

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. Các khái niệm cơ bản

4.1.1. Một số bài toán đơn giản dẫn đến phương trình vi phân

Bài toán 1. Cho một vật thể có khối lượng m rơi tự do trong không khí vào lúc không có gió. Giả sử sức cản của không khí tỷ lệ với vận tốc rơi $v(t)$ của vật thể tại thời điểm t với hệ số tỷ lệ là $k > 0$. Tìm $v(t)$.

Với giả thiết của bài toán, khi vật rơi thì F là lực tổng hợp các lực tác dụng lên vật thể gồm có: Lực hút của trái đất mg (g là gia tốc rơi tự do) và lực cản của không khí $kv(t)$, hai lực này là ngược chiều nhau. Theo định luật 2 Newton chúng ta có $mw(t) = F$, trong đó $w(t)$ là gia tốc rơi của vật thể và $F = mg - kv(t)$. Từ đây, chúng ta nhận được phương trình $mw(t) = mg - kv(t)$ với $w(t) = v'(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, hay $mv'(t) = mg - kv(t)$, để xác định $v(t)$.

Bài toán 2. Tìm phương trình $y = f(x)$ của một đường cong phẳng, biết rằng tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường cong cắt trục tung tại một điểm khác có tung độ bằng hai lần tung độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ hay $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung ($x = 0$) có tung độ $y = y_0 + f'(x_0)(0 - x_0) = y_0 - f'(x_0)x_0$. Theo giả thiết thì $y = 2y_0$, suy ra $2y_0 = y_0 - f'(x_0)x_0$ hay $y_0 = -f'(x_0)x_0$. Vì (x_0, y_0) là một điểm bất kỳ nên không mất tính tổng quát chúng ta có thể viết $y = -f'(x)x = -xy'$ hay $y' = -\frac{y}{x}$ là phương trình để xác định phương trình $y = f(x)$ của đường cong.

Bài toán 3. Một mô hình về sự tăng trưởng của dân số dựa trên giả thiết rằng, dân số phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với quy mô dân số. Giả thiết này là hợp lý cho một quần thể vi khuẩn hay động vật trong điều kiện lý tưởng: môi trường không giới hạn, đầy đủ dưỡng chất, miễn dịch với bệnh tật, không gặp rủi ro do thảm họa môi trường, ... Bây giờ, chúng ta sẽ xác định và ký hiệu cho các đại lượng trong mô hình này.

- Ký hiệu t là thời gian và gọi là biến độc lập.

- Ký hiệu P là số cá thể lập nên quần thể dân số và gọi là biến phụ thuộc vào thời gian t .

Khi đó, tốc độ tăng trưởng của dân số là $\frac{dP}{dt}$ và theo giả thiết trên (tốc độ tăng trưởng của dân số

tỷ lệ thuận với quy mô dân số) chúng ta có phương trình để xác định đại lượng $P(t)$ là $\frac{dP}{dt} = kP$, trong đó k là hằng số tỷ lệ và $P(t) > 0$. Nếu $k > 0$ thì tốc độ tăng trưởng dân số tăng.

Bài toán 4. Xét chuyển động của một vật thể có khối lượng m được treo dưới một cái lò xo theo chiều thẳng đứng. Theo định luật Hooke, nếu lò xo bị kéo căng (hoặc bị nén lại) x đơn vị chiều dài từ vị trí cân bằng tự nhiên của nó thì lò xo sẽ tạo ra một lực F tỷ lệ với x : $F = -kx$, trong đó k là hằng số giãn/nén của lò xo. Nếu coi các tác động của môi trường bên ngoài (gió, nhiệt độ, mật độ không khí, ...) là không đáng kể thì theo Định luật 2 của Newton, phương trình chuyển động của vật thể là

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

4.1.2. Định nghĩa phương trình vi phân và nghiệm của nó

Khi nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên, kỹ thuật, kinh tế, ... không phải bao giờ cũng xác định được ngay quy luật liên hệ của biến độc lập với hàm số phải tìm, nhưng có thể xác định được mối liên hệ giữa hàm số phải tìm với (các) đạo hàm của nó, trong đó có thể không có hoặc có biến độc lập.

Phương trình vi phân là phương trình trong đó có chứa một hay nhiều thành phần đạo hàm của hàm số chưa biết nào đó. Nếu hàm số chưa biết là hàm số 1 biến thì gọi là phương trình vi phân thường, còn nếu hàm số chưa biết là hàm số n biến ($n > 1$) thì gọi là phương trình vi phân đạo hàm

riêng (sinh viên ngành Cơ học kỹ thuật được học). Trong nội dung chương này, chúng ta chỉ quan tâm đến phương trình vi phân thường và gọi ngắn gọn là phương trình vi phân.

Phương trình liên hệ giữa biến số độc lập x , hàm số $y = y(x)$ phải tìm và các đạo hàm $y', y'', \dots, y^{(n)}$ của nó, được gọi là phương trình vi phân.

Cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số $y = y(x)$ có trong phương trình vi phân, được gọi là cấp của phương trình vi phân.

Như vậy, trong trường hợp tổng quát nhất, phương trình vi phân cấp n có dạng

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ở đây F là hàm đã cho và có nhiều nhất $(n + 2)$ biến mà thông thường nó phải thỏa mãn một số điều kiện nhất định về tính liên tục và tính khả vi.

Hàm số $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

- (1) $y = y(x)$ có các đạo hàm $y', y'', \dots, y^{(n)}$ trong khoảng (a, b) nào đó;
- (2) khi thế $y = y(x)$ vào hàm số $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ thì $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \equiv 0$ với $\forall x \in (a, b)$.

Đồ thị của hàm số $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, được gọi là đường cong tích phân của phương trình đó.

Giải phương trình vi phân $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ là tìm tất cả các nghiệm $y = y(x)$ của nó. Quá trình tìm nghiệm của phương trình vi phân được gọi là tích phân phương trình vi phân.

