1,1)}=\left[2.1-1+1.(1-1)\ln 1\right]1^{1-2}=1 \\ f'''_{xy^2}(1,1)=(2+y\ln x)x^{y-1}\ln x\Big|_{(x,y)=(1,1)}=(2+1.\ln 1).1^{1-1}.\ln 1=0 \\ f'''_{y^3}(1,1)=x^y(\ln x)^3\Big|_{(x,y)=(1,1)}=x^1.(\ln 1)^3=0 \end{cases}$$

Thay các giá trị trên vào khai triển Taylor của hàm số $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$ ở lân cận điểm (1,1) đến các số hạng bậc 3 đã tính ở trên, chúng ta được

$$f(x,y)=x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+(x-1)^2(y-1)/2=1+(x-1)y+(x-1)^2(y-1)/2.$$

1.3.5. Khái niệm hàm ẩn, đạo hàm riêng của hàm ẩn

1.3.5.1. Khái niệm hàm ẩn

Cho phương trình $F(x,y) = 0$, trong đó ánh xạ $F: U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp mở $U\subset\mathbf{R}^2$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_0\in I$ (I là một khoảng hoặc một đoạn nào đó thuộc **R**), có một hay nhiều giá trị y_0 sao cho $F(x_0,y_0) = 0$, thì chúng ta nói rằng phương trình $F(x,y) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn y theo biến x trong khoảng I.

Như vậy, ánh xạ $f: I \to \mathbf{R}$ là một hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x,y) = 0$ nếu với $\forall x \in I \subset \mathbf{R}$ sao cho $(x,f(x)) \in U \subset \mathbf{R}^2$ và $F(x,f(x)) = 0$.

Ví dụ **1.23.** Từ phương trình $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ suy ra $y = f(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ là 2 hàm ẩn của biến $x \in I = [-a,a] \subset \mathbf{R}$. Trong trường hợp này, chúng ta đã tìm được hai biểu thức tường minh của y theo x. Tuy nhiên, điều này không phải lúc nào cũng thực hiện được! Chẳng hạn, từ phương trình $F(x,y) = x^y - y^x = 0$ (với $x > 0$, $y > 0$) không thể tìm được biểu thức tường minh y theo x.

Tương tự, đối với trường hợp hàm số 3 biến: Cho phương trình $F(x,y,z) = 0$, trong đó ánh xạ $F: U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$. Nếu với mỗi giá trị $(x,y) = (x_0,y_0) \in I$ (I là một tập mở nào đó thuộc $\mathbf{R}^2$), có một hay nhiều giá trị z_0 sao cho $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, thì chúng ta nói rằng phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn z theo các biến x,y trong tập mở I.

Định lý 1.3.5.

Đối với hàm số 2 biến: Cho phương trình $F(x,y) = 0$, trong đó ánh xạ $F: U \to \mathbf{R}$ là hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^2$, giả sử $(x_0,y_0) \in U$ và $F(x_0,y_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì phương trình $F(x,y) = 0$ xác định trong một lân cận nào đó của x_0 một hàm ẩn $y = f(x)$ duy nhất, hàm số này có giá trị bằng y_0 khi $x = x_0$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

Đối với hàm số 3 biến: Cho phương trình $F(x,y,z) = 0$, trong đó ánh xạ $F: U \to \mathbf{R}$ là hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^3$. Giả sử $(x_0,y_0,z_0) \in U$ và $F(x_0,y_0,z_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định trong một lân cận nào đó của điểm (x_0,y_0) một hàm ẩn $z = f(x,y)$ duy nhất, hàm số này có giá trị bằng z_0 khi $x = x_0$ và $y = y_0$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

1.3.5.2. Đạo hàm riêng của hàm ẩn

Đối với hàm số 2 biến $F(x,y) = 0$ với $y = y(x)$ thì $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ khi $F'_y(x,y) \neq 0$.

Đối với hàm số 3 biến $F(x,y,z)$ với $z = z(x,y)$ thì $\begin{cases} z'_x(x,y) = -\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \\ z'_y(x,y) = -\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \end{cases}$ khi $F'_z(x,y,z) \neq 0$.

Ví dụ **1.24.**

(a) Tính y'(x) nếu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(b) Tính $z'_x(x,y)$ và $z'_y(x,y)$ nếu $e^z + xy + x^2 + z^3 = 1$.

Bài giải.

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) = \dfrac{2x}{a^2} \\ F'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) = \dfrac{2y}{b^2} \end{cases} \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \text{ khi } y \neq 0$$

(b) $e^z + xy + x^2 + z^3 = 1 \Rightarrow F(x,y,z) = e^z + xy + x^2 + z^3 - 1 = 0$

$$\Rightarrow\begin{cases} F'_x(x,y,z)=\dfrac{\partial(e^z+xy+x^2+z^3-1)}{\partial x}=2x+y\\ F'_y(x,y,z)=\dfrac{\partial(e^z+xy+x^2+z^3-1)}{\partial y}=x\\ F'_z(x,y,z)=\dfrac{\partial(e^z+xy+x^2+z^3-1)}{\partial z}=e^z+3z^2\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases} z'_x(x,y)=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\dfrac{2x+y}{e^z+3z^2}\\ z'_x(x,y)=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\dfrac{x}{e^z+3z^2}\end{cases}$$

vì $e^z+3z^2>0$ với $\forall z$.

1.4. Cực trị của hàm nhiều biến

1.4.1. Cực trị địa phương, phương pháp tìm cực trị địa phương

Định nghĩa. Cho hàm số n biến $f(x_1,x_2,...,x_n)$ xác định trên tập mở D(f)$\subset\mathbf{R}^n$. điểm. Chúng ta nói rằng hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n)$ có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})\in D(f)$ nếu với mọi điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ trong một lân cận nào đó của điểm M_0 nhưng khác M_0 và hiệu số $f(x_1,x_2,...,x_n)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(x_1,x_2,...,x_n)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})>0$ thì hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm M_0, khi đó $f_{ct}=f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$; còn nếu $f(x_1,x_2,...,x_n)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})<0$ thì hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm M_0, do đó $f_{cđ}=f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$.

Ví dụ **1.25.** Tìm cực trị của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$

(b) $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

(c) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$

(d) $u=f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$

Bài giải.

(a) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Vì $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2 = -(x + 1)^2 - (y - 3)^2 + 24 < 24 = f(-1,3)$ với $\forall(x,y) \neq (-1,3)$ nên theo định nghĩa thì hàm số $f(x,y) = -x^2 - 2x + 14 + 6y - y^2$ có cực đại địa phương tại điểm $(-1,3)\in$ D(f) và giá trị cực đại này là $f_{cđ} = f(-1,3) = 24$.

(b) Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Vì $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y=(x-3/2)^2+(y-3)^2+xy-45/4$ nên chưa thể xác định được cực trị của hàm số này bằng cách đơn giản như ở (a).

(c) Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$ là D(f) = $\mathbf{R}^3$.

Vì $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8 = (x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 + 3 > 3 = f(-1,0,2)$ với $\forall(x,y,z) \neq (-1,0,2)$ nên theo định nghĩa thì hàm số $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 8$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(-1,0,2)\in$D(f) và giá trị cực tiểu này là $f_{ct} = f(-1,0,2) = 3$.

(d) Tập xác định của hàm số $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ là

$$D(f)=\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, x>0,y>0,z>0\}$$

Việc xác định cực trị của hàm số này không thể thực hiện được bằng cách đơn giản như ở (c).

Nhận xét. Không phải bài toán tìm cực trị của hàm số nào cũng giải được đơn giản như đối với các hàm số (a) và (c) trong Ví dụ 1.25.

Điều kiện cần của cực trị địa phương. Nếu hàm số $f(x_1,x_2,...,x_n)$ xác định trên tập mở D(f)$\in\mathbf{R}^n$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là $f'_{x_i}(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})=0$ $(1\le i\le n)$.

Điểm mà tại đó, tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$, bằng không được gọi là điểm tới hạn hay điểm dừng.

- Đối với hàm số 2 biến z = f(x,y) xác định trên tập mở D(f)∈$\mathbf{R}^2$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_0,y_0)$∈D(f) thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

- Đối với hàm số 3 biến u = f(x,y,z) xác định trên tập mở D(f)∈$\mathbf{R}^3$, có cực trị địa phương tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$∈D(f) thì tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 của nó bằng không tại điểm đó, tức là $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$.

Trước khi nêu điều kiện đủ của cực trị địa phương, chúng ta định nghĩa Dạng toàn phương và phát biểu Định lý Sylvester trong Đại số.

Dạng toàn phương

Giả sử x = (x_1 x_2 … x_n) là ma trận cấp (1×n), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp (n×n) đối xứng ($a_{ij} = a_{ji}$ với ∀i,j).

Biểu thức ω(x_1,x_2, …,x_n) = xAx^t (x^t là ma trận chuyển vị của ma trận x) được gọi là dạng toàn phương của n biến x_1, x_2, …, x_n; còn ma trận đối xứng A được gọi là ma trận tương ứng của dạng toàn phương ω(x_1,x_2, …,x_n).

Vì ma trận A là ma trận đối xứng nên sau khi thực hiện phép nhân 3 ma trận trên chúng ta được

$$\omega(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j .$$

Như vậy, nếu cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông đối xứng cấp (n×n) thì chúng ta xác định được một dạng toàn phương ω(x_1,x_2, …,x_n) bằng công thức trên; ngược lại, nếu cho một dạng toàn phương thì chúng ta xác định được một ma trận A tương ứng là ma trận đối xứng cấp (n×n).

Ví dụ về việc xác định dạng toàn phương nếu biết ma trận tương ứng của nó

(a) Xác định dạng toàn phương ω(x_1,x_2) có ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ tương ứng.

(b) Xác định dạng toàn phương ω(x_1,x_2,x_3) có ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ tương ứng.

Bài giải.

(a) $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & -2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=3\\ a_{12}=6\\ a_{22}=-2\end{cases}$

$$\Rightarrow\omega(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 2}2a_{ij}x_ix_j=3x_1^2-2x_2^2+2.6x_1x_2=3x_1^2-2x_2^2+12x_1x_2.$$

(b) $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 3\\ 4 & 0 & -5\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=-2\\ a_{22}=0\\ a_{33}=1\end{cases}$ và $\begin{cases}a_{12}=4\\ a_{13}=3\\ a_{23}=-5\end{cases}$

$$\Rightarrow\omega(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 3}2a_{ij}x_ix_j=-2x_1^2+0.x_2^2+1.x_3^2+2.4x_1x_2+2.3x_1x_3+2.(-5)x_2x_3=$$
$$-2x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+6x_1x_3-10x_2x_3.$$

Ví dụ về việc xác định ma trận tương ứng của dạng toàn phương đã biết

(a) Xác định ma trận A tương ứng của dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2)=5x_1^2-x_1x_2-x_2^2$.

