Đề thi giữa kỳ học phần MAT1042

Câu 1. Tính $f''_{xy}(0,0)$ và $f''_{yx}(0,0)$ nếu $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^m\sin(2y)}{x^2+2y^2}$ với x > 0, m > 0. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ khi $\begin{cases}m>1\\ m\le 1\end{cases}$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số f(x,y) = xy + x + y trên miền đóng D là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng x = 1, x = 2, y = 2 và y = 3.

Câu 4. Xác định cực trị của hàm số $f(x,y)=6x^2y-24xy-6x^2+24x+4y^3-15y^2+36y+1$.

Câu 5. Tìm giá trị của tham số $m\neq 0$ sao cho $\int_0^1 dy\int_0^1 \sin(mx^2)dx=0$.

Đáp án và thang điểm

Câu 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ là D(f) = **R**^{2}.

Tính $f''_{xy}(0,0)$:

+ Tại các điểm (x,y) ≠ (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến x của hàm số f(x,y) bằng quy tắc, chúng ta được $f'_x(x,y)=\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ **(0,25đ)**

+ Tại điểm (x,y) = (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến x của hàm số f(x,y) bằng định nghĩa

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(0+\Delta x)^3.0-(0+\Delta x).0^3}{(0+\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0 \ \textbf{(0,25đ)}$$

$$\Rightarrow f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \ \textbf{(0,25đ)}$$

+ Tại điểm (x,y) = (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f'_x(x,y)$ bằng định nghĩa

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0^4.(0+\Delta y)+4.0^2.(0+\Delta y)^3-(0+\Delta y)^5}{[0^2+(0+\Delta y)^2]^2}-0}{\Delta y}=$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}(-1)=-1.\ \textbf{(0,25đ)}$$

Tính $f''_{yx}(0,0)$:

+ Tại các điểm (x,y) ≠ (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến y của hàm số f(x,y) bằng quy tắc, chúng ta được $f'_y(x,y)=\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ **(0,25đ)**

+ Tại điểm (x,y) = (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến y của hàm số f(x,y) bằng định nghĩa

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0^5-2.0^3.(0+\Delta y)^2-0.(0+\Delta y)^4}{0^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0\ \textbf{(0,25đ)}$$

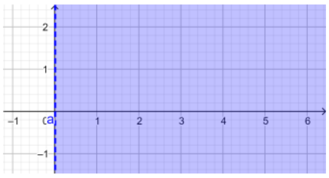
$$\Rightarrow f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \ \textbf{(0,25đ)}$$

+ Tại điểm (x,y) = (0,0) tính đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $f'_y(x,y)$ bằng định nghĩa

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(0+\Delta x) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(0+\Delta x)^5 - 4(0+\Delta x)^3.0^2 - (0+\Delta x).0^4}{[(0+\Delta x)^2 + 0^2]^2} - 0}{\Delta x} =$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.**(0,25đ)**

Câu 2. Theo yêu cầu của đầu bài thì tập xác định của hàm số f(x,y) là D(f) = $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$, là nửa mặt phẳng bên phải trục tung Oy, không kể trục tung Oy.**(0,25đ)**



Biến đổi $f(x,y) = \dfrac{x^m \sin(2y)}{x^2 + 2y^2} = \dfrac{x^m 2y \dfrac{\sin(2y)}{2y}}{x^2 + 2y^2} = \dfrac{2x^m y}{x^2 + 2y^2} \dfrac{\sin(2y)}{2y}$ **(0,5đ)**

Đặt $\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{2x^m y}{x^2 + 2y^2} \\ h(y) = \dfrac{\sin(2y)}{2y} \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = g(x,y).h(y)$

Vì $y \to 0 \Leftrightarrow 2y \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} h(y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(2y)}{2y} = \lim\limits_{2y \to 0} \dfrac{\sin(2y)}{2y} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} [g(x,y).h(y)] = \left[\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)\right]\left[\lim_{y\to 0} h(y)\right] =$$

$\left[\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)\right].1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$, nên bây giờ chỉ cần tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ **(0,25đ)**

- Trường hợp m > 1:

Chúng ta có $0 \le |g(x,y)| = \left|\dfrac{2x^m y}{x^2 + 2y^2}\right| \le \dfrac{2|x^m y|}{2\sqrt{2}|xy|}$ (do BĐT Cauchy $x^2 + 2y^2 \ge 2\sqrt{x^2.2y^2} = 2\sqrt{2}|xy|$)

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}|x^{m-1}| \to 0$ khi $x \to 0^+$ (do $m > 1 \Leftrightarrow m - 1 > 0$).

