Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

3.1. Tích phân đường loại một

3.1.1. Định nghĩa tích phân đường loại một

Bài toán vật lý dẫn đến khái niệm tích phân đường loại một

Giả sử trong mặt phẳng tọa độ Oxy có một sợi dây AB rất mảnh (chỉ có độ dài, còn tiết diện không đáng kể - coi như không có kích thước) có khối lượng riêng tại điểm $(x,y)\in AB$ được biểu diễn bằng hàm số f(x,y) đơn trị, liên tục và không âm. Yêu cầu tìm khối lượng m của sợi dây AB.

Để tính m, chúng ta thực hiện như sau: Chia tùy ý AB thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \equiv B$ và ký hiệu độ dài của cung nhỏ $A_{i-1}A_i$ là Δs_i $(1 \le i \le n)$. Trên cung $A_{i-1}A_i$ lấy tùy ý một điểm (x_i,y_i), nếu cung $A_{i-1}A_i$ đủ nhỏ thì chúng ta có thể coi giá trị $f(x_i,y_i)$ không đổi trên cung $A_{i-1}A_i$; khi đó, khối lượng của cung nhỏ $A_{i-1}A_i$ là $m_i \approx f(x_i,y_i).\Delta s_i$.

Như vậy, nếu mọi cung $A_{i-1}A_i$ $(1 \le i \le n)$ đủ nhỏ thì có thể coi khối lượng của sợi dây AB là

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \approx f(x_1,y_1).\Delta s_1 + f(x_2,y_2).\Delta s_2 + \ldots + f(x_n,y_n).\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$$

Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$ sẽ có độ chính xác cao (tức là giá trị của biểu thức này càng gần khối lượng thực m của sợi dây AB) nếu n càng lớn và tất cả các Δs_i $(1 \le i \le n)$ càng bé. Do đó, khối lượng m của sợi dây AB bằng giới hạn của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$ khi $n \to \infty$ cùng với độ dài của mỗi cung nhỏ Δs_i $(1 \le i \le n)$ bé dần về 0, tức là $m = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$ trong đó $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i$.

Định nghĩa tích phân đường loại một

Cho đường cong phẳng L là cung AB trong mặt phẳng tọa độ Oxy và hàm số f(x,y) xác định, đơn trị và liên tục với $\forall(x,y)\in AB$. Chia cung AB thành n cung nhỏ tùy ý không dẫm lên nhau bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \equiv B$ và ký hiệu độ dài của cung nhỏ $A_{i-1}A_i$ là Δs_i $(1 \le i \le n)$. Trên cung $A_{i-1}A_i$ lấy điểm (x_i,y_i) tùy ý và lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i \to 0$ mà $I_n \to I$ là một giá trị hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách lấy điểm (x_i,y_i) trên cung $A_{i-1}A_i$ thì giá trị hữu hạn I được gọi tích phân đường loại một của hàm số f(x,y) trên cung AB (hay trên đường cong L) và ký hiệu là

$$I = \int_{AB} f(x, y)ds = \int_{L} f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Khi đó hàm số dưới dấu tích phân f(x,y) được gọi là khả tích trên cung AB (hay trên đường cong L), còn ds được gọi là vi phân cung.

Nếu hàm số f(x,y) đơn trị và liên tục với $\forall(x,y)\in L$ thì nó khả tích trên đường cong L.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng định nghĩa tích phân đường loại một trên đường cong L trong không gian 3 chiều, tức là $I = \int_{L} f(x, y, z)ds$.

3.1.2. Tính chất của tích phân đường loại một

Đối với tích phân đường loại một trên đường cong phẳng

(1) Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều tính tích phân từ A đến B hay ngược lại, tức là $\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{BA} f(x, y)ds$.

Các tính chất khác của tích phân đường loại một giống như các tính chất của tích phân xác định.

(2) $\int\limits_L [f_1(x,y)+f_2(x,y)]ds = \int\limits_L f_1(x,y)ds + \int\limits_L f_2(x,y)ds$

(3) $\int\limits_L \alpha f(x,y)ds = \alpha \int\limits_L f(x,y)ds$ (hằng số $\alpha \in \mathbf{R}$)

(4) $\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{L_1} f(x,y)ds + \int\limits_{L_2} f(x,y)ds \left(\begin{cases} L_1 \cup L_2 = L \\ L_1 \cap L_2 = \varnothing \end{cases} \right)$

Hoàn toàn tương tự đối với tích phân đường loại một trên đường cong trong không gian 3 chiều.

3.1.3. Cách tính tích phân đường loại một

Tính tích phân đường loại một trên đường cong trong $\mathbf{R}^2$ (đường cong phẳng)

(1) Nếu đường cong phẳng AB được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với $a \le t \le b$,

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(t)dt]^2 + [y'(t)dt]^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

và $f(x,y) = f(x(t),y(t))$ với $a \le t \le b$, thì $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$

(2) Nếu đường cong phẳng AB được cho bởi y = y(x) với a ≤ x ≤ b, khi đó chúng ta coi x là tham số t thì đường cong phẳng AB được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$ với $a \le t \le b$

$$\Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x'(t) = 1 \\ y'(t) = y'(x) \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx \text{ và } f(x,y) = f(x,y(x)) \text{ với } a \le x \le b$$

thì $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx.$

(3) Nếu đường cong phẳng AB được cho bởi x = x(y) với c ≤ y ≤ d, khi đó chúng ta coi y là tham số t thì đường cong phẳng AB được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = t \end{cases}$ với $c \le t \le d$

$$\Rightarrow \begin{cases} dt = dy \\ x'(t) = x'(y) \\ y'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy \text{ và } f(x,y) = f(x(y),y) \text{ với } c \le y \le d$$

thì $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_c^d f(x(y),y)\sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy.$

(4) Nếu đường cong phẳng AB được cho dưới dạng tọa độ cực r = r(φ) với α ≤ φ ≤ β trong hệ tọa độ cực (r,φ), khi đó $\begin{cases} x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ và chúng ta coi φ là tham số thì đường cong phẳng AB được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ với $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[x'(\varphi)d\varphi]^2 + [y'(\varphi)d\varphi]^2} = \sqrt{[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2}d\varphi =$$

$$\sqrt{[r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi]^2 + [r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi]^2}d\varphi = \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi$$

và $f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$

thì $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi.$

Tính tích phân đường loại một trên đường cong trong $\mathbf{R}^3$

(1) Nếu đường cong AB trong $\mathbf{R}^3$ được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \text{ với } a \le t \le b \\ z = z(t) \end{cases}$

$$\text{thì } \int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

(2) Nếu đường cong AB trong $\mathbf{R}^3$ được cho bởi các phương trình $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ với $a \le x \le b$

$$\text{thì } \int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{a}^{b} f\big(x,y(x),z(x)\big)\sqrt{1+[y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}\,dx$$

tương tự, nếu đường cong AB trong $\mathbf{R}^3$ được cho bởi các phương trình $\begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y) \end{cases}$ với $c \le y \le d$

$$\text{thì } \int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{c}^{d} f\big(x(y),y,z(y)\big)\sqrt{1+[x'(y)]^2 + [z'(y)]^2}\,dy$$

và tương tự, nếu đường cong AB trong $\mathbf{R}^3$ được cho bởi các phương trình $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ với $p \le z \le q$

$$\text{thì } \int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{p}^{q} f\big(x(z),y(z),z\big)\sqrt{1+[x'(z)]^2 + [y'(z)]^2}\,dz$$

Lưu ý.

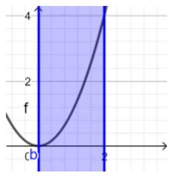
(1) Vì tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều tính tích phân nên đối với giá trị của hai cận của tích phân, giá trị nhỏ là cận dưới còn giá trị lớn hơn là cận trên.

(2) Nếu L là đường cong kín thì có thể dùng ký hiệu $\int_L f(x,y)ds = \oint_L f(x,y)ds$ (L là đường cong phẳng) và tương tự $\int_L f(x,y,z)ds = \oint_L f(x,y,z)ds$ (L là đường cong trong $\mathbf{R}^3$).

Ví dụ **3.1.** Tính $I = \int_{OA} xds$, OA là cung của đường parabol $y = x^2$ từ điểm O(0,0) đến điểm A(2,4).

Bài giải.

Cung OA nằm trên đường parabol $y = y(x) = x^2$ với $0 \le x \le 2$ nên đồ thị của nó trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Chúng ta có y’(x) = 2x $\Rightarrow I = \int_{OA} xds = \int_0^2 x\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,d(x^2) =$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,d(4x^2) = \frac{1}{8}\int_0^2 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+4x^2) = \frac{1}{8}\left.\frac{(1+4x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1}\right|_0^2 = \frac{17\sqrt{17}-1}{12}.$$

Ví dụ **3.2.** Tính $I = \int_L (x^2 - 2y)ds$, L là các cạnh của ΔABC có tọa độ các đỉnh trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là A(1,1), B(3,1) và C(1,5).

Bài giải.

Đồ thị của ΔABC trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là

Chúng ta có L = AB + BC + CA

$$\Rightarrow I = \int_L (x^2 - 2y)ds = \int_{AB} (x^2 - 2y)ds + \int_{BC} (x^2 - 2y)ds + \int_{CA} (x^2 - 2y)ds$$

- Tính $\int_{AB} (x^2 - 2y)ds$: Lấy x làm tham số, khi (x,y)∈AB thì y = 1 với $1 \le x \le 3$

Chúng ta có $\begin{cases} f(x,y) = f(x, y(x)) = x^2 - 2y = x^2 - 2.1 = x^2 - 2 \\ y'(x) = 0 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx = \sqrt{1 + 0^2}dx = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{AB} (x^2 - 2y)ds = \int_1^3 (x^2 - 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{14}{3}$$

- Tính $\int_{BC} (x^2 - 2y)ds$: Lấy x làm tham số, khi (x,y)∈BC thì phương trình đường thẳng đi qua điểm B(3,1) và điểm C(1,5) là $\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow y = -2x + 7$ với $1 \le x \le 3$

Chúng ta có $\begin{cases} f(x,y) = f[x, y(x)] = x^2 - 2(-2x + 7) = x^2 + 4x - 14 \\ y'(x) = -2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx = \sqrt{1 + (-2)^2}dx = \sqrt{5}dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{BC} (x^2 - 2y)ds = \int_1^3 (x^2 + 4x - 14)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\left(\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 14x\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{10\sqrt{5}}{3}$$

- Tính $\int_{CA} (x^2 - 2y)ds$: Lấy y làm tham số, khi (x,y)∈CA thì x = 1 với $1 \le y \le 5$

Chúng ta có $\begin{cases} f(x,y) = f(x(y), y) = x^2 - 2y = 1^2 - 2y = 1 - 2y \\ x'(y) = 0 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy = \sqrt{1 + 0^2}dy = dy \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{CA} (x^2 - 2y)ds = \int_1^5 (1 - 2y)dy = (y - y^2)\Big|_1^5 = -20$$

Như vậy, chúng ta được $I = \int_L (x^2 - 2y)ds = \frac{14}{3} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - 20 = \frac{-46 - 10\sqrt{5}}{3}$.

Ví dụ **3.3.** Cho L là đường cong có phương trình trong hệ tọa độ cực (r,φ) là r = cosφ với $0 \le \varphi \le 2\pi$.

(a) Vẽ đồ thị của L trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

(b) Tính $I = \int_L xds$ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy khi φ là tham số.

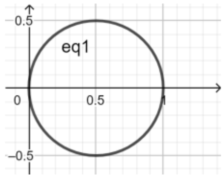
(c) Tính $I = \int_L xds$ trong hệ tọa độ cực (r,φ).

Bài giải.

(a) Như chúng ta đã biết, tọa độ Descartes (x,y) biểu diễn qua tọa độ cực (r,φ) qua công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ mà $r = \cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} x = (\cos\varphi)\cos\varphi = \cos^2\varphi \\ y = (\cos\varphi)\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y^2=(\cos^2\varphi)^2+(\cos\varphi\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\cos^2\varphi=x$, do đó phương trình của đường cong L trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là $x^2+y^2=x \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Phương trình này là phương trình của đường tròn có tâm $I\left(\frac{1}{2},0\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$ và có đồ thị



(b) Biến đổi tương tự như trên, chúng ta có $\begin{cases} x(\varphi)=\cos^2\varphi \\ y(\varphi)=\cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$, φ là tham số

$$\Rightarrow ds=\sqrt{[x'_\varphi(\varphi)]^2+[y'_\varphi(\varphi)]^2}d\varphi=\sqrt{(2\cos\varphi\sin\varphi)^2+(-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^2}d\varphi=$$

$$\sqrt{\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi}d\varphi=d\varphi \text{ và } f(x,y)=x\Rightarrow f(\cos^2\varphi,\cos\varphi\sin\varphi)=\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow I=\int_L xds=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

(c) Chúng ta có $\begin{cases} f(x,y)=x\Rightarrow f\big(x(\varphi),y(\varphi)\big)=x(\varphi)=\cos^2\varphi \\ ds=\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}d\varphi=\sqrt{(\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}d\varphi=d\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_L xds=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

Ví dụ **3.4.** Tính $I=\int_{AB}(2x+y-2z)ds$ với AB là đoạn thẳng nối điểm A(1,–1,2) với điểm B(–1,2,–1) trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz.

Bài giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1,–1,2) và điểm B(–1,2,–1) là

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}=\frac{z-2}{-1-2}$$

Nếu lấy x làm tham số thì $x=x,\quad y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2},\quad z=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ với $-1\le x\le 1$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(x,y,z)=2x+y-2z=2x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}-2\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2} \\ ds=\sqrt{(x')^2+[y'(x)]^2+[z'(x)]^2}dx=\sqrt{1^2+(-3/2)^2+(3/2)^2}dx=\frac{\sqrt{22}}{2}dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_{AB}(2x+y-2z)ds=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{22}}{2}dx=-\frac{\sqrt{22}}{2}\int_{-1}^{1}(5x+1)dx=-\frac{\sqrt{22}}{4}\left(5\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{\sqrt{22}}{2}.$$

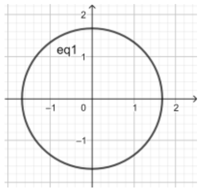
3.1.4. Ý nghĩa vật lý và ý nghĩa hình học của tích phân đường loại một

Nếu hàm số dưới dấu tích phân f(x,y) > 0 (đường cong phẳng L) hoặc f(x,y,z) > 0 (đường cong không gian L) xác định và liên tục với mọi điểm trên đường cong, biểu thị khối lượng riêng của đường cong tại điểm (x,y) của đường cong phẳng hoặc tại điểm (x,y,z) của đường cong không gian, thì khối lượng m của đường cong L là $m=\int_L f(x,y)ds$ hoặc $m=\int_L f(x,y,z)ds$ (*ý nghĩa vật lý*). Đặc biệt, nếu f(x,y) = 1 thì $\int_L ds$ (L là đường cong phẳng) hoặc nếu f(x,y,z) = 1 thì $\int_L ds$ (L là đường cong không gian) là độ dài của đường cong L (*ý nghĩa hình học*).

Ví dụ **3.5.** Tính chu vi của đường tròn L bán kính R.

Bài giải.