Lưu ý. Trong các loại phương trình vi phân thường có một loại phương trình vi phân đặc biệt được gọi là *phương trình vi phân đối số lệch* (sinh viên ngành Hàng không vũ trụ được học). Phương trình vi phân đối số lệch xuất hiện khi thiết lập phương trình chuyển động của vật thể hoặc tàu vũ trụ có vận tốc rất lớn trên quãng đường di chuyển cũng rất lớn trong vũ trụ, đối với người quan sát (vật thể/tàu vũ trụ) hoặc người điều khiển (tàu vũ trụ) ngồi ở trái đất. Các phương trình vi phân này có dạng $F[t, y(t), y(t-\Delta), y'(t), y'(t-\Delta), y''(t), y''(t-\Delta)] = 0$, trong đó Δ là hằng số hoặc là hàm số giới nội của biến thời gian t . Trong nội dung chương này, chúng ta không đề cập đến việc giải phương trình vi phân dạng này.

4.2. Phương trình vi phân cấp 1

4.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là $F(x, y, y') = 0$.

Nếu giải được phương trình trên đối với y' thì phương trình vi phân cấp 1 có thể viết dưới dạng $y' = f(x, y)$ hay $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, trong đó $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, được gọi là phương trình vi phân cấp 1 giải được đối với đạo hàm.

Bài toán Cauchy. Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x)|_{x=x_0} = y_0$ hay $y(x_0) = y_0$, trong đó $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy). Giả sử hàm số $f(x, y)$ cùng với đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ xác định và liên tục trong miền D của mặt phẳng tọa độ Oxy, giả sử $(x_0, y_0) \in D$.

Khi đó, trong một lân cận nào đó của x_0 , tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình $y' = f(x, y)$ mà $y(x_0) = y_0$.

Về mặt hình học, định lý trên khẳng định rằng, với các giả thiết và điều kiện đã nêu, trong một lân cận nào đó của điểm $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbf{R}^2$ tồn tại một đường cong tích phân duy nhất của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ đi qua điểm (x_0, y_0) .

Về mặt toán học, định lý trên khẳng định sự tồn tại nghiệm của một lớp khá rộng các phương trình vi phân, tuy nhiên việc tìm được nghiệm dưới dạng một biểu thức giải tích (biểu diễn qua các hàm số sơ cấp đã biết) không phải đơn giản, thậm chí là không tìm được. Khi đó, chúng ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ biểu diễn qua các hàm số sơ cấp đã biết, hoặc giá trị bằng số của nghiệm gần đúng nhờ sức mạnh của công cụ tính toán hiện nay.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ là hàm số $y = \varphi(x,C)$, trong đó C là một hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1) Thỏa mãn phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ với $\forall C$;
- (2) Với $\forall (x_0, y_0)$ các giả thiết và điều kiện của định lý trên được thỏa mãn, có thể tìm được một giá trị $C = C_0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x)|_{x=x_0} = y_0$.

Về mặt hình học, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ được biểu diễn bởi một họ đường cong tích phân $y = \varphi(x, C)$ phụ thuộc vào tham số C .

Nghiệm riêng của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ là hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ nhận được bằng cách cho tham số C trong nghiệm tổng quát một giá trị xác định C_0 .

Lưu ý.

(1) Có khi chúng ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$ mà chỉ tìm được một hệ thức có dạng $\Phi(x,y,C) = 0$ xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Khi đó, hệ thức $\Phi(x,y,C) = 0$ được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân $y' = f(x,y)$. Trong trường hợp này, hệ thức $\Phi(x,y, C_0) = 0$ nhận được bằng cách cho tham số C trong tích phân tổng quát một giá trị xác định C_0 , được gọi là *tích phân riêng* của phương trình vi phân. Để đơn giản, chúng ta vẫn gọi tích phân tổng quát là *nghiệm tổng quát* và tích phân riêng là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân.

(2) Phương trình vi phân $y' = f(x,y)$ có thể có một số nghiệm không thuộc nghiệm tổng quát, khi đó, những nghiệm này được gọi là nghiệm kỳ dị. Trong nội dung chương này, chúng ta không xem xét các nghiệm kỳ dị.

Ví dụ **4.1.** Có thể dễ dàng kiểm tra được phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$ có nghiệm tổng quát là $y(x) = \sin(x + C)$ với C là hằng số tùy ý. Tuy nhiên, hàm số $y(x) = 1$ cũng là nghiệm của phương trình vi phân đang xét, nhưng nghiệm này không thể suy ra được từ nghiệm tổng quát tương ứng với một giá trị cụ thể của hằng số C . Như vậy, $y(x) = 1$ là nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$.

4.2.2. Phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp 1 đơn giản nhất

Nói chung, không có một phương pháp tổng quát nào để tìm nghiệm của phương trình vi phân $F(x,y,y') = 0$ cấp 1.

4.2.2.1. Phương trình vi phân có biến số phân ly

Phương trình vi phân $F(x,y,y') = 0$ cấp 1 được gọi là phương trình vi phân có biến số phân ly nếu nó có thể biến đổi về dạng $g(x)dx = h(y)dy$.

Phương pháp giải. Lấy tích phân hai vế của phương trình $g(x)dx = h(y)dy$ chúng ta được $\int g(x)dx = \int h(y)dy + C$ hay $G(x) = H(y) + C$, trong đó $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$, $H(y)$ là một nguyên hàm của hàm số $h(y)$, còn C là hằng số tùy ý.

Ví dụ **4.2.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = \frac{(x+1)y}{x(y-1)}$.

Bài giải.

$$y' = \frac{(x+1)y}{x(y-1)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)y}{x(y-1)} \Leftrightarrow (x+1)ydx = x(y-1)dy, \text{ nếu } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \text{ chúng ta chia cả hai vế}$$

của phương trình trên cho xy thì được $(1+1/x)dx = (1-1/y)dy$

$\Rightarrow \int (1+1/x)dx = \int (1-1/y)dy + C \Rightarrow x + \ln|x| = y - \ln|y| + C \Leftrightarrow x - y + \ln|xy| = C$ (C là hằng số tùy ý) là nghiệm tổng quát.

Ví dụ 4.3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0$.