(b) Xác định ma trận A tương ứng của dạng toàn phương
$\omega(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_2^2+2x_1x_2+5x_1x_3-3x_2x_3$.

Bài giải.

(a) $\omega(x_1,x_2)=5x_1^2-x_1x_2-x_2^2=5x_1^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)x_1x_2-x_2^2\Rightarrow A=\begin{pmatrix}5 & -1/2\\ -1/2 & -1\end{pmatrix}$

(b) $\omega(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_2^2+2x_1x_2+5x_1x_3-3x_2x_3=$

$$x_1^2-4x_2^2+0.x_3^2+2.1.x_1x_2+2.\frac{5}{2}x_1x_3+2.\left(-\frac{3}{2}\right)x_2x_3\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5/2\\ 1 & -4 & -3/2\\ 5/2 & -3/2 & 0\end{pmatrix}$$

Dạng toàn phương được gọi là:

(1) *xác định dương* nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)>0$ với $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ và $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq(0,0,\ldots,0)$;

(2) *xác định âm* nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)<0$ với $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ và $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq(0,0,\ldots,0)$;

(3) *không xác định dấu* (không xác định dương cũng không xác định âm) nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ đổi dấu;

(4) *suy biến* nếu $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ khi $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq(0,0,\ldots,0)$.

Định lý Sylvester.

Xét dạng toàn phương $\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{ij}x_ix_j$

có ma trận tương ứng $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & a_{nn}\end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

Ký hiệu $A_k=\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & & a_{kk}\end{pmatrix}$ với $1\le k\le n$ là các định thức con chính của ma trận A.

Khi đó

(1) $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ xác định dương $\Leftrightarrow A_k > 0$ với $\forall k$ $(1 \le k \le n)$,

(2) $\omega(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ xác định âm $\Leftrightarrow A_k < 0$ với $\forall k$ lẻ và $A_k > 0$ với $\forall k$ chẵn $(1 \le k \le n)$.

Định lý. *Dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đều dương; dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương: có cấp lẻ đều âm và có cấp chẵn đều dương.*

Điều kiện đủ của cực trị địa phương. Nếu hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở $D(f)\in\mathbf{R}^n$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trong một lân cận nào đó của điểm dừng $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) \in D(f)$, thì vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ tại điểm M_0

$$d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}.dx_n\right)^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2f''_{x_i x_j}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})dx_i dx_j$$

là dạng toàn phương của các biến $dx_1, dx_2, ..., dx_n$.

Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ xác định âm thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm M_0; còn nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ xác định dương thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm M_0;

(2) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ không xác định dấu thì hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ không có cực trị tại điểm M_0;

(3) Nếu $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ suy biến, tức là tồn tại $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ không đồng thời bằng 0 nhưng $d^2f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ có cực trị địa phương tại điểm M_0 hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Đối với các hàm số 2 biến $z = f(x,y)$ xác định trên tập mở $D(f)\in\mathbf{R}^2$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trên D(f), để tìm cực trị địa phương của nó, căn cứ vào điều kiện cần và đủ để hàm số nhiều biến có cực trị địa phương đã trình bày ở trên, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số f(x,y): $\begin{cases} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{cases}$ và tìm các điểm dừng (x^*,y^*) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số f(x,y): $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) \\ f''_{y^2}(x,y) \end{cases}$ và suy ra vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại điểm (x,y): $d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại mỗi điểm (x^*,y^*):

$d^2f(x^*,y^*) = f''_{x^2}(x^*,y^*)dx^2 + 2f''_{xy}(x^*,y^*)dxdy + f''_{y^2}(x^*,y^*)dy^2$ là dạng toàn phương của 2 biến dx, dy. Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ xác định dương thì hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$; còn nếu $d^2f(x^*,y^*)$ xác định âm thì hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{cđ} = f(x^*,y^*)$.

(2) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ không xác định dấu thì hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*).

(3) Nếu $d^2f(x^*,y^*)$ suy biến, tức là tồn tại dx và dy không đồng thời bằng không, nhưng $d^2f(x^*,y^*) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số f(x,y) có cực trị tại điểm (x^*,y^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Đối với các hàm số 3 biến z = f(x,y,z) xác định trên tập mở $D(f)\in\mathbf{R}^3$, có tất cả các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trên D(f), để tìm cực trị địa phương của nó, căn cứ vào điều kiện cần và đủ để hàm số nhiều biến có cực trị địa phương đã trình bày ở trên, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số f(x,y,z): $\begin{cases} f'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) \end{cases}$ và tìm các điểm dừng (x^*,y^*,z^*) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)=0 \\ (x,y,z)\in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số f(x,y,z): $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y,z) \\ f''_{y^2}(x,y,z) \\ f''_{z^2}(x,y,z) \end{cases}$, $\begin{cases} f''_{xy}(x,y,z) \\ f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) \end{cases}$ và suy ra vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y,z) là

$$d^2f(x,y,z) = f''_{x^2}(x,y,z)dx^2 + f''_{y^2}(x,y,z)dy^2 + f''_{z^2}(x,y,z)dz^2 +$$
$$2f''_{xy}(x,y,z)dxdy + 2f''_{yz}(x,y,z)dydz + 2f''_{zx}(x,y,z)dzdx \text{ với } \forall(x,y,z)\in D(f).$$

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y,z) tại mỗi điểm (x^*,y^*,z^*):

$$d^2f(x^*,y^*,z^*) = f''_{x^2}(x^*,y^*,z^*)dx^2 + f''_{y^2}(x^*,y^*,z^*)dy^2 + f''_{z^2}(x^*,y^*,z^*)dz^2 +$$
$$2f''_{xy}(x^*,y^*,z^*)dxdy + 2f''_{yz}(x^*,y^*,z^*)dydz + 2f''_{zx}(x^*,y^*,z^*)dzdx$$

là dạng toàn phương của 3 biến dx, dy, dz. Khi đó:

(1) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ xác định dương thì hàm số f(x,y,z) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*,z^*) và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là $f_{ct} = f(x^*,y^*,z^*)$; còn nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ xác định âm thì hàm số f(x,y,z) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*,z^*) và giá trị cực đại của hàm số tại điểm này là $f_{cđ} = f(x^*,y^*,z^*)$.

(2) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ không xác định dấu thì hàm số f(x,y,z) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*,z^*).

(3) Nếu $d^2f(x^*,y^*,z^*)$ suy biến, tức là tồn tại dx, dy và dz không đồng thời bằng không, nhưng $d^2f(x^*,y^*,z^*) = 0$, thì chưa thể kết luận được hàm số f(x,y,z) có cực trị tại điểm (x^*,y^*,z^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Ví dụ **1.26.** Tìm cực trị của các hàm số trong Ví dụ 1.25. bằng cách sử dụng điều kiện cần và đủ vừa trình bày ở trên.

Bài giải. Bây giờ, chúng ta sử dụng điều kiện cần và đủ vừa trình bày ở trên để tìm cực trị của các hàm số (b) và (d); còn các hàm số (a) và (c) sinh viên tự giải bằng phương pháp này, sau đó so sánh kết quả với kết quả đã nhận được ở Ví dụ 1.25.

(b) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Bước 2. Tính $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{\partial(x^2+xy+y^2-3x-6y)}{\partial x} = 2x+y-3 \\ f'_y(x,y) = \dfrac{\partial(x^2+xy+y^2-3x-6y)}{\partial y} = x+2y-6 \end{cases}$

Điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (x^*,y^*) = (0,3) \in D(f)$.

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x+y-3)}{\partial x} = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2x+y-3)}{\partial y} = 1 \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x+2y-6)}{\partial y} = 2 \end{cases}$

Do đó, vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ tại điểm (x,y) là

$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 = 2dx^2 + 2.1dxdy + 2dy^2$ với $\forall(x,y) \in D(f)$.

Bước 4. Từ kết quả trên, chúng ta có $d^2f(0,3) = 2dx^2 + 2.1dxdy + 2dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ma trận A có các định thức con chính $A_1 = \det(2) = 2 > 0$, $A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$ nên dạng toàn phương tương ứng là xác định dương, do đó $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ giá trị cực tiểu tại điểm (0,3) và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là

$$f_{ct} = f(0,3) = (x^2+xy+y^2-3x-6y)\Big|_{(x,y)=(0,3)} = 0^2 + 0.3 + 3^2 - 3.0 - 6.3 = -9.$$

(d) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x>0, y>0, z>0)$

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ là

$D(f) = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$.

Bước 2. Tính $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right) = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} \end{cases}$

Điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{y}{2x}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \left(\dfrac{z}{y}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{z}{y} - \dfrac{1}{z^2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \in D(f).$$

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_x(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{y^2}{4x^2}\right) = \dfrac{y^2}{2x^3} \\ f''_{y^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_y(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}\right) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3} \\ f''_{z^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_z(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}\right) = \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3} \end{cases}$

và $\begin{cases} f''_{xy}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_x(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 - \dfrac{y^2}{4x^2}\right) = -\dfrac{y}{2x^2} \\ f''_{yz}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_y(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}\right) = -\dfrac{2z}{y^2} \\ f''_{zx}(x,y,z) = \dfrac{\partial f'_z(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}\right) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow d^2f(x,y,z) = f''_{x^2}(x,y,z)dx^2 + f''_{y^2}(x,y,z)dy^2 + f''_{z^2}(x,y,z)dz^2 +$

$2f''_{xy}(x,y,z)dxdy + 2f''_{yz}(x,y,z)dydz + 2f''_{zx}(x,y,z)dzdx$ với $\forall(x,y,z)\in D(f)$.

Bước 4. Tại điểm $(x^*, y^*, z^*) = (1/2,1,1)$ chúng ta có

$\begin{cases} f''_{x^2}(1/2,1,1) = \left.\dfrac{y^2}{2x^3}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 4 \\ f''_{y^2}(1/2,1,1) = \left.\left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 3 \\ f''_{z^2}(1/2,1,1) = \left.\left(\dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} f''_{xy}(1/2,1,1) = -\left.\dfrac{y}{2x^2}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = -2 \\ f''_{yz}(1/2,1,1) = -\left.\dfrac{2z}{y^2}\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = -2 \\ f''_{zx}(1/2,1,1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow d^2f(1/2,1,1) = f''_{x^2}(1/2,1,1)dx^2 + f''_{y^2}(1/2,1,1)dy^2 + f''_{y^2}(1/2,1,1)dz^2 +$

$2f''_{xy}(1/2,1,1)dxdy + 2f''_{yz}(1/2,1,1)dydz + 2f''_{zx}(1/2,1,1)dzdx =$

$4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 + 2.(-2)dxdy + 2.(-2)dydz + 2.0dzdx$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz có ma trận tương ứng là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ma trận A có các định thức con chính

$A_1 = \det(4) = 4 > 0$, $A_2 = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 8 > 0$, $A_3 = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 32 > 0$ nên dạng toàn phương tương ứng là xác định dương, do đó hàm số f(x,y,z) có cực tiểu tại điểm $(1/2,1,1)$ và giá trị cực tiểu của hàm số tại điểm này là $f_{ct} = f(1/2,1,1) = \left.\left(x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}\right)\right|_{(x,y,z)=(1/2,1,1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1^2}{4.(1/2)} + \dfrac{1^2}{1} + \dfrac{2}{1} = 4.$

Lưu ý. Chỉ đối với hàm số 2 biến z = f(x,y), về phương diện thực hành, để đơn giản, chúng ta thực hiện việc tìm cực trị của hàm số f(x,y) như sau.

