Đề thi giữa kỳ học phần MAT1042

Câu 1. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^3}{\ln(1+x^2+y^2)} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số f(x,y) tại điểm (0,0).

Câu 2. Cho hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^m y(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$ với x > 0, m > 0. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ khi $\begin{cases}m>1\\ m\le 1\end{cases}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2}$. Chứng minh rằng, các hàm số $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ không liên tục tại điểm (0,0).

Câu 4. Xác định cực trị của hàm số $z=f(x,y)=xy+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}$ trên miền x > 0, y > 0.

Câu 5. Đổi thứ tự tính tích phân để tính $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^{2-x}\cos\left(2y-\dfrac{y^2}{2}\right)dy$.

Đáp án và thang điểm

Câu 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^3}{\ln(1+x^2+y^2)} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.**(0,25đ)**

Chúng ta cần tính $df(0,0)=f'_x(0,0)dx+f'_y(0,0)dy$.**(0,25đ)**

Bây giờ, chúng ta tính $f'_x(0,0)$ và $f'_y(0,0)$ bằng định nghĩa

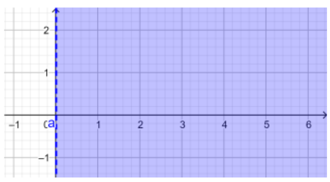
$$+\ f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(0+\Delta x).0+0^3}{\ln[1+(0+\Delta x)^2+0^2]}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\ \textbf{(0,5đ)}$$

$$+\ f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0.(0+\Delta y)+(0+\Delta y)^3}{\ln[1+0^2+(0+\Delta y)^2]}-0}{\Delta y}=\textbf{(0,25đ)}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln[1+(\Delta y)^2]}{(\Delta y)^2}}=\frac{1}{\lim\limits_{(\Delta y)^2\to 0}\dfrac{\ln[1+(\Delta y)^2]}{(\Delta y)^2}}=\frac{1}{1}=1\ \textbf{(0,5đ)}$$

$\Rightarrow df(0,0)=f'_x(0,0)dx+f'_y(0,0)dy=0.dx+1dy=dy$.**(0,25đ)**

Câu 2. Theo yêu cầu của đầu bài thì tập xác định của hàm số f(x,y) là D(f) = {(x,y)∈R^2|x > 0}, là nửa mặt phẳng bên phải trục tung Oy, không kể trục tung Oy.**(0,25đ)**



Biến đổi biểu thức của hàm số f(x,y)

$$f(x,y)=\frac{x^m y(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}=\frac{x^m y(x^2+y^2)}{2\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\frac{2x^m y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}\ \textbf{(0,25đ)}$$

Ký hiệu $\begin{cases} g(x,y)=\dfrac{2x^m y}{x^2+y^2} \\ h(x,y)=\dfrac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}} \end{cases} \Rightarrow f(x,y)=g(x,y)h(x,y)$

Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} h(x,y)$: Đổi biến $\dfrac{x^2+y^2}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} h(x,y)=\dfrac{t^2}{\sin^2 t} \\ (x,y)\to(0^+,0) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2}\to 0 \Leftrightarrow t\to 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} h(x,y)=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sin^2 t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}=\frac{1}{\left(\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}=\frac{1}{1^2}=1\,\textbf{(0,25đ)}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} h(x,y)=\left[\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)\right].1=\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)\,\textbf{(0,25đ)}$$

nên bây giờ chỉ cần tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$.

- Trường hợp m > 1:

Chúng ta có $0\le|g(x,y)|=\left|\dfrac{2x^m y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{2|x^m y|}{2|xy|}$ (do BĐT Cauchy $x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$)

$=|x^{m-1}|\to 0$ khi $x\to0^+$ (do $m>1\Leftrightarrow m-1>0$).

Theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)=0\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$.**(0,5đ)**

2) Trường hợp $0<m\le1$:

Cho (x,y) → (0^+,0) theo đường thẳng/cong $y = kx^m$ với tham số $k\neq 0$, khi đó $g(x,y)=g(x,kx^m)=\dfrac{2x^m(kx^m)}{x^2+(kx^m)^2}=\dfrac{2kx^{2m}}{x^2+k^2x^{2m}}=\dfrac{2k}{x^{2(1-m)}+k^2}$.