Bài giải.

$$x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0 \Leftrightarrow x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

Chia cả hai vế của phương trình $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ cho $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C \Rightarrow \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2} = C$ (C là hằng số tùy ý) là nghiệm tổng quát.

Ví dụ 4.4. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $e^x dx - (1+e^x)ydy = 0$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 1$.

Bài giải.

Chia cả hai vế của phương trình vi phân trên cho $1+e^x \neq 0$, chúng ta được

$e^x dx - (1+e^x)ydy = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x}dx = ydy \Rightarrow \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int ydy + C \Rightarrow \ln(1+e^x) = \frac{y^2}{2} + C$ (C là hằng số tùy ý) là nghiệm tổng quát.

Thay điều kiện ban đầu $y(0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ vào nghiệm tổng quát, chúng ta được phương trình

để xác định C là $\ln 2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Thay giá trị C vừa xác định được vào nghiệm tổng quát, chúng ta nhận được nghiệm riêng

$$\ln(1+e^x) = \frac{y^2}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = 1 + 2\ln \frac{1+e^x}{2}.$$

Lưu ý. Phương trình vi phân dạng $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ sẽ giải được nếu $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$.

Phương pháp giải: Đổi biến $t = a_1x + b_1y$, phương trình $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ sẽ biến đổi được về phương trình vi phân có biến số phân ly.

Ví dụ 4.5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

Bài giải.

Phương trình vi phân đã cho tương đương với $y' = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$, vì $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ nên chúng ta đổi biến $t = x + y \Rightarrow dy = dt - dx \Rightarrow (x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0 \Leftrightarrow$

$$(t+2)dx + (2t-1)(dt-dx) = 0 \Leftrightarrow (3-t)dx + (2t-1)dt = 0$$

Nếu $t \neq 3$, chúng ta chia cả hai vế của phương trình $(3-t)dx + (2t-1)dt = 0$ cho $(t-3)$ thì được

$$dx + \frac{2t-1}{3-t} dt = 0 \Rightarrow \int dx + \int \frac{2t-1}{3-t} dt = -C \Leftrightarrow x - \int \left(2 + \frac{5}{t-3} \right) dt = -C \Leftrightarrow x - 2t - 5 \ln|t-3| = -C$$

(C là hằng số tùy ý).

Trở lại biến ban đầu, chúng ta nhận được nghiệm tổng quát $x + 2y + 5 \ln|x + y - 3| = C$ (C là hằng số tùy ý).

4.2.2.2. Phương trình vi phân thuần nhất

Hàm số $f(x,y)$ được gọi là hàm số thuần nhất bậc m nếu $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$ với $\lambda \in \mathbf{R}$.

Phương trình vi phân $F(x,y,y') = 0$ cấp 1 được gọi là phương trình vi phân thuần nhất nếu nó có thể biến đổi được về dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, trong đó các hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là các hàm số thuần nhất cùng bậc.

Phương pháp giải.

Giả sử các hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là các hàm số thuần nhất cùng bậc m, nếu coi x là λ thì chúng ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x,y) = P\left(x.1, x.\frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x,y) = Q\left(x.1, x.\frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} \equiv f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Như vậy, phương trình vi phân thuần nhất luôn biến đổi được về dạng $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{Đổi biến } t = t(x) = \frac{y}{x} = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx} \text{ và thay vào phương trình } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

chúng ta được $t + x \frac{dt}{dx} = f(t) \Leftrightarrow xdt = [f(t) - t]dx \Leftrightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$ với $f(t) - t \neq 0$ là phương trình vi phân có biến số phân ly.

Chú ý. (1) Phương trình vi phân thuần nhất còn được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

(2) Khi giải phương trình vi phân thuần nhất, không nhất thiết phải biến đổi phương trình này về dạng $\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$ mà ngay từ khi bắt đầu giải phương trình chúng ta đổi biến $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xt$ và biến đổi phương trình vi phân đã cho về dạng phương trình vi phân có biến số phân ly, sau khi tìm được nghiệm theo các biến t và x thì phải quay lại các biến ban đầu x và y.

Ví dụ 4.6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

Bài giải.

Trong phương trình $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$, cả hai hàm số $P(x,y) = x^2 + 2xy$, $Q(x,y) = xy$ đều là hàm số thuần nhất cùng bậc 2, nên chúng ta có thể đặt $y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$. Khi đó, phương trình vi phân đã cho trở thành $x^2(t+1)^2dx + x^3tdt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{tdt}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{tdt}{(t+1)^2} = C \Leftrightarrow$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^2} = C \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2} = C \Rightarrow \ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C \text{ (C là hằng số}$$

tùy ý) là nghiệm tổng quát

Thay $t = \frac{y}{x}$ vào nghiệm tổng quát, chúng ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình vi

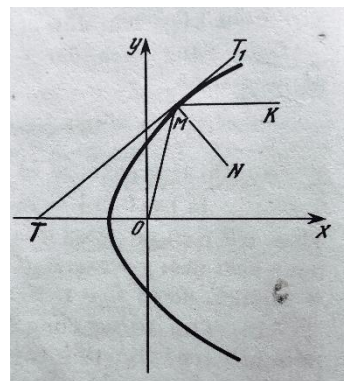
phân đã cho là $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$ (C là hằng số tùy ý).

Ví dụ 4.7. Tìm dạng của gương hội tụ được tất cả các tia sáng song song vào một điểm.

Bài giải.

Gương cần phải có dạng một mặt tròn xoay có trục song song với phương của các tia tới. Lấy trục này làm trục Ox và tìm phương trình đường cong $y = y(x)$ mà khi quay nó quanh trục Ox tạo thành mặt cần tìm.

