Chương 1. NHẬP MÔN

1.1. Tập hợp, ánh xạ, tập hợp số thực

Tự đọc {[1]. Chương 1 (1.1., 1.2.)}, cần lưu ý một số vấn đề trọng tâm sau đây.

1.1.1. Tập hợp và phần tử

Khái niệm tập hợp và phần tử của tập hợp là các khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa được bằng những khái niệm đã biết, mà có thể được mô tả như sau: Tất cả những đối tượng xác định nào đó hợp lại tạo thành một tập hợp, mỗi đối tượng đó được gọi là một phần tử của tập hợp.

- Nếu a là một phần tử của tập hợp E thì ta nói "a thuộc E" và viết $a \in E$.

- Nếu a không phải là phần tử của tập hợp E thì ta nói "a không thuộc E" và viết $a \notin E$.

- Có 2 cách mô tả một tập hợp: (1) Liệt kê ra tất cả các phần tử của tập hợp; (2) Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.

- Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào và được ký hiệu là $\varnothing$. Một tập hợp có thể là một phần tử của một tập hợp khác, vì vậy tập rỗng ($\varnothing$) khác với tập hợp chỉ có duy nhất một phần tử là tập rỗng, tức là $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

1.1.2. Ánh xạ

Cho hai tập hợp E và F, ta gọi một ánh xạ f từ E sang F và viết là $f: E \to F$, là một quy tắc sao cho: Ứng với mỗi phần tử của E là một phần tử xác định của F. Tập hợp E được gọi là tập hợp gốc (hoặc tập hợp nguồn), còn tập hợp F được gọi là tập hợp ảnh (hoặc tập hợp đích). Phần tử $y \in F$ ứng với phần tử $x \in E$ được gọi là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f và viết là $y = f(x)$.

- Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có nhiều nhất một nghiệm $x \in E$ với mỗi $y \in F$.

- Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có ít nhất một nghiệm $x \in E$ với mỗi $y \in F$.

- Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có một nghiệm duy nhất $x \in E$ với mỗi $y \in F$. Từ đây suy ra, một song ánh là một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

- Song ánh $f: E \to F$ tạo ra một ánh xạ từ F tới E, ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f và ký hiệu là f^{-1}, tức là $f^{-1}: F \to E$.

- Đồng thời với song ánh $f: E \to F$ ta có một tương ứng một - một hai chiều giữa E và F, chiều từ E tới F được thực hiện bởi ánh xạ f, còn chiều từ F tới E được thực hiện bởi ánh xạ f^{-1}. Do đó ánh xạ song ánh còn được gọi là ánh xạ một - một.

- Cho 3 tập hợp E, F, G và hai ánh xạ $f: E \to F$, $g: F \to G$. Ánh xạ từ E tới G, được ký hiệu là $g \circ f$, tức là $g \circ f: E \to G$ được xác định như sau: Với mỗi $x \in E$ thì $(g \circ f)(x) = g[f(x)] \in G$, được gọi hợp của ánh xạ f và ánh xạ g.

- Chú ý. (1) Hợp của hai đơn ánh là một đơn ánh, hợp của hai toàn ánh là một toàn ánh và hợp của hai song ánh là một song ánh; (2) Với $\forall x \in E$ thì $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$ và với $\forall y \in F$ thì $(f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$.

1.1.3. Tập hợp số thực

- Tập số tự nhiên $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \backslash \{0\}$.

- Để phương trình $x + n = 0$ với $n \in N$ có nghiệm, cần đưa thêm tập số nguyên $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$.

- Để phương trình mx + n = 0 với m, n∈**N** có nghiệm, cần đưa thêm tập số hữu tỷ **Q** = $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ với m, n∈**Z**, n ≠ 0, m và n chỉ có ước số chung là ±1.

