Đề thi giữa kỳ học phần MAT1042

Câu 1. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy} & \text{khi} \quad xy\neq 0 \\ q & \text{khi} \quad xy=0 \end{cases}$

1.1. Tìm tập xác định D(f) và xác định giá trị của tham số p để hàm số f(x,y) liên tục trên D(f).

1.2. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số f(x,y) tại điểm (0,0) với giá trị của tham số q được xác định ở 1.1.

Câu 2. Cho hàm số u = f(x,y,z) = xsin(yz). Tính Gradf(x,y,z) và $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{e}}$ tại điểm $M_0(1,3,0)$ với véc tơ $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

Câu 3. Tính $f''_{xy}(x,y)$ nếu $f(u)=u^3$ và $u(x,y)=2xy+e^{2x}$.

Câu 4. Xác định cực trị của hàm số $f(x,y)=(x-y)e^{-2x-y^2}$.

Câu 5. Cho hình chóp có các đỉnh O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) trong hệ tọa độ Descartes Oxyz với a, b, c là các số dương.

5.1. Lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm A, B và phương trình mặt phẳng đi qua các điểm A, B, C.

5.2. Tính diện tích ΔABC và thể tích của hình chóp OABC bằng tích phân hai lớp.

Đáp án và thang điểm

Câu 1.

1.1. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy} & \text{khi} \quad xy\neq 0 \\ q & \text{khi} \quad xy=0 \end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.**(0,25đ)**

- Ký hiệu $D_0=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|xy=0\}\equiv\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x=0\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|y=0\}$ là tập hợp các điểm nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.**(0,25đ)**

- Tại điểm $(x_0,y_0)\notin D_0 \Leftrightarrow (x_0,y_0)\in D(f)\backslash D_0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy\sin\frac{1}{xy}=$ $x_0y_0\sin\frac{1}{x_0y_0}=f(x_0,y_0)$, theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) liên tục trên $D(f)\backslash D_0$.**(0,25đ)**

- Tại điểm $(x_0,y_0)\in D_0$ thì $x_0y_0=0$

Chúng ta có $0\le|f(x,y)|=\left|xy\sin\frac{1}{xy}\right|=|xy|\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\le|xy|.1=|xy|\to|x_0y_0|=0$ khi $(x,y)\to(x_0,y_0)$, theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$.**(0,25đ)**

Mặt khác $f(x_0,y_0)=p$ nên nếu p = 0 thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$, theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) liên tục tại điểm $(x_0,y_0)\in D_0$; còn nếu p ≠ 0, tức là $f(x_0,y_0)\neq 0$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$, theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) không liên tục tại điểm $(x_0,y_0)\in D_0$.**(0,25đ)**

- Như vậy, nếu giá trị của tham số p = 0 thì hàm số $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy} & \text{khi} \quad xy\neq 0 \\ p & \text{khi} \quad xy=0 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định D(f).**(0,25đ)**

1.2. Bây giờ, chúng ta tính vi phân toàn phần cấp 1 tại điểm (0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy} & \text{khi} \quad xy\neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad xy=0 \end{cases}$$

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x} = 0 \\ f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y} = 0 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow df(0,0) = f'_x(0,0)dx + f'_y(0,0)dy = 0.dx + 0.dy = 0$ **(0,25đ)**

Câu 2. Tập xác định của hàm số f(x,y,z) = xsin(yz) là D(f) = $\mathbf{R}^3$.**(0,25đ)**

- Xác định véc tơ Gradf(x,y,z) tại điểm $M_0(1,3,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial f\left(x\sin(yz)\right)}{\partial x} = \sin(yz) \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial f\left(x\sin(yz)\right)}{\partial y} = xz\cos(yz) \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial f\left(x\sin(yz)\right)}{\partial z} = xy\cos(yz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial x} = \sin(yz)\Big|_{(x,y,z)=(1,3,0)} = \sin(3.0) = \sin 0 = 0 \\ \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial y} = xz\cos(yz)\Big|_{(x,y,z)=(1,3,0)} = 1.0.\cos(3.0) = 0 \ \textbf{(0,5đ)} \\ \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial z} = xy\cos(yz)\Big|_{(x,y,z)=(1,3,0)} = 1.3.\cos(3.0) = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{Gradf}(1,3,0) = \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial z}\vec{k} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 3\vec{k} = 3\vec{k}$.**(0,25đ)**

- Tính đạo hàm theo hướng của véc tơ $\vec{e}$ tại điểm $M_0(1,3,0)$ với $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Xác định véc tơ đơn vị $\vec{e}$ của véc tơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và các cosin chỉ phương của nó:

$\vec{e} = \dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$,**(0,25đ)** mặt khác

$\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ với cosα, cosβ, cosγ là các cosin chỉ phương của véc tơ đơn vị $\vec{e}$

$$\Rightarrow (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1/\sqrt{6} \\ \cos\beta = 2/\sqrt{6} \quad \textbf{(0,5đ)} \\ \cos\gamma = -1/\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial \vec{e}} = \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f(1,3,0)}{\partial z}\cos\gamma = 0.\dfrac{1}{\sqrt{6}} + 0.\dfrac{2}{\sqrt{6}} + 3.\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \textbf{(0,25đ)}$$