Lấy gốc O hệ tọa độ Oxy tại điểm mà tại đây các tia sáng hội tụ vào. Ký hiệu tia tới là KM , tia phản xạ là MO . Kẻ tiếp tuyến TT_1 và pháp tuyến MN tại điểm M của đường cong $y = y(x)$ phải tìm. Khi đó, dễ thấy rằng ΔMOT là tam giác cân có đỉnh tại O nên $OM = OT$, với $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$; còn OT được xác định theo phương trình đường tiếp tuyến với đường cong $y = y(x)$ tại điểm $M(x_M, y_M)$, cụ thể như sau:



Chúng ta có phương trình đường tiếp tuyến với đường cong $y = y(x)$ tại điểm $M(x_M, y_M)$ là $y - y_M = y'(x_M)(x - x_M)$. Đường tiếp tuyến này cắt trục Ox tại điểm $T(x_T, 0)$ nên $0 - y_M = y'(x_M)(x_T - x_M)$, suy ra $OT = |x_T| = -x_T = \frac{y_M}{y'(x_M)} - x_M$.

Từ $OM = OT \Rightarrow \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \frac{y_M}{y'(x_M)} - x_M$, vì M có tọa độ (x_M, y_M) là một điểm bất kỳ trên đường cong nên, không mất tính tổng quát, có thể coi điểm M có tọa độ (x, y) , khi đó chúng ta có phương trình vi phân $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{y'} - x$ để tìm $y = y(x)$.

Chúng ta để ý rằng, $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = x'$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{y'} - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x'y - x \Leftrightarrow x' = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Thay vì tìm $y = y(x)$ từ phương trình $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{y'} - x$ thì chúng ta tìm $x = x(y)$ từ phương

trình $x' = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$ là phương trình vi phân thuần nhất.

Chúng ta có $x' = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \Leftrightarrow dx = \left[\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \right] dy$, nên để tìm nghiệm $x(y)$, chúng ta

đổi biến $t = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = ty \Rightarrow dx = tdy + ydt$

$$\Rightarrow dx = \left[\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \right] dy \Leftrightarrow tdy + ydt = (t + \sqrt{t^2 + 1})dy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad (y \neq 0).$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} + C \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C \quad (C \text{ là hằng số tùy ý})$$

$$\text{hay } \ln|y| = \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + \ln e^C \Leftrightarrow \ln e^C |t + \sqrt{t^2 + 1}| \Rightarrow y = e^C (t + \sqrt{t^2 + 1})$$

Để trở về biến ban đầu, thay $t = \frac{x}{y}$ vào biểu thức $y = e^C(t + \sqrt{t^2 + 1})$ thì chúng ta nhận được

$$y^2 = e^C(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \Leftrightarrow \frac{y^2}{e^C} = x + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{e^C} - x = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{e^C} - x\right)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^4}{e^{2C}} - \frac{2xy^2}{e^C} - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 \left(\frac{y^2}{e^{2C}} - \frac{2x}{e^C} - 1\right) = 0, \text{ vì } y \neq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{e^{2C}} - \frac{2x}{e^C} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{e^C} - e^C\right)$$

Như vậy, đường cong phải tìm là một đường parabol, còn gương có dạng parabolito.

Ví dụ 4.8. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ với điều kiện ban đầu $y(1)$

$= \pi/2$.

Bài giải.

Phương trình vi phân $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ với $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ nên là phương trình vi phân thuần nhất.

Đặt $y = tx, \Rightarrow dy = xdt + tdx$. Khi đó, phương trình vi phân đã cho trở thành $xdt = \sin tdx \Rightarrow \frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \Leftrightarrow \ln\left|\tan \frac{t}{2}\right| = \ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow \ln\left|\tan \frac{t}{2}\right| = \ln|Cx| \Rightarrow t = 2\arctan(Cx)$ với hằng số $C \neq 0$. Trở về biến x và y ban đầu chúng ta được nghiệm tổng quát $y = 2x\arctan(Cx)$.

Thay điều kiện ban đầu $y(1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pi/2 \end{cases}$ vào nghiệm tổng quát $y = 2x\arctan(Cx)$ chúng ta được $2\arctan C = \pi/2 \Leftrightarrow \arctan C = \pi/4 \Rightarrow C = 1$, do đó nghiệm riêng phải tìm là $y = 2x\arctan x$.

Lưu ý. Phương trình vi phân dạng $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ sẽ giải được nếu $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Phương pháp giải: Đổi biến $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ trong đó (α, β) nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, phương trình $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ sẽ biến đổi được về phương trình vi phân thuần nhất.

Ví dụ 4.9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.

Phương trình vi phân đã cho tương đương với $y' = -\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$, vì $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ nên đổi

biến $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ với $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$ và phương trình vi phân đã cho trở thành $(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0$.

Dễ thấy rằng, $(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0$ là phương trình vi phân thuần nhất nên chúng ta có thể đổi biến $v = tu \Rightarrow dv = tdu + udt$ và phương trình vi phân đang xét được đưa về dạng phương trình vi phân có biến số phân ly

$$\frac{du}{u} + \frac{1}{2} \frac{(2t + 1)dt}{t^2 + t + 1} = 0 \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{(2t + 1)dt}{t^2 + t + 1} = K \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + t + 1)}{t^2 + t + 1} = K$$

$$\Rightarrow \ln|u| + \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) = K \Leftrightarrow \ln(|u|\sqrt{t^2 + t + 1}) = K \Leftrightarrow |u|\sqrt{t^2 + t + 1} = e^K \Leftrightarrow u^2(t^2 + t + 1) = e^{2K}$$

(K là hằng số tùy ý).

Quay lại các biến u và v chúng ta được $u^2 + uv + v^2 = e^{2K}$ và tiếp tục quay lại các biến x và y ban đầu, chúng ta được nghiệm tổng quát $x^2 + y^2 + xy + x - y + 1 = e^{2K}$ hay $x^2 + y^2 + xy + x - y = C$ ($C = e^{2K} - 1$).

4.2.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân $y' + p(x)y = q(x)$ trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số liên tục với $\forall x \in (a, b)$, được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Nếu $q(x) \equiv 0$ với $\forall x \in (a, b)$ thì phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 nói trên trở thành $y' + p(x)y = 0$ được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất, còn nếu $q(x) \neq 0$ thì phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 nói trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

Dễ thấy rằng, $y = 0$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ và gọi nghiệm này là nghiệm tầm thường.