Không mất tính tổng quát, có thể coi đường tròn L bán kính R có tâm tại gốc tọa độ O(0,0) của hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy, khi đó phương trình của đường tròn L trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là $x^2 + y^2 = R^2$ và đồ thị của nó là



Phương trình tham số của đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ là $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, theo ý nghĩa hình học của tích phân đường loại một thì chu vi của đường tròn L bán kính R là $C = \int_L ds$.

Đường tròn L là đường cong phẳng khép kín nên bất kỳ điểm nào trên L cũng có thể được chọn là điểm bắt đầu đồng thời là điểm kết thúc khi tính tích phân $C = \int_L ds$. Để đơn giản, chúng ta chọn điểm (x,y) = (R,0) là điểm bắt đầu đồng thời là điểm kết thúc, tương ứng với t = 0 và t = 2π.

Chúng ta có $\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = Rdt$

$$\Rightarrow C = \int_L ds = \int_0^{2\pi} Rdt = R\int_0^{2\pi} dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

3.2. Tích phân đường loại hai

3.2.1. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Bài toán vật lý dẫn đến khái niệm tích phân đường loại hai

Cho một chất điểm M(x,y) di chuyển theo cung phẳng AB dưới tác dụng của lực $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ biến thiên liên tục dọc theo cung AB từ A đến B. Yêu cầu tính công W khi di chuyển chất điểm bằng lực $\vec{F}(x, y)$ từ điểm đầu A đến điểm cuối B của cung AB.

Giả sử véc tơ $\vec{F}(x, y)$ có các thành phần P(x,y), Q(x,y) trên các trục tọa độ Ox, Oy. Để tính công W, chúng ta thực hiện như sau: Chia cung AB thành n cung nhỏ tùy ý không dẫm lên nhau bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \equiv B$. Trên cung $A_{i-1}A_i$ lấy điểm (x_i,y_i) tùy ý và ký hiệu Δx_i, Δy_i là các thành phần trên các trục tọa độ Ox, Oy của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Khi đó, nếu cung $A_{i-1}A_i$ đủ nhỏ thì có thể coi cung này là thẳng và là véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, còn lực $\vec{F}(x, y)$ có thể coi là không đổi và bằng $\vec{F}(x_i, y_i)$ tại mọi điểm của cung $A_{i-1}A_i$.

Do đó, nếu ký hiệu ΔW_i là công của lực $\vec{F}(x_i, y_i)$ tác dụng tại điểm (x_i,y_i) làm di chuyển chất điểm M trên cung $A_{i-1}A_i$ thì $\Delta W_i \approx \vec{F}(x_i, y_i).\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i$.

Như vậy, nếu mọi cung $A_{i-1}A_i$ $(1 \le i \le n)$ đều đủ nhỏ thì có thể coi công W khi di chuyển chất điểm bằng lực $\vec{F}(x, y)$ từ điểm đầu A đến điểm cuối B của cung AB là

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + ... + \Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i \right].$$

Tổng $\sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i \right]$ sẽ có độ chính xác cao, tức là giá trị của biểu thức này càng gần với giá trị chính xác của công W, nếu n càng lớn và tất cả các Δx_i ($1 \le i \le n$) và Δy_i ($1 \le i \le n$) càng bé. Do đó, giá trị của công W là giới hạn của tổng $\sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i \right]$ khi $n \to \infty$ cùng với $\max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ và $\max_{1 \le i \le n} \Delta y_i \to 0$.

Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho các hàm số P(x,y), Q(x,y) xác định và liên tục trên cung phẳng AB (đường cong phẳng L).

Chia cung AB thành n cung nhỏ tùy ý và không dẫm lên nhau bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \equiv B$. Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy điểm (x_i,y_i) tùy ý, gọi hình chiếu của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên các trục tọa độ Ox, Oy tương ứng là Δx_i, Δy_i. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i \right]$, nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ và $\max_{1 \le i \le n} \Delta y_i \to 0$ mà tổng $I_n \to I$ là một giá trị hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách lấy điểm (x_i,y_i) trên cung $A_{i-1}A_i$ thì giá trị hữu hạn I được gọi tích phân đường loại hai của các hàm số P(x,y), Q(x,y) trên cung AB (hay trên đường cong L) và ký hiệu là

$$I = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Khi đó các hàm số P(x,y), Q(x,y) được gọi là khả tích trên cung AB (hay trên đường cong L).

Nếu các hàm số P(x,y), Q(x,y) đơn trị và liên tục với $\forall (x,y) \in L$ thì chúng khả tích trên đường cong L.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng định nghĩa tích phân đường loại hai trên đường cong L trong không gian 3 chiều, tức là nếu các hàm số P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) đơn trị và liên tục với $\forall (x,y,z) \in L$ thì chúng khả tích trên đường cong L, tức là $I = \int_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

3.2.2. Tính chất của tích phân đường loại hai

Ngay sau đây, chúng ta nêu các tích chất của tích phân đường loại hai đối với cung phẳng AB hay đường cong phẳng L, đối với tích phân đường loại hai đối với cung AB hay đường cong L trong không gian 3 chiều cũng có các tính chất hoàn toàn tương tự.

(1) Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều lấy tích phân từ điểm A đến điểm B hay từ điểm B đến điểm A vì hình chiếu của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên các trục tọa độ đổi dấu khi véc tơ này đổi chiều, tức là $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Quy ước. Nếu đường lấy tích phân đường loại hai là đường cong kín L (điểm đầu A trùng với điểm cuối B), thì chúng ta quy ước chiều dương trên đường L là chiều sao cho khi một người đi trên đường L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi đường L luôn luôn ở bên tay trái. Ký hiệu tích phân đường loại hai dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là $\oint_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ và theo chiều âm là $\oint_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Các tính chất khác của tích phân đường loại hai giống như các tính chất của tích phân xác định.

(2) $\int_{L} \left[P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy \right] + \left[P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy \right] =$

$$\int_L P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy + \int_L P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy$$

(3) $\int_L \alpha[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \alpha\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (hằng số $\alpha \in \mathbf{R}$)

(4) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \left(\begin{cases} L_1 \cup L_2 = L \\ L_1 \cap L_2 = \varnothing \end{cases}\right)$

3.2.3. Cách tính tích phân đường loại hai

(1) Nếu cung phẳng AB hoặc đường cong phẳng L được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ($\alpha \le t \le \beta$) $\Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$ thì $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$.

(2) Nếu cung phẳng AB hoặc đường cong phẳng L được cho bởi phương trình y = y(x) ($a \le x \le b$) thì dy = y'(x)dx $\Rightarrow \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx$. Hoặc, nếu cung phẳng AB hoặc đường cong phẳng L được cho bởi phương trình x = x(y) ($c \le y \le d$) thì dx = x'(y)dy $\Rightarrow \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy$.

(3) Nếu đường cong không gian L được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ ($\alpha \le t \le \beta$) $\Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \\ dz = z'(t)dt \end{cases}$ thì $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$

$$\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Ví dụ **3.6.** Tính $I = \oint_{L^+} xdy - ydx$ trên đường ellipse $L = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$.

Bài giải.

Phương trình tham số của đường L là $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt = (-a\sin t)dt \\ dy = y'(t)dt = (b\cos t)dt \end{cases}$.

L là đường cong phẳng khép kín nên bất kỳ điểm nào trên L cũng có thể được chọn là điểm bắt đầu đồng thời là điểm kết thúc khi tính tích phân $I = \oint_{L^+} xdy - ydx$. Để đơn giản, chúng ta chọn điểm (x,y) = (a,0) là điểm bắt đầu đồng thời là điểm kết thúc, tương ứng với tham số $\alpha = 0$ và $\beta = 2\pi$.

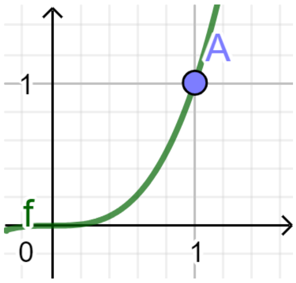
$$\Rightarrow I = \oint_{L^+} xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)dt - (b\sin t)(-a\sin t)dt = \int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt =$$

$$ab\int_0^{2\pi} dt = abt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi ab.$$

Ví dụ **3.7.** Tính $I = \int_L xydx + (y - x)dy$ trên L là đường cong từ điểm O(0,0) đến điểm A(1,1) có phương trình là (a) $y = x^3$, (b) $x = y^2$.

Bài giải.

(a) Đồ thị của cung OA thuộc đường cong bậc ba $y = x^3$ từ điểm O(0,0) đến điểm A(1,1) trong hệ tọa độ Descartes Oxy là

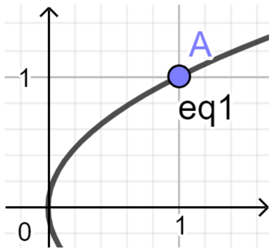


Ta có $y = x^3 (0 \le x \le 1) \Rightarrow dy = y'(x)dx = 3x^2dx$

$$\Rightarrow I = \int_L xydx + (y-x)dy = \int_{OA} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 xx^3dx + (x^3 - x)3x^2dx =$$

$$\int_0^1 (3x^5 + x^4 - 3x^3)dx = \left(3\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{20}.$$

(b) Đồ thị của cung OA thuộc đường parabol $x = y^2$ từ điểm O(0,0) đến điểm A(1,1) trong hệ tọa độ Descartes Oxy là



Ta có $x = y^2 (0 \le y \le 1) \Rightarrow dx = x'(y)dy = 2ydy$

$$\Rightarrow I = \int_L xydx + (y-x)dy = \int_{OA} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 y^2y2ydy + (y - y^2)dy =$$

$$\int_0^1 (2y^4 - y^2 + y)dy = \left(2\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30}.$$

Ví dụ **3.8.** Tính $I = \int_L (y^2 - z^2)dx + 2xyzdy - x^2dz$ trên đường L là đường cong không gian có phương trình tham số là $\{x = t, y = t^2, z = t^3$ với $0 \le t \le 1\}$ theo chiều tăng của tham số t.

Bài giải

Ta có $\begin{cases} dx = x'(t)dt = 1dt = dt \\ dy = y'(t)dt = 2tdt \\ dz = z'(t)dt = 3t^2dt \end{cases} \Rightarrow I = \int_L (y^2 - z^2)dx + 2xyzdy - x^2dz =$

$$\int_0^1 \left[(t^2)^2 - (t^3)^2\right]dt + 2tt^2t^3 2tdt - t^2 3t^2dt = \int_0^1 (4t^7 - t^6 - 2t^4)dt = \left(4\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{3}{70}.$$

3.2.4. Ý nghĩa vật lý của tích phân đường loại hai

Tích phân đường loại hai là công do lực $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ (trong mặt phẳng) hoặc $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ (trong không gian 3 chiều) sản ra khi lực này di chuyển chất điểm M từ điểm A đến điểm B trên đường cong AB (trong mặt phẳng hoặc trong không gian 3 chiều).

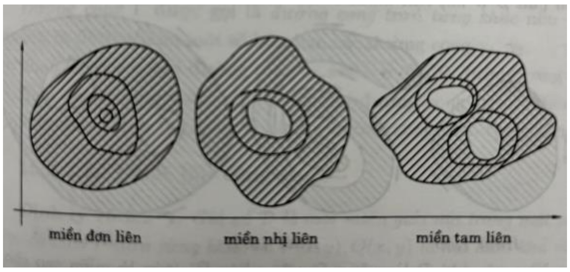
3.3. Công thức Green

3.3.1. Công thức Green

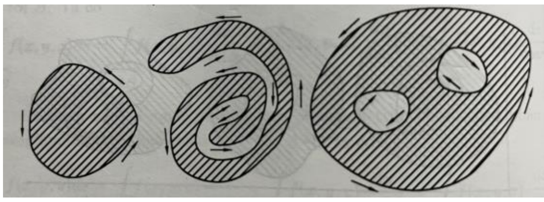
Một số khái niệm

(1) Miền liên thông. Miền phẳng $D \in \mathbf{R}^2$ được gọi là *miền liên thông* nếu chúng ta có thể nối 2 điểm bất kỳ thuộc D bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D.

(2) Miền đơn liên và miền đa liên. Miền liên thông được gọi là *miền đơn liên* nếu mọi đường cong kín nằm hoàn toàn trong D đều bao bọc một miền nằm hoàn toàn trong D. Miền liên thông không đơn liên được gọi là *miền đa liên*.



(3) Chiều dương của biên của miền liên thông D (đơn liên/đa liên) là chiều sao cho khi một người đi trên biên của miền D theo chiều ấy sẽ thấy các điểm trong của miền D luôn luôn ở bên tay trái.

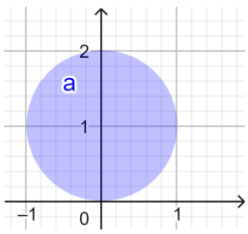


Nếu các hàm số P(x,y), Q(x,y) xác định, liên tục và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền phẳng D là một miền liên thông, bị chặn và có biên L gồm một hay nhiều đường cong kín rời nhau từng đôi một. Khi đó chúng ta có $\oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy$ được gọi là công thức Green. *Công thức Green là công thức liên hệ giữa tích phân đường loại hai và tích phân hai lớp.*

Ví dụ **3.9.** Tính $\oint_{L^+} (x\arctan x + y^2)dx + (x + 2xy + y^2e^{-y})dy$ trên đường tròn L có phương trình là $x^2 + y^2 = 2y$.

Bài giải.

Việc tính trực tiếp tích phân $\oint_{L^+} (x\arctan x + y^2)dx + (x + 2xy + y^2e^{-y})dy$ trên đường tròn L là không đơn giản, tuy nhiên nếu sử dụng công thức Green thì việc tính tích phân này qua tích phân hai lớp trên hình tròn $D = \{x^2 + y^2 \le 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \le 1^2\}$ là miền có biên là đường tròn L thì việc tính tích phân này sẽ dễ dàng hơn rất nhiều.



Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x\arctan x + y^2 \\ Q(x,y) = x + 2xy + y^2e^{-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = 2y \\ Q'_x(x,y) = 1 + 2y \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 1$, mặt khác, theo công thức Green chúng ta có $\oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy = \iint_D dxdy$.

$$\Rightarrow \oint_{L^+}(x\arctan x + y^2)dx + (x + 2xy + y^2e^{-y})dy = \iint_D dxdy.$$

Theo ý nghĩa hình học của tích phân hai lớp thì $\iint_D dxdy$ chính là diện tích hình tròn D. Hình tròn D có bán kính bằng R = 1 nên diện tích của nó là $\pi R^2 = \pi.1^2 = \pi$.

$$\Rightarrow \oint_{L^+}(x\arctan x + y^2)dx + (x + 2xy + y^2e^{-y})dy = \iint_D dxdy = \pi.$$

Hệ quả của công thức Green

(1) $\oint_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy = \iint_D \left[P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\right]dxdy$

(2) Nếu đường cong kín L là biên của miền phẳng D thì diện tích S của miền D được tính bởi công thức $S = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx$.

Chứng minh

(1) Chúng ta có $\begin{cases} \oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ \oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy \end{cases}$

$$\Rightarrow \oint_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\right]dxdy$$

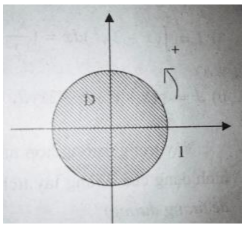
(2) Chúng ta lấy $\begin{cases} P(x,y) = -y \\ Q(x,y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = -1 \\ Q'_x(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 2$ và thay vào công thức Green, chúng ta được

$$\oint_{L^+} xdy - ydx = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\iint_D dxdy = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx.$$

Ví dụ **3.10.** Tính $I = \oint_{L^+}(x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ trên đường tròn L có phương trình là $x^2 + y^2 = 1$.