Câu 3. Tính bằng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp $f'_x(x,y) = f'(u).u'_x(x,y)$ với $\begin{cases} f(u) = u^3 \\ u(x,y) = 2xy + e^{2x} \end{cases}$

Chúng ta có $\begin{cases} f'(u) = 3u^2 \\ u'_x(x,y) = 2y + 2e^{2x} = 2(y + e^{2x}) \end{cases} \Rightarrow f'_x(x,y) = 6u^2(y + e^{2x}) = 6(2xy + e^{2x})^2(y + e^{2x})$ **(0,5đ)**

$\Rightarrow f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}[6u^2(y + e^{2x})] = 6\left[(y + e^{2x})\dfrac{\partial(u^2)}{\partial y} + u^2\dfrac{\partial(y + e^{2x})}{\partial y}\right] =$ **(0,5đ)**

$6\left[(y + e^{2x})\dfrac{d(u^2)}{du}u'_y(x,y) + u^2.1\right] = 6[(y + e^{2x})2u2x + u^2] = 6u[4x(y + e^{2x}) + u] =$ **(0,5đ)**

$6(2xy + e^{2x})(4xy + 4xe^{2x} + 2xy + e^{2x}) = 6(2xy + e^{2x})[6xy + (4x + 1)e^{2x})$ **(0,5đ)**

Cách khác. Thay hàm số u(x,y) cho đối số u của hàm số f(u) chúng ta được

$$\begin{cases} f(u) = u^3 \\ u(x,y) = 2xy + e^{2x} \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = (2xy + e^{2x})^3 \ \textbf{(0,5đ)}$$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[(2xy + e^{2x})^3] = 3(2xy + e^{2x})^2 \frac{\partial(2xy + e^{2x})}{\partial x} = 3(2xy + e^{2x})^2(2y + 2e^{2x}) =$$

$$6(2xy + e^{2x})^2(y + e^{2x}) \ \textbf{(0,5đ)}$$

$$\Rightarrow f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[6(2xy + e^{2x})^2(y + e^{2x})] =$$

$$6\left\{(y + e^{2x})\frac{\partial}{\partial y}[(2xy + e^{2x})^2] + (2xy + e^{2x})^2 \frac{\partial(y + e^{2x})}{\partial y}\right\} =$$

$$6\left[(y + e^{2x})2(2xy + e^{2x})\frac{\partial(2xy + e^{2x})}{\partial y} + (2xy + e^{2x})^2\right] = \textbf{(0,5đ)}$$

$$6[2(y + e^{2x})(2xy + e^{2x})2x + (2xy + e^{2x})^2] =$$

$$6(2xy + e^{2x})[4x(y + e^{2x}) + 2xy + e^{2x}] = 6(2xy + e^{2x})[6xy + (4x+1)e^{2x}] \ \textbf{(0,5đ)}$$

Câu 4.

Tập xác định của hàm số $f(x,y) = (x-y)e^{-y^2-2x}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.**(0,25đ)**

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = 1.e^{-y^2-2x} + (x-y)(-2)e^{-y^2-2x} = [1-2(x-y)]e^{-y^2-2x} \\ f'_y(x,y) = -1.e^{-y^2-2x} + (x-y)(-2y)e^{-y^2-2x} = -[1+2(x-y)y]e^{-y^2-2x} \end{cases}$ **(0,25đ)**

Điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [1-2(x-y)]e^{-y^2-2x} = 0 \\ -[1+2(x-y)y]e^{-y^2-2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) - 1 = 0 \\ 2(x-y)y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1/2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Hàm số có 1 điểm dừng duy nhất là $(x_0, y_0) = (-1/2, -1) \in D(f)$ **(0,5đ)**

Chúng ta có $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = 4(x-y-1)e^{-y^2-2x} \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = 2(2xy - y - 2y^2 + 1)e^{-y^2-2x} \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = 2(3y - x + 2xy^2 - 2y^3)e^{-y^2-2x} \end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \begin{cases} A(-1/2,-1) = f''_{x^2}(-1/2,-1) = 4\left[-\frac{1}{2} - (-1) - 1\right]e^{-(-1)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2 \\ B(-1/2,-1) = f''_{xy}(-1/2,-1) = 2\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) - (-1) - 2(-1)^2 + 1\right]e^{-(-1)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \\ C(-1/2,-1) = f''_{y^2}(-1/2,-1) = 2.\left[3.(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^2 - 2(-1)^3\right]e^{-(-1)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3 \end{cases} \quad \textbf{(0,25đ)}$$

$$\Rightarrow \Delta(-1/2,-1) = B^2(-1/2,-1) - A(-1/2,-1)C(-1/2,-1) = 2^2 - (-2).(-3) = -2 \ \textbf{(0,25đ)}$$