Định lý. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $[y' + p(x)y = q(x)]$ bằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng $[y' + p(x)y = 0]$, cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $[y' + p(x)y = q(x)]$.

Phương pháp giải.

Phương pháp Bernoulli

Nhà toán học Bernoulli tìm nghiệm của phương trình $y' + p(x)y = q(x)$ dưới dạng tích của hai hàm số $u(x)v(x)$ tức là $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Leftrightarrow$

$$u[v' + p(x)v] + u'v = q(x).$$

Chọn hàm $v(x)$ sao cho $v' + p(x)v = 0$, phương trình này là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất đối với hàm $v(x)$.

$$\text{Giả sử } v(x) \neq 0 \Rightarrow v' + p(x)v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx + C_1 \text{ (} C_1 \text{ là hằng số tùy ý)}$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C_2| \Rightarrow |v(x)| = e^{-\int p(x)dx + \ln|C_2|} = e^{\ln|C_2|} e^{-\int p(x)dx} = |C_2| e^{-\int p(x)dx} \text{ (} C_2 = e^{C_1} \neq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow v(x) = C_2 e^{-\int p(x)dx} \text{ (} C_2 \neq 0 \text{)}.$$

Mặt khác, $v(x) = 0$ là nghiệm tầm thường của phương trình $v' + p(x)v = 0$, nghiệm này ứng với hằng số $C_2 = 0$ của biểu thức $v(x) = C_2 e^{-\int p(x)dx}$. Do đó $v(x) = C_2 e^{-\int p(x)dx}$ (C_2 là hằng số tùy ý) là nghiệm tổng quát của phương trình $v' + p(x)v = 0$.

Chọn $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ (ứng với $C_2 = 1$) thay vào phương trình $u[v' + p(x)v] + u'v = q(x)$ chúng ta được $u \cdot 0 + u'v = q(x) \Leftrightarrow u'v = q(x) \Leftrightarrow du = \frac{q(x)}{v(x)} dx \Rightarrow \int du = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx \Rightarrow u = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$.

$$\Rightarrow y(x) = u(x)v(x) = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} \text{ với } C \text{ là hằng số tùy ý, là nghiệm tổng quát}$$

của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$.

Như vậy, để tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất, chúng ta chỉ việc thay các hàm số $p(x), q(x)$ vào công thức nghiệm $y(x) = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$ và tính các tích phân trong đó; hoặc có thể tìm nghiệm $y(x) = u(x)v(x)$ như trên.

Ví dụ **4.10**. Giải phương trình vi phân $y' - y = \sin x$.

Thay $p(x) = -1$ và $q(x) = \sin x$ vào biểu thức nghiệm $y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$ chúng ta được $y(x) = \left(\int \sin x e^{-\int dx} dx + C \right) e^{\int dx} = \left(\int \sin x e^{-x} dx + C \right) e^x$, tính tích phân $\int \sin x e^{-x} dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần $\int \sin x e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x)$ và thay vào biểu thức của $y(x)$ chúng ta được $y(x) = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Hoặc tìm $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' - uv = \sin x \Leftrightarrow u(v' - v) + u'v = \sin x$.

Tìm nghiệm của phương trình $v' - v = 0 \Leftrightarrow dv - vdx = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow v = e^x$;

Thay $v(x) = e^x$ vào phương trình $u(v' - v) + u'v = \sin x \Rightarrow u'e^x = \sin x \Leftrightarrow du = e^{-x}\sin x dx \Rightarrow u = \int e^{-x}\sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C$ với C là hằng số tùy ý.

Do đó $y(x) = u(x)v(x) = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C \right] e^x = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số Lagrange)

Để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$, đầu tiên chúng ta giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng $y' + p(x)y = 0$ tương tự như trên thì tìm được nghiệm tổng quát của phương trình $y' + p(x)y = 0$ là $y = C_2 e^{-\int p(x)dx}$ (C_2 là hằng số tùy ý).

Bây giờ, xem C_2 là hàm số của x , tức là $C_2 = C_2(x)$ và chúng ta đi tìm $C_2(x)$ để $y(x) = C_2(x)e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$.

Muốn vậy, chúng ta thay $y(x) = C_2(x)e^{-\int p(x)dx}$ vào phương trình $y' + p(x)y = q(x)$ thì được

$$C_2'(x)e^{-\int p(x)dx} - C_2(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C_2(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Leftrightarrow \frac{dC_2}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow C_2(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \quad (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

$\Rightarrow y(x) = C_2(x)e^{-\int p(x)dx} = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$ (C là hằng số tùy ý) là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$.

Như vậy, để tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất, chúng ta chỉ việc thay các hàm số $p(x)$, $q(x)$ vào công thức nghiệm $y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$ và tính các tích phân trong đó; hoặc có thể tìm nghiệm $y(x)$ như trên.

Ví dụ **4.11**. Giải phương trình vi phân ở Ví dụ 4.10. bằng phương pháp Lagrange

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng là $y' - y = 0$ có nghiệm là $y(x) = Le^x$ (L là hằng số tùy ý).

Bây giờ, trong nghiệm $y(x) = Le^x$ chúng ta xem $L = L(x) \Rightarrow y(x) = L(x)e^x \Rightarrow y' = L'(x)e^x + L(x)e^x$ và thay vào phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất $y' - y = \sin x$ thì được

$$L'(x)e^x + L(x)e^x - L(x)e^x = \sin x \Leftrightarrow \frac{dL}{dx} = e^{-x} \sin x \Leftrightarrow dL = e^{-x} \sin x dx \Rightarrow \int dL = \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow L(x) = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C \quad (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

$$\Rightarrow y(x) = L(x)e^x = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C \right] e^x = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Ví dụ **4.12**. Tìm nghiệm riêng của phương trình $(x^2 + 1)y' + xy = 1$ với điều kiện $y(0) = 2$.

Bài giải.