Bài giải.

Đồ thị của đường tròn L trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Gọi D là miền giới hạn bởi đường tròn L $\Rightarrow D = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

Cũng như ở Ví dụ 3.9, chúng ta sẽ sử dụng công thức Green để tính tích phân $I = \oint_{L^+}(x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$.

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x^3 - y^3 \\ Q(x,y) = x^3 + y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = -3y^2 \\ Q'_x(x,y) = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2)$ và thay vào công thức Green, chúng ta được

$$I = \oint_{L^+}(x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \iint_D 3(x^2 + y^2)dxdy = 3\iint_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

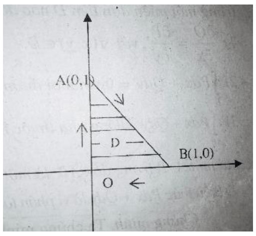
Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì định thức Jacobi J = r, $x^2 + y^2 = r^2$ và $D' = \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 3\iint_D (x^2+y^2)dxdy = 3\iint_{D'} r^2|J|drd\varphi = 3\iint_{D'} r^2 r dr d\varphi = 3\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^3 dr\right) = 3\left(\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Ví dụ **3.11.** Tính $I = \oint_{L^-} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ (trên đường L theo chiều âm), là các cạnh của ΔOAB có tọa độ các đỉnh trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là O(0,0), A(0,1) và B(1,0).

Bài giải.

Đồ thị của ΔOAB trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy là



Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x^2 + y^2 \\ Q(x,y) = x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = 2y \\ Q'_x(x,y) = 2x \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 2x - 2y = 2(x-y)$ và thay vào công thức Green, chúng ta được $I = \oint_{L^-} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = -\iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dxdy =$ $-\iint_D 2(x-y)dxdy = 2\iint_D (y-x)dxdy$ trên miền D là ΔOAB có cạnh OA nằm trên đường thẳng x = 0, cạnh AB nằm trên đường thẳng x + y = 1 và cạnh BO nằm trên đường thẳng y = 0.

Chiếu miền D lên trục Ox thì $D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \Rightarrow I = 2\iint_D (y-x)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y-x)dy =$

$$2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y-x)d(y-x) = 2\int_0^1 \left[\frac{(y-x)^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right]dx = \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Ví dụ **3.12.** Tính diện tích của hình ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ (a > 0, b > 0).

Bài giải.

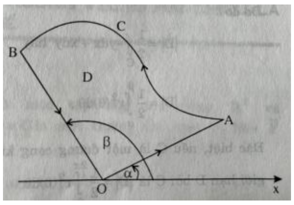
Biên L của hình ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ là đường cong kín ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > 0, b > 0), nên diện tích S của hình ellipse được tính bằng công thức $S = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx$.

Phương trình tham số của đường ellipse là $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt = -a\sin t dt \\ dy = y'(t)dt = b\cos t dt \end{cases} \Rightarrow xdy - ydx = (a\cos t)(b\cos t dt) - (b\sin t)(-a\sin t dt) = abdt$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} t\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = ab\pi.$$

Tính diện tích hình quạt



Giả sử cung C có phương trình r = r(φ) với α ≤ φ ≤ β trong hệ tọa độ cực (r,φ), ký hiệu D là hình quạt giới hạn bởi cung C và hai tia $\varphi_\alpha = \alpha$, $\varphi_\beta = \beta$. Chúng ta sẽ đưa ra công thức tính diện tích hình quạt D như sau

Ký hiệu L^+ là biên định hướng dương của hình quạt D, khi đó đường cong kín $L^+ = OA \cup C \cup BO$ là biên của hình quạt D nên diện tích S(D) của hình quạt D được tính bằng công thức

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx = \frac{1}{2}\left(\int_{OA} xdy - ydx + \int_{C^+} xdy - ydx + \int_{BO} xdy - ydx\right)$$

- Tính $\int_{OA} xdy - ydx$: Phương trình tham số của đoạn thẳng OA theo tham số r là $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$ với

$0 \le r \le r(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\alpha dr \\ dy = \sin\alpha dr \end{cases}$, do đó $\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^{r(\alpha)} (r\cos\alpha\sin\alpha - r\sin\alpha\cos\alpha)dr = \int_0^{r(\alpha)} 0dr = 0$.

- Tính $\int_{C^+} xdy - ydx$: Phương trình tham số của cung C định hướng dương theo tham số φ là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $(\alpha \le \varphi \le \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(\varphi)d\varphi = [r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi]d\varphi \\ dy = y'(\varphi)d\varphi = [r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi]d\varphi \end{cases} (\alpha \le \varphi \le \beta)$$

$$\Rightarrow xdy - ydx = r(\varphi)\cos\varphi[r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi]d\varphi - r(\varphi)\sin\varphi[r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi]d\varphi = r^2(\varphi)d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} xdy - ydx = \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

- Tính $\int_{BO} xdy - ydx$: Phương trình tham số của đoạn thẳng BO theo tham số r là $\begin{cases} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \end{cases}$ với

$r(\beta) \ge r \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\beta dr \\ dy = \sin\beta dr \end{cases}$, do đó $\int_{BO} xdy - ydx = \int_{r(\beta)}^0 (r\cos\beta\sin\beta - r\sin\beta\cos\beta)dr = \int_{r(\beta)}^0 0dr = 0$.

$$\Rightarrow S(D) = \frac{1}{2}\left(0 + \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi + 0\right) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.\ A - b$$

Ví dụ **3.13.**

(a) Tìm phương trình trong hệ tọa độ Descartes (x,y) của đường cong có phương trình trong hệ tọa độ cực là r = 2sinφ (−π ≤ φ ≤ π).

(b) Tính diện tích S của miền phẳng mà biên của nó là đường cong đã cho.

Bài giải.

(a) Công thức biến đổi từ tọa độ cực (r,φ) sang tọa độ Descartes (x,y) là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} (-\pi \le \varphi \le \pi)$

$\Rightarrow \begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = (2\sin\varphi)\cos\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = (2\sin\varphi)\sin\varphi = 2\sin^2\varphi \end{cases}$ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ là phương trình tham số của đường cong theo tham số φ.

Chúng ta có $\begin{cases} x^2(\varphi) = (2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\ y^2(\varphi) = (2\sin^2\varphi)^2 = 4\sin^4\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow x^2(\varphi) + y^2(\varphi) = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4\sin^4\varphi = 4\sin^2\varphi = 2(2\sin^2\varphi) = 2y(\varphi) \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ là phương trình chính tắc của đường tròn có tâm tại điểm $(x_0, y_0) = (0,1)$ và bán kính R = 1.

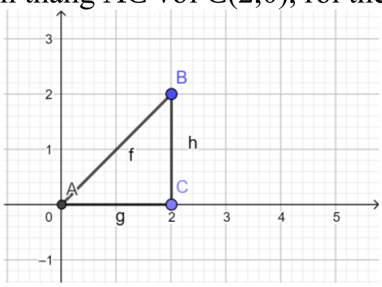
(b) $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin\varphi)^2 d\varphi = 2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi = 4\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 2\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$

$2\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2\pi.$

3.3.2. Điều kiện để tích phân đường loại hai không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Qua các ví dụ trên, chúng ta thấy tích phân đường loại hai không những phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của của đường cong mà còn phụ thuộc vào chính dạng của đường cong. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy rằng, có những trường hợp, tích phân đường loại hai (đối với đường cong phẳng) chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong mà không phụ thuộc vào dạng của đường cong như ở ví dụ ngay sau đây.

Ví dụ **3.14.** Tính $I = \int_{AB}(x + y^2)dx + 2xydy$ trên cung AB đi từ điểm A(0,0) đến điểm B(2,2) theo hai cách: (a) đoạn thẳng AB; (b) đoạn thẳng AC với C(2,0), rồi theo đoạn thẳng CB.



Bài giải.

(a) Đoạn thẳng AB nối điểm A(0,0) với điểm B(2,2) có phương trình y = x (0 ≤ x ≤ 2) ⇒ dy = dx, do đó sau khi thay $\begin{cases} y = x \\ dy = dx \end{cases}$ (0 ≤ x ≤ 2) vào biểu thức dưới dấu tích phân của tích phân I chúng ta được $I = \int_0^2 (x + x^2)dx + 2xxdx = \int_0^2 (3x^2 + x)dx = \left(x^3 + x^2/2\right)\Big|_0^2 = 10.$

(b) Chúng ta có $I = \int_{AB}(x + y^2)dx + 2xydy = \int_{AC}(x + y^2)dx + 2xydy + \int_{CB}(x + y^2)dx + 2xydy$

Đoạn thẳng AC nối điểm A(0,0) với điểm C(2,0) có phương trình y = 0 (0 ≤ x ≤ 2) ⇒ dy = 0, do đó sau khi thay $\begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \end{cases}$ (0 ≤ x ≤ 2) vào biểu thức dưới dấu tích phân của tích phân $\int_{AC}(x + y^2)dx + 2xydy$ chúng ta được $\int_{AC}(x + y^2)dx + 2xydy = \int_0^2 (x + 0^2)dx + 2x.0.0 = \int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$.

Đoạn thẳng CB nối điểm C(2,0) với điểm B(2,2) có phương trình x = 2 (0 ≤ y ≤ 2) ⇒ dx = 0, do đó sau khi thay $\begin{cases} x = 2 \\ dx = 0 \end{cases}$ (0 ≤ y ≤ 2) vào biểu thức dưới dấu tích phân của tích phân $\int_{CB}(x + y^2)dx + 2xydy$ chúng ta được

$$\int_{CB}(x+y^2)dx+2xydy=\int_0^2(2+y^2).0+2.2ydy=4\int_0^2 ydy=2y^2\Big|_0^2=8.$$

$$\Rightarrow I=\int_{AB}(x+y^2)dx+2xydy=\int_{AC}(x+y^2)dx+2xydy+\int_{CB}(x+y^2)dx+2xydy=2+8=10\,.$$

Như vậy, mặc dù tích phân $I=\int_{AB}(x+y)^2dx+2xydy$ được tính từ điểm A đến điểm B trên 2 đường khác nhau nhưng có giá trị tính được bằng nhau.

Kết quả trên dẫn đến việc xuất hiện câu hỏi: Với điều kiện nào thì tích phân đường loại hai không phụ thuộc vào dạng của đường cong phẳng tính tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong? Như chúng ta sẽ thấy trong định lý sau đây, các Nhà toán học đã tìm thấy điều kiện đó là $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$ đối với tích phân $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

Định lý. Giả sử các hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D nào đó, khi đó 4 mệnh đề sau là tương đương:

(1) $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$ với $\forall$(x,y)$\in$D;

(2) $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ với mọi đường cong kín L nằm trong miền D;

(3) $\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B của cung AB là một cung nằm trong miền D, mà không phụ thuộc vào dạng của cung AB;

(4) Biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy xác định trên miền D.

$$du(x,y)=u'_x(x,y)dx+u'_y(x,y)dy\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Hệ quả 1. Nếu biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số u(x,y) trong một miền D$\in$$\mathbf{R}^2$ thì

$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x_B,y_B)-u(x_A,y_A)$ dọc theo mọi đường nối điểm A đến điểm B nằm trong miền D (*tương tự như công thức Newton – Leibnitz*).

Hệ quả 2. Nếu D = $\mathbf{R}^2$ thì biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số u(x,y) được xác định bởi công thức

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$ với (x_0,y_0) tùy ý thuộc miền D;

hoặc $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt$ với (x_0,y_0) tùy ý thuộc miền D.

Giá trị của x_0 và y_0 được chọn để việc tính toán các biểu thức toán học cho đơn giản.

Bây giờ, chúng ta quay lại xét Ví dụ 3.14. Tính $I=\int_{AB}(x+y^2)dx+2xydy$ trên cung AB đi từ điểm A(0,0) đến điểm B(2,2). Nếu đặt $\begin{cases}P(x,y)=x+y^2\\Q(x,y)=2xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'_y(x,y)=2y\\Q'_x(x,y)=2y\end{cases}\Rightarrow Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$ thì theo Mệnh đề 4 của định lý trên, biểu thức $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=(x+y^2)dx+2xydy$ là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy.

Theo Hệ quả 2 thì $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt=\int_0^{x}P(t,0)dt+\int_0^{y}Q(x,t)dt=$

$$\int_0^x (t+0^2)dt + \int_0^y 2xtdt = \int_0^x tdt + 2x\int_0^y tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + 2x\frac{t^2}{2}\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy^2$$

Theo Hệ quả 1 thì $I = \int_{OA} (x+y^2)dx + 2xydy = u(x,y)\Big|_{A(0,0)}^{B(2,2)} = \left(\frac{x^2}{2} + xy^2\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}^{(x,y)=(2,2)} =$

$u(2,2) - u(0,0) = 10 - 0 = 10$.

Ví dụ **3.15.** Cho các hàm số $\begin{cases} P(x,y) = ye^{xy} + my^2 + x \\ Q(x,y) = xe^{xy} - 2m^2xy \end{cases}$ với m là một tham số.

(a) Tìm giá trị của m để biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy;

(b) Với giá trị của m tìm được ở (a), xác định hàm số u(x,y).

Bài giải.

(a) Theo định lý trên, để biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy thì các hàm số P(x,y), Q(x,y) phải thỏa mãn điều kiện $Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$ với $\forall$(x,y)$\in$D, cụ thể là $Q'_x(x,y) = P'_y(x,y) \Leftrightarrow e^{xy} + xye^{xy} - 2m^2y = e^{xy} + xye^{xy} + 2my \Leftrightarrow my + m^2y = 0$

$\Leftrightarrow m(1+m)y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$ với $\forall$(x,y)$\in$D

(b) Với m = 0 thì $\begin{cases} P(x,y) = ye^{xy} + 0.y^2 + x = ye^{xy} + x \\ Q(x,y) = xe^{xy} - 2.0^2.xy = xe^{xy} \end{cases}$

Khi đó $u(x,y) = \int_{x_0}^x P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x,t)dt = \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt =$

$$\int_0^x \left(0.e^{t.0} + t\right)dt + \int_0^y xe^{xt}dt = \int_0^x tdt + \int_0^y e^{xt}d(xt) = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + e^{xt}\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + e^{xy} - 1.$$

Thử lại $du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy = \left(x + ye^{xy}\right)dx + xe^{xy}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Với m = –1 thì $\begin{cases} P(x,y) = ye^{xy} + (-1).y^2 + x = ye^{xy} + x - y^2 \\ Q(x,y) = xe^{xy} - 2.(-1)^2.xy = xe^{xy} - 2xy \end{cases}$

Khi đó $u(x,y) = \int_{x_0}^x P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x,t)dt = \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt =$

$$\int_0^x \left(0.e^{t.0} + t - 0^2\right)dt + \int_0^y \left(xe^{xt} - 2xt\right)dt = \int_0^x tdt + \int_0^y xe^{xt}dt - 2x\int_0^y tdt =$$

$$\frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \int_0^y e^{xt}d(xt) - xt^2\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + e^{xt}\Big|_0^y - xy^2 = \frac{x^2}{2} - xy^2 + e^{xy} - 1$$

Thử lại $du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy = \left(x - y^2 + ye^{xy}\right)dx + \left(-2xy + xe^{xy}\right)dy =$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Nhận xét. Nếu tích phân đường loại hai không phụ thuộc dạng của đường lấy tích phân thì chúng ta có thể chọn đường lấy tích phân sao cho việc tính toán trở nên đơn giản.