Giả sử (x^*, y^*) là điểm dừng của hàm số f(x,y), ký hiệu $\begin{cases} f''_{x^2}(x^*, y^*) \equiv A \\ f''_{xy}(x^*, y^*) \equiv B \\ f''_{y^2}(x^*, y^*) \equiv C \end{cases}$ thì dạng toàn phương

$d^2f(x^*, y^*) = f''_{x^2}(x^*, y^*)dx^2 + 2f''_{xy}(x^*, y^*)dxdy + f''_{y^2}(x^*, y^*)dy^2 = Adx^2 + 2Bdxdy + Bdy^2$ có ma trận tương ứng là $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ có hai định thức con chính là $\det(A) = A$ và $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 \equiv -\Delta$.

(1) Khi $\Delta < 0$ thì hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) nếu $A > 0$, hoặc có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) nếu $A < 0$.

(2) Khi $\Delta > 0$ thì hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*).

(3) Khi $\Delta = 0$ thì hàm số f(x,y) có thể có hoặc không có cực trị tại điểm (x^*,y^*), tức là chưa thể kết luận được hàm số f(x,y) có cực trị tại điểm (x^*,y^*) hay không, mà phải giải bài toán bằng cách khác.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f).

Bước 2. Tìm các điểm dừng (x^*,y^*) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \\ (x, y) \in D(f) \end{cases}$.

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x, y) = A(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) = B(x, y) \Rightarrow \Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \\ f''_{y^2}(x, y) = C(x, y) \end{cases}$ với $\forall(x,y) \in D(f)$.

Bước 4. Tại mỗi điểm (x^*,y^*)

Giá trị		**Kết luận**
$\Delta(x^*,y^*)$	**$A(x^*,y^*)$**	
< 0	> 0	(x^*,y^*) là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$
	< 0	(x^*,y^*) là điểm cực đại địa phương và $f_{cđ} = f(x^*,y^*)$
> 0		(x^*,y^*) không phải là điểm cực trị
$= 0$		Giải bài toán bằng cách khác

Ví dụ **1.27.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$.

Bài giải. Chúng ta dùng cách tìm cực trị của hàm số 2 biến f(x,y) vừa trình bày ở trên để giải bài toán này.

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Bước 2. Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x, y) = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)4x = 8x - 16x^3 - 8xy^2 = 8x(1 - 2x^2 - y^2) \\ f'_y(x, y) = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)2y = 2y - 8x^2y - 4y^3 = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) \end{cases}$

Nên các điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$ hệ thỏa mãn, hệ có 1 nghiệm là $(x_1, y_1) = (0,0)$.

+ Trường hợp 2. $\begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2)=0 \\ y(1-4x^2-2y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-2y^2=0 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm là $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$, $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$.

+ Trường hợp 3. $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2)=0 \\ y(1-4x^2-2y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2=0 \\ y=0 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm là $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $(x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$.

+ Trường hợp 4. $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-2x^2-y^2)=0 \\ y(1-4x^2-2y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2-y^2=0 \\ 1-4x^2-2y^2=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Như vậy, hàm số có 5 điểm dừng $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$, $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$, $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $(x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$ đều thuộc D(f).

Bước 3. Tính $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(8x-16x^3-8xy^2)}{\partial x} = 8-48x^2-8y^2 = A(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(8x-16x^3-8xy^2)}{\partial y} = -16xy = B(x,y) \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2y-8x^2y-4y^3)}{\partial y} = 2-8x^2-12y^2 = C(x,y) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) = (-16xy)^2 - (8-48x^2-8y^2)(2-8x^2-12y^2) =$
$16(1-10x^2-7y^2+56x^2y^2+24x^4+6y^4)$ với $\forall(x,y) \in D(f)$.

Bước 4.

1.Tại điểm dừng $(x_1, y_1) = (0,0)$

$\Delta(0,0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (0,0)$ không phải là điểm cực trị.

2. Tại điểm $(x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$

$\begin{cases} \Delta(0,-1/\sqrt{2}) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = -16 < 0 \\ A(0,-1/\sqrt{2}) = A(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2, y_2) = (0, -1/\sqrt{2})$ là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x,y)\big|_{(x,y)=(0,-1/\sqrt{2})} = f(0, -1/\sqrt{2}) = 1/4$.

3. Tại điểm dừng $(x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$

$\begin{cases} \Delta(0,1/\sqrt{2}) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = -16 < 0 \\ A(0,1/\sqrt{2}) = A(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_3, y_3) = (0, 1/\sqrt{2})$ là điểm cực tiểu địa phương và $f_{ct} = f(x,y)\big|_{(x,y)=(0,1/\sqrt{2})} = f(0, 1/\sqrt{2}) = 1/4$.

4. Tại điểm dừng $(x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$

$\Delta(-1/\sqrt{2}, 0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(-1/\sqrt{2},0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_4, y_4) = (-1/\sqrt{2}, 0)$ không phải là điểm cực trị.

5. Tại điểm dừng $(x_4, y_4) = (1/\sqrt{2}, 0)$

$\Delta(1/\sqrt{2}, 0) = \Delta(x,y)\big|_{(x,y)=(1/\sqrt{2},0)} = 16 > 0 \Rightarrow (x_5, y_5) = (1/\sqrt{2}, 0)$ không phải là điểm cực trị.

1.4.2. Cực trị có điều kiện

Bài toán tìm cực trị của hàm số nhiều biến ở phần trên là tìm cực trị của hàm số không có điều kiện, tức là không có điều kiện ràng buộc nào giữa các biến của hàm số cần tìm giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu hoặc cả giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số. Tuy nhiên, trong ứng dụng thực tế, chúng ta thường gặp các bài toán tìm cực trị của một hàm số với *điều kiện ràng buộc nào đó giữa các biến,* các bài toán này được gọi là bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Thông thường, có hai cách giải quyết bài toán tìm cực trị có điều kiện. *Cách thứ nhất*: Nếu từ điều kiện ràng buộc đã cho giữa các biến mà có thể biểu diễn tường minh và duy nhất một biến qua các biến còn lại thì có thể đưa bài toán tìm cực trị có điều kiện về bài toán tìm cực trị không có điều kiện với *số biến giảm xuống một*. Tuy nhiên, không phải bao giờ cũng làm được như vậy, khi đó chúng ta sử dụng *Cách thứ hai*: Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để đưa bài toán tìm cực trị có điều kiện về bài toán tìm cực trị không có điều kiện với *số biến tăng lên một*.

Ví dụ **1.28.** Khi sản xuất hộp đựng sữa, để tiết kiệm chi phí bao bì, người ta cần phải giải quyết bài toán: Tìm hình trụ tròn có thể tích lớn nhất trong các hình trụ tròn có cùng diện tích toàn phần S không đổi.

Bài giải. Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ tròn tương ứng là $h > 0$ và $r > 0$.

Khi đó, chu vi ($C_đ$) và diện tích đáy ($S_đ$) của hình trụ tròn là $C_đ = \pi.2r = 2\pi r$ và $S_đ = \pi r^2$ và diện tích xung quanh (S_{xq}) của hình trụ tròn là $S_{xq} = h\times C_đ = h.2\pi r = 2\pi hr$, suy ra diện tích toàn phần (S_{tp}) và thể tích (V) của hình trụ tròn là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi hr + 2\pi r^2 = 2\pi(h + r)r = S$ và $V = h\times S_đ = h.\ \pi r^2 = \pi hr^2$.

Như vậy, bài toán cần giải quyết là: Tìm giá trị cực đại của hàm số 2 biến $V(h,r) \equiv \pi hr^2$ với điều kiện ràng buộc giữa các biến $h > 0$ và $r > 0$ là $2\pi(h + r)r = S$ (S là hằng số dương).

Bây giờ chúng ta sử dụng Cách thứ nhất để giải bài toán này. Từ điều kiện $2\pi(h + r)r = S$ (S là hằng số) chúng ta biểu diễn tường minh được biến h qua biến r, cụ thể là $h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$, tiếp theo, thay giá trị h này vào biểu thức của V(r,h) chúng ta được $V(h,r) = \pi\left(\dfrac{S}{2\pi r} - r\right)r^2 = \dfrac{S}{2}r - \pi r^3 \equiv f(r)$.

Chúng ta có $f'(r) = \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{S}{2}r - \pi r^3\right) = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$ nên điểm dừng của hàm số f(r) là nghiệm của phương trình $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$. Phương trình $\dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$ với điều kiện $r > 0$ có nghiệm $r_0 = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} > 0$ là điểm dừng của hàm số f(r) $\Rightarrow h_0 = \dfrac{S}{2\pi r_0} - r_0 = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} = 2r_0 > 0$.

Chúng ta có $f''(r) = \dfrac{df'(r)}{dr} = \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{S}{2} - 3\pi r^2\right) = -6\pi r \Rightarrow f''(r_0) = -6\pi r\big|_{r=r_0} = -6\pi r_0 < 0$ nên hàm số f(r) có cực đại tại $r_0 = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} \Rightarrow f_{cđ} = f(r_0) = \left(\dfrac{S}{2}r - \pi r^3\right)\Big|_{r=r_0} = \dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Như vậy, hình trụ tròn có chiều cao bằng đường kính đáy của nó là hình trụ tròn có thể tích lớn nhất trong các hình trụ tròn có cùng diện tích toàn phần.

Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số n biến $f(x_1, x_2,..., x_n)$ xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^n$ và các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bị ràng buộc bởi điều kiện $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$.

Nhà toán học Lagrange đã giải bài toán này như sau.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f) của hàm số n biến $f(x_1, x_2,..., x_n)$ và lập hàm số Lagrange (n + 1) biến $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \lambda g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, trong đó λ (được gọi là nhân tử Lagrange) là tham số chưa xác định.