Chúng ta thấy $(x^2 + 1)y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{x^2 + 1}$ và nếu đặt $\begin{cases} p(x) = x/(x^2 + 1) \\ q(x) = 1/(x^2 + 1) \end{cases}$ thì phương

trình vi phân đã cho trở thành $y' + p(x)y = q(x)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Thay $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $q(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ vào biểu thức nghiệm $y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\int \frac{e^{\int \frac{x dx}{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} dx + C \right) e^{-\int \frac{x dx}{x^2 + 1}} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ là nghiệm tổng quát của phương trình.}$$

Thay điều kiện $y(0) = 2$ vào nghiệm tổng quát $y(0) = \frac{\ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}) + C}{\sqrt{0^2 + 1}} = 2 \Rightarrow C = 2$.

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ là nghiệm riêng của phương trình.}$$

Lưu ý. Phương trình vi phân $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ trong đó α là một số thực bất kỳ (được gọi là phương trình Bernoulli) luôn luôn giải được.

Trường hợp $\alpha = 0$: Phương trình trở thành $y' + p(x)y = q(x)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất đã biết phương pháp giải ở trên.

Trường hợp $\alpha = 1$: Phương trình trở thành $y' + p(x)y = q(x)y \Leftrightarrow y' + [p(x) - q(x)]y = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất đã biết phương pháp giải ở trên.

Trường hợp $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$: Với $y \neq 0$ nhân hai vế của phương trình Bernoulli với $y^{-\alpha}$ (trùng với việc chia hai vế của phương trình Bernoulli cho y^α) chúng ta được $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$. Đổi biến $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đã biết phương pháp giải ở trên.

Chú ý. Để giải phương trình Bernoulli chúng ta có 3 cách:

- Cách 1. Biến đổi phương trình Bernoulli về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 rồi sử dụng công thức nghiệm đã biết đối với biến mới, sau đó quay lại biến cũ.

- Cách 2. Sử dụng ngay phương pháp Bernoulli đối với phương trình đã cho mà không cần biến đổi nó về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

- Cách 3. Sử dụng ngay phương pháp Lagrange đối với phương trình đã cho mà không cần biến đổi nó về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ví dụ **4.13**. Giải phương trình vi phân $(x+1)y' + 2y + (x+1)^4 y^2 = 0$

Bài giải.

$$(x+1)y' + 2y + (x+1)^4 y^2 = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x+1}y = -(x+1)^3 y^2 \text{ với } (x+1 \neq 0)$$

$$y' + \frac{2}{x+1}y = -(x+1)^3 y^2 \text{ là phương trình vi phân Bernoulli với } \begin{cases} p(x) = 2/(x+1) \\ q(x) = -(x+1)^3 \end{cases} \text{ và } \alpha = 2.$$

Bây giờ chúng ta đổi biến $z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = 1/y$, phương trình $y' + \frac{2}{x+1}y = -(x+1)^3 y^2$ trở thành $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ hay $z' - p(x)z = -q(x) \Leftrightarrow z' + p_1(x)z = q_1(x)$ là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với hàm số z với $\begin{cases} p_1(x) = -p(x) = -2/(x+1) \\ q_1(x) = -q(x) = (x+1)^3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Nghiệm của phương trình } z' + p_1(x)z &= q_1(x) \text{ là } z(x) = \left[\int q_1(x) e^{\int p_1(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p_1(x) dx} \\ \Rightarrow z(x) &= \left[\int (x+1)^3 e^{\int \frac{-2}{x+1} dx} dx + C \right] e^{-\int \frac{-2}{x+1} dx} = \left[\int (x+1)^3 e^{-2 \int \frac{dx}{x+1}} dx + C \right] e^{2 \int \frac{dx}{x+1}} = \\ &= \left[\int (x+1)^3 e^{-2 \ln|x+1|} dx + C \right] e^{2 \ln|x+1|} = \left[\int \frac{(x+1)^3}{e^{\ln|x+1|^2}} dx + C \right] e^{\ln|x+1|^2} = \left[\int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} dx + C \right] (x+1)^2 = \\ &= \left[\int (x+1) dx + C \right] (x+1)^2 = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right] (x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2 \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2} \quad (C \text{ là hằng số tùy ý}). \end{aligned}$$

4.2.2.4. Phương trình vi phân toàn phần cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần cấp 1 là phương trình vi phân có dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, trong đó $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là các hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trong một miền đơn liên D và thỏa mãn điều kiện $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.

Theo định lý ở Chương 3 thì biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số $u(x,y)$ nào đấy xác định trên miền D . Do đó phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ trở thành $du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$ với C là hằng số tùy ý.

Để tìm hàm số $u(x,y)$ chúng ta có thể thực hiện bằng một trong hai cách.

Cách 1. Sử dụng công thức $u(x,y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C$ hoặc

$u(x,y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C$, trong đó x_0, y_0 là hai số được chọn tùy ý sao cho việc tính toán các biểu thức liên quan là đơn giản nhất, còn C là hằng số tùy ý.

Cách 2.

$$\text{Chúng ta có } du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy \equiv P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow \begin{cases} u'_x(x,y) = P(x,y) \\ u'_y(x,y) = Q(x,y) \end{cases}$$

- hoặc là, đầu tiên từ $u'_x(x,y) = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int u'_x(x,y) dx + \varphi(y) = \int P(x,y) dx + \varphi(y)$ với $\varphi(y)$ là hàm số khả vi tùy ý; tiếp theo, đạo hàm riêng hàm số $u(x,y)$ vừa tìm được theo y chúng ta được $u'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y) dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} \equiv Q(x,y) \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y) dx$, từ đây chúng ta sẽ tìm được hàm số $\varphi(y)$ và cuối cùng chúng ta được $u(x,y) = \int P(x,y) dx + \varphi(y)$;

- hoặc là, đầu tiên từ $u'_y(x,y) = Q(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int u'_y(x,y) dy + \psi(x) = \int Q(x,y) dy + \psi(x)$ với $\psi(x)$ là hàm số khả vi tùy ý; tiếp theo, đạo hàm riêng hàm số $u(x,y)$ vừa tìm được theo x chúng ta được

$u'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int Q(x, y)dy + \frac{d\psi(x)}{dx} \equiv P(x, y) \Rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} = P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int Q(x, y)dy$, từ đây chúng ta sẽ tìm được hàm số $\psi(x)$ và cuối cùng chúng ta được $u(x, y) = \int Q(x, y)dy + \psi(x)$.