Ví dụ **3.16.** Tính $I = \int_{AB} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ trên cung AB với A(1,1), B(2,2).

Bài giải.

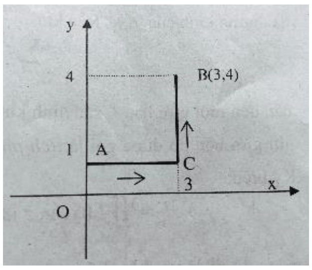
Chúng ta có $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = \dfrac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ Q'_x(x,y) = \dfrac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$ nên tích phân $I = \int\limits_{AB} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$ không phụ thuộc vào dạng vào dạng của đường nối điểm A với điểm B.

Để việc tính toán được đơn giản, chúng ta chọn đường lấy tích phân là đoạn thẳng AB có phương trình x = y ($1 \le y \le 2$) $\Rightarrow$ dx = dy. Do đó, nếu thay x = y và dx = dy vào biểu thức dưới dấu tích phân thì chúng ta được $I = \int\limits_{AB} \dfrac{y-y}{y^2+y^2}dx + \dfrac{y+y}{y^2+y^2}dy = \int\limits_{AB} \dfrac{0}{2y^2}.dy + \dfrac{2y}{2y^2}dy = \int\limits_1^2 \dfrac{dy}{y} = \ln y\Big|_1^2 = \ln 2$.

Ví dụ **3.17.** Tính $I = \int\limits_{AB} xy^2dx + x^2ydy$ trên cung AB với A(0,1), B(3,4).

Bài giải.

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy^2 \\ Q(x,y) = x^2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(x,y) = 2xy \\ Q'_x(x,y) = 2xy \end{cases} \Rightarrow Q'_x(x,y) = P'_y(x,y) \Rightarrow I = \int\limits_{AB} xy^2dx + x^2ydy$ không phụ thuộc vào dạng của đường nối điểm A với điểm B, do đó để tính toán được đơn giản, chúng ta chọn đường lấy tích phân là các cạnh AC và CB của ΔACB với C(3,1).



$$\Rightarrow I = \int\limits_{AB} xy^2dx + x^2ydy = \int\limits_{AC} xy^2dx + x^2ydy + \int\limits_{CB} xy^2dx + x^2ydy$$

- Phương trình đoạn thẳng AC là y = 1 ($0 \le x \le 3$) $\Rightarrow$ dy = 0 ($0 \le x \le 3$)

$$\Rightarrow \int\limits_{AC} xy^2dx + x^2ydy = \int\limits_0^3 x.1^2dx + x^2.1.0 = \int\limits_0^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}$$

- Phương trình đoạn thẳng CB là x = 3 ($1 \le y \le 4$) $\Rightarrow$ dx = 0 ($1 \le y \le 4$)

$$\Rightarrow \int\limits_{CB} xy^2dx + x^2ydy = \int\limits_1^4 3y^2.0 + 3^2ydy = \int\limits_1^4 9ydy = 9\int\limits_1^4 ydy = 9.\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 = 72 - \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{AB} xy^2dx + x^2ydy = \frac{9}{2} + 72 - \frac{9}{2} = 72.$$

Cách khác. Vì $Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$ nên biểu thức dưới dấu tích phân

$xy^2dx + x^2ydy \equiv P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^x P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^y Q(x,t)dt = \int\limits_0^x P(t,0)dt + \int\limits_0^y Q(x,t)dt = \int\limits_0^x t.0^2dt + \int\limits_0^y x^2tdt =$$

$$0 + x^2\int\limits_0^y tdt = x^2\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^y = \frac{x^2y^2}{2}.$$

$$\Rightarrow I = \int_{AB} xy^2dx + x^2ydy = u(x,y)\Big|_{A(0,1)}^{B(3,4)} = \frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_{(x,y)=(0,1)}^{(x,y)=(3,4)} = u(3,4) - u(0,1) = 72 - 0 = 72.$$

3.4. Tích phân mặt loại một

3.4.1. Định nghĩa tích phân mặt loại một

Bài toán vật lý dẫn đến khái niệm tích phân mặt loại một

Giả sử trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz có một mặt cong S mỏng (chỉ có kích thước rộng và dài, độ dày không đáng kể) có khối lượng riêng tại điểm $(x,y,z)\in S$ được biểu diễn bằng hàm số $f(x,y,z)$ đơn trị, liên tục và không âm. Yêu cầu tìm khối lượng m của mặt cong S.

Để tính m, chúng ta thực hiện như sau: Chia tùy ý mặt cong S thành n mặt cong nhỏ S_i $(1 \le i \le n)$ không dẫm lên nhau và ký hiệu diện tích của mặt cong nhỏ S_i là ΔS_i $(1 \le i \le n)$. Trên mặt cong nhỏ S_i lấy tùy ý một điểm (x_i,y_i,z_i), nếu mặt cong S_i đủ nhỏ thì chúng ta có thể coi giá trị $f(x_i,y_i,z_i)$ không đổi trên mặt cong nhỏ S_i; khi đó, khối lượng của mặt cong nhỏ S_i là $m_i \approx f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$.

Như vậy, nếu mọi mặt cong nhỏ S_i $(1 \le i \le n)$ đủ nhỏ thì có thể coi khối lượng của mặt S là

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \approx f(x_1,y_1,z_1).\Delta S_1 + f(x_2,y_2,z_2).\Delta S_2 + \ldots + f(x_n,y_n,z_n).\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$$

Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$ sẽ có độ chính xác cao (tức là giá trị của biểu thức này gần với khối lượng thực m của mặt cong S) nếu n càng lớn và tất cả các ΔS_i $(1 \le i \le n)$ càng bé. Do đó, khối lượng m của mặt cong S bằng giới hạn của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ cùng với diện tích của mỗi mặt cong nhỏ ΔS_i $(1 \le i \le n)$ bé dần về 0, tức là $m = \lim\limits_{\substack{\max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$.

Định nghĩa tích phân mặt loại một

Cho mặt cong $S\subset\mathbf{R}^3$ và hàm số $f(x,y,z)$ xác định với $\forall(x,y,z)\in S$. Chia S thành n mặt cong nhỏ S_i $(1 \le i \le n)$ không dẫm lên nhau có diện tích tương ứng bằng $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trên mỗi mặt cong ΔS_i $(1 \le i \le n)$ lấy điểm (x_i,y_i,z_i) tùy ý.

Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i).\Delta S_i$, nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i \to 0$ mà $I_n \to I$ là một giá trị hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia mặt cong S thành n mặt cong nhỏ và cách chọn điểm $(x_i,y_i.z_i)$ trên mỗi mặt cong nhỏ S_i $(1 \le i \le n)$, thì I được gọi là tích phân mặt loại một của hàm số $f(x,y,z)$ trên mặt cong S và ký hiệu là $I = \iint_S f(x,y,z)dS$, trong đó $f(x,y,z)$ và dS được gọi tương ứng là hàm dưới dấu tích phân và vi phân diện tích mặt cong (vi phân mặt).

Nếu S là mặt cong trơn (phương trình của mặt cong S là hàm số $z = z(x,y)$ đơn trị, liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó) và nếu hàm số $f(x,y,z)$ liên tục với $\forall(x,y,z)\in S$ thì tích phân mặt loại một tồn tại.

3.4.2. Tính chất của tích phân mặt loại một

Tích phân mặt loại một có các tính chất giống như các tính chất của tích phân xác định.

3.4.3. Cách tính tích phân mặt loại một

Trong không gian $\mathbf{R}^3$ cho mặt cong S. Giả sử hình chiếu của S lên mặt phẳng tọa độ Oxy là một miền đóng D. Giả sử phương trình của mặt cong S là hàm số $z = z(x,y)$ đơn trị, liên tục với $\forall(x,y)\in D$ và có các đạo hàm riêng $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$ liên tục với $\forall(x,y)\in D$.

Nếu mỗi đường thẳng song song với trục tọa độ Oz cắt mặt cong S không quá một điểm và hàm số f(x,y,z) liên tục với $\forall(x,y,z)\in S$ thì vi phân mặt $dS=\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy$ và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z)=f[x,y,z(x,y)]$

$$\Rightarrow \iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy.$$

Như vậy, tích phân mặt loại một được đưa về việc tính tích phân hai lớp và thực hiện các công việc sau đây:

- Sử dụng phương trình của mặt S (đã được cho hoặc giải ra từ phương trình ẩn đối với z) dưới dạng hiện z = z(x,y) để tìm vi phân mặt $dS=\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy$ và hàm dưới dấu tích phân $f[x,y,z(x,y)]$.

- Tìm hình chiếu D của mặt S lên mặt phẳng tọa độ Oxy.

- Thay vào công thức $\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy$ để tính.

Ví dụ **3.18.** Tính $I=\iint_S zdS$ trên mặt S

(a) S là nửa mặt cầu $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

(b) S là paraboloit $x^2+y^2=2z$ ($0\le z\le 1$).

Bài giải.

(a) Chúng ta có $z(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Rightarrow\begin{cases} z'_x(x,y)=-x(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\\ z'_y(x,y)=-y(R^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow dS=\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

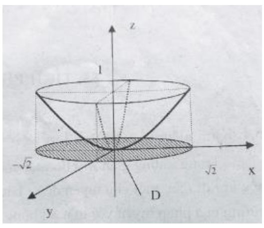
Hàm số dưới dấu tích phân $f[x,y,z(x,y)]=z=z(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy là hình tròn D = $\{x^2+y^2\le R^2\}$.

$$\Rightarrow I=\iint_S zdS=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\iint_D dxdy$$

Theo ý nghĩa hình học của tích phân 2 lớp thì tích phân $\iint_D dxdy$ là diện tích của hình tròn D có bán kính R $\Rightarrow\iint_D dxdy=\pi R^2\Rightarrow I=R\iint_D dxdy=R\pi R^2=\pi R^3$.

(b) $x^2+y^2=2z\Leftrightarrow z(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ là phương trình của mặt cong S.



Chúng ta có

$$z(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow\begin{cases} z'_x(x,y)=x\\ z'_y(x,y)=y\end{cases}\Rightarrow dS=\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

Hàm số dưới dấu tích phân $f\big(x,y,z(x,y)\big)=z=z(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$

Giao của mặt phẳng z = 1 với paraboloit tròn xoay $x^2 + y^2 = 2z$ là hình tròn $D = \{x^2 + y^2 \le 2\}$ nên hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $D = \{x^2 + y^2 \le 2\}$.

$$\Rightarrow I=\iint_S zdS=\iint_D \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

Đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J=r$ và miền $D'=\begin{cases} 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$ vì đối với tọa độ r, chúng ta thay $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của hình tròn $x^2 + y^2 \le 2 \Rightarrow r^2 \le 2 \Rightarrow 0\le r\le\sqrt{2}$, còn đối với tọa độ φ thì $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y)=(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=r^2\sqrt{1+r^2}$

$$\Rightarrow I=\iint_{D'} r^2\sqrt{1+r^2}|J|drd\varphi=\iint_{D'} r^2\sqrt{1+r^2}rdrd\varphi=\iint_{D'} r^3\sqrt{1+r^2}drd\varphi=\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr\right)$$

- Tính $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi=\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=2\pi$

- Tính $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr=\int_0^{\sqrt{2}}(1+r^2-1)(1+r^2)^{\frac{1}{2}}d(1+r^2)=\int_0^{\sqrt{2}}\left[(1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]d(1+r^2)=$

$$\left(\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}+1}}{(3/2)+1}-\frac{(1+r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}}=\frac{4(6\sqrt{3}+1)}{15}$$

$$\Rightarrow I=2\pi.\frac{4(6\sqrt{3}+1)}{15}=\frac{8(6\sqrt{3}+1)\pi}{15}.$$

3.4.4. Ý nghĩa vật lý và ý nghĩa hình học của tích phân mặt loại một

Nếu mặt cong S có khối lượng riêng tại điểm $(x,y,z)\in S$ bằng $f(x,y,z) > 0$ thì khối lượng m của mặt cong S là $m=\iint_S f(x,y,z)dS$ (*ý nghĩa vật lý*). Đặc biệt, khi $f(x,y,z) = 1$ thì $S=\iint_S dS$ là diện tích của mặt cong S (*ý nghĩa hình học*).

3.5. Tích phân mặt loại hai

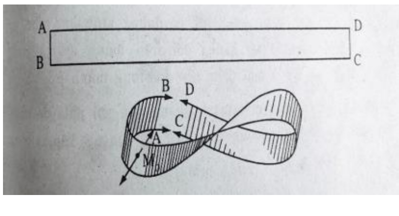
3.5.1. Khái niệm mặt định hướng

Trong không gian $\mathbf{R}^3$ cho mặt cong trơn S.

Mặt S được gọi là mặt hai phía nếu khi đi theo một đường cong đóng bất kỳ nằm trong mặt S không có điểm chung với biên của S thì hướng của véc tơ pháp tuyến của mặt S không thay đổi.

Nếu trên mặt S có một đường cong đóng mà đi theo đường cong này hướng của véc tơ pháp tuyến đổi ngược lại thì mặt S được gọi là mặt một phía.

Một ví dụ điển hình về mặt một phía là dải Mobius: Lấy một băng giấy hình chữ nhật ABCD và xoắn băng giấy này nửa vòng theo chiều dài rồi gắn điểm C với điểm A, điểm D với điểm B.

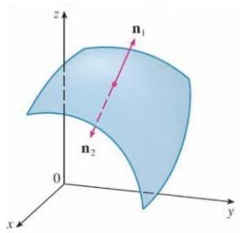


Khi điểm M di chuyển một vòng trên dải Mobius, xuất phát từ điểm M_O thì lúc gặp lại điểm M_O véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ đổi hướng ngược lại.

Mặt hai phía được gọi là mặt định hướng được, còn mặt một phía được gọi là mặt không định hướng được. Ở đây, chúng ta chỉ xét các mặt định hướng được.

Giả sử S là mặt định hướng được và gọi $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S tại điểm $M(x,y,z) \in S$ (véc tơ pháp tuyến là véc tơ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của mặt S tại điểm M), khi đó hướng của mặt S được xác định là hướng của $\vec{n}$. Nếu S là mặt kín và định hướng được thì sẽ xác định được phía trong, phía ngoài; còn nếu S là mặt không kín thì sẽ xác định được phía trên, phía dưới.

Giả sử mặt S trong không gian $\mathbf{R}^3$ có phương trình F(x,y,z) = 0, các Nhà toán học đã chứng minh rằng véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tại điểm $(x,y,z) \in S$ chính là véc tơ GradF(x,y,z), tức là $\vec{n}(x,y,z) = \text{Gradf}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k}$.



Chúng ta lưu ý rằng, tại điểm $(x,y,z) \in S$ thì véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ có hai hướng ngược nhau, do đó nếu chúng ta quy ước một hướng của nó là dương (dấu +) thì hướng ngược lại của nó là âm (dấu –).