Bước 2. Tìm các điểm $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*) \in D(f)$ và λ^* tương ứng, là nghiệm $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, \lambda^*)$ của hệ (n + 1) phương trình:

$$\begin{cases} L'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda g'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ L'_{\lambda}(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad\qquad (1 \le i \le n) \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f) \end{cases}$$

Bước 3. Với mỗi λ^* tìm được ở Bước 2 thì hàm số $L(x_1, x_2, ..., x_2, \lambda^*)$ là hàm số n biến $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ và tiếp theo, tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số này tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$

$$d^2L\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}.dx_n\right)^2 L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L''_{x_ix_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} L''_{x_i^2}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)dx_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2L''_{x_ix_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)dx_i dx_j$$

là dạng toàn phương của n biến dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Tiếp theo, chúng ta xét dấu của dạng toàn phương $d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$, có hai trường hợp xảy ra:

- Trường hợp thứ nhất. Nếu dạng toàn phương $d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ xác định dương, hoặc xác định âm thì kết luận: Hàm số $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ và $f_{ct} = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, hoặc hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ và $f_{cđ} = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Bài toán được giải xong.

- Trường hợp thứ hai. Dạng toàn phương $d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ không xác định dấu thì thực hiện sang Bước 4.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $g(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$

$$dg(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_i = 0 \text{ với } \forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D(f)$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} g'_{x_i}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)dx_i = 0$, vì $g'_{x_i}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ $(1 \le i \le n)$ là các hằng số, nên từ đẳng thức này có thể biểu diễn tường minh, chẳng hạn biến dx_i qua các biến còn lại dx_1, dx_2,…, dx_{i-1}, dx_{i+1},…, dx_n là $dx_i = \varphi(dx_1,dx_2,\dots,dx_{i-1},dx_{i+1},\dots,dx_n)$.

Bước 5. Thay $dx_i = \varphi(dx_1,dx_2,\dots,dx_{i-1},dx_{i+1},\dots,dx_n)$ vào $d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ thì nhận được dạng toàn phương $d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ của (n–1) biến dx_1, dx_2,…, dx_{i-1}, dx_{i+1}, …, dx_n

TT	$d^2L(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$	**Kết luận**
1	Xác định dương	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ và $f_{ct} = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$
2	Xác định âm	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ có cực đại địa phương tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ và $f_{cđ} = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$
3	Không xác định dấu	Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ không có cực trị tại điểm $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$

Về mặt thực hành, chúng ta trình bày Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số 2 biến f(x,y) như sau.

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số z = f(x,y) xác định trên tập mở $D(f)\subset\mathbf{R}^2$ và các biến x, y bị ràng buộc bởi điều kiện g(x,y) = 0.

Bước 1. Tìm tập xác định D(f) của hàm số f(x,y) và lập hàm số Lagrange 3 biến $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, trong đó λ (được gọi là nhân tử Lagrange) là tham số chưa xác định.

Bước 2. Tìm các điểm $(x^*, y^*) \in D(f)$ và λ^* tương ứng, là nghiệm (x^*,y^*,λ^*) của hệ 3 phương trình

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D(f) \end{cases}$$

Hệ phương trình này có thể vô nghiệm, có nghiệm (1 nghiệm hay nhiều nghiệm). Trong trường hợp hệ vô nghiệm, chúng ta kết luận là hàm số f(x,y) không có cực trị và bài toán giải xong. Trong trường hợp hệ có nghiệm thì chúng ta thực hiện Bước 3.

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số L(x,y,λ) khi coi λ là hằng số

$$d^2L(x,y,\lambda) = L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2 =$$

$$\frac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x}dx^2 + 2\frac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y}dxdy + \frac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y}dy^2$$

Với mỗi nghiệm (x^*,y^*,λ^*) chúng ta có

$$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*) = L''_{x^2}(x^*,y^*,\lambda^*)dx^2 + 2L''_{xy}(x^*,y^*,\lambda^*)dxdy + L''_{y^2}(x^*,y^*,\lambda^*)dy^2$$

TT	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	Kết luận	Ghi chú
1	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$	Bài toán giải xong
2	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{cd} = f(x^*,y^*)$	
3	Không xác định dấu	Thực hiện Bước 4	

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số g(x,y): $dg(x,y) = g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy = 0$ $\forall(x,y)\in D(f) \Rightarrow g'_x(x^*,y^*)dx + g'_y(x^*,y^*)dy = 0$. Vì $g'_x(x^*,y^*)$ và $g'_y(x^*,y^*)$ là các hằng số, nên từ đẳng thức này có thể biểu diễn tường minh, chẳng hạn dy qua dx là $dy = -\frac{g'_x(x^*,y^*)}{g'_y(x^*,y^*)}dx$ nếu $g'_y(x^*,y^*) \neq 0$.

Thay $dy = -\frac{g'_x(x^*,y^*)}{g'_y(x^*,y^*)}dx$ vào dạng toàn phương $d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$ và xét dấu của biểu thức này

TT	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	Kết luận
1	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{ct} = f(x^*,y^*)$
2	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (x^*,y^*) và $f_{cd} = f(x^*,y^*)$
3	Không xác định dấu	Hàm số f(x,y) không có cực trị tại điểm (x^*,y^*)

Ví dụ **1.29.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$.

Bài giải. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ là $D(f) = \mathbf{R}^2$.

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Bước 1. Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

Bước 2. Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda x \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 2y - 2 + 2\lambda y \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2+2\lambda x=0 \\ 2y-2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)x=1 \\ (\lambda+1)y=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ có 2 nghiệm

$\begin{cases} (x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-1-\sqrt{2}/2) \\ (x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*)=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1+\sqrt{2}/2) \end{cases}$ trong đó $\begin{cases} (x_1^*,y_1^*)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\in D(f) \\ (x_2^*,y_2^*)=(\sqrt{2},\sqrt{2})\in D(f) \end{cases}$

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ khi coi λ là hằng số

Chúng ta có $\begin{cases} L''_{x^2}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x}=\dfrac{\partial(2x-2+2\lambda x)}{\partial x}=2+2\lambda \\ L''_{xy}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y}=\dfrac{\partial(2x-2+2\lambda x)}{\partial y}=0 \\ L''_{y^2}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y}=\dfrac{\partial(2y-2+2\lambda y)}{\partial y}=2+2\lambda \end{cases}$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

$\Rightarrow d^2L(x,y,\lambda)=L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2+2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy+L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2=$

$(2+2\lambda)dx^2+2.0.dxdy+(2+2\lambda)dy^2=2(1+\lambda)dx^2+2(1+\lambda)dy^2$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

1. Khi $(x,y,\lambda)=(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-1-\sqrt{2}/2)$

$d^2L(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*)=2(1+\lambda_1^*)dx^2+2(1+\lambda_1^*)dy^2=-\sqrt{2}dx^2-\sqrt{2}dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_1^*)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_1^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_1^*)=\det(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}<0$, $A_2(\lambda_1^*)=\det\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}=2>0 \Rightarrow dL^2(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*)$ xác định âm, do đó hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ có cực đại địa phương tại điểm $(x,y)=(x_1^*,y_1^*)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ và $f_{cd}=f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=(x^2+y^2-2x-2y+1)\Big|_{(x,y)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})}=5+4\sqrt{2}.$

2. Khi $(x,y,\lambda)=(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*)=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1+\sqrt{2}/2)$

$d^2L(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*)=2(1+\lambda_2^*)dx^2+2(1+\lambda_2^*)dy^2=\sqrt{2}dx^2+\sqrt{2}dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_2^*)=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_2^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_2^*)=\det(\sqrt{2})=\sqrt{2}>0$, $A_2(\lambda_2^*)=\det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}=2>0 \Rightarrow dL^2(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*)$ xác định dương, do đó hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ có cực tiểu địa phương tại điểm $(x,y)=(x_2^*,y_2^*)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ và $f_{ct}=f(\sqrt{2},\sqrt{2})=(x^2+y^2-2x-2y+1)\Big|_{(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})}=5-4\sqrt{2}.$

Nhận xét. Ở Ví dụ này, bài toán đã được giải mà chưa cần thực hiện Bước 4.

Ví dụ **1.30.** Tìm cực trị của hàm số $z=f(x,y)=(x+2y)^2-(x-y)^2$ với điều kiện $(x+2y)^2+(x-y)^2=9$.

Bài giải.

Lưu ý. Chúng ta không nên biến đổi biểu thức của hàm số f(x,y) và điều kiện g(x,y) về dạng tổng của các số hạng vì muốn giữ nguyên các nhóm biến (x + 2y), (x – y) để việc giải hệ phương trình khi xác định điểm dừng được thuận lợi.

Bước 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=(x+2y)^2-(x-y)^2$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g(x,y)=(x+2y)^2+(x-y)^2-9=0$.
Lập hàm số Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=(x+2y)^2-(x-y)^2+\lambda[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]$$

Bước 2. Chúng ta có

$$L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=$$
$$\frac{\partial[(x+2y)^2-(x-y)^2]}{\partial x}+\lambda\frac{\partial[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]}{\partial x}=2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)$$
$$L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=$$
$$\frac{\partial[(x+2y)^2-(x-y)^2]}{\partial y}+\lambda\frac{\partial[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]}{\partial y}=4(\lambda+1)(x+2y)-2(\lambda-1)(x-y)$$
$$L'_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=(x+2y)^2+(x-y)^2-9$$

Hệ phương trình $\begin{cases}L'_x(x,y,\lambda)=0\\L'_y(x,y,\lambda)=0\\L'_\lambda(x,y,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)=0\\4(\lambda+1)(x+2y)-2(\lambda-1)(x-y)=0\\(x+2y)^2+(x-y)^2-9=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(\lambda+1)(x+2y)+(\lambda-1)(x-y)=0\\2(\lambda+1)(x+2y)-(\lambda-1)(x-y)=0\\(x+2y)^2+(x-y)^2=9\end{cases}$$

Để giải hệ phương trình này, chúng ta đổi biến phụ $\begin{cases}u=x+2y\\v=x-y\end{cases}$, khi đó hệ phương trình này trở thành $\begin{cases}(\lambda+1)u+(\lambda-1)v=0\\2(\lambda+1)u-(\lambda-1)v=0\\u^2+v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda+1)u=0\\(\lambda-1)v=0\\u^2+v^2=9\end{cases}$. Từ hai phương trình $\begin{cases}(\lambda+1)u=0\\(\lambda-1)v=0\end{cases}$ suy ra u và v không thể đồng thời khác 0, còn từ phương trình $u^2+v^2=9$ suy ra u và v không thể đồng thời bằng 0. Do đó, chỉ xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $u=0\Rightarrow 0^2+v^2=9\Leftrightarrow v^2=9\Leftrightarrow v=\pm3\neq0\Rightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$, khi đó hệ phương trình $\begin{cases}(\lambda+1)u=0\\(\lambda-1)v=0\\u^2+v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\v=\pm3\\\lambda=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=0\\x-y=\pm3\\\lambda=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm2\\y=\mp1\\\lambda=1\end{cases}$.

Trường hợp 2. $v=0\Rightarrow u^2+0^2=9\Leftrightarrow u^2=9\Leftrightarrow u=\pm3\neq0\Rightarrow\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$, khi đó hệ phương trình $\begin{cases}(\lambda+1)u=0\\(\lambda-1)v=0\\u^2+v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\pm3\\v=0\\\lambda=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=\pm3\\x-y=0\\\lambda=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm1\\\lambda=-1\end{cases}$.