- Rõ ràng là **N*⊂N⊂Z⊂Q**, tuy nhiên, tập **Q** cũng chưa đủ để chứa hết tất cả các số trong thực tế. Chẳng hạn, nếu xét phương trình $x^2 = 2$, phương trình này có nghiệm $x = \sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ. Thật vậy, giả sử ngược lại $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ, tức là $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ với m, n∈**N**, n ≠ 0, m và n chỉ có ước số chung là ±1. Ta có $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\sqrt{2} = m \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ chia hết cho 2 ⇒ m chia hết cho 2, do đó ta có thể đặt m = 2p (p∈N) ⇒ $4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow n^2$ chia hết cho 2 ⇒ n chia hết cho 2. Như vậy, m và n có ước số chung là 2, điều này mâu thuẫn với giả thiết là m và n chỉ có ước số chung là ±1, do đó $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỷ. Một ví dụ khác là số π, cũng không phải là số hữu tỷ.

- Các số không phải là số hữu tỷ được gọi là số vô tỷ. Tập hợp tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ được gọi là số thực, ký hiệu là **R**.

- Như vậy **N*⊂N⊂Z⊂Q⊂R**.

- Số thực x được gọi là *cận trên* của tập hợp A⊂**R** nếu với ∀a∈A mà a ≤ x, khi đó ta nói tập hợp A bị chặn trên; số thực x được gọi là *cận dưới* của tập hợp A⊂**R** nếu với ∀a∈A mà a ≥ x, khi đó ta nói tập hợp A bị chặn dưới. Tập hợp A được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

- Cận trên bé nhất của tập hợp A, nếu có, được gọi là *cận trên đúng* của A và ký hiệu là supA (supremum); cận dưới lớn nhất của tập hợp A, nếu có, được gọi là *cận dưới đúng* của A và ký hiệu là infA (infimum). Cận trên đúng của A (supA), cận dưới đúng của A (infA) có thể thuộc A, cũng có thể không thuộc A. Nếu supA∈A thì supA là phần tử lớn nhất của A và khi đó được ký hiệu là maxA; nếu infA∈A thì infA là phần tử nhỏ nhất của A và khi đó được ký hiệu là minA.

- Tiên đề về cận trên đúng và cận dưới đúng: Mọi tập hợp A⊂**R** không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng thuộc **R**; mọi tập hợp A⊂**R** không rỗng, bị chặn dưới đều có cận dưới đúng thuộc **R**.

1.2. Hàm số một biến và đồ thị các hàm số một biến cơ bản

Tự đọc {[1]. Chương 2 (2.1., 2.2., 2.3., 2.4.,)}. Hàm số một biến y = f(x) là một ánh xạ f: **R**→**R**, cần lưu ý một số vấn đề trọng tâm sau đây.

1.2.1. Tập xác định và miền giá trị của hàm số

Cho ánh xạ y = f(x), x được gọi là biến số còn y được gọi là hàm số. Tập hợp tất cả các giá trị của biến số x để f(x) xác định, được gọi là *tập xác định* của hàm số. Tập xác định của hàm số y = f(x) được ký hiệu là D(f).

Nếu một hàm số được cho dưới dạng một biểu thức hoặc một số biểu thức thì tập xác định D(f) là tập hợp tất cả các giá trị của biến số x sao cho các phép toán trong tất cả các biểu thức đồng thời có nghĩa.

Tập hợp tất cả các giá trị của hàm số y = f(x) trên tập xác định D(f) được gọi là *miền giá trị* của hàm số. Miền giá trị của hàm số y = f(x) được ký hiệu là R(f).

Như vậy, hàm số y = f(x) là ánh xạ f: D(f) → R(f).

Ví dụ **1.2.1.1.** Tìm tập xác định D(f) của hàm số $y = \frac{\lg(1+x)}{x-1}$

Bài giải.

Để hàm đã cho xác định, ta phải có $\begin{cases} 1+x > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = (-1,1) \cup (1,+\infty)$

Ví dụ **1.2.1.2.** Tìm miền giá trị R(f) của hàm số f(x) = 2 + 3sinx

Bài giải.