Tại điểm dừng $(x_0, y_0) = (-1/2, -1)$ có $\Delta(-1/2,-1) = -2 < 0$ và $A(-1/2,-1) = -2 < 0$ nên hàm số f(x,y) đạt cực đại địa phương tại điểm này: $f_{cđ} = f(-1/2,-1) = \left[-\frac{1}{2} - (-1)\right]e^{-(-1)^2-2.\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.**(0,25đ)**

Cách khác. Sau khi tính được $\begin{cases} f''_{x^2}(-1/2,-1) = -2 \\ f''_{xy}(-1/2,-1) = 2 \\ f''_{y^2}(-1/2,-1) = -3 \end{cases}$ chúng ta có vi phân toàn phần cấp 2 tại điểm $(-1/2,-1)$ là $d^2f(-1/2,-1) = f''_{x^2}(-1/2,-1)dx^2 + 2f''_{xy}(-1/2,-1)dxdy + f''_{y^2}(-1/2,-1)dy^2 = -2dx^2 + 2.2dxdy - 3dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính A_1 = det(-2) = -2 < 0, $A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2 > 0$ nên dạng toàn phương $d^2f(-1/2,-1)$ xác định âm, do đó hàm số f(x,y) đạt cực đại địa phương tại điểm $(-1/2,-1)$ và $f_{cđ} = f(-1/2,-1) = \left[-\frac{1}{2} - (-1)\right]e^{-(-1)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.

Câu 5.

5.1. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A(a,0,0) và điểm B(0,b,0) trong mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.**(0,25đ)**

Phương trình mặt phẳng đi qua các điểm A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.**(0,25đ)**

5.2. Tính diện tích ΔABC và thể tích của hình chóp OABC bằng tích phân hai lớp.

- Tính diện tích ΔABC:

Từ phương trình của mặt phẳng đi qua các điểm A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ suy ra $z(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ và chiếu ΔABC lên mặt phẳng Oxy chúng ta được $D = \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b(1 - x/a) \end{cases}$.**(0,25đ)**

Bây giờ, chúng ta áp dụng công thức $S = \iint_D \sqrt{1 + [z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}dxdy$ để tính diện tích S của ΔABC có phương trình $z(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ và hình chiếu của ΔABC lên mặt phẳng Oxy là $D = \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b(1 - x/a) \end{cases}$.**(0,25đ)**

Chúng ta có $z(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \Rightarrow \begin{cases} z'_x(x,y) = -c/a \\ z'_x(x,y) = -c/b \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + [z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{ab}$$

$$\Rightarrow S = \iint_D \sqrt{1 + [z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}dxdy = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{ab}\iint_D dxdy$$

Theo ý nghĩa hình học của tích phân hai lớp thì $\iint_D dxdy$ là diện tích của miền D, tức là diện tích của ΔOAB và chúng ta biết rằng, diện tích của ΔOAB bằng $\frac{ab}{2}$.

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{ab}\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$.**(0,25đ)**

*Có thể tính $\iint_D dxdy = \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy = \int_0^a \left[y\Big|_{y=0}^{y=b(1-x/a)} \right] dx = b\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)dx = b\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{ab}{2}$.

- Tính thể tích của hình chóp OABC:

Nếu coi hình chóp OABC là hình trụ có các đường sinh song song với trục Oz, có mặt trên là mặt phẳng ABC có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow z(x,y)=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ và mặt đáy nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.**(0,25đ)**

Khi đó thể tích của hình chóp OABC là $V=\iint_D z(x,y)dxdy$, trong đó $D=\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le b(1-x/a)\end{cases}$ là hình chiếu của mặt phẳng ABC lên mặt phẳng Oxy.**(0,25đ)**

$$\Rightarrow V=\iint_D c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = c\iint_D\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = c\int_0^a dx\int_0^{b(1-x/a)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy =$$

$$c\int_0^a\left(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b(1-x/a)} dx = bc\int_0^a\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = bc\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{6a^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{abc}{6}$$.**(0,25đ)**

Cách khác. Nếu coi hình chóp OABCD là hình trụ có các đường sinh song song với trục Oz, có mặt trên và mặt dưới tương ứng là mặt phẳng ABC có phương trình $z_2(x,y)=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ và mặt phẳng tọa độ Oxy có phương trình $z_1(x,y) = 0$.**(0,25đ)**

Khi đó thể tích của hình chóp OABC là $V=\iint_D [z_2(x,y)-z_1(x,y)]dxdy$, trong đó $D=\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le b(1-x/a)\end{cases}$ là hình chiếu của mặt phẳng ABC lên mặt phẳng Oxy.**(0,25đ)**

$$\Rightarrow V=\iint_D\left[c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)-0\right]dxdy = c\iint_D\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = c\int_0^a dx\int_0^{b(1-x/a)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy =$$

$$c\int_0^a\left(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b(1-x/a)} dx = bc\int_0^a\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = bc\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{6a^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{abc}{6}$$.**(0,25đ)**