Ví dụ **4.14**. Giải phương trình $[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + (e^x + xe^y)dy = 0$.

Bài giải. $[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + (e^x + xe^y)dy = 0 \Leftrightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

với $\begin{cases} P(x, y) = (1 + x + y)e^x + e^y \\ Q(x, y) = e^x + xe^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x, y) = e^x + e^y \\ Q'_x(x, y) = e^x + e^y \end{cases} \Rightarrow P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ nên biểu thức $[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + (e^x + xe^y)dy$ là vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $u(x, y)$ nào đó.

Chúng ta có $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt + C$, khi chọn $x_0 = 0$ và $y_0 = 0$ chúng ta được $P(t, 0) = (1 + t + 0)e^t + e^0 = (1 + t)e^t + 1$ và $Q(x, t) = e^x + xe^t$
 $\Rightarrow u(x, y) = \int_0^x [(1 + t)e^t + 1]dt + \int_0^y (e^x + xe^t)dt + C = (x + xe^x) + (ye^x + xe^y - x) + C =$
 $(x + y)e^x + xe^y + C$ (C là hằng số tùy ý).

Lưu ý. Phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ trong trường hợp $P'_y(x, y) \neq Q'_x(x, y)$ có thể đưa về phương trình vi phân toàn phần cấp 1 nếu tìm được hàm số $\alpha(x, y) \neq 0$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của nó sao cho biểu thức $\alpha(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy]$ là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số $u(x, y)$ nào đó. Khi đó, hàm số $\alpha(x, y)$ được gọi là thừa số tích phân của phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Việc tìm thừa số tích phân $\alpha(x, y)$ không phải là bài toán dễ. Có hai trường hợp đơn giản mà chúng ta có thể tìm được hàm số $\alpha(x, y)$, cụ thể như sau:

- Nếu $\alpha(x, y)$ chỉ phụ thuộc x , tức là $\alpha(x, y) = \alpha(x)$ thì $\alpha(x)$ được xác định từ phương trình $\frac{d \ln \alpha(x)}{dx} = \frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)}$ với vế phải chỉ phụ thuộc vào x (hoặc không phụ thuộc vào y).

- Nếu $\alpha(x, y)$ chỉ phụ thuộc y , tức là $\alpha(x, y) = \alpha(y)$ thì $\alpha(y)$ được xác định từ phương trình $\frac{d \ln \alpha(y)}{dy} = \frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{-P(x, y)}$ với vế phải chỉ phụ thuộc vào y (hoặc không phụ thuộc vào x).

Ví dụ **4.15**. Giải phương trình $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$.

Bài giải.

Chúng ta có $P(x, y) = x^2 - \sin^2 y$ và $Q(x, y) = x \sin 2y \Rightarrow P'_y(x, y) \neq Q'_x(x, y)$ nên phương trình vi phân trên chưa phải là phương trình vi phân toàn phần cấp 1. Tuy nhiên, chúng ta thấy $\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{2}{x}$ chỉ phụ thuộc vào x nên có thể tìm thừa số tích phân $\alpha(x)$ từ phương trình

$$\frac{d \ln \alpha(x)}{dx} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{C}{x^2}, \text{ không mất tính tổng quát ta có thể chọn } \alpha(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân thừa số tích phân $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ với cả hai vế của phương trình $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$

chúng ta được $\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$ và có thể dễ dàng kiểm tra được phương trình này là phương trình vi phân toàn phần cấp 1.

Tương tự như Ví dụ 4.14. chúng ta tìm được $u(x, y) = x + \frac{\sin^2 y}{x} + C$

4.3. Giới thiệu phương trình vi phân cấp cao và hệ phương trình vi phân

Như chúng ta đã biết, phương trình vi phân $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ được gọi là phương trình vi phân cấp n . Nghiệm của phương trình này là mọi hàm số $y = \varphi(x)$ khả vi n lần và làm cho phương trình đã cho trở thành đồng nhất thức, tức là $F[x, \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0$.

Bài toán Cauchy đối với phương trình này là tìm nghiệm của nó sao cho khi $x = x_0$ thì $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$, trong đó $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ là những số mà ta gọi là điều kiện ban đầu.

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n đã cho nếu chọn tương ứng được các hằng số tùy ý C_1, C_2, \dots, C_n để hàm số này trở thành nghiệm của bài toán Cauchy bất kỳ đã đặt ra đối với phương trình đã cho.

Mọi nghiệm nhận được nghiệm tổng quát với các giá trị cụ thể của các hằng số C_1, C_2, \dots, C_n (nói riêng, mọi nghiệm của bài toán Cauchy) được gọi là nghiệm riêng của phương trình này.

$$\text{Hệ phương trình vi phân} \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \text{ trong đó } y_1, y_2, \dots, y_n \text{ là các hàm số chưa}$$

biết của biến số độc lập x , được gọi là hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1. Nếu vế phải của hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 là các hàm số tuyến tính đối với y_1, y_2, \dots, y_n thì khi đó, hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 được gọi là hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 tuyến tính.

Mọi phương trình vi phân cấp n dạng $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(n-1)})$ đều có thể đưa về một hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 bằng cách đặt $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n$ ta được

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Ngược lại, một hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 có thể đưa được về một phương trình vi phân cấp cao đối với một hàm số chưa biết bằng cách khử các hàm số chưa biết còn lại từ những phương trình của hệ. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, rồi tìm các hàm số chưa biết còn lại. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 như vậy, được gọi là phương pháp khử.

Trong một số trường hợp, bằng cách tổ hợp các phương trình của hệ, sau hữu hạn phép biến đổi không phức tạp, ta nhận được các phương trình dễ tích phân cho phép tìm nghiệm của hệ. Phương pháp này được gọi là phương pháp tổ hợp tích phân.

Nói chung, chỉ có thể giải phương trình vi phân cấp n (hữu hạn) trong một số trường hợp riêng nào đó.