Theo Nguyên lý kẹp $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y) = 0$ **(0,5đ)**

- Trường hợp $0 < m \le 1$:

Cho (x,y) $\to$ (0^+,0) theo đường thẳng/cong $y = kx^m$ với tham số $k \ne 0$, khi đó $g(x,y) = g(x,kx^m) = \dfrac{2x^m(kx^m)}{x^2 + 2(kx^m)^2} = \dfrac{2kx^{2m}}{x^2 + 2k^2x^{2m}} = \dfrac{2k}{x^{2(1-m)} + 2k^2}$.

Bây giờ xét $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2(1-m)}$:

+ Khi m = 1 thì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2(1-m)} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^0 = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} g(x,kx^1) = \frac{2k}{\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2(1-m)} + 2k^2} = \frac{2k}{1+2k^2}$$

Giá trị $\dfrac{2k}{1+2k^2}$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.**(0,25đ)**

+ Khi $0 < m < 1 \Leftrightarrow 0 < 2(1-m) < 2$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2(1-m)} = 0$,

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y) = \lim_{x\to 0^+} g(x,kx^m) = \frac{2k}{\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2(1-m)} + 2k^2} = \frac{2k}{0+2k^2} = \frac{1}{k}$$

Giá trị $1/k$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại. **(0,25đ)**

- Kết luận $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y) = 0$ khi $m > 0$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi $0 < m \le 1$.

Cách khác. Thực hiện giống như trên cho đến chỉ cần tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$

Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases}$, từ D(f) suy ra $\begin{cases} r > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} 0 < \cos\varphi \le 1 \\ -1 < \sin\varphi < 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{r}y \end{cases} \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{x^2+2y^2}{r^2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2y^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+2y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x,y) \to (0^+,0) \Leftrightarrow r \to 0^+$$

Bây giờ ta được $g(x,y) = \dfrac{2x^m y}{x^2+2y^2} = \dfrac{2(r\cos\varphi)^m.\dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi}{(r\cos\varphi)^2 + 2\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)^2} = \sqrt{2}r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$

Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ khi $\begin{cases} m > 1 \\ 0 < m \le 1 \end{cases}$

- Trường hợp $m > 1$:

$m > 1 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1} = 0$, mặt khác $\left|\cos^m\varphi\sin\varphi\right| \le 1$ nên $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y) = 0$.

- Trường hợp $0 < m \le 1$:

+ m = 1 $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1} = \lim\limits_{r\to 0^+} 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi = \lim\limits_{r\to 0^+} 1.\cos^m\varphi\sin\varphi = \cos^m\varphi\sin\varphi$, giá trị này thay đổi khi φ thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$ không tồn tại

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại.

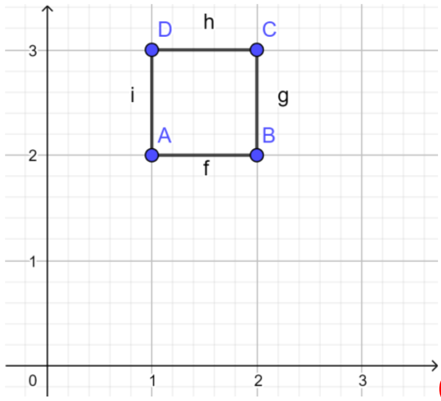
+ $0 < m < 1 \Rightarrow 1 - m > 0 \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1} = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{1}{r^{1-m}} = +\infty$, mặt khác $\left|\cos^m\varphi\sin\varphi\right| \le 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi = \begin{cases} -\infty & \text{khi} & -\pi/2 < \varphi < 0 \\ 0 & \text{khi} & \varphi = 0 \\ +\infty & \text{khi} & 0 < \varphi < \pi/2 \end{cases}$ vì $0 < \cos^m\varphi < 1$, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$ không tồn tại.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi $0 < m \le 1$.