Như vậy, hệ phương trình trên có 4 nghiệm

$\begin{cases}(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*)=(-1,-1,-1)\\(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*)=(1,1,-1)\\(x_3^*,y_3^*,\lambda_3^*)=(-2,1,1)\\(x_4^*,y_4^*,\lambda_4^*)=(2,-1,1)\end{cases}$ trong đó, cả 4 điểm dừng $\begin{cases}(x_1^*,y_1^*)=(-1,-1)\\(x_2^*,y_2^*)=(1,1)\\(x_3^*,y_3^*)=(-2,1)\\(x_4^*,y_4^*)=(2,-1)\end{cases}$ đều thuộc D(f).

Bước 3. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số

$L(x,y,\lambda)=(x+2y)^2-(x-y)^2+\lambda[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]$ khi coi λ là hằng số

Chúng ta có

$$\begin{cases} L''_{x^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial[2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial x} = 4\lambda \\ L''_{xy}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_x(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial[2(\lambda+1)(x+2y)+2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial y} = 2(\lambda+3) \text{ với } \forall(x,y)\in D(f) \\ L''_{y^2}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial L'_y(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial[4(\lambda+1)(x+2y)-2(\lambda-1)(x-y)]}{\partial y} = 2(5\lambda+3) \end{cases}$$

$\Rightarrow dL^2(x,y,\lambda) = L''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + L''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2 =$

$4\lambda dx^2 + 2.2(\lambda+3)dxdy + 2(5\lambda+3)dy^2$ với $\forall(x,y)\in D(f)$

(1) Khi $(x,y,\lambda) = (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-1,-1,-1)$

$d^2L(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = 4\lambda_1^* dx^2 + 2.2(\lambda_1^*+3)dxdy + 2(5\lambda_1^*+3)dy^2 = -4dx^2 + 2.4dxdy - 4dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_1^*) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_1^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_1^*) = \det(-4) = -4 < 0$, $A_2(\lambda_1^*) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*)$ không xác định dấu.

(2) Khi $(x,y,\lambda) = (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (1,1,-1)$

$d^2L(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = 4\lambda_2^* dx^2 + 2.2(\lambda_2^*+3)dxdy + 2(5\lambda_2^*+3)dy^2 = -4dx^2 + 2.4dxdy - 4dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_2^*) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_2^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_2^*) = \det(-4) = -4 < 0$, $A_2(\lambda_2^*) = \det\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*)$ không xác định dấu.

(3) Khi $(x,y,\lambda) = (x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = (-2,1,1)$

$d^2L(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = 4\lambda_3^* dx^2 + 2.2(\lambda_3^*+3)dxdy + 2(5\lambda_3^*+3)dy^2 = 4dx^2 + 2.8dxdy + 16dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_3^*) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_3^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_3^*) = \det(4) = 4 > 0$, $A_2(\lambda_3^*) = \det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*)$ không xác định dấu.

(4) Khi $(x,y,\lambda) = (x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = (2,-1,1)$

$d^2L(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = 4\lambda_4^* dx^2 + 2.2(\lambda_4^*+3)dxdy + 2(5\lambda_4^*+3)dy^2 = 4dx^2 + 2.8dxdy + 16dy^2$ là dạng toàn phương có ma trận tương ứng $A(\lambda_4^*) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$. Ma trận $A(\lambda_4^*)$ có các định thức con chính

$A_1(\lambda_4^*) = \det(4) = 4 > 0$, $A_2(\lambda_4^*) = \det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow dL^2(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*)$ không xác định dấu.

Cả 4 dạng toàn phương $dL^2(x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*)$, $dL^2(x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*)$, $dL^2(x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*)$, $dL^2(x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*)$ đều không xác định dấu, do đó chúng ta phải thực hiện Bước 4.

Bước 4. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $g(x,y) = (x + 2y)^2 + (x - y)^2 - 9 = 0$

$dg(x,y) = g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]}{\partial x}dx + \frac{\partial[(x+2y)^2+(x-y)^2-9]}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow 2(2x+y)dx + 2(x+5y)dy = 0$$

$\Rightarrow dy = -\dfrac{2x+y}{x+5y}dx$ với $x+5y \neq 0$, cả 4 điểm dừng (x^*,y^*) tìm được ở trên đều thỏa mãn điều kiện này.

Bây giờ, thay $dy = -\frac{2x+y}{x+5y}dx$ vào biểu thức của vi phần toàn phần cấp 2

$$d^2L(x,y,\lambda) = 4\lambda dx^2 + 2.2(\lambda+3)dxdy + 2(5\lambda+3)dy^2$$

$$\Rightarrow d^2L(x,y,\lambda) = 4\lambda dx^2 + 4(\lambda+3)dx\left(-\frac{2x+y}{x+5y}dx\right) + 2(5\lambda+3)\left(-\frac{2x+y}{x+5y}dx\right)^2 =$$

$$\left[4\lambda - 4(\lambda+3)\frac{2x+y}{x+5y} + 2(5\lambda+3)\left(\frac{2x+y}{x+5y}\right)^2\right]dx^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dL^2(x_1^*,y_1^*,\lambda_1^*) = dL^2(-1,-1,-1) = -9dx^2 < 0 \\ dL^2(x_2^*,y_2^*,\lambda_2^*) = dL^2(1,1,-1) = -9dx^2 < 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} dL^2(x_3^*,y_3^*,\lambda_3^*) = dL^2(-2,1,1) = 36dx^2 > 0 \\ dL^2(x_4^*,y_4^*,\lambda_4^*) = dL^2(2,-1,1) = 36dx^2 > 0 \end{cases}$$

TT	(x^*,y^*,λ^*)	$d^2L(x^*,y^*,\lambda^*)$	**Kết luận**
1	$(-1,-1,-1)$	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm $(-1,-1)$ và $f_{cđ} = f(-1,-1) = [-1+2(-1)^2]^2 - [-1-(-1)]^2 = 9$
2	$(1,1,-1)$	Xác định âm	Hàm số f(x,y) có cực đại địa phương tại điểm (1,1) và $f_{cđ} = f(1,1) = (1+2.1)^2 - (1-1)^2 = 9$
3	$(-2,1,1)$	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm $(-2,1)$ và $f_{ct} = f(-2,1) = (-2+2.1)^2 - (-2-1)^2 = -9$
4	$(2,-1,1)$	Xác định dương	Hàm số f(x,y) có cực tiểu địa phương tại điểm $(2,-1)$ và $f_{ct} = f(2,-1) = [2+2(-1)]^2 - [2-(-1)]^2 = -9$

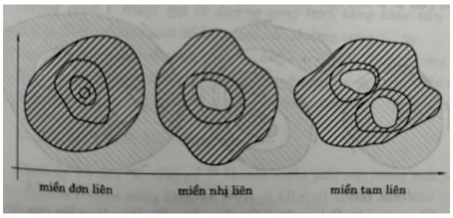
Nhận xét. Ở Ví dụ này, để giải bài toán, chúng ta thực hiện đủ cả 4 bước.

1.4.3. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

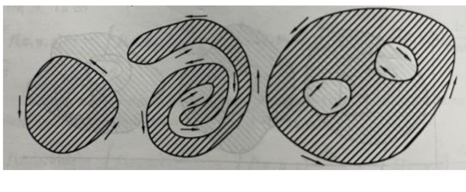
Một số khái niệm về miền đóng trong $\mathbf{R}^2$.

(1) Miền liên thông. Miền phẳng đóng $D \in \mathbf{R}^2$ được gọi là *miền liên thông* nếu chúng ta có thể nối 2 điểm bất kỳ thuộc D bằng một đường thẳng (hoặc/và) cong liên tục nằm hoàn toàn trong D.

(2) Miền đơn liên và miền đa liên. Miền liên thông được gọi là *miền đơn liên* nếu mọi đường cong kín nằm hoàn toàn trong D đều bao bọc một miền nằm hoàn toàn trong D. Miền liên thông không đơn liên được gọi là *miền đa liên*.



(3) Chiều dương của biên của miền liên thông D (đơn liên/đa liên) là chiều sao cho khi một người đi trên biên của miền D theo chiều ấy sẽ thấy các điểm trong của miền D luôn luôn ở bên tay trái.



Định nghĩa. Cho hàm số z = f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f) \subset \mathbf{R}^2$. Nếu $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ với $\forall(x,y) \in D(f)$ thì giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là *Giá trị nhỏ nhất* (GTNN) hay *Giá trị cực tiểu toàn cục* của hàm số f(x,y) trên miền đóng D(f) và ký hiệu là GTNN(f_D); còn nếu $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ với $\forall(x,y) \in D(f)$ thì giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là *Giá trị lớn nhất* (GTLN) hay *Giá trị cực đại toàn cục* của hàm số f(x,y) trên miền đóng D(f) và ký hiệu là GTLN(f_D).

Các nhà toán học đã chứng minh rằng: Mọi hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$) đều tồn tại GTNN và GTLN trên D(f).

Bài toán. Tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^n$.

Nếu chúng ta ký hiệu $D_t \equiv \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)$ là các điểm trong của $D(f)\}$ thì D_t là miền mở trong $\mathbf{R}^n$, còn ký hiệu $D_b \equiv \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)$ là các điểm biên của $D(f)\}$ thì D_b là k đường/mặt liên tục từng khúc, khép kín tương ứng với k phương trình mô tả trong $\mathbf{R}^n$ là $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ (1\le i\le k)$.

Rõ ràng là $\begin{cases} D_t\cup D_b = D(f) \\ D_t\cap D_b = \varnothing \end{cases}$ và chúng ta nhận thấy:

(1) Nếu hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào đó thuộc D_t thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ trên D_t, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

(2) Xét hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, khi đó, các điểm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_b$ là liên tục và có hai trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp 1: Tại các điểm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_b$ chỉ thuộc một đường/mặt $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ (1\le i\le k)$, khi đó, nếu hàm số có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào đó thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số trên D_b, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

+ Trường hợp 2: Tại các điểm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_b$ cùng thuộc ít nhất 2 đường/mặt $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, $g_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ $(1\le i\ne j\le k)$, khi đó, hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ có thể có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại các điểm này.

Do đó, Bài toán tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^n$ được thực hiện như sau:

Bước 1. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ trên D_t, sau đó tính giá trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tại các điểm đó. Thực chất, đây là một phần (tìm các điểm cực trị và tính giá trị của hàm số tại các điểm đó) của bài toán tìm cực trị không có điều kiện.