Nếu ký hiệu $\vec{N} = \vec{N}(x,y,z)$ là véc tơ pháp tuyến *đơn vị* của mặt S tại điểm $M(x,y,z) \in S$ thì $\vec{N} = \vec{n}/|\vec{n}| = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$ với cosα, cosβ và cosγ là các cosin chỉ phương của véc tơ pháp tuyến của mặt S tại điểm $M(x,y,z) \in S$. Trong đó α, β và γ là các góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ với các trục tọa độ Ox, Oy và Oz tức là $\alpha = (\vec{n}, \vec{Ox})$, $\beta = (\vec{n}, \vec{Oy})$ và $\gamma = (\vec{n}, \vec{Oz})$.

Do đó, véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt S tại điểm $M(x,y,z) \in S$ là

$$\vec{N} = \frac{\text{Gradf}(x,y,z)}{|\text{Gradf}(x,y,z)|} = \frac{F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k}}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2 + [F'_y(x,y,z)]^2 + [F'_z(x,y,z)]^2}} = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{F'_x(x,y,z)}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2 + [F'_y(x,y,z)]^2 + [F'_z(x,y,z)]^2}} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{F'_y(x,y,z)}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2 + [F'_y(x,y,z)]^2 + [F'_z(x,y,z)]^2}} \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{F'_z(x,y,z)}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2 + [F'_y(x,y,z)]^2 + [F'_z(x,y,z)]^2}} \end{cases}$$

Ví dụ **3.19.** Xác định véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{N}$ tại điểm $(x,y,z) \in S$

(a) S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(b) S là mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) S là mặt phẳng đi qua các điểm A, B và C có tọa độ (a,0,0), (0,b,0) và (0,0,c) với a > 0, b > 0 và c > 0.

Bài giải. (a) Viết phương trình của mặt cầu S dưới dạng $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Chúng ta có $\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 2x \\ F'_y(x,y,z) = 2y \\ F'_z(x,y,z) = 2z \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k} = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(x,y,z) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{y}{R}\vec{j} + \frac{z}{R}\vec{k}$$

(b) Viết phương trình của mặt nón S dưới dạng $F(x,y,z) = z - z(x,y) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

Chúng ta có $\begin{cases} F'_x(x,y,z) = -x\big/\sqrt{x^2 + y^2} \\ F'_y(x,y,z) = -y\big/\sqrt{x^2 + y^2} \\ F'_z(x,y,z) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(x,y,z) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{-x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\,\vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

(c) Phương trình mặt phẳng S đi qua 3 điểm A(a,0,0), B(0,b,0) và C(0,0,c) với a > 0, b > 0 và c > 0 là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Chúng ta viết phương trình của mặt phẳng S dưới dạng $F(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$.

Chúng ta có $\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 1/a \\ F'_y(x,y,z) = 1/b \\ F'_z(x,y,z) = 1/c \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k} = \frac{\vec{i}}{a} + \frac{\vec{j}}{b} + \frac{\vec{k}}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(x,y,z) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\dfrac{\vec{i}}{a} + \dfrac{\vec{j}}{b} + \dfrac{\vec{k}}{c}}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}\,\vec{i} + \frac{1}{b\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}\,\vec{j} + \frac{1}{c\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}\,\vec{k}$$

3.5.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Trong không gian $\mathbf{R}^3$ cho mặt (phẳng/cong) S định hướng được và chúng ta xét 3 trường hợp: (1) Phương trình của mặt cong S là hàm số z = z(x,y), (2) Phương trình của mặt cong S là hàm số x = x(y,z) và (3) Phương trình của mặt cong S là hàm số y = y(x,z).

Trường hợp 1. Giả sử hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng tọa độ Oxy là một miền đóng D_{xy}. Giả sử phương trình của mặt S là hàm số z = z(x,y) đơn trị, liên tục với $\forall(x,y)\in D_{xy}$ và có các đạo hàm riêng $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$ liên tục với $\forall(x,y)\in D_{xy}$.

Vì mặt S định hướng được, nên có hai phía và chúng ta ký hiệu S^+ là mặt S được định hướng lên phía trên so với trục Oz, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oz một góc nhọn $(\vec{n},\vec{Oz}) < \pi/2$, còn S^- là mặt S được định hướng xuống phía dưới so với trục Oz, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oz một góc tù $(\vec{n},\vec{Oz}) > \pi/2$.

Giả sử hàm số R(x,y,z) được xác định trên mặt S định hướng được, tức là $\forall(x,y,z)\in S \to R(x,y,z)\in \mathbf{R}$.

Khi đó, chúng ta gọi tích phân của hàm số R(x,y,z) lấy theo phía trên của mặt S và theo vi phân dxdy là tích phân của hàm hợp R[x,y,z(x,y)] lấy trên miền D_{xy} và ký hiệu là $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ là tích phân mặt loại hai của hàm số R(x,y,z) lấy theo phía trên của mặt S.

Tương tự, chúng ta gọi tích phân của hàm số R(x,y,z) lấy theo phía dưới của của mặt S và theo vi phân dxdy là tích phân của hàm hợp R[x,y,z(z,y)] lấy trên miền D_{xy} và ký hiệu là $\iint\limits_{S^-} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ là tích phân mặt loại hai của hàm số R(x,y,z) lấy theo phía dưới của mặt S.

Như vậy, theo định nghĩa thì chúng ta có $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{S^-} R(x,y,z)dxdy$.

Bây giờ, chúng ta tính tích phân mặt loại một $\iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS$ với (1) phương trình của mặt S được cho dưới dạng hiện z = z(x,y) ⇔ F(x,y,z) = F[x,y,z(x,y)] = z – z(x,y) = 0 và (2) $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S hướng lên phía trên (theo định nghĩa thì $\gamma = (\vec{n},\vec{Oz})$ là góc nhọn).

+ Hàm dưới dấu tích phân R(x,y,z) = R[x,y,z(x,y)]

+ $\cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \cos\gamma = \dfrac{F'_z(x,y,z)}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2+[F'_y(x,y,z)]^2+[F'_z(x,y,z)]^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}}$

ở đây lấy dấu + vì $\gamma = (\vec{n},\vec{Oz})$ là góc nhọn.

+ Vi phân mặt $dS = \sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS =$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\frac{1}{\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}}\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}dxdy =$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS. \ (*)$$

Hoàn toàn tương tự, chúng ta tính tích phân mặt loại một $\iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS$ với (1) phương trình của mặt S được cho dưới dạng hiện z = z(x,y) ⇔ F(x,y,z) = F[x,y,z(x,y)] = z – z(x,y) = 0 và (2) $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S hướng xuống phía dưới (theo định nghĩa thì $\gamma = (\vec{n},\vec{Oz})$ là góc tù).

+ Hàm dưới dấu tích phân R(x,y,z) = R[x,y,z(x,y)]

+ $\cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \cos\gamma = \dfrac{F'_z(x,y,z)}{\sqrt{[F'_x(x,y,z)]^2 + [F'_y(x,y,z)]^2 + [F'_z(x,y,z)]^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}}$

ở đây lấy dấu – vì $\gamma = (\vec{n},\vec{Oz})$ là góc tù.

+ Vi phân mặt $dS = \sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}\,dxdy$

$$\Rightarrow \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS =$$

$$\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\frac{-1}{\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}}\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}\,dxdy =$$

$$-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì $\iint_{S^-} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$

$$\Rightarrow \iint_{S^-} R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS. \ (**)$$

Các công thức (*), (**) có thể viết chung thành $\iint_{S^\pm} R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS$ trong đó, vế phải của công thức này là tích phân mặt loại một mà chúng ta đã biết cách tính. Như vậy, việc tính tích phân mặt loại hai được đưa về việc tính tích phân mặt loại một theo công thức này.

Nhận xét. Nếu mặt S là mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ Oz (phương trình của mặt S không có biến z) thì phương trình của mặt S không thể xác định bởi phương trình z = z(x,y) được, nên định nghĩa của tích phân mặt loại hai vừa nêu ở trên là $\iint_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ và $\iint_{S^-} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$ không có nghĩa vì khi đó hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng tọa độ Oxy là một đường cong (coi như có diện tích bằng không). Do đó, chúng ta quy ước: khi S là mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ Oz thì coi như $\iint_{S^\pm} R(x,y,z)dxdy = 0.$ Quy ước này hoàn toàn phù hợp với công thức

$$\iint_{S^\pm} R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS = 0 \text{ vì khi đó } (\vec{n},\vec{Oz}) = \pi/2 \Rightarrow \cos(\vec{n},\vec{Oz}) = 0.$$

Như vậy, với quy ước trên, chúng ta luôn luôn có công thức

$$\iint_{S^\pm} R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})dS.$$

Trường hợp 2. Giả sử hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng tọa độ Oyz là một miền đóng D_{yz}. Giả sử phương trình của mặt S là hàm số x = x(y,z) đơn trị, liên tục với $\forall(y,z)\in D_{yz}$ và có các đạo hàm riêng $x'_y(y,z), x'_z(y,z)$ liên tục với $\forall(y,z)\in D_{yz}$.

Vì mặt S định hướng được nên có hai phía và chúng ta ký hiệu S^+ là mặt S được định hướng lên phía trên so với trục Ox, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Ox một góc nhọn $(\vec{n},\vec{Ox}) < \pi/2$, còn

S^- là mặt S được định hướng xuống phía dưới so với trục Ox, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Ox một góc tù $(\vec{n}, \vec{Ox}) > \pi/2$.

Giả sử hàm số P(x,y,z) được xác định trên mặt S định hướng được, tức là $\forall(x,y,z) \in S \rightarrow P(x,y,z) \in \mathbf{R}$.

Tiếp tục hoàn toàn tương tự như Trường hợp 1, chúng ta nhận được

$$\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz = \iint_{S} P(x,y,z)\cos(\vec{n}, \vec{Ox})dS .$$

Trường hợp 3. Giả sử hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng tọa độ Oxz là một miền đóng D_{xz}. Giả sử phương trình của mặt S là hàm số y = y(x,z) đơn trị, liên tục với $\forall(x,z) \in D_{xz}$ và có các đạo hàm riêng $y'_x(x,z), y'_z(x,z)$ liên tục với $\forall(x,z) \in D_{xz}$.

Vì mặt S định hướng được nên có hai phía và chúng ta ký hiệu S^+ là mặt S được định hướng lên phía trên so với trục Oy, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oy một góc nhọn $(\vec{n}, \vec{Oy}) < \pi/2$, còn S^- là mặt S được định hướng xuống phía dưới so với trục Oy, tức là véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oy một góc tù $(\vec{n}, \vec{Oy}) > \pi/2$.

Giả sử hàm số Q(x,y,z) được xác định trên mặt S định hướng được, tức là $\forall(x,y,z) \in S \rightarrow Q(x,y,z) \in \mathbf{R}$.

Tiếp tục hoàn toàn tương tự như Trường hợp 1 và Trường hợp 2, chúng ta cũng nhận được

$$\iint_{S^{\pm}} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{S} Q(x,y,z)\cos(\vec{n}, \vec{Oy})dS .$$

Tóm lại. Nếu phương trình của mặt S có thể viết đồng thời dưới ba dạng z = z(x,y), x = x(y,z), y = y(x,z) và P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) là ba hàm số xác định và liên tục trên mặt S thì chúng ta định nghĩa được tích phân mặt loại hai tổng quát lấy trên mặt S định hướng được theo chiều của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là tổng của ba tích phân

$$\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + \iint_{S^{\pm}} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{S^{\pm}} R(x,y,z)dxdy$$

với quy ước: nếu S là mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ Ox thì tích phân thứ nhất ở vế phải bằng không $\left(\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz = 0\right)$, nếu S là mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ Oy thì tích phân thứ hai ở vế phải bằng không $\left(\iint_{S^{\pm}} Q(x,y,z)dzdx = 0\right)$ và nếu S là mặt trụ có đường sinh song song với trục tọa độ Oz thì tích phân thứ ba ở vế phải bằng không $\left(\iint_{S^{\pm}} R(x,y,z)dxdy = 0\right)$.

3.5.3. Tính chất của tích phân mặt loại hai

Nếu đổi hướng mặt S thì tích phân mặt loại hai trên mặt S đổi dấu.

Tích phân mặt loại hai có các tính chất giống như các tính chất của tích phân xác định.

3.5.4. Cách tính tích phân mặt loại hai

Để tính tích phân mặt loại hai (lấy theo phía trên/dưới đối với mặt không kín hoặc lấy theo phía ngoài/trong đối với mặt kín)

$$\iint\limits_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$\iint\limits_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{S^{\pm}} Q(x,y,z)dzdx + \iint\limits_{S^{\pm}} R(x,y,z)dxdy$ được định nghĩa ở trên, chúng ta ký hiệu $I = \iint\limits_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ và $\begin{cases} I_x = \iint\limits_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz \\ I_y = \iint\limits_{S^{\pm}} Q(x,y,z)dzdx \\ I_z = \iint\limits_{S^{\pm}} R(x,y,z)dxdy \end{cases}$

Chúng ta tính từng tích phân I_x, I_y, I_z và suy ra $I = I_x + I_y + I_z$.

- Tính $I_z = \iint\limits_{S^{\pm}} R(x,y,z)dxdy$: Sử dụng phương trình của mặt S (đã được cho hoặc giải ra từ phương trình ẩn đối với z) dưới dạng hiện z = z(x,y) – là hàm số có các đạo hàm riêng liên tục với $\forall(x,y) \in D_{xy}$.

+ Nếu véc tơ pháp tuyến của mặt S (lấy theo phía trên/dưới đối với mặt không kín hoặc lấy theo phía ngoài/trong đối với mặt kín) tạo thành với trục Oz một góc nhọn thì $I_z = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$.

+ Nếu véc tơ pháp tuyến của mặt S (lấy theo phía trên/dưới đối với mặt không kín hoặc lấy theo phía ngoài/trong đối với mặt kín) tạo thành với trục Oz một góc tù thì $I_z = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$.

+ Nếu véc tơ pháp tuyến của mặt S (lấy theo phía trên/dưới đối với mặt không kín hoặc lấy theo phía ngoài/trong đối với mặt kín) tạo thành với trục Oz một góc vuông thì $I_z = 0$.

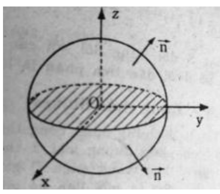
- Các tích phân I_x, I_y được tính tương tự.

Ví dụ **3.20.** Tính $I = \iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy$

(a) S là mặt định hướng theo pháp tuyến phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(b) S là mặt định hướng theo pháp tuyến phía ngoài mặt ellipsoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (a > 0, b > 0 và c > 0).

Bài giải. (a) Đồ thị của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



Vì phương trình của mặt cầu và biểu thức dưới dấu tích phân không đổi khi hoán vị vòng quanh x, y, z nên chúng ta có $\iint\limits_{S} xdydz = \iint\limits_{S} ydzdx = \iint\limits_{S} zdxdy \Rightarrow I = 3\iint\limits_{S} zdxdy$, do đó chúng ta chỉ phải tính tích phân $\iint\limits_{S} zdxdy$.

Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ của mặt cầu chúng ta giải ra được $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, khi đó $S = S_t \cup S_d$ với S_t và S_d là nửa mặt cầu trên và nửa mặt cầu dưới của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, có phương trình tương ứng là $z_t(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(z \ge 0)$ và $z_d(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(z \le 0)$.