Câu 3.

1) Miền đóng ABCD (là miền đơn liên có biên trơn từng khúc) có các đỉnh A(1,2), B(2,2), C(2,3), D(1,3).



(0,25đ)

2) Từ hàm số f(x,y) = xy + x + y $\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = y+1 = 0 \\ f'_y(x,y) = x+1 = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng thuộc các điểm trong của miền đóng ABCD. Hệ phương trình này có nghiệm là $(-1,-1)$ nên hàm số f(x,y) có điểm dừng $(x,y) = (-1,-1)$ không phải là điểm trong của miền đóng ABCD.**(0,25đ)**

3) Các điểm trong trên biên của miền đóng ABCD là các điểm nằm trên đoạn thẳng AB, BC, CD và DA không kể các đỉnh A(1,2), B(2,2), C(2,3), D(1,3).

- Các điểm trong trên cạnh AB có phương trình y = 2 (1 < x < 2) ứng với hàm số f(x,2) = 3x + 2 ≡ g(x) (1 < x < 2). Chúng ta có g'(x) = 3 > 0 nên g(x) không có điểm dừng trên khoảng 1 < x < 2.**(0,25đ)**

- Các điểm trong trên cạnh BC có phương trình x = 2 (2 < y < 3) ứng với hàm số f(2,y) = 3y + 2 ≡ h(y) (2 < y < 3). Chúng ta có h'(y) = 3 > 0 nên h(y) không có điểm dừng trên khoảng 2 < y < 3.**(0,25đ)**

- Các điểm trong trên cạnh CD có phương trình y = 3 (1 < x < 2) ứng với hàm số f(x,3) = 4x + 3 ≡ p(x) (1 < x < 2). Chúng ta có p'(x) = 4 > 0 nên p(x) không có điểm dừng trên khoảng 1 < x < 2.**(0,25đ)**

- Các điểm trong trên cạnh DA có phương trình x = 1 (2 < y < 3) ứng với hàm số f(1,y) = 2y + 1 ≡ q(y) (2 < y < 3). Chúng ta có q'(y) = 2 > 0 nên q(y) không có điểm dừng trên khoảng 2 < y < 3.**(0,25đ)**

4) Các đỉnh A(1,2), B(2,2), C(2,3), D(1,3) là các điểm trên biên của miền đóng ABCD mà tại đấy, không tồn tại $\dfrac{df[x,y(x)]}{dx}$ hoặc $\dfrac{df[x(y),y]}{dy}$. Giá trị của hàm số f(x,y) tại các điểm này là:

$$\begin{cases} f(1,2) = (xy+x+y)\big|_{(x,y)=(1,2)} = 1.2+1+2 = 5 \\ f(2,2) = (xy+x+y)\big|_{(x,y)=(2,2)} = 2.2+2+2 = 8 \\ f(2,3) = (xy+x+y)\big|_{(x,y)=(2,3)} = 2.3+2+3 = 11 \\ f(1,3) = (xy+x+y)\big|_{(x,y)=(1,3)} = 1.3+1+3 = 7 \end{cases}$$ **(0,25đ)**

5) $\text{GTNN}(f_{ABCD}) = \min\{5,8,11,7\} = 5$ tại A(1,2) và $\text{GTLN}(f_{ABCD}) = \max\{5,8,11,7\} = 11$ tại C(2,3).**(0,25đ)**

Câu 4. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = 6x^2y - 24xy - 6x^2 + 24x + 4y^3 - 15y^2 + 36y + 1$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$. **(0,25đ)**

Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = 12xy - 24y - 12x + 24 = 12(xy - 2y - x + 2) = 12(x-2)(y-1) \\ f'_y(x,y) = 6x^2 - 24x + 12y^2 - 30y + 36 = 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) \end{cases}$, nên điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(x-2)(y-1) = 0 \\ 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 0 \\ x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$ **(0,25đ)**