Vì $|\sin x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\sin x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le 2 + 3\sin x \le 5 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 5 \Rightarrow$ R(f) = [-1,5].

1.2.2. Đồ thị của hàm số

Cho hai tập A, B không rỗng, với mỗi phần tử a∈A và mỗi phần tử b∈B, ta lập cặp có thứ tự (a,b) (viết phần tử a∈A trước và phần tử b∈B sau). Tích Descartes của hai tập hợp A và B, ký hiệu là A×B, là tập hợp các phần tử {(a,b) | a∈A, b∈B}.

Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy có tọa độ (x,y) ≡ (x,f(x)). Vì x∈D(f) và f(x)∈R(f) nên đồ thị của một hàm số y = f(x) là các phần tử của tích Descartes D(f)×R(f).

Như vậy, đối với một hàm số xác định, đồ thị của nó có thể có hữu hạn hoặc vô hạn điểm trên mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy.

1.2.3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ và hàm số tuần hoan

Giả sử E⊂**R** và nhận gốc O của hệ trục tọa độ Oxy làm tâm đối xứng, khi đó hàm số y = f(x) (ánh xạ f: E→**R**) được gọi là *hàm số chẵn* nếu f(x) = f(-x) với ∀x∈E. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

Giả sử E⊂**R** và nhận gốc O của hệ trục tọa độ Oxy làm tâm đối xứng, khi đó hàm số y = f(x) (ánh xạ f: E→**R**) được gọi là *hàm số lẻ* nếu f(x) = -f(-x) với ∀x∈E. Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc O của hệ trục tọa độ Oxy làm tâm đối xứng.

Giả sử E⊂**R** và hàm số y = f(x) (ánh xạ f: E→**R**) được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một hằng số T > 0 sao cho f(x+T) = f(x) với ∀x∈E, khi đó T được gọi là *chu kỳ* của hàm số. Số dương nhỏ nhất sao hàm số f(x) có tính chất vừa nêu được gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm số f(x).

Ví dụ **1.2.3.1.** Hãy xác định tính chẵn hoặc lẻ của các hàm số

(a) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$, (b) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, (c) $f(x) = |x| - 5^{x^2}$, (d) $f(x) = x^2 + 5x$,

(e) $f(x) = \lg\dfrac{x+3}{x-3}$

Bài giải.

Tập xác định D(f) của mỗi hàm số trên đều đối xứng qua gốc tọa độ. Các hàm (a), (b), (c) và (d) có D(f) = (-∞,+∞); còn hàm (e) có D(f) = (-∞,-3)∪(3,+∞).

(a) $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x\sqrt[3]{x} - 2\sin x = -\left(x\sqrt[3]{x} + 2\sin x\right) = -f(x)$ dó đó hàm số $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$ là hàm số lẻ.

(b) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = 2^x + 2^{-x} = f(x)$ do đó hàm số $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ là hàm số chẵn.

(c) $f(-x) = |-x| - 5^{(-x)^2} = |x| - 5^{x^2} = f(x)$ do đó hàm số $f(x) = |x| - 5^{x^2}$ là hàm số chẵn.

(d) f(-x) = $(-x)^2$ + 5(-x) = x^2 - 5x ≠ x^2 + 5x = f(x), do đó hàm số f(x) = x^2 + 5x không phải là hàm chẵn và cũng không phải là hàm lẻ.

(e) $f(-x) = \lg\frac{-x+3}{-x-3} = \lg\frac{-(x-3)}{-(x+3)} = \lg\frac{x-3}{x+3} = \lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} = -\lg\frac{x+3}{x-3} = -f(x)$, do đó hàm $f(x) = \lg\frac{x+3}{x-3}$ là hàm lẻ.

Ví dụ **1.2.3.2.** Hãy xác định chu kỳ cơ sở của hàm số f(x) = sin6x + tan4x

Bài giải.