Do đó $\iint\limits_S z\,dxdy = \iint\limits_{S_t} z_t(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_d} z_d(x,y)dxdy$

Suy ra $I = 3\left(\iint\limits_{S_t} z_t(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_d} z_d(x,y)dxdy\right) =$

$$3\left(\iint\limits_{S_t} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy + \iint\limits_{S_d} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy\right) =$$

$$3\left(\iint\limits_{S_t} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy - \iint\limits_{S_d} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy\right)$$

Hình chiếu của S_t và S_d lên mặt phẳng tọa độ Oxy là hình tròn $D_{xy} = \{x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của nửa mặt cầu trên (S_1) tạo thành với trục tọa độ Oz một góc nhọn nên theo định nghĩa thì $\iint\limits_{S_t} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, còn véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của nửa mặt cầu dưới (S_2) tạo thành với trục tọa độ Oz một góc tù nên theo định nghĩa thì $\iint\limits_{S_d} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$

$$\Rightarrow I = 3\left[\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \left(-\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)\right] = 6\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy.$$

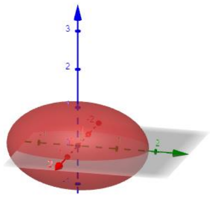
Để tính tích phân $\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$ chúng ta đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$ và miền $D'_{xy} = \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ vì đối với tọa độ r, chúng ta thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2 \Rightarrow r^2 \le R^2 \Rightarrow 0 \le r \le R$, còn đối với tọa độ φ thì $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Biểu thức dưới dấu tích phân $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sqrt{R^2 - r^2}$

$$\Rightarrow I = 6\iint\limits_{D'} \sqrt{R^2 - r^2}|J|drd\varphi = 6\iint\limits_{D'} \sqrt{R^2 - r^2}rdrd\varphi = 6\iint\limits_{D'} r\sqrt{R^2 - r^2}drd\varphi = 6\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}dr\right)$$

$$\text{Vì}\begin{cases} \int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi \\ \int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2 - r^2) = -\frac{1}{2}\left.\frac{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{r=0}^{r=R} = \frac{R^3}{3} \end{cases} \Rightarrow I = 6.2\pi.\frac{R^3}{3} = 4R^3\pi.$$

(b) Đồ thị của mặt ellipsoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Chúng ta có I = I_x + I_y + I_z với $\begin{cases} I_x = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz \\ I_y = \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx \\ I_z = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy \end{cases}$ trong đó $\begin{cases} P(x,y,z) = x \\ Q(x,y,z) = y \\ R(x,y,z) = z \end{cases}$ và các tích phân được lấy theo mặt ngoài của ellipsoit.

- Tính $I_x = \iint\limits_S xdydz$

Từ phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ của mặt ellipsoit chúng ta giải ra được

$x = x(y,z) = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$, khi đó $S = S_t^x \cup S_d^x$ với S_t^x và S_d^x là nửa mặt ellipsoit trên và nửa mặt ellipsoit dưới của mặt ellipsoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, có phương trình tương ứng là $x_t(y,z) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ $(x \geq 0)$ và $x_d(y,z) = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ $(x \leq 0)$.

Do đó $I_x = \iint\limits_S xdydz = \iint\limits_{S_t^x} xdydz + \iint\limits_{S_d^x} xdydz = \iint\limits_{S_t^x} x_t(y,z)dydz + \iint\limits_{S_d^x} x_d(y,z)dydz =$

$$\iint\limits_{S_t^x} a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz + \iint\limits_{S_d^x} -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz =$$

$$a\iint\limits_{S_t^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz - a\iint\limits_{S_d^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz =$$

$$a\left(\iint\limits_{S_t^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz - \iint\limits_{S_d^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz\right)$$

Hình chiếu của S_t^x và S_d^x lên mặt phẳng tọa độ Oyz là ellipse $D_{yz} = \left\{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của nửa mặt ellipsoit trên (S_t^x) tạo thành với trục tọa độ Ox một góc nhọn nên theo định nghĩa thì $\iint\limits_{S_t^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz$, còn véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của nửa mặt ellipsoit dưới (S_d^x) tạo thành với trục tọa độ Oz một góc tù nên theo định nghĩa thì $\iint\limits_{S_d^x} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dydz$

$$\Rightarrow I_x = a\left(\iint_{S_t^x}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz - \iint_{S_d^x}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz\right) =$$

$$a\left[\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz - \left(-\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz\right)\right] =$$

$$a\left(\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz + \iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz\right) = 2a\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz$$

Để tính tích phân $\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dydz$ chúng ta đổi tọa độ Descartes (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) mở rộng bằng phép đổi biến $\begin{cases} y = br\cos\varphi \\ z = cr\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = bcr$ và miền $D'_{yz} = \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Biểu thức dưới dấu tích phân $f(y,z) = \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow f(br\cos\varphi, cr\sin\varphi) = \sqrt{1-r^2}$

$$\Rightarrow I_x = 2a\iint_{D'_{yz}} bcr\sqrt{1-r^2}drd\varphi = 2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = 2abc\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr\right)$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi}d\varphi = \varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi \\ \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(1-r^2) = -\frac{1}{2}\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I_x = 2abc.2\pi.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}abc\pi.$$

- Tính $I_y = \iint_S ydzdx$ và $I_z = \iint_S zdxdy$ hoàn toàn tương tự như trên, chúng ta được $\begin{cases} I_y = \frac{4}{3}abc\pi \\ I_z = \frac{4}{3}abc\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = I_x + I_y + I_z = \frac{4}{3}abc\pi + \frac{4}{3}abc\pi + \frac{4}{3}abc\pi = 4abc\pi.$$

Nhận xét. Từ kết quả của (b), nếu cho a = b = c = R thì mặt ellipsoit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ suy biến thành mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ và I = $4R^3\pi$ trùng với kết quả của (a).

Ngoài ra, để tính tích phân mặt loại hai, chúng ta có thể sử dụng công thức

$$\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint_S [P(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Ox}) + Q(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oy}) + R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS$$

mà vế phải của công thức này là tích phân mặt loại một.

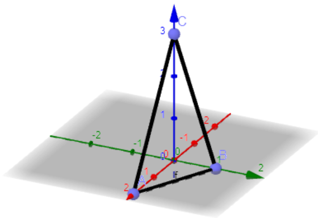
Khi tính tích phân mặt loại hai mà mặt S là mặt phẳng thì người ta hay sử dụng công thức này vì đối với một mặt phẳng xác định, véc tơ pháp tuyến không thay đổi tại mọi điểm của mặt phẳng này.

Ví dụ **3.21.** Tính $I = \iint_S (x+2y-z)dydz + (-2x+y+3z)dzdx + (4x-y+2z)dxdy$, S là mặt định hướng theo pháp tuyến mặt ngoài của tứ diện OABC với O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3).

Bài giải.

Cách 1. Chúng ta sẽ tính tích phân đã cho trên từng mặt của tứ diện OABC

I = I



Để tính các tích phân I_{ABC}, I_{OAB}, I_{OBC}, I_{OCA}, chúng ta sẽ sử dụng công thức

$$\iint_{S^{\pm}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint_{S} [P(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Ox}) + Q(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oy}) + R(x,y,z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS$$

- Tính $\mathbf{I_{ABC}}$:

Phương trình của mặt phẳng ABC là $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow F(x,y,z) = 3x + 6y + 2z - 6 = 0$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\vec{i} + F'_y(x,y,z)\vec{j} + F'_z(x,y,z)\vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\vec{n},\vec{Ox}) = \dfrac{\vec{n}.\vec{i}}{|\vec{n}||\vec{i}|} = \dfrac{(3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}).\vec{i}}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}.1} = \dfrac{3}{7} \\ \cos(\vec{n},\vec{Oy}) = \dfrac{\vec{n}.\vec{j}}{|\vec{n}||\vec{j}|} = \dfrac{(3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}).\vec{j}}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}.1} = \dfrac{6}{7} \\ \cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \dfrac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \dfrac{(3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}).\vec{k}}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}.1} = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{ABC} = \iint_{S_{ABC}} [(x+2y-z)\cos(\vec{n},\vec{Ox}) + (-2x+y+3z)\cos(\vec{n},\vec{Oy}) + (4x-y+2z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS =$$

$$\iint_{S_{ABC}} \left[(x+2y-z)\frac{3}{7} + (-2x+y+3z)\frac{6}{7} + (4x-y+2z)\frac{2}{7}\right]dS = \frac{1}{7}\iint_{S_{ABC}} (-x+10y+19z)dS$$

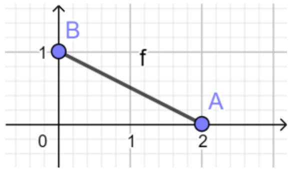
Tích phân $\iint_{S_{ABC}} (-x+10y+19z)dS$ là tích phân mặt loại một với $f(x,y,z) = -x+10y+19z$ và $z(x,y) = 3 - \frac{3}{2}x - 3y$ (giải ra từ phương trình của mặt phẳng ABC: $F(x,y,z) = 3x+6y+2z-6 = 0$) nên chúng ta tính như sau:

- Vi phân mặt $dS = \sqrt{1 + [z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}dxdy = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2}dxdy = \frac{7}{2}dxdy$

- Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z) = -x+10y+19z$

$$\Rightarrow f[x,y,z(x,y)] = -x + 10y + 19\left(3 - \frac{3}{2}x - 3y\right) = 57 - \frac{59}{2}x - 47y$$

- Hình chiếu của mặt S_{ABC} lên mặt phẳng tọa độ Oxy là



$$D_{xy} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 - x/2 \end{cases}$$

Từ đồ thị của tứ diện OABC, chúng ta thấy rằng, véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ mặt ngoài của mặt phẳng ABC là pháp tuyến hướng lên phía trên so với trục Oz nên chúng ta lấy dấu + đối với tích phân hai lớp lấy trên hình chiếu D của mặt S_{ABC} lên mặt phẳng tọa độ Oxy, tức là

$$I_{ABC} = +\frac{1}{7}\iint_D \left(57 - \frac{59}{2}x - 47y\right)\frac{7}{2}dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(57 - \frac{59}{2}x - 47y\right)dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_D \left(57 - \frac{59}{2}x - 47y\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} \left(57 - \frac{59}{2}x - 47y\right)dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(57y - \frac{59xy}{2} - \frac{47y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x/2} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{71x^2}{4} - 69x + 67\right)dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{71x^3}{12} - \frac{69x^2}{2} + 67x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{65}{6}.$$

- **Tính I_{OAB}:** Phương trình của mặt phẳng OAB là $z = 0 \Leftrightarrow F(x,y,z) = z = 0$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\,\vec{i} + F'_y(x,y,z)\,\vec{j} + F'_z(x,y,z)\,\vec{k} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 1.\vec{k} = \vec{k}$$

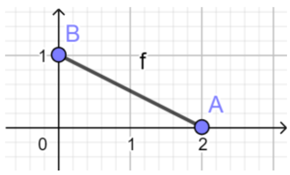
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\vec{n},\vec{Ox}) = \cos(\vec{k},\vec{Ox}) = \dfrac{\vec{k}.\vec{i}}{|\vec{k}||\vec{i}|} = 0 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oy}) = \cos(\vec{k},\vec{Oy}) = \dfrac{\vec{k}.\vec{j}}{|\vec{k}||\vec{j}|} = 0 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \cos(\vec{k},\vec{Oz}) = \dfrac{\vec{k}.\vec{k}}{|\vec{k}||\vec{k}|} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{OAB} = \iint_{S_{OAB}} [(x+2y-z)\cos(\vec{n},\vec{Ox}) + (-2x+y+3z)\cos(\vec{n},\vec{Oy}) + (4x-y+2z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS =$$

$$\iint_{S_{OAB}} [(x+2y-0).0 + (-2x+y+3.0).0 + (4x-y+2.0).1]dS = \iint_{S_{OAB}} (4x-y)dS$$

Tích phân $\iint_{S_{OAB}} (4x-y)dS$ là tích phân mặt loại một với $f(x,y,z) = 4x - y$ và $z(x,y) = 0$ nên chúng ta tính như sau:

- Vi phân mặt $dS = \sqrt{1 + [z'_x(x,y)]^2 + [z'_y(x,y)]^2}\,dxdy = \sqrt{1 + 0^2 + 0^2}\,dxdy = dxdy$
- Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z) = 4x - y$
- Hình chiếu của mặt S_{OAB} lên mặt phẳng tọa độ Oxy là



$$D_{xy} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 - x/2 \end{cases}$$

Từ đồ thị của tứ diện OABC, chúng ta thấy rằng, véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ mặt ngoài của mặt phẳng OAB là pháp tuyến hướng xuống phía dưới so với trục Oz nên chúng ta lấy dấu – đối với tích phân hai lớp lấy trên hình chiếu D_{xy} của mặt S_{OAB} lên mặt phẳng tọa độ Oxy, tức là

$$I_{OAB} = -\iint_{D_{xy}}(4x-y)dxdy = \iint_{D_{xy}}(y-4x)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^{1-x/2}(y-4x)dy = \int_0^2\left(\frac{y^2}{2}-4xy\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x/2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{17x^2}{4}-9x+1\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{17x^3}{12}-\frac{9x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = -\frac{7}{3}.$$

- Tính I_{OBC}: Phương trình của mặt phẳng OBC là $x=0 \Leftrightarrow F(x,y,z)=x=0$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\vec{i}+F'_y(x,y,z)\vec{j}+F'_z(x,y,z)\vec{k} = 1.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k} = \vec{i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\vec{n},\vec{Ox}) = \cos(\vec{i},\vec{Ox}) = \dfrac{\vec{i}.\vec{i}}{|\vec{i}||\vec{i}|} = 1 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oy}) = \cos(\vec{i},\vec{Oy}) = \dfrac{\vec{i}.\vec{j}}{|\vec{i}||\vec{j}|} = 0 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \cos(\vec{i},\vec{Oz}) = \dfrac{\vec{i}.\vec{k}}{|\vec{i}||\vec{k}|} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{OBC} = \iint_{S_{OBC}}[(x+2y-z)\cos(\vec{n},\vec{Ox})+(-2x+y+3z)\cos(\vec{n},\vec{Oy})+(4x-y+2z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS =$$

$$\iint_{S_{OBC}}[(0+2y-z).1+(-2.0+y+3z).0+(4.0-y+2z).0]dS = \iint_{S_{OBC}}(2y-z)dS$$

Tích phân $\iint_{S_{OBC}}(2y-z)dS$ là tích phân mặt loại một với $f(x,y,z)=2y-z$ và $x(y,z)=0$ nên chúng ta tính như sau:

- Vi phân mặt $dS = \sqrt{1+[x'_y(y,z)]^2+[x'_z(y,z)]^2}dydz = \sqrt{1+0^2+0^2}dydz = dydz$

- Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z)=2y-z$

- Hình chiếu của mặt S_{OBC} lên mặt phẳng tọa độ Oyz là $D_{yz} = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 3-3y \end{cases}$

Từ đồ thị của tứ diện OABC, chúng ta thấy rằng, véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ mặt ngoài của mặt phẳng OBC là pháp tuyến hướng xuống phía dưới so với trục Ox nên chúng ta lấy dấu – đối với tích phân hai lớp lấy trên hình chiếu D_{yz} của mặt S_{OBC} lên mặt phẳng tọa độ Oyz, tức là

$$I_{OBC} = -\iint_{D_{yz}}(2y-z)dydz = \iint_{D_{yz}}(z-2y)dydz = \int_0^1 dy\int_0^{3-3y}(z-2y)dz = \int_0^2\left(\frac{z^2}{2}-2yz\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3-3y}dy =$$

$$\int_0^1\left(\frac{21y^2}{2}-15y+\frac{9}{2}\right)dy = \left(\frac{7y^3}{2}-\frac{15y^2}{2}+\frac{9y}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