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=0\\x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\\\begin{cases}y-1=0\\x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\2y^2-5y+2=0\end{cases}\\\begin{cases}y=1\\x^2-4x+3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\\left[\begin{array}{l}y=1/2\\y=2\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}y=1\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$ **(0,25đ)**

Hệ phương trình trên có 4 nghiệm $(x_1,y_1)=(2,1/2);(x_2,y_2)=(2,2);(x_3,y_3)=(1,1)$ và $(x_4,y_4)=(1,3)$ nên hàm số có 4 điểm dừng tương ứng là $M_1(2,1/2);M_2(2,2);M_3(1,1);M_4(1,3)$ và cả 4 điểm dừng này đều thuộc tập xác định D(f).

Chúng ta có $\begin{cases}A(x,y)=f''_{x^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y)=12(y-1)\\B(x,y)=f''_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f''_{xy}(x,y)=12(x-2)\\C(x,y)=f''_{y^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y)=6(4y-5)\end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \Delta(x,y)=B^2(x,y)-A(x,y)C(x,y)=12^2(x-2)^2-12(y-1).6(4y-5)=$$
$$72[2(x-2)^2-(y-1)(4y-5)]$$ **(0,25đ)**

Xét tại mỗi điểm dừng

- Tại điểm dừng $M_1(2,1/2)$: $\Delta(2,1/2)=-108; A(2,1/2)=-6; f(2,1/2)=111/4$
- Tại điểm dừng $M_2(2,2)$: $\Delta(2,2)=-216; A(2,2)=12; f(2,2)=21$
- Tại điểm dừng $M_3(1,1)$: $\Delta(1,1)=144$
- Tại điểm dừng $M_4(3,1)$: $\Delta(3,1)=144$

TT	Điểm dừng	Δ	A	Kết luận	Điểm
1	$M_1(2,1/2)$	-108 < 0	-6 < 0	Hàm số f(x,y) đạt cực đại địa phương tại điểm này và f(2,1/2) = 111/4	**(0,25đ)**
2	$M_2(2,2)$	-216 < 0	12 > 0	Hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm này và f(2,2) = 21	**(0,25đ)**
3	$M_3(1,1)$	144 > 0		Hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này	**(0,25đ)**
4	$M_4(3,1)$	144 > 0		Hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này	

Cách khác. Sau khi tính được $A(x,y)=12(y-1)$, $B(x,y)=12(x-2)$ và $C(x,y)=6(4y-5)$ ta có biểu thức của vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số f(x,y) tại điểm (x,y)

$d^2f(x,y)=f''_{x^2}(x,y).dx^2+2f''_{xy}(x,y).dxdy+f''_{y^2}(x,y).dy^2=12(y-1)dx^2+2.12(x-2)dxdy+6(4y-5)dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là

$$\begin{pmatrix}A(x,y)&B(x,y)\\B(x,y)&C(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12(y-1)&12(x-2)\\12(x-2)&6(4y-5)\end{pmatrix}.$$

Ma trận $\begin{pmatrix}12(y-1)&12(x-2)\\12(x-2)&6(4y-5)\end{pmatrix}$ có các định thức chính

$$\begin{cases}A_1(x,y)=\det(12(y-1))=12(y-1)\\A_2(x,y)=\det\begin{pmatrix}12(y-1)&12(x-2)\\12(x-2)&6(4y-5)\end{pmatrix}=72\left[(y-1)(4y-5)-2(x-2)^2\right]\end{cases}$$

Xét tại mỗi điểm dừng:

- Tại điểm dừng $M_1(2,1/2)$: $\begin{cases} A_1(2,1/2) = -6 \\ A_2(2,1/2) = 108 \\ f(2,1/2) = 111/4 \end{cases}$

- Tại điểm dừng $M_2(2,2)$: $\begin{cases} A_1(2,2) = 12 \\ A_2(2,2) = 216 \\ f(2,2) = 21 \end{cases}$

- Tại điểm dừng $M_3(1,1)$: $\begin{cases} A_1(1,1) = 0 \\ A_2(1,1) = -144 \end{cases}$