Bổ đề: Nếu T là chu kỳ cơ sở của hàm số f(x) thì nT (n∈**N***) là chu kỳ của hàm số f(x). (*sinh viên tự chứng minh bằng phương pháp Quy nạp toán học*).

Hàm số sinX có chu kỳ cơ sở là 2π ⇒ hàm số sin6x có chu kỳ cơ sở là $T_1 = 2\pi/6 = \pi/3$, còn hàm số tanX có chu kỳ cơ sở là π ⇒ hàm số tan4x có chu kỳ cơ sở là $T_2 = \pi/4$, theo Bổ đề trên thì chu kỳ cơ sở của hàm số f(x) = sin6x + tan4x là T = BSCNN(T_1,T_2) = π.

1.2.4. Hàm hợp (hợp của 2 ánh xạ)

Cho hàm số z = g(y) (ánh xạ g: **R**→**R**) với D(g) và R(g); và hàm số y = f(x) (ánh xạ f: **R**→**R**) với D(f) và R(f) sao cho R(f)⊂D(g). Khi đó hàm z = g[f(x)] với D(f) được gọi là hàm hợp của hàm f và hàm g (hợp của ánh xạ f và ánh xạ g, tức là ánh xạ g∘f: **R**→**R**) với D(f) và R(g).

Ví dụ **1.2.4.1.** Tìm các hàm hợp (g∘f)(x) = g[f(x)], (f∘g)(x) = f[g(x)] nếu f(x) = x^2 và g(x) = 2^x.

Bài giải.

Dễ dàng xác định được D(f) = **R**, R(f) = [0,+∞) và D(g) = **R**, R(g) = (0,+∞), suy ra R(f)⊂D(g) và R(g)⊂D(f) nên các hàm f(x) và g(x) thỏa mãn điều kiện cần trong định nghĩa hàm hợp. Theo định nghĩa của hàm hợp ta được (g∘f)(x) = g[f(x)] = $2^{f(x)} = 2^{x^2}$ và (f∘g)(x) = f[g(x)] = $[g(x)]^2 = (2^x)^2 = 4^x$.

1.2.5. Hàm số đơn điệu

Hàm số y = f(x) với x∈D(f) được gọi là hàm số *đơn điệu tăng* trên D(f) nếu với ∀x_1, x_2∈D(f) mà $x_1 \le x_2$ thì $f(x_1) \le f(x_2)$ và được gọi là hàm số *đơn điệu tăng thực sự* trên D(f) nếu với ∀x_1, x_2∈D(f) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số y = f(x) với x∈D(f) được gọi là hàm số *đơn điệu giảm* trên D(f) nếu với ∀x_1, x_2∈D(f) mà $x_1 \le x_2$ thì $f(x_1) \ge f(x_2)$ và được gọi là hàm số *đơn điệu giảm thực sự* trên D(f) nếu với ∀x_1, x_2∈D(f) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Các hàm số đơn điệu tăng/tăng thực sự và các hàm số đơn điệu giảm/giảm thực sự được gọi là *hàm số đơn điệu*. Các hàm số đơn điệu đều có hàm số ngược, tuy nhiên, điều này chỉ là điều kiện đủ vì có những hàm số không phải là hàm số đơn điệu nhưng vẫn có hàm số ngược.

**** Đồ thị của các hàm số một biến cơ bản tự đọc {[1]. Chương 2 (2.6.)}***

1.3. Hàm số ngược và đồ thị của hàm số ngược

Tự đọc {[1]. Chương 2 (2.5., 2.6.)}

Cho hàm số y = f(x) là một song ánh f: E→F (E,F⊂**R**), song ánh này đặt tương ứng một phần tử x∈E với duy nhất một phần tử y∈F và ngược lại, đặt tương ứng một phần tử y∈F với duy nhất một phần tử x∈E. Phép tương ứng y với x được gọi là hàm số ngược của hàm số f và nó chính là ánh xạ ngược f^{-1}: F→E. Do đó, từ Chú ý (2) trong **1.1.2.** ta có y = f(x) ⇔ x = $f^{-1}(y)$.