- Tính I_{OCA}: Phương trình của mặt phẳng OCA là $y=0 \Leftrightarrow F(x,y,z)=y=0$

$$\Rightarrow \vec{n}(x,y,z) = F'_x(x,y,z)\vec{i}+F'_y(x,y,z)\vec{j}+F'_z(x,y,z)\vec{k} = 0.\vec{i}+1.\vec{j}+0.\vec{k} = \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\vec{n},\vec{Ox}) = \cos(\vec{j},\vec{Ox}) = \dfrac{\vec{j}.\vec{i}}{|\vec{j}||\vec{i}|} = 0 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oy}) = \cos(\vec{j},\vec{Oy}) = \dfrac{\vec{j}.\vec{j}}{|\vec{i}||\vec{j}|} = 1 \\ \cos(\vec{n},\vec{Oz}) = \cos(\vec{j},\vec{Oz}) = \dfrac{\vec{j}.\vec{k}}{|\vec{j}||\vec{k}|} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{OCA} = \iint_{S_{OCA}} [(x+2y-z)\cos(\vec{n},\vec{Ox}) + (-2x+y+3z)\cos(\vec{n},\vec{Oy}) + (4x-y+2z)\cos(\vec{n},\vec{Oz})]dS =$$

$$\iint_{S_{OCA}} [(x+2.0-z).0 + (-2x+0+3z).1 + (4x-0+2z).0]dS = \iint_{S_{OCA}} (-2x+3z)dS$$

Tích phân $\iint_{S_{OCA}} (-2x+3z)dS$ là tích phân mặt loại một với $f(x,y,z) = -2x+3z$ và $y(x,z) = 0$ nên chúng ta tính như sau:

- Vi phân mặt $dS = \sqrt{1+[y'_x(x,z)]^2+[y'_z(x,z)]^2}dxdz = \sqrt{1+0^2+0^2}dxdz = dxdz$
- Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z) = -2x+3z$
- Hình chiếu của mặt S_{OCA} lên mặt phẳng tọa độ Oxz là $D_{xz} = \begin{cases} 0 \le z \le 3 \\ 0 \le x \le 2-2z/3 \end{cases}$

Từ đồ thị của tứ diện OABC, chúng ta thấy rằng, véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ mặt ngoài của mặt phẳng OCA là pháp tuyến hướng xuống phía dưới so với trục Oy nên chúng ta lấy dấu – đối với tích phân hai lớp lấy trên hình chiếu D_{xz} của mặt S_{OCA} lên mặt phẳng tọa độ Oxz, tức là

$$I_{OCA} = -\iint_{D_{xz}} (-2x+3z)dxdz = \iint_{D_{xz}} (2x-3z)dxdz = \int_0^3 dz \int_0^{2-2z/3} (2x-3z)dx = \int_0^3 \left(x^2-3zx\right)\Big|_{x=0}^{x=2-2z/3} dz =$$

$$\int_0^3 \left(\frac{22z^2}{9} - \frac{26z}{3} + 4\right)dz = \left(\frac{22z^3}{27} - \frac{13z^2}{3} + 4z\right)\Big|_{z=0}^{z=3} = -5.$$

$\Rightarrow$I = I_{ABC} + I_{OAB} + I_{OBC} + I_{OCA} = $\dfrac{65}{6} - \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{2} - 5 = 4.$

Cách 2. Chúng ta có I = I_x + I_y + I_z với $\begin{cases} I_x = \iint_S P(x,y,z)dydz \\ I_y = \iint_S Q(x,y,z)dzdx \\ I_z = \iint_S R(x,y,z)dxdy \end{cases}$ trong đó $\begin{cases} P(x,y,z) = x+2y-z \\ Q(x,y,z) = -2x+y+3z \\ R(x,y,z) = 4x-y+2z \end{cases}$ và các tích phân được lấy theo mặt ngoài của tứ diện.

- Tính $I_x = \iint_S (x+2y-z)dydz = I^x_{ABC} + I^x_{OAB} + I^x_{OBC} + I^x_{OCA}$ với $\begin{cases} I^x_{ABC} = \iint_{\Delta ABC} (x+2y-z)dydz \\ I^x_{OAB} = \iint_{\Delta OAB} (x+2y-z)dydz \\ I^x_{OBC} = \iint_{\Delta OBC} (x+2y-z)dydz \\ I^x_{OCA} = \iint_{\Delta OCA} (x+2y-z)dydz \end{cases}$

$+ I^x_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (x + 2y - z)dydz$

Phương trình của mặt phẳng ABC là $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow x = x(y, z) = 2 - 2y - \frac{2}{3}z$.

Hình chiếu của mặt phẳng ABC lên mặt phẳng tọa độ Oyz (x = 0) là ΔOBC và ký hiệu là $D_{yz} = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 3 - 3y \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng ABC tạo thành với trục tọa độ Ox một góc nhọn nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta ABC} (x + 2y - z)dydz = +\iint\limits_{D_{yz}} \left[\left(2 - 2y - \frac{2}{3}z\right) + 2y - z\right]dydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(2 - \frac{5}{3}z\right)dydz$$

$$\Rightarrow I^x_{ABC} = \iint\limits_{D_{yz}} \left(2 - \frac{5}{3}z\right)dydz = \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} \left(2 - \frac{5}{3}z\right)dz = \int_0^1 \left(2z - \frac{5z^2}{6}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3-3y} dy =$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{15y^2}{2} + 9y - \frac{3}{2}\right)dy = \left(-\frac{5y^3}{2} + \frac{9y^2}{2} - \frac{3y}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

$+ I^x_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} (x + 2y - z)dydz$

Phương trình của mặt phẳng OAB là z = 0, hình chiếu của mặt phẳng OAB lên mặt phẳng tọa độ Oyz là đoạn thẳng OB có diện tích bằng không nên $I^x_{OAB} = 0$.

$+ I^x_{OBC} = \iint\limits_{\Delta OBC} (x + 2y - z)dydz$

Phương trình của mặt phẳng OBC là x = 0, hình chiếu của mặt phẳng OBC lên mặt phẳng tọa độ Oyz là ΔOBC và ký hiệu là $D_{yz} = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 3 - 3y \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng OBC tạo thành với trục tọa độ Ox một góc tù (chính xác là π) nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta OBC} (x + 2y - z)dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} (0 + 2y - z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (z - 2y)dydz$$

$$\Rightarrow I_{OBC} = \iint\limits_{D_{yz}} (z - 2y)dydz = \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} (z - 2y)dz = \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} - 2yz\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3-3y} dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (7y^2 - 10y + 3)dy =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{7y^3}{3} - 5y^2 + 3y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

$+ I^x_{OCA} = \iint\limits_{\Delta OCA} (x + 2y - z)dydz$

Phương trình của mặt phẳng OCA là y = 0, hình chiếu của mặt phẳng OCA lên mặt phẳng tọa độ Oyz là đoạn thẳng OC có diện tích bằng không nên $I^x_{OCA} = 0$.

$$\Rightarrow I_x = \iint\limits_S (x + 2y - z)dydz = I^x_{ABC} + I^x_{OAB} + I^x_{OBC} + I^x_{OCA} = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

- Tính $I_y = \iint\limits_S (-2x+y+3z)dxdz = I^y_{ABC} + I^y_{OAB} + I^y_{OBC} + I^y_{OCA}$ với $\begin{cases} I^y_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (-2x+y+3z)dxdz \\ I^y_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} (-2x+y+3z)dxdz \\ I^y_{OBC} = \iint\limits_{\Delta OBC} (-2x+y+3z)dxdz \\ I^y_{OCA} = \iint\limits_{\Delta OCA} (-2x+y+3z)dxdz \end{cases}$

+ $I^y_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (-2x+y+3z)dxdz$

Phương trình của mặt phẳng ABC là $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow y = y(x,z) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{3}$.

Hình chiếu của mặt phẳng ABC lên mặt phẳng tọa độ Oxz (y = 0) là ΔOAC và ký hiệu là $D_{xz} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 3 - 3x/2 \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng ABC tạo thành với trục tọa độ Oy một góc nhọn nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta ABC} (-2x+y+3z)dxdz = +\iint\limits_{D_{xz}} \left[-2x + \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right) + 3z\right]dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} \left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}z\right)dxdz$$

$$\Rightarrow I^y_{ABC} = \iint\limits_{D_{xz}} \left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}z\right)dxdz = \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} \left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}z\right)dz = \int_0^2 \left(z - \frac{5}{2}xz + \frac{4}{3}z^2\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3-3x/2} dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{27}{4}x^2 - 21x + 15\right)dx = \left(\frac{9x^3}{4} - \frac{21x^2}{2} + 15x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 6.$$

+ $I^y_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} (-2x+y+3z)dxdz$

Phương trình của mặt phẳng OAB là y = 0, hình chiếu của mặt phẳng OAB lên mặt phẳng tọa độ Oxz là đoạn thẳng OA có diện tích bằng không nên $I^y_{OAB} = 0$.

+ $I^y_{OBC} = \iint\limits_{\Delta OBC} (-2x+y+3z)dxdz$

Phương trình của mặt phẳng OBC là x = 0, hình chiếu của mặt phẳng OBC lên mặt phẳng tọa độ Oxz là đoạn thẳng OC có diện tích bằng không nên $I^y_{OBC} = 0$.

+ $I^y_{OCA} = \iint\limits_{\Delta OCA} (-2x+y+3z)dxdz$

Phương trình của mặt phẳng OCA là y = 0, hình chiếu của mặt phẳng OCA lên mặt phẳng tọa độ Oxz (y = 0) là ΔOCA và ký hiệu là $D_{xz} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 3 - 3x/2 \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng OCA tạo thành với trục tọa độ Oy một góc tù (chính xác là π) nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta OCA} (-2x+y+3z)dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} (-2x+0+3z)dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (2x-3z)dxdz$$

$$\Rightarrow I^y_{OCA} = \iint\limits_{D_{xz}} (2x-3z)dxdz = \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} (2x-3z)dz = \int_0^2 \left(2xz - \frac{3}{2}z^2\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3-3x/2} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{51x^2}{4} + 39x - 27\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{17x^3}{4} + \frac{39x^2}{2} - 27x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = -5.$$

$$\Rightarrow I_y = \iint\limits_S (-2x + y + 3z)dxdz = I^y_{ABC} + I^y_{OAB} + I^y_{OBC} + I^y_{OCA} = 6 + 0 + 0 - 5 = 1.$$

- Tính $I_z = \iint\limits_S (4x - y + 2z)dxdz = I^z_{ABC} + I^z_{OAB} + I^z_{OBC} + I^z_{OCA}$ với $\begin{cases} I^z_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (4x - y + 2z)dxdy \\ I^z_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} (4x - y + 2z)dxdy \\ I^z_{OBC} = \iint\limits_{\Delta OBC} (4x - y + 2z)dxdy \\ I^z_{OCA} = \iint\limits_{\Delta OCA} (4x - y + 2z)dxdy \end{cases}$

+ $I^z_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (4x - y + 2z)dxdy$

Phương trình của mặt phẳng ABC là $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow z = z(x, y) = 3 - \frac{3}{2}x - 3y$, hình chiếu của mặt phẳng ABC lên mặt phẳng tọa độ Oxy (z = 0) là ΔOAB và ký hiệu là $D_{xy} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 - x/2 \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng ABC tạo thành với trục tọa độ Oz một góc nhọn nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta ABC} (4x - y + 2z)dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} \left[4x - y + 2\left(3 - \frac{3}{2}x - 3y\right)\right]dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (6 + x - 7y)dxdy$$

$$\Rightarrow I^z_{ABC} = \iint\limits_{D_{xy}} (6 + x - 7y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} (6 + x - 7y)dy = \int_0^2 \left(6y + xy - \frac{7}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x/2} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{11x^2}{4} + 3x + 5\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{11x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{13}{3}.$$

+ $I^z_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} (4x - y + 2z)dxdy$

Phương trình của mặt phẳng OAB là z = 0, hình chiếu của mặt phẳng OAB lên mặt phẳng tọa độ Oxy là ΔOAB và ký hiệu là $D_{xy} = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 - x/2 \end{cases}$.

Vì véc tơ pháp tuyến hướng ra phía ngoài của mặt phẳng OAB tạo thành với trục tọa độ Oz một góc tù (chính xác là π) nên theo định nghĩa thì

$$\iint\limits_{\Delta OAB} (4x - y + 2z)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} (4x - y + 2.0)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (y - 4x)dxdy.$$

$$\Rightarrow I^z_{OAB} = \iint\limits_{D_{xy}} (y - 4x)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} (y - 4x)dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - 4xy\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x/2} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{17x^2}{4} - 9x + 1\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{17x^3}{12} - \frac{9x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = -\frac{7}{3}.$$

+ $I^z_{OBC} = \iint\limits_{\Delta OBC} (4x - y + 2z)dxdy$

Phương trình của mặt phẳng OBC là x = 0, hình chiếu của mặt phẳng OBC lên mặt phẳng tọa độ Oxy là đoạn thẳng OB có diện tích bằng không nên $I^z_{OBC} = 0$.

+ $I^z_{OCA} = \iint\limits_{\Delta OCA} (4x - y + 2z)dxdy$

Phương trình của mặt phẳng OCA là x = 0, hình chiếu của mặt phẳng OCA lên mặt phẳng tọa độ Oxy là đoạn thẳng OA có diện tích bằng không nên $I^z_{OCA} = 0$.

$$\Rightarrow I_z = \iint_S (4x - y + 2z)dxdy = I^z_{ABC} + I^z_{OAB} + I^z_{OBC} + I^z_{OCA} = \frac{13}{3} - \frac{7}{3} + 0 + 0 = 2.$$

$\Rightarrow$ I = I_x + I_y + I_z = 1 + 1 + 2 = 4.

Nhận xét. Rõ ràng là, đối với tích phân mặt loại hai ở ví dụ này, tính theo Cách 1 đơn giản và ngắn hơn tính theo Cách 2.

3.6. Mối quan hệ của các tích phân bội, đường và mặt

3.6.1. Công thức Green

Ở mục 3.3. chúng ta đã biết công thức Green là công thức liên hệ giữa tích phân hai lớp và tích phân đường loại hai. Nếu các hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền phẳng D là một miền liên thông, bị chặn và có biên L gồm một hay nhiều đường cong kín rời nhau từng đôi một thì $\oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D [Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]dxdy$.

Hệ quả. Diện tích S của miền phẳng D có biên là đường cong kín L được tính bởi công thức $S = \frac{1}{2}\oint_{L^+} xdy - ydx$.

3.6.2. Công thức Stokes

Công thức Stokes là công thức liên hệ giữa tích phân đường loại hai trên đường cong kín L trong không gian với tích phân mặt loại hai trên mặt S định hướng được, giới hạn bởi đường biên L.