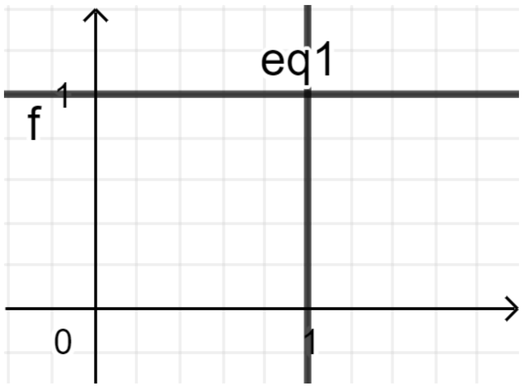
- Tại điểm dừng $M_4(3,1)$: $\begin{cases} A_1(3,1) = 0 \\ A_2(3,1) = -144 \end{cases}$

TT	Điểm dừng	A_1	A_2	Kết luận
1	$M_1(2,1/2)$	-6 < 0	108 > 0	Dạng toàn phương $d^2(2,1/2)$ là xác định âm nên hàm số f(x,y) đạt cực đại địa phương tại điểm này và $f_{cđ} = f(2,1/2) = 111/4$
2	$M_2(2,2)$	12 > 0	216 > 0	Dạng toàn phương $d^2(2,2)$ là xác định dương nên hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm này và $f_{ct} = f(2,2) = 21$
3	$M_3(1,1)$	0	-144 < 0	Dạng toàn phương $d^2(1,1)$ không xác định dấu nên hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này
4	$M_4(3,1)$	0	-144 < 0	Dạng toàn phương $d^2(3,1)$ không xác định dấu nên hàm số f(x,y) không có cực trị địa phương tại điểm này

Câu 5.

Nếu tính $I = \int_0^1 dy \int_0^1 \sin(mx^2)dx$ theo thứ tự đã cho này thì chúng ta phải tính tích phân $\int_0^1 \sin(mx^2)dx$ trước, tuy nhiên, như chúng ta đã biết, đối với tích phân $\int \sin(mx^2)dx$ không tồn tại nguyên hàm sơ cấp của hàm số $\sin(mx^2)$ dưới dấu tích phân, tức là không tìm được biểu thức của nguyên hàm biểu diễn qua các hàm sơ cấp đã biết, nên chúng ta đổi thứ tự tính để hy vọng có thể tính được nó.**(0,75đ)**

Chúng ta có $I = \int_0^1 dy \int_0^1 \sin(mx^2)dx = \iint_D \sin(mx^2)dxdy \Rightarrow D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ là hình chiếu của miền tính tích phân lên trục Ox. Do đó, đồ thị của miền D là



Bây giờ chúng ta chiếu miền tính tích phân lên trục Oy thì $D = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$, khi đó I trở thành

$I=\int_0^1 dx\int_0^1 \sin(mx^2)dy=\int_0^1\left[y\sin(mx^2)\Big|_{y=0}^{y=1}\right]dx=\int_0^1 \sin(mx^2)dx$, chúng ta gặp lại tích phân trên là tích phân không thể tìm được nguyên hàm sơ cấp.**(0,75đ)**

Như vậy, chúng ta không thể tìm được phương trình để xác định tham số m.**(0,5đ)**

***Cách khác*.** Theo định lý Fubini, chúng ta có

$I=\int_0^1 dy\int_0^1 \sin(mx^2)dx=\left(\int_0^1 dy\right)\left(\int_0^1 \sin(mx^2)dx\right)=\left(y\Big|_{y=0}^{y=1}\right)\left(\int_0^1 \sin(mx^2)dx\right)=\int_0^1 \sin(mx^2)dx$,**(1,0đ)**như chúng ta đã biết đối với tích phân $\int \sin(mx^2)dx$ không tồn tại nguyên hàm sơ cấp của hàm số $\sin(mx^2)$ dưới dấu tích phân, tức là không tìm được biểu thức của nguyên hàm biểu diễn qua các hàm sơ cấp đã biết,**(0,5đ)** nên chúng ta không thể tìm được phương trình để xác định tham số m.**(0,5đ)**