(1) Phương trình dạng $y^{(n)} = f(x)$. Nghiệm của phương trình này tìm được bằng tích phân bội n lớp, cụ thể là

$$\begin{aligned} y^{(n)} = f(x) &\Leftrightarrow \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dy^{(n-1)} = f(x)dx \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1, \\ \Rightarrow y^{(n-2)} &= \int [f_1(x) + C_1]dx = f_2(x) + C_1x + C_2, \dots \\ \Rightarrow y &= f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n, \text{ trong đó } f_n(x) = \underbrace{\int \dots \int}_n f(x)dx \end{aligned}$$

Bởi vì $\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!}, \dots$ là các đại lượng không đổi nên ta có thể viết nghiệm tổng quát dưới

$$\text{dạng } y(x) = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n = f_n(x) + \sum_{k=1}^n C_k x^{n-k}.$$

(2) Phương trình vi phân không chứa hàm cần tìm dạng $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$. Có thể hạ cấp của phương trình này bằng cách lấy đạo hàm cấp thấp nhất trong phương trình đã cho làm hàm số ẩn mới, tức là đặt $y^{(k)} = z$. Khi đó, phương trình trên trở thành $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$, tức là cấp của phương trình được hạ xuống k đơn vị.

(3) Phương trình vi phân không chứa biến độc lập dạng $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Có thể hạ cấp của phương trình này bằng cách đặt $y' = z$ lấy y làm đối số. Khi đó, $y'', y^{(3)}, \dots$ được biểu diễn qua z và các đạo hàm của z theo y bằng các công thức $y'' = z \frac{dz}{dy}$, $y^{(3)} = z \left[z \frac{dz}{dy} + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right]$, ... (chúng được tính theo quy tắc đạo hàm hàm hợp), đồng thời cấp của phương trình được hạ xuống 1 đơn vị.

(4) Phương trình vi phân dạng $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ thuần nhất đối với hàm chưa biết và các đạo hàm của nó $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Phương trình dạng này chỉ cho phép hạ cấp một đơn vị bằng phép đổi biến $z = y'/y$.

4.3.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao thuần nhất và không thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình vi phân có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \text{ trong đó các hàm số } a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x) \text{ là các hàm số đã cho và liên tục với } \forall x \in (a, b).$$

Nếu $f(x) \equiv 0$ với $\forall x \in (a, b)$ thì phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) nói trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) thuần nhất, còn nếu $f(x) \neq 0$ thì phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) nói trên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) không thuần nhất.

Nếu tất cả các hàm số $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ đều là hằng số, tức là $a_i(x) = \alpha_i$ với $\forall i (1 \leq i \leq n)$ thì phương trình $y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \dots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = f(x)$ được gọi là phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) có hệ số hằng số.

Nếu biết một nghiệm riêng y_1 của phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) thuần nhất tương ứng thì bằng phép đổi biến $y = y_1 \int z dx$ ta có thể hạ cấp của phương trình vi phân tuyến tính (cấp n) không thuần nhất xuống 1 đơn vị và phương trình vi phân nhận được đối với biến mới z là phương trình vi phân tuyến tính (cấp n-1) không thuần nhất.

4.3.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 có dạng
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$
 trong đó các

hệ số a_{ij} ($1 \leq j, j \leq n$) là các hằng số, được gọi là hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số.

Có thể viết hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số dưới dạng ma trận

$$\frac{dY}{dx} = AY \text{ với } \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}^t, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ và } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Có thể giải hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số mà không cần đưa nó về phương trình vi phân cấp cao.

Bài tập

4.1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân

- | | |
|--|---------------------------------------|
| (a) $x(1 + y^2)^2 dx + y(1 + x^2)^2 dy = 0$ | (b) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$ |
| (c) $y' \cos 2y - \sin y = 0$ | (d) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$ |
| (e) $y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$ | (f) $y' = \cos(x - y)$ |
| (g) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$ | (h) $y' = 1 + 1/(x - y)$ |

4.2. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân

- (a) $x\sqrt{1 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$ với $y(0) = 1$
 (b) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$ với $y(0) = 0$
 (c) $\sin x dy - y \ln y dx = 0$ với $y(\pi/2) = e$
 (d) $(x^2 + 1)y' = y^2 + 4$ với $y(1) = 2$

4.3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân

- | | |
|---|---|
| (a) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$ | (b) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ |
| (c) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$ | (d) $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$ |
| (e) $y' = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$ | (f) $\frac{y'}{2} = \left(\frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2$ |
| (g) $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$ | |

4.4. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

- | | |
|--|---|
| (a) $2x(x - 1)y' + (2x - 1)y + 1 = 0$ | (b) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$ |
| (c) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ | (d) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ |
| (e) $2y dx + (y^2 - 6x)dy = 0$ | (f) $xy' - y = x^2 \arctan x$ |
| (g) $y' - 2y/(x + 1) = (x + 1)^3$ với $y(0) = 1/2$ | (h) $(1 + x^2)y' + xy = 1$ với $y(0) = 0$ |

4.5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

- | | |
|---|--|
| (a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ | (b) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$ |
|---|--|

$$(c) \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0 \quad (d) \frac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2} = 0$$

$$(e) \left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0$$

$$(f) 3x^2(1 + \ln y)dx - (2y - x^3/y)dy = 0$$

4.6. Giải các phương trình vi phân sau đây, bằng cách tìm thừa số tích phân

$$(a) (2xy + x^2y + y^3/3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0 \quad (b) y(1 + xy)dx - xdy = 0$$

$$(c) (x^2y^2 + y)dx + (y^2 - x)dy = 0 \quad (d) (x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$$

$$(e) (2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

4.7. Giải các phương trình vi phân Bernoulli

$$(a) y' + y = 2y^2 \quad (b) y' + xy = x^3y^3 \quad (c) xy' + y = y^2 \ln x$$

$$(d) y' - 4y/x = x\sqrt{y} \quad (e) y' - y/2x = 5x^2y^5 \quad (f) y' + y/x = 2x^3y^4$$

$$(g) y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}$$