Bước 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ trên D_b thỏa mãn từng điều kiện $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ (1\le i\le k)$, sau đó tính giá trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tại các điểm đó. Thực chất, đây là một phần (tìm các điểm cực trị và tính giá trị của hàm số tại các điểm đó) của bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Bước 3. Tính giá trị của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tại các điểm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_b$ cùng thuộc ít nhất 2 đường/mặt $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, $g_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ $(1\le i\ne j\le k)$.

Bước 4. Xác định GTNN(f_D) = min{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 1, 2 và 3} và xác định GTLN(f_D) = max{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 1, 2 và 3}.

Khi giải Bài toán này trong $\mathbf{R}^2$, tức là tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset\mathbf{R}^2$, chúng ta nhận thấy rằng:

(1) Nếu hàm số f(x,y) có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào đó thuộc D_t thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số f(x,y) trên D_t, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

(2) Xét hàm số f(x,y) trên D_b, khi đó, các điểm $(x,y)\in D_b$ là liên tục và có hai trường hợp sau đây.

+ Trường hợp 1: Tại các điểm $(x,y)\in D_b$ tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$, khi đó D_b là một (nếu D(f) là đơn liên) hoặc nhiều (nếu D(f) là đa liên) đường cong liền nét, khép kín và trơn toàn bộ hoặc trơn từng khúc. Khi đó, nếu hàm số có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại điểm nào thì điểm đó phải là điểm cực trị của hàm số trên D_b, theo điều kiện cần của điểm cực trị, điểm đó phải là điểm dừng.

+ Trường hợp 2: Nếu ngoài các điểm $(x,y)\in D_b$ tồn tại $\frac{df[x, y(x)]}{dx}$ hoặc $\frac{df[x(y), y]}{dy}$, còn có một số hữu hạn các điểm $(x,y)\in D_b$ mà tại đó, không tồn tại $\frac{df[x, y(x)]}{dx}$ hoặc $\frac{df[x(y), y]}{dy}$. Khi đó, hàm số f(x,y) có thể có GTNN(f_D) (và/hoặc) GTLN(f_D) tại các điểm này.

Chú ý. (1) Cần vẽ đồ thị miền đóng D(f); (2) Tại các điểm dừng thuộc D_t hoặc D_b, chúng ta không cần phải xác định rõ điểm nào là điểm cực đại hay là điểm cực tiểu của hàm số, mà chỉ tính giá trị của hàm số; (3) Tại các điểm (x,y) thuộc D_b mà tại đó, không tồn tại $\frac{df[x, y(x)]}{dx}$ hoặc $\frac{df[x(y), y]}{dy}$, chúng ta tính giá trị của hàm số f(x,y).

Như vậy, để tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của hàm số z = f(x,y) xác định và liên tục trên miền đóng $D(f)\subset \mathbf{R}^2$, chúng ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Vẽ đồ thị miền đóng $D(f) = D_t \cup D_b$ đã cho.

Bước 2. Tìm các điểm dừng thuộc D_t (nếu có) và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

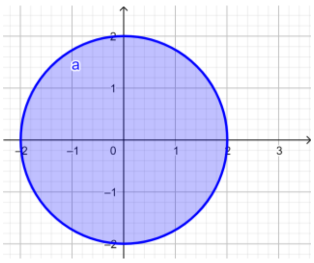
Bước 3. Tìm các điểm dừng thuộc D_b (nếu có) và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

Bước 4. Tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm thuộc D_b mà tại đó, không tồn tại $\frac{df[x, y(x)]}{dx}$ hoặc $\frac{df[x(y), y]}{dy}$.

Bước 5. Xác định GTNN(f_D) = min{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 2, 3, 4} và xác định GTLN(f_D) = max{các giá trị của hàm số tìm được ở các Bước 2, 3, 4}.

Ví dụ **1.31.** Tìm GTLN(f_D) và GTNN(f_D) của hàm số $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ trên miền đóng D(f) là hình tròn có tâm tại điểm O(0,0) và bán kính r = 2.

Bài giải. Chúng ta có $D_t = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\}$, $D_b = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ và đồ thị của D(f) là



***Cách 1*.**

Bước 1. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$ trên $D_t = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\}$ và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x, y) = \dfrac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x \\ f'_y(x, y) = \dfrac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \end{cases}$, các điểm cực trị (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ (x, y) \in D_t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0,0) \in D_t \Rightarrow f(0,0) = (x^2 - y^2)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Bước 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$ và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 2x + 2\lambda x \\ L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = -2y + 2\lambda y \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ có 4 nghiệm

$$\begin{cases} (x_1^*, y_1^*, \lambda_1^*) = (-2,0,-1) \\ (x_2^*, y_2^*, \lambda_2^*) = (2,0,-1) \\ (x_3^*, y_3^*, \lambda_3^*) = (0,-2,1) \\ (x_4^*, y_4^*, \lambda_4^*) = (0,2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(-2,0)} = (-2)^2 - 0^2 = 4 \\ f(2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(2,0)} = 2^2 - 0^2 = 4 \\ f(0,-2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,-2)} = 0^2 - (-2)^2 = -4 \\ f(0,2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,2)} = 0^2 - 2^2 = -4 \end{cases}$$

Bước 3. $\text{GTNN}(f_D) = \min\{0,4,4,-4,-4) = -4$ tại các điểm (x,y) = (0,±2)

và $\text{GTLN}(f_D) = \max\{0,4,4,-4,-4) = 4$ tại các điểm (x,y) = (±2,0).

Cách 2.

Bước 1. Miền đóng D(f) là hình tròn có tâm tại điểm O(0,0) và bán kính r = 2

Bước 2. Chúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = -2y = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng thuộc các điểm trong của D(f). Hệ phương trình này có nghiệm (x,y) = (0,0), suy ra hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_1, y_1) = (0,0)$ thuộc các điểm trong của D(f). Giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm dừng này là $f(0,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 0^2 - 0^2 = 0$.

Bây giờ, chúng ta xét các điểm trên biên của D(f), tức là các điểm (x,y) nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \le x \le 2$.

Khi đó $f(x,y) = f(x, \pm\sqrt{4 - x^2}) = x^2 - (\pm\sqrt{4 - x^2})^2 = 2x^2 - 4 \equiv g(x)$ với $-2 \le x \le 2$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 4 & \text{khi } x = -2 \\ 2x^2 - 4 & \text{khi } -2 < x < 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Bước 3. Các điểm trong trên biên của D(f) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ ($-2 < x < 2$)

Chúng ta có g'(x) = 4x ⇒ g'(x) = 0 ⇔ 4x = 0 ⇔ x = 0 ⇒ y = ±2, suy ra hàm số f(x,y) có 2 điểm dừng $(x_2, y_2) = (0,-2)$, $(x_3, y_3) = (0,2)$ thuộc các điểm trong trên biên của D(f). Giá trị của hàm số tại các điểm dừng này là $\begin{cases} f(0,-2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,-2)} = 0^2 - (-2)^2 = -4 \\ f(0,2) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(0,2)} = 0^2 - 2^2 = -4 \end{cases}$.

Bước 4. Chúng ta có

$$\begin{cases} g'(-2+0) = \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{(2x^2 - 4) - 4}{x + 2} = 2 \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = 2 \lim\limits_{x \to -2+0} (x - 2) = -8 \\ g'(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{(2x^2 - 4) - 4}{x - 2} = 2 \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 2 \lim\limits_{x \to 2-0} (x + 2) = 8 \end{cases}$$

, tuy nhiên g'(–2–0) và g'(2+0) không tồn tại vì $-2 \le x \le 2$, nên tại x = ±2 không tồn tại g'(x) vì tại mỗi điểm chỉ có đạo hàm một phía, tức là tại các điểm $(x_4, y_4) = (-2,0)$, $(x_5, y_5) = (2,0)$ không tồn tại $\dfrac{df[x, y(x)]}{dx}$ với $y = y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

Giá trị của hàm số tại các điểm này là $\begin{cases} f(-2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(-2,0)} = (-2)^2 - 0^2 = 4 \\ f(2,0) = (x^2 - y^2)\big|_{(x,y)=(2,0)} = 2^2 - 0^2 = 4 \end{cases}$

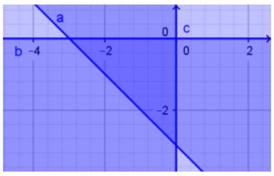
Bước 5. $\text{GTNN}(f_D) = \min\{0,-4,-4,4,4\} = -4$ tại các điểm $(0,\pm 2)$

và $\text{GTNN}(f_D) = \max\{0,-4,-4,4,4\} = 4$ tại các điểm $(\pm 2,0)$.

Ví dụ **1.32.** Tìm GTLN(f_D) và GTNN(f_D) của hàm số z = f(x,y) = $x^2 + y^2 - xy + x + y$ trên miền đóng D(f) là tam giác được tạo bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y + 3 = 0.

Bài giải. Chúng ta có D_t là các điểm trong của ΔAOB các đỉnh A(–3,0), O(0,0) và B(0,–3), có phương trình các cạnh AO, OB và AB tương ứng là y = 0 ($-3 \le x \le 0$), x = 0 ($-3 \le y \le 0$) và y = –x – 3 ($-3 \le x \le 0$); còn D_b là các điểm nằm trên các cạnh AO, OB và AB.

Đồ thị của D(f) là



Cách 1.

Bước 1. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trên miền mở D_t và tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x, y) = \dfrac{\partial(x^2 + y^2 - xy + x + y)}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ f'_y(x, y) = \dfrac{\partial(x^2 + y^2 - xy + x + y)}{\partial y} = 2y - x + 1 \end{cases}$

Điểm cực trị (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \Rightarrow (x, y) = (-1,-1) \in D_t \\ (x, y) \in D_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-1,-1) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\big|_{(x,y)=(-1,-1)} = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1)(-1) - 1 - 1 = -1.$$

Bước 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ với các điều kiện y = 0 ($-3 < x < 0$), x = 0 ($-3 < y < 0$) và y = –x – 3 ($-3 < x < 0$) trên các cạnh AO, OB và AB tương ứng. Sau đó, tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này.

+ Trên cạnh AO:

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g_1(x,y) = y = 0$ ($-3 < x < 0$).

Lập hàm số Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y + \lambda y$

Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda\dfrac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda\dfrac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} = 2y - x + 1 + \lambda \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = g_1(x, y) = y \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \\ -3<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-x+1+\lambda=0 \\ y=0 \\ -3<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2 \\ y=0 \\ \lambda=-3/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2},0\right)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{2},0\right)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2-\left(-\frac{1}{2}\right).0-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{4}.$$

+ Trên cạnh OB:

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g_2(x,y) = x = 0$ ($-3 \le y \le 0$).

Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g_1(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y+\lambda x$

Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}=2x-y+1+\lambda \\ L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}=2y-x+1 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=g_2(x,y)=x \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \\ -3<y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1+\lambda=0 \\ 2y-x+1=0 \\ x=0 \\ -3<y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1/2 \\ \lambda=-3/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)}=0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-0.\left(-\frac{1}{2}\right)+0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

+ Trên cạnh AB:

Điều kiện ràng buộc giữa các biến x, y là $g_3(x,y) = x + y + 3 = 0$ ($-3 \le x \le 0$ và $-3 \le y \le 0$).