Với quy ước dùng ký hiệu x để chỉ biến số và dùng ký hiệu y để chỉ hàm số thì hàm số ngược của hàm số y = f(x) được viết là y = $f^{-1}(x)$.

Để tìm hàm số ngược của hàm số y = f(x), ta đổi vai trò của của các chữ x và y, tức là viết x = f(y), sau đó ta tìm y = $f^{-1}(x)$ là nghiệm của phương trình x = f(y).

Khi chuyển từ hàm số y = f(x) sang hàm số ngược y = $f^{-1}(x)$ thì tập xác định và miền giá trị sẽ hoán đổi vai trò cho nhau, đồng thời luôn luôn có $f[f^{-1}(x)] = x$ và $f^{-1}[f(x)] = x$.

Nếu biểu diễn trong cùng một hệ trục tọa độ vuông góc thì đồ thị của hàm số ngược y = $f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số y = f(x) qua đường phân giác của góc vuông thứ nhất của mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, nếu lấy độ dài đoạn thẳng đơn vị trên các trục tọa độ bằng nhau.

**** Đồ thị của hàm số ngược tự đọc {[1]. Chương 2 (2.6.)}***

Lưu ý. 1) Khi vẽ đồ thị của hàm số, có thể sử dụng Phần mềm ứng dụng (miễn phí) GeoGebra Classic. 2) Trong các hàm số sơ cấp, người ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số: Các đa thức và các phân thức hữu tỷ, vì khi tính giá trị của các hàm số này, chỉ cần thực hiện các phép toán số học đối với biến.

Bài tập

1.1. Giả sử tập hợp A có n phần tử, ký hiệu P(A) là tập hợp mà các phần tử của nó là các tập con của tập A. Chứng minh rằng tập hợp P(A) có 2^n phần tử.

1.2. Cho n điểm khác nhau trong một mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kỳ không thẳng hàng. Xét các đoạn thẳng nối từng cặp hai điểm khác nhau.

(a) Tính số lượng các đoạn thẳng đó; (b) Tính số lượng các tam giác được tạo thành.

1.3. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của các tập hợp

(a) $A = \left\{ 2^x + 2^{\frac{1}{x}} \middle| x > 0 \right\}$, (b) $B = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \middle| m, n \in N \right\}$, (c) $C = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + n^2} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$

1.4. Tìm tập xác định của các hàm số

(a) $y = f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$, (b) $y = f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$,

(c) $y = f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$, (d) $y = f(x) = \sqrt{\cos(x^2)}$

1.5. Ánh xạ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ được xác định bởi công thức $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có phải là một đơn ánh hay toàn ánh không? Tìm f(**R**), f(0), $f^{-1}(0)$, f([0,5]), $f^{-1}([0,5])$.

1.6. Chứng minh rằng, các hàm (a) y = f(x) = 2x + 1, (b) y = f(x) = x^3 là các ánh xạ song ánh (ánh xạ một–một) và vẽ đồ thị của các hàm số y = f(x), y = $f^{-1}(x)$ tương ứng.

1.7. Chứng minh rằng, bất kỳ hàm số y = f(x) nào mà có D(f) nhận gốc O của hệ trục tọa độ Oxy làm tâm đối xứng, bao giờ cũng viết được dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

1.8. Chứng minh rằng, hàm phần lẻ y = {x} là hàm tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở của nó.

1.9. Vẽ đồ thị của các hàm số

(a) $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$, (b) $y = f(x) = |x-2| + |x-1|$,

(c) y = f(x) = [x], (d) y = f(x) ={x}

1.10. Tìm các hàm số f[g(x)], g[f(x)] với

(a) $f(x) = x^2 + 2$ và g(x) = 3x + 1, (b) f(x) = sinx và g(x) = lg(x – 2).