+ Khi m = 1 thì $\lim\limits_{x\to0^+} x^{2(1-m)}=\lim\limits_{x\to0^+} x^0=\lim\limits_{x\to0^+} 1=1$,

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)=\lim_{x\to0^+} g(x,kx^1)=\frac{2k}{\lim\limits_{x\to0^+} x^{2(1-m)}+k^2}=\frac{2k}{1+k^2}$$

Giá trị $\dfrac{2k}{1+k^2}$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.**(0,25đ)**

+ Khi $0<m<1\Leftrightarrow 0<2(1-m)<2$ thì $\lim\limits_{x\to0^+} x^{2(1-m)}=0$,

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)=\lim_{x\to0^+} g(x,kx^m)=\frac{2k}{\lim\limits_{x\to0^+} x^{2(1-m)}+k^2}=\frac{2k}{0+k^2}=\frac{2}{k}$$

Giá trị $\dfrac{2}{k}$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.**(0,25đ)**

3) Kết luận: $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$ khi $m>1$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi $0<m\le1$.

Cách khác. Làm tương tự như phần đầu cách trên, chúng ta cũng được $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$

với $g(x,y)=\dfrac{2x^m y}{x^2+y^2}$.

Đổi biến $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$, từ D(f) suy ra $\begin{cases}r>0\\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}0<\cos\varphi\le 1\\ -1<\sin\varphi<1\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+y^2=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=r \Rightarrow (x,y)\to(0^+,0)\Leftrightarrow r\to 0^+$$

$$\Rightarrow g(x,y)=\frac{2x^m y}{x^2+y^2}=\frac{2(r\cos\varphi)^m r\sin\varphi}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=2r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi.$$

Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ khi $\begin{cases}m>1\\ 0<m\le 1\end{cases}$

- Trường hợp m > 1:

m > 1 $\Leftrightarrow$ m–1 > 0 $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}=0$, mặt khác $|\cos^m\varphi\sin\varphi|\le 1$ nên $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$.

- Trường hợp $0<m\le 1$:

+ m = 1 $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}=\lim\limits_{r\to 0^+} 1=1 \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=\lim\limits_{r\to 0^+} 1.\cos^m\varphi\sin\varphi=\cos^m\varphi\sin\varphi$, giá trị này thay đổi khi φ thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$ không tồn tại

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại.

+ 0 < m < 1 $\Rightarrow$ 1 – m > 0 $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^{1-m}}=+\infty$, mặt khác $|\cos^m\varphi\sin\varphi|\le 1$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=\begin{cases}-\infty & \text{khi } -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\\ 0 & \text{khi } \varphi=0\\ +\infty & \text{khi } 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ (vì $0<\cos^m\varphi<1$).

Giới hạn này thay đổi khi φ thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$ không tồn tại.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} g(x,y)$ không tồn tại.

Kết luận: $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$ khi m > 1 và $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi $0<m\le 1$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2}=(x^2+2y^2)^{\frac{1}{2}}$ là D(f) = $\mathbf{R}^2$.**(0,25đ)**

Theo quy tắc tính đạo hàm riêng cấp 1 đối với hàm số $f(x,y)=(x^2+2y^2)^{\frac{1}{2}}$ chúng ta được

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+2y^2)^{\frac{1}{2}-1}2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\\ f'_y(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+2y^2)^{\frac{1}{2}-1}4y=\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}\end{cases}$$ với $\forall$(x,y) $\ne$ (0,0)**(0,75đ)**

Cách 1. $\Rightarrow \begin{cases}f'_x(x,y)\\ f'_y(x,y)\end{cases}$ không xác định tại điểm (x,y) = (0,0)**(0,5đ)**

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \end{cases}$$ không liên tục tại điểm (0,0).**(0,5đ)**

Cách 2. Nếu cho (x,y) → (0,0) dọc theo đường thẳng x = y thì (x,y) → (0,0) ⇔ y → 0 và

$$f'_x(y,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2+2y^2}} = \frac{y}{|y|\sqrt{3}} = \frac{y}{y\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{3}} = \frac{\mathrm{sgn}(y)}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{y\to 0} f'_x(y,y) = \frac{\mathrm{sgn}(y)}{\sqrt{3}} = \begin{cases} 1/\sqrt{3} & \text{khi} \quad y \to 0^+ \\ -1/\sqrt{3} & \text{khi} \quad y \to 0^- \end{cases}$$

Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ không tồn tại. Do đó, hàm số $f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}$ không liên tục tại điểm (0,0).**(0,5đ)**

Nếu cho (x,y) → (0,0) dọc theo đường thẳng y = x thì (x,y) → (0,0) ⇔ x → 0 và

$$f'_y(x,x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{3}} = \frac{2x}{x\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{3}} = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim_{x\to 0} f'_y(x,x) = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{3}} = \begin{cases} 2/\sqrt{3} & \text{khi} \quad x \to 0^+ \\ -2/\sqrt{3} & \text{khi} \quad x \to 0^- \end{cases}$$

Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y)$ không tồn tại. Do đó, hàm số $f'_y(x,y) = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}$ không liên tục tại điểm (0,0).**(0,5đ)**

Cách 3. Theo định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1 tại điểm (0,0)

$$+\ f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2 + 2.0^2} - \sqrt{0^2+2.0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)\mathrm{sgn}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{sgn}(\Delta x) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x\to 0^+ \\ -1 & \text{khi} \quad x \to 0^- \end{cases} \Rightarrow f'_x(x,y) \text{ không liên tục tại điểm (0,0).}$$

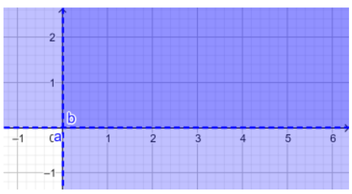
(0,5đ)

$$+\ f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt{0^2 + 2(0+\Delta y)^2} - \sqrt{0^2+2.0^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{2}|\Delta y|}{\Delta y} =$$

$$\sqrt{2}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)\mathrm{sgn}(\Delta y)}{\Delta y} = \sqrt{2}\lim_{\Delta y\to 0}\mathrm{sgn}(\Delta y) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{khi} \quad y\to 0^+ \\ -\sqrt{2} & \text{khi} \quad y \to 0^- \end{cases} \Rightarrow f'_y(x,y) \text{ không liên tục tại điểm}$$

(0,0). **(0,5đ)**

Câu 4. Theo yêu cầu của đầu bài thì tập xác định của hàm số $f(x,y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$ là D(f) = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x > 0$ và $y > 0\}$**(0,25đ)**



Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = y - 2/x^2 \\ f'_y(x,y) = x - 4/y^2 \end{cases}$ **(0,25đ)**

Điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2/x^2=0 \\ x-4/y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số có 1 điểm dừng duy nhất là } (x_0,y_0)=(1,2)\in D(f)\ \mathbf{(0{,}25đ)}$$

Chúng ta có $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y)=4/x^3 \\ f''_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y)=1 \\ f''_{y^2}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y)=8/y^3 \end{cases}$ **(0,25đ)** $\Rightarrow \begin{cases} A(1,2)=f''_{x^2}(1,2)=4 \\ B(1,2)=f''_{xy}(1,2)=1 \\ C(1,2)=f''_{y^2}(1,2)=1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

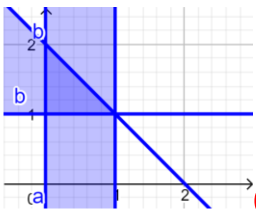
$\Rightarrow \Delta(1,2)=B^2(1,2)-A(1,2)C(1,2)=1^2-4.1=-3$ **(0,25đ)**

Tại điểm dừng $(x_0,y_0)=(1,2)$ có $\Delta(1,2)=-3<0$ và $A(1,2)=4>0$ nên hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm này: $f_{ct}=f(1,2)=\left(xy+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}\right)\Bigg|_{(x,y)=(1,2)}=6$.**(0,5đ)**

Cách khác. Sau khi tính được $\begin{cases} f''_{x^2}(1,2)=4 \\ f''_{xy}(1,2)=1 \\ f''_{y^2}(1,2)=1 \end{cases}$ chúng ta có vi phân toàn phần cấp 2 tại điểm (1,2) là $d^2f(1,2)=f''_{x^2}(1,2)dx^2+2f''_{xy}(1,2)dxdy+f''_{y^2}(1,2)dy^2=4dx^2+2.1dxdy+dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính A_1 = det(4) = 4 > 0, $A_2=\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=3>0$ nên dạng toàn phương $d^2f(1,2)$ xác định dương, do đó hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm (1,2) và $f_{ct}=f(1,2)=\left(xy+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}\right)\Bigg|_{(x,y)=(1,2)}=6$.

Câu 5. $I=\displaystyle\int_0^1 dx\int_1^{2-x}\cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dy=\iint_D \cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dxdy \Rightarrow D=\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 1\le y\le 2-x \end{cases}$ là hình chiếu của miền D lên trục Ox và đồ thị của miền D là



(1,0đ)

Chiếu miền D lên trục tung Oy, chúng ta được $D=\begin{cases} 1\le y\le 2 \\ 0\le x\le 2-y \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_1^2 dy\int_0^{2-y}\cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dx=\int_1^2\cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\left(x\Big|_{x=0}^{x=2-y}\right)dy=\int_1^2(2-y)\cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dy=$$

$$\int_1^2\cos\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)d\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)=\sin\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2}=\sin 2-\sin\frac{3}{2}$$.**(1,0đ)**