Lập hàm số Lagrange $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g_3(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y+\lambda(x+y+3)$

Chúng ta có $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g_3(x,y)}{\partial x}=2x-y+1+\lambda \\ L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\dfrac{\partial g_3(x,y)}{\partial y}=2y-x+1+\lambda \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=g_3(x,y)=x+y+3 \end{cases}$

Hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \\ -3<x<0 \\ -3<y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1+\lambda=0 \\ 2y-x+1+\lambda=0 \\ x+y+3=0 \\ -3<x<0 \\ -3<y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$

Bước 3. Tính giá trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ tại các đỉnh A(–3,0), O(0,0) và B(0,–3) của ΔAOB (tọa độ của mỗi đỉnh đồng thời thỏa mãn phương trình của 2 cạnh liền kề tương ứng).

$$\begin{cases} f(-3,0) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(-3,0)} = (-3)^2 + 0^2 - (-3).0 - 3 + 0 = 6 \\ f(0,0) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0^2 + 0^2 - 0.0 + 0 + 0 = 0 \\ f(0,-3) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(0,-3)} = 0^2 + (-3)^2 - 0.(-3) + 0 - 3 = 6 \end{cases}$$

Bước 4. $\text{GTNN}(f_D) = \min\{-1, -1/4, -1/4, -3/4, 6, 0, 6\} = -1$ tại điểm $(-1,-1)$

và $\text{GTLN}(f_D) = \max\{-1, -1/4, -1/4, -3/4, 6, 0, 6\} = 6$ tại các điểm (–3,0), (0,–3).

Cách 2.

Bước 1. Miền đóng D(f) là ΔAOB (miền đơn liên có biên trơn từng khúc) có các đỉnh A(–3,0), O(0,0) và B(0,–3)

Bước 2. Chúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - y + 1 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng thuộc các điểm trong của D(f). Hệ phương trình này có nghiệm là $(-1,-1)$ nên hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_1, y_1) = (-1,-1)$ là điểm trong của D(f).

$$\Rightarrow f(x_1, y_1) = f(-1,-1) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1)(-1) - 1 - 1 = -1.$$

Bước 3. Các điểm trong trên biên của D(f) là các điểm nằm trên các cạnh AO, OB và BA của ΔAOB, không kể các đỉnh A(–3,0), O(0,0), B(0,–3).

– Các điểm trong trên cạnh AO có phương trình y = 0 với –3 < x < 0 ứng với hàm số $f(x,0) = x^2 + x \equiv g(x)$ với –3 < x < 0. Chúng ta có g'(x) = 2x + 1, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình g'(x) = 0. Phương trình g'(x) = 0 ⇔ 2x + 1 = 0 có nghiệm $x = -1/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_2, y_2) = (-1/2, 0)$.

$$\Rightarrow f(x_2, y_2) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{1}{2},0\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\right).0 - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

– Các điểm trong trên cạnh OB có phương trình x = 0 với –3 < y < 0 ứng với hàm số $f(0,y) = y^2 + y \equiv h(y)$ với –3 < y < 0. Chúng ta có h'(y) = 2y + 1, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình h'(y) = 0. Phương trình h'(y) = 0 ⇔ 2y + 1 = 0 có nghiệm $y = -1/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_3, y_3) = (0, -1/2)$.

$$\Rightarrow f(x_3, y_3) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)} = 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0.\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

– Các điểm trong trên cạnh BA có phương trình y = –x – 3 với –3 < x < 0 ứng với hàm số $f(x,-x-3) = 3x^2 + 9x + 6 \equiv k(x)$ với –3 < x < 0. Chúng ta có k'(x) = 6x + 9, nên điểm dừng là nghiệm của phương trình k'(x) = 0. Phương trình k'(x) = 0 ⇔ 6x + 9 = 0 có nghiệm $x = -3/2$, trong trường hợp này, hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x_4, y_4) = (-3/2, -3/2)$.

$$\Rightarrow f(x_4, y_4) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y)\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Bước 4. Các đỉnh A(–3,0), O(0,0), B(0,–3) của tam giác AOB là các điểm trên biên của D(f) mà tại đấy, không tồn tại $\dfrac{df[x, y(x)]}{dx}$. Tính giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này, chúng ta được:

$$\begin{cases} f(-3,0)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=(-3,0)}=(-3)^2+0^2-(-3).0-3+0=6 \\ f(0,0)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=0^2+0^2-0.0+0+0=0 \\ f(0,-3)=(x^2+y^2-xy+x+y)\Big|_{(x,y)=(0,-3)}=0^2+(-3)^2-0.(-3)+0-3=6 \end{cases}$$

Bước 5. $\text{GTNN}(f_D)=\min\{-1,-1/4,-1/4,-3/4,6,0,6\}=-1$ tại điểm $(-1,-1)$

và $\text{GTLN}(f_D)=\max\{-1,-1/4,-1/4,-3/4,6,0,6\}=6$ tại các điểm (–3,0), (0,–3).

1.5. Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

1.5.1. Đường và tiếp tuyến của đường

1.5.1.1. Đường và tiếp tuyến của đường trong mặt phẳng

Ở Trường THPT chúng ta đã biết rằng, trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, nếu đường L là đồ thị của hàm số y = f(x) thì phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in L$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Tuy nhiên, không phải khi nào đường L cũng được biểu diễn bằng hàm số y = f(x), mà trong trường hợp tổng quát, đường L được biểu diễn, nói chung bằng phương trình f(x,y) = 0.

Điểm $M_0(x_0,y_0)\in L$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0,y_0)$ và $f'_y(x_0,y_0)$ không đồng thời bằng không, được gọi là điểm kỳ dị nếu $f'_x(x_0,y_0)$ và $f'_y(x_0,y_0)$ đồng thời bằng không.

Giả sử điểm $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm chính quy của đường L, khi đó phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm M_0 là $(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)=0$.

Nếu đường L được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$, trong đó x(t), y(t) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm x'(t), y'(t) trên $[\alpha,\beta]$ và các đạo hàm này không đồng thời bằng 0 tại mỗi điểm $t\in[\alpha,\beta]$ thì phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ với $\begin{cases} x_0=x(t_0) \\ y_0=y(t_0) \end{cases}$ là $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}$.

Ví dụ **1.33.** Viết phương trình tiếp tuyến với đường ellip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a > 0, b > 0) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip.

Bài giải. Chúng ta giải bài toán này bằng 2 cách.

Cách 1. Viết phương trình biểu diễn đường ellip dưới dạng $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=\dfrac{2x}{a^2} \\ f'_y(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=\dfrac{2y}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{2x}{a^2}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=\dfrac{2x_0}{a^2} \\ f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{2y}{a^2}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=\dfrac{2y_0}{b^2} \end{cases}$$

Vì điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip nên nó thỏa mãn phương trình $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, suy ra x_0 và y_0 không đồng thời bằng không, tức là $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{2x_0}{a^2}$, $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{2y_0}{b^2}$ không đồng thời bằng không, do đó điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm chính quy.

Vì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm chính quy nên theo định nghĩa, phương trình tiếp tuyến với đường ellip tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nằm trên đường ellip là

$$(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)=(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)-2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} \quad \text{vì} \quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$ là phương trình đường tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2. Phương trình tham số của đường ellip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ là $\begin{cases} x = x(\varphi) = a\cos\varphi \\ y = y(\varphi) = b\sin\varphi \end{cases}$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đường ellip tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ với $\begin{cases} x_0 = x(\varphi_0) \\ y_0 = y(\varphi_0) \end{cases}$ là $\frac{x-x_0}{x'(\varphi_0)} = \frac{y-y_0}{y'(\varphi_0)}$

Chúng ta có

$$\begin{cases} x'(\varphi) = \dfrac{d(a\cos\varphi)}{d\varphi} = -a\sin\varphi \\ y'(\varphi) = \dfrac{d(b\sin\varphi)}{d\varphi} = b\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi_0) = -a\sin\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = -a\sin\varphi_0 = -\dfrac{a}{b}(b\sin\varphi_0) = -\dfrac{ay_0}{b} \\ y'(\varphi_0) = b\cos\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = b\cos\varphi_0 = \dfrac{b}{a}(a\cos\varphi_0) = \dfrac{bx_0}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{-\frac{ay_0}{b}} = \frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}} \Leftrightarrow \frac{bx_0}{a}(x-x_0) = -\frac{ay_0}{b}(y-y_0) \Leftrightarrow b^2x_0(x-x_0) = -a^2y_0(y-y_0) \Leftrightarrow$$

$$b^2x_0x - b^2x_0^2 = -a^2y_0y + a^2y_0^2 \Leftrightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = a^2y_0^2 + b^2x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2x_0x+a^2y_0y}{a^2b^2} = \frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2}{a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} \quad \text{vì} \quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$ là phương trình đường tiếp tuyến cần tìm.

1.5.1.2. Đường và tiếp tuyến của đường trong không gian

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, đường L thường được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$, trong đó x(t), y(t), z(t) là các hàm số liên tục và có các đạo hàm x'(t), y'(t), z'(t) trên $[\alpha,\beta]$ và các đạo hàm này không đồng thời bằng 0 tại mỗi điểm $t\in[\alpha,\beta]$ thì phương trình tiếp tuyến của đường L tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ với $\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$ là $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

Ví dụ **1.34.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường L trong không gian $\mathbf{R}^3$ được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t^2 \\ z = z(t) = t^3 \end{cases}$ với $-3 \le t \le 10$ tại điểm (x_0,y_0,z_0) ứng với $t_0 = 3$.

Bài giải. Chúng ta có $\begin{cases} x_0 = x(t_0) = x(3) = 3 \\ y_0 = y(t_0) = y(3) = 3^2 = 9 \\ z_0 = z(t_0) = z(3) = 3^3 = 27 \end{cases}$ và $\begin{cases} x'(t) = t' = 1 \\ y'(t) = (t^2)' = 2t \\ z'(t) = (t^3)' = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(3) = 1 \\ y'(3) = 2.3 = 6 \\ z'(3) = 3.3^2 = 27 \end{cases}$ do đó phương trình tiếp tuyến của đường L là $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$.

1.5.2. Mặt và tiếp tuyến của mặt, mặt phẳng tiếp xúc

Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, mặt S được biểu diễn bởi phương trình f(x,y,z) = 0. Giả sử $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, khi đó đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của mặt S tại điểm M_0 nếu nó là tiếp tuyến của một đường nào đó trên mặt S tại điểm M_0. Tại mỗi điểm M_0 trên mặt S, nói chung có vô số đường thuộc mặt S đi qua, do đó tại điểm M_0 có thể có vô số tiếp tuyến của mặt S.

Điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$ và $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ không đồng thời bằng 0, được gọi là điểm kỳ dị nếu $f'_x(x_0,y_0,z_0)$, $f'_y(x_0,y_0,z_0)$ và $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ đồng thời bằng 0.

Định lý. Tập hợp tất cả các tiếp tuyến của mặt S tại một điểm chính quy $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ là một mặt phẳng đi qua điểm M_0.

Định nghĩa. Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của mặt S tại điểm $M_0\in S$ được gọi là mặt phẳng tiếp xúc của mặt S tại điểm M_0.

Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt S được biểu diễn bởi phương trình f(x,y,z) = 0 tại điểm chính quy $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ là

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Ví dụ **1.35.** Viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt S được cho bởi phương trình $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $M_0(2,2,3)$.

Bài giải. Viết phương trình của mặt S dưới dạng $f(x,y,z)=x^2-4y^2+2z^2-6=0$.

Vì $f(2,2,3)=(x^2-4y^2+2z^2-6)\big|_{(x,y,z)=(2,2,3)}=2^2-4.2^2+2.3^2-6=0$ nên điểm $M_0(2,2,3)$ thuộc mặt S.

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y,z)=2x \\ f'_y(x,y,z)=-8y \\ f'_z(x,y,z)=4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,2,3)=2x\big|_{(x,y,z)=(22,3)}=2.2=4 \\ f'_y(2,2,3)=-8y\big|_{(x,y,z)=(22,3)}=-8.2=-16 \\ f'_z(2,2,3)=4z\big|_{(x,y,z)=(22,3)}=4.3=12 \end{cases}$

Vì $f'_x(2,2,3)=4\neq 0$, $f'_y(2,2,3)=-16\neq 0$ và $f'_z(2,2,3)=12\neq 0$ nên điểm $M_0(2,2,3)$ là điểm chính quy của mặt $f(x,y,z)=x^2-4y^2+2z^2-6=0$ nên theo định nghĩa, phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt S tại điểm $M_0(2,2,3)$ là

$$f'_x(2,2,3)(x-2)+f'_y(2,2,3)(y-2)+f'_z(2,2,3)(z-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$4(x-2)-16(y-2)+12(z-3)=0 \Leftrightarrow x-4y+3z-3=0.$$

Bài tập

1.1. Tìm và vẽ đồ thị tập xác định của các hàm số sau đây

(a) z = f(x,y) = ln(xy)

(b) $z=f(x,y)=1/\sqrt{x+y}+1/\sqrt{x-y}$

(c) $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}$

(d) $z=f(x,y)=\arcsin[(y-1)/x]$

(e) $z=f(x,y)=\sqrt{x\ln y}$

(f) $z=f(x,y)=1/(y-x^2)$

(g) $z=f(x,y)=\sqrt{y-x}\ln(y+x)$

(h) z= f(x,y) = lnx + ln(siny)

(i) $z=f(x,y)=x/\cos^2 y$

1.2. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ của các hàm số sau đây

(a) $z=f(x,y)=x\arctan(y/x)$

(b) $z=f(x,y)=(x^3+y^3)/(x^2+y^2)$

(c) $z=f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$

(d) $z=f(x,y)=y\cos\dfrac{1}{y-x}$

(e) $z=f(x,y)=(\cos\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$

(f) $z=f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$

(g) $z=f(x,y)=x^2\ln(x^2+y^2)$

1.3. Chứng minh rằng, đối với các hàm số f(x,y) sau đây, không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(a) $z = f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

(b) $z = f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$

(c) $z = f(x,y) = (1 + xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

(d) $z = f(x,y) = \dfrac{(x+y)\cos(x+y)}{\sin(x-y)}$

(e) $z = f(x,y) = \dfrac{x\sin y + y\sin x}{x^2 + y^2}$

(f) $z = f(x,y) = \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

1.4. Chứng minh rằng, hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2x^2y + x^2y^2}{x^4 + (y+1)^4}$ không có giới hạn tại điểm (0,–1) (đề thi Giải tích 2 năm học 2019-2020).

1.5. Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^m y}{2x^2 + y^2}$ với $x > 0$ và tham số $m > 0$. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ khi $\begin{cases} m > 1 \\ 0 < m \le 1 \end{cases}$ (đề thi Giải tích 2 năm học 2020-2021).

1.6. Tìm các giới hạn sau đây

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)^{-(x+y)}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm\infty,\pm\infty)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt[6]{x^4 + y^4 + 2(1 + x^2y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}}$

1.7. Chứng minh rằng, các hàm số f(x,y) sau đây, liên tục trên tập xác định D(f) của nó

(a) $z = f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $z = f(x,y) = \begin{cases} x\arctan(y/x)^2 & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1.8. Khảo sát sự liên tục tại điểm gốc tọa độ O(0,0) của các hàm số f(x,y) sau đây

(a) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(1/x) + y}{x + y} & \text{khi } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \ne 0 \\ a & \text{khi } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

1.9. Khảo sát sự liên tục của các hàm số f(x,y) sau đây, trên tập xác định D(f) của nó

(a) $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $z = f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2 y^2}} & \text{khi} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad xy = 0 \end{cases}$

1.10. Có thể chọn p để mỗi hàm số sau đây, liên tục tại điểm (0,0) được không?

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ p & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ p & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1.11. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số $f(x,y) = x^{xy}$ $(x > 0)$.

1.12. Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f\left(x(u,v), y(u,v)\right)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f\left(x(u,v), y(u,v)\right)}{\partial v}$ của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = e^{x^2 - 2y^2}$ với $\begin{cases} x = x(u,v) = \cos u \\ y = y(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}$

(b) $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ với $\begin{cases} x = x(u,v) = uv \\ y = y(u,v) = u/v \end{cases}$

(c) $z = f(x,y) = xe^y + ye^{-x}$ với $\begin{cases} x = x(u,v) = e^u \\ y = y(u,v) = u^2 v \end{cases}$

(d) $z = f(x,y) = x^2 \ln y$ với $\begin{cases} x = x(u,v) = u/v \\ y = y(u,v) = 3u - 2v \end{cases}$

1.13. Tính $\dfrac{dz}{dx}$ của hàm số $z = f(x,y) = e^x \ln y$ với $y = x^2$

1.14. Tính $\dfrac{dz}{dt}$ của hàm số $z = f(x,y) = x^2 y$ với $\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t + 1 \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

1.15. Chứng minh rằng

(a) Hàm số $z = f(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin \dfrac{y}{x}$ thỏa mãn phương trình $x^2 z'_x + xyz'_y = yz$.

(b) Hàm số $z = f(x,y) = y + \sin(x^2 - y^2) + \cos(x^2 - y^2) + e^{x^2 - y^2} + \ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình $xz'_y + yz'_x = x$.

1.16. Toán tử Laplace trong $\mathbf{R}^n$ được ký hiệu và định nghĩa là $\nabla = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Chứng minh rằng

(a) Hàm số $z = f(x,y) = \ln\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ thỏa mãn phương trình Laplace $\nabla z = 0$ trong không gian $\mathbf{R}^2$.

(b) Hàm số $u = f(x,y,z) = \arctan(x/y) + \arctan(y/z) + \arctan(z/x)$ thỏa mãn phương trình Laplace $\nabla u = 0$ trong không gian $\mathbf{R}^3$.

1.17. Chứng mỉnh rằng, hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ liên tục tại điểm (0,0) nhưng không khả vi tại điểm này.

1.18. Chứng minh rằng, hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (0,0) nhưng không khả vi tại điểm này.

1.19. Tính đạo hàm theo hướng của các hàm số sau đây

(a) $u = f(x,y,z) = xy^2z^3$ tại điểm $M_0(1,2,-1)$ theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ với $M(0,4,-3)$.

(b) $u=f(x,y,z)=\arcsin\left(z/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ tại điểm $M_0(1,1,1)$ theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{M_0M}$ với $M(3,2,3)$.

(c) $z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ tại điểm $M_0(1,1)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

1.20. (a) Cho hàm số $u = f(x,y,z) = x\sin(yz)$, xác định Gradf(x,y,z) và tính đạo hàm theo hướng của véc tơ $\vec{e}$ tại điểm $M_0(1,3,0)$ nếu $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

(b) Cho hàm số $z = f(x,y) = xe^y$, tính vận tốc biến thiên của hàm số f(x,y) theo hướng véc tơ từ điểm $M_0(2,0)$ đến điểm $M(5,4)$. Theo hướng nào thì vận tốc biến thiên đó có giá trị lớn nhất và xác định giá trị ấy?

(c) Tìm độ lớn và hướng của Gradf(x,y,z) của hàm số $u = f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm $M_0(1,2,1)$. Tại các điểm nào thì Gradf(x,y,z) vuông góc với trục Oy? Tại các điểm nào thì $|\text{Gradf}(x,y,z)| = 0$?

1.21. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

(b) $z = f(x,y) = e^x(\cos y + x\sin y)$

(c) $z=f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

(d) $z=f(x,y)=e^{x/y}+e^{-y/x}$

(e) $u = f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$

(f) $u=f(x,y,z)=x^{y^2z}$ $(x > 0)$

1.22. Tính df(1,1) của hàm số $f(x,y)=x/y^2$.

1.23. Tính đạo hàm của hàm ẩn $y = y(x)$

(a) Tính y'(x) nếu $x^3y - xy^3 = a^4$ (tham số $a \neq 0$)

(b) Tính y'(x) nếu $xe^y + ye^x = e^{xy}$

(c) Tính y'(x) nếu $\arctan\dfrac{x+y}{a}=\dfrac{y}{a}$ (tham số $a \neq 0$)

(d) Tính y'(x) và y''(x) nếu $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan(y/x)$

1.24. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

(a) $z=f(x,y)=x+y-xe^y$

(b) $z=f(x,y)=xy(3-x-y)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2018-2019)

(c) $z=f(x,y)=3x^3+xy^2+5x^2+y^2$ $(x < 0,\ y < 0)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2019-2020)

(d) $z=f(x,y)=e^{y-x}(y^2+2x^2)$ (đề thi học phần Giải tích 2 cuối kỳ năm học 2020-2021)

1.25. Giải bài toán ở Ví dụ 1.28. bằng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến.

1.26. Tìm cực trị của hàm số $u = f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

1.27. Tìm tam giác có diện tích lớn nhất trong tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính R cho trước.

Gợi ý. Ký hiệu các góc của tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính R cho trước là α, β, γ và độ dài các cạnh đối diện với các góc α, β, γ tương ứng là a, b, c. Sau đó, áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ và định lý sin $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

1.28. Tìm GTNN(f_D) và GTLN(f_D) của các hàm số sau đây

(a) $z = f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ trên miền đóng D(f) giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y = 6.

(b) $z = f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trên miền đóng D(f) giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, x = 1, y = 0 và y = 2.