Giả sử S là mặt định hướng được và trơn từng mảnh, biên L của nó là một đường cong kín trơn từng khúc, đồng thời các hàm số P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên mặt S thì

$$\oint_{L^+} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint_S [R'_y(x,y,z) - Q'_z(x,y,z)]dydz + [P'_z(x,y,z) - R'_x(x,y,z)]dzdx + [Q'_x(x,y,z) - P'_y(x,y,z)]dxdy$$

Công thức Stoker là kết quả mở rộng công thức Green trong không gian $\mathbf{R}^2$ sang không gian $\mathbf{R}^3$. Từ công thức Stoker suy ra điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong không gian không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là

$$\begin{cases} R'_y(x,y,z) = Q'_z(x,y,z) \\ P'_z(x,y,z) = R'_x(x,y,z) \\ Q'_x(x,y,z) = P'_y(x,y,z) \end{cases}$$

Điều kiện này cũng là điều kiện cần và đủ để biểu thức

P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y,z) nào đấy.

3.6.3. Công thức Ostrogradsky

Công thức Ostrogradsky là công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại hai lấy trên mặt ngoài của mặt cong kín S với tích phân ba lớp trên miền V có biên là mặt cong kín S.

Giả sử V là miền giới nội và đóng trong không gian $\mathbf{R}^3$ có biên là mặt cong kín S, trơn từng mảnh; các hàm số P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền V thì

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iiint_V [P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z)]dxdydz$$

Hệ quả. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi mặt cong kín S được tính bằng công thức:

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Chứng minh. Chúng ta lấy $\begin{cases} P(x,y,z) = x \\ Q(x,y,z) = y \\ R(x,y,z) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x(x,y,z) = 1 \\ Q'_y(x,y,z) = 1 \\ R'_z(x,y,z) = 1 \end{cases}$ và thay vào công thức Ostrogradsky thì được $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_V dxdydz$, theo ý nghĩa hình học của tích phân ba lớp $\iiint_V dxdydz = V$, do đó $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3V \Rightarrow V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$.

PHỤ LỤC

P1. Tham số hóa phương trình của đường trong mặt phẳng (R^2)

Phương trình của đường trong mặt phẳng (gọi ngắn gọn là đường phẳng) thường được tham số hóa (1) theo tham số tổng quát, (2) theo tọa độ Descartes, (3) theo tọa độ cực tùy thuộc vào từng loại đường phẳng cụ thể.

P1.1. Tham số hóa phương trình của đường thẳng

(1) Theo tham số tổng quát

Véc tơ $\vec{u}$ được gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu $|\vec{u}| \neq 0$ và $\vec{u}$ song song hoặc nằm trên đường thẳng (Δ).

Như vậy, nếu véc tơ $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) thì véc tơ $\lambda\vec{u}$ ($\lambda \neq 0$) cũng là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ), do đó một đường thẳng có vô số véc tơ chỉ phương.

Phương trình ax + by + c = 0 với a và b không đồng thời bằng không, được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) trong mặt phẳng.

Các trường hợp đặc biệt:

+ a = 0, b ≠ 0 ⇒ ax + by + c = 0 ⇔ y = –c/b: (Δ)//Ox hoặc trùng với Ox (khi c = 0).
+ a ≠ 0, b = 0 ⇒ ax + by + c = 0 ⇔ x = –c/a: (Δ)//Oy hoặc trùng với Oy (khi c = 0).
+ Nếu c = 0 thì ax + by + c = 0 ⇔ ax + by = 0: (Δ) đi qua gốc tọa độ O(0,0).
+ Nếu đường thẳng (Δ) cắt Ox tại điểm $A(a_x,0)$ với $a_x \neq 0$ và Oy tại điểm $B(0,b_y)$ với $b_y \neq 0$ thì phương trình của đường thẳng (Δ) là $\frac{x}{a_x} + \frac{y}{b_y} = 1$.

Véc tơ pháp tuyến và véc tơ chỉ phương của một đường thẳng là vuông góc với nhau nên tích vô hướng của hai véc tơ này bằng không. Do đó (như chúng ta đã biết), đường thẳng ax + by + c = 0 có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a,b)$, nên đường thẳng ax + by + c = 0 có hai véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(-b,a)$, $\vec{u}(b,-a)$.

Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Ví dụ 1.

(a) Tìm phương trình của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(x_M,y_M)$ và véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}(u_x,u_y)$.

(b) Tham số hóa phương trình đường thẳng (Δ).

Bài giải.

(a) Giả sử ax + by + c = 0 (a và b không đồng thời bằng không) là phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ).

Véc tơ chỉ phương và véc tơ pháp tuyến đường thẳng (Δ) là vuông góc với nhau nên tích vô hướng của hai véc tơ này bằng không, do đó, nếu véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}(u_x, u_y)$ thì đường thẳng (Δ) có hai véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(-u_y, u_x)$ và $\vec{n}(u_y, -u_x)$.

- Nếu véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) là $\vec{n}(-u_y, u_x)$ thì $\begin{cases} a = -u_y \\ b = u_x \end{cases}$, còn c được xác định từ phương trình $-u_y x_M + u_x y_M + c = 0 \Rightarrow c = u_y x_M - u_x y_M$. Do đó, phương trình đường thẳng (Δ) là $-u_y x + u_x y + u_y x_M - u_x y_M = 0 \Leftrightarrow -u_y(x - x_M) + u_x(y - y_M) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - x_M}{u_x} = \dfrac{y - y_M}{u_y}$.

- Nếu véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) là $\vec{n}(u_y, -u_x)$ thì $\begin{cases} a = u_y \\ b = -u_x \end{cases}$, còn c được xác định từ phương trình $u_y x_M - u_x y_M + c = 0 \Rightarrow c = u_x y_M - u_y x_M$. Do đó, phương trình của đường thẳng (Δ) là $u_y x - u_x y + u_x y_M - u_y x_M = 0 \Leftrightarrow u_y(x - x_M) - u_x(y - y_M) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - x_M}{u_x} = \dfrac{y - y_M}{u_y}$.

Tóm lại, phương trình đường thẳng (Δ) tìm được là $\dfrac{x - x_M}{u_x} = \dfrac{y - y_M}{u_y}$.

(b) Để tham số hóa phương trình đường thẳng $\dfrac{x - x_M}{u_x} = \dfrac{y - y_M}{u_y}$, chúng ta đặt

$$\frac{x - x_M}{u_x} = \frac{y - y_M}{u_y} = t \ (t \in \mathbf{R}) \Rightarrow \begin{cases} x - x_M = u_x t \\ y - y_M = u_y t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_M + u_x t \\ y = y_M + u_y t \end{cases} (t \in \mathbf{R}).$$

Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết hai điểm của đường thẳng đó.

Ví dụ 2.

(a) Tìm phương trình của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(x_A,y_A)$ và điểm $B(x_B,y_B)$ không trùng với điểm A.

(b) Tham số hóa phương trình đường thẳng (Δ).

Bài giải.

(a) Giả sử ax + by + c = 0 (a và b không đồng thời bằng không) là phương trình của đường thẳng (Δ).

Dễ thấy rằng, véc tơ $\overrightarrow{AB}(x_A - x_A, y_B - y_B)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ). Theo giả thiết, điểm A không trùng với điểm B nên các số $(x_B - x_A)$, $(y_B - y_A)$ không đồng thời bằng không, do đó điều kiện đối với véc tơ chỉ phương là $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \neq 0$ được thỏa mãn.

Bây giờ, nếu chúng ta coi điểm A là điểm M trong Ví dụ 1 và coi véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ trong Ví dụ 1 thì theo cách giải của Ví dụ 1 thì phương trình của đường thẳng (Δ) là

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y_A - y_B)(x - x_A) + (x_B - x_A)(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Mặt khác, nếu chúng ta coi điểm B là điểm M trong Ví dụ 1 và coi véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ trong Ví dụ 1 thì theo cách giải của Ví dụ 1 thì phương trình của đường thẳng (Δ) là

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (y_B - y_A)x_B - (x_B - x_A)y_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y_A - y_B)(x - x_B) + (x_B - x_A)(y - y_B) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_B}{x_B - x_A} = \frac{y - y_B}{y_B - y_A}$$

Phương trình $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ hoặc $\frac{x-x_B}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{y_B-y_A}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng trong mặt phẳng.

(b) Để tham số hóa phương trình đường thẳng $\frac{x-x_B}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{y_B-y_A}$, chúng ta đặt

$$\frac{x-x_B}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{y_B-y_A}=t\ (t\in\mathbf{R})\Rightarrow\begin{cases}x-x_B=(x_B-x_A)t\\ y-y_B=(y_B-y_A)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_B+(x_B-x_A)t\\ y=y_B+(y_B-y_A)t\end{cases}(t\in\mathbf{R}).$$

Để tham số hóa phương trình đường thẳng $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, chúng ta đặt

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=t\ (t\in\mathbf{R})\Rightarrow\begin{cases}x-x_A=(x_B-x_A)t\\ y-y_A=(y_B-y_A)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+(x_B-x_A)t\\ y=y_A+(y_B-y_A)t\end{cases}(t\in\mathbf{R}).$$

(2) Theo tọa độ Descartes

Nếu phương trình của đường thẳng (Δ) được cho dưới dạng tổng quát ax + by + c = 0 với a và b không đồng thời bằng không.

- Trường hợp 1. $\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$

+ Cách 1. Đặt $x=t\Rightarrow at+by+c=0\Rightarrow y=-\frac{a}{b}t-\frac{c}{b}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=-\frac{a}{b}t-\frac{c}{b}\end{cases}(t\in\mathbf{R})$ là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) theo tham số t.

+ Cách 2. Đặt $y=t\Rightarrow ax+bt+c=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}t-\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=-\frac{b}{a}t-\frac{c}{a}\\ y(t)=t\end{cases}(t\in\mathbf{R})$ là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) theo tham số t.

- Trường hợp 2. $\begin{cases}a\neq 0\\ b=0\end{cases}$ ⇒ ax + by + c = 0 ⇔ x = –c/a: (Δ)//Oy hoặc trùng với Oy (khi c = 0).

- Trường hợp 3. $\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$ ⇒ ax + by + c = 0 ⇔ y = –c/b: (Δ)//Ox hoặc trùng với Ox (khi c = 0).

P1.2. Tham số hóa phương trình của đường cong

Nếu đường cong là các đường cong bậc hai: (1) Đường tròn, (2) Ellipse (đường tròn là trường hợp đặc biệt của đường ellipse khi hai bán trục của đường ellipse bằng nhau), (3) Parabol, (4) Hypecbol; mà phương trình được cho trong hệ tọa độ Descartes (x,y), thì chúng ta tham số hóa phương trình của nó như sau:

(1) Đường tròn

Nếu phương trình của đường tròn có tâm (x_0,y_0) và bán kính R > 0, được cho dưới dạng chính tắc $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình này được tham số hóa về dạng tọa độ cực như sau:

Chúng ta có $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{R}\right)^2=1$, đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases}\frac{x-x_0}{R}=\cos t\\ \frac{y-y_0}{R}=\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases}x(t)=x_0+R\cos t\\ y(t)=y_0+R\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường tròn có tâm (x_0,y_0) và bán kính $R>0$ theo tham số t.

(2) Đường ellipse

Nếu phương trình của đường ellipse có tâm (x_0,y_0) và các bán trục $a>0$, $b>0$, được cho dưới dạng chính tắc $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình này được tham số hóa về dạng tọa độ cực mở rộng như sau:

Chúng ta có $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=\cos t\\ \frac{y-y_0}{b}=\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$\Rightarrow \begin{cases}x(t)=x_0+a\cos t\\ y(t)=y_0+b\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ là phương trình tham số của ellipse có tâm (x_0,y_0) và các bán trục $a>0$, $b>0$ theo tham số t.

(3) Đường parabol

- Nếu phương trình của đường parabol được cho dưới dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a\ne 0)$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình tham số của nó là $\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=at^2+bt+c\end{cases}$ theo tham số $t\in\mathbf{R}$.

- Nếu phương trình của đường parabol được cho dưới dạng $x = ay^2 + by + c$ $(a\ne 0)$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình tham số của nó là $\begin{cases}x(t)=at^2+bt+c\\ y(t)=t\end{cases}$ theo tham số $t\in\mathbf{R}$.

(4) Đường hypecbol

Nếu phương trình của đường hypecbol được cho dưới dạng $xy = a$ $(a\ne 0)$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình tham số của nó là $\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=\frac{a}{t}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x(t)=\frac{a}{t}\\ y(t)=t\end{cases}$ theo tham số $t\in\mathbf{R}$.

Nếu phương trình của đường hypecbol được cho dưới dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ trong hệ tọa độ Descartes Oxy thì phương trình tham số của nó được xác định như sau:

Chúng ta có $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2=1+\left(\frac{y}{b}\right)^2$, đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos t}\\ \frac{y}{b}=\tan t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

vì $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, do đó $\begin{cases}x(t)=\frac{a}{\cos t}\\ y(t)=b\tan t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường hypecbol theo tham số t.

Nếu đường cong mà phương trình được cho trong hệ tọa độ cực (r,φ) dưới dạng r = r(φ) (α ≤ φ ≤ β) thì phương trình của đường cong trong hệ tọa độ Descartes được tham số hóa theo tham số φ như sau: Công thức biến đổi từ tọa độ cực (r,φ) sang tọa độ Descartes (x,y) là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ (α ≤ φ ≤ β)

$\Rightarrow \begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ (α ≤ φ ≤ β) là phương trình tham số của đường cong theo tham số φ.

Ví dụ 3. Cho r = 3cosφ (0 ≤ φ ≤ 2π) là phương trình của đường cong trong hệ tọa độ cực (r,φ). (a) Tìm phương trình tham số của đường cong theo tham số φ trong hệ tọa độ Descartes. (b) Đường cong này là đường cong gì?

Bài giải.

(a) Công thức biến đổi từ tọa độ cực (r,φ) sang tọa độ Descartes (x,y) là $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ (0 ≤ φ ≤ 2π) $\Rightarrow \begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = (3\cos\varphi)\cos\varphi = 3\cos^2\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = (3\cos\varphi)\sin\varphi = 3\cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$ (0 ≤ φ ≤ 2π) là phương trình tham số của đường cong theo tham số φ.

(b) Chúng ta có $\begin{cases} x^2(\varphi) = (3\cos^2\varphi)^2 = 9\cos^4\varphi \\ y^2(\varphi) = (3\cos\varphi\sin\varphi)^2 = 9\cos^2\varphi\sin^2\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow x^2(\varphi) + y^2(\varphi) = 9\cos^4\varphi + 9\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 9\cos^2\varphi = 3(3\cos^2\varphi) = 3x(\varphi) \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 3x \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ là phương trình chính tắc của đường tròn có tâm tại điểm $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ và bán kính $R = \frac{3}{2}$.

P2. Tham số hóa phương trình của đường trong không gian ($\mathbf{R}^3$)

P2.1. Tham số hóa phương trình của đường thẳng

Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Đường thẳng (Δ) trong không gian đi qua điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ với điều kiện $u_xu_yu_z \neq 0$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x(t) = x_0 + u_x t \\ y = y(t) = y_0 + u_y t \\ z = z(t) = z_0 + u_z t \end{cases}$ (t∈**R**).

Chúng ta có $\begin{cases} x = x_0 + u_x t \Leftrightarrow t = \dfrac{x - x_0}{u_x} \\ y = y_0 + u_y t \Leftrightarrow t = \dfrac{y - y_0}{u_y} \\ z = z_0 + u_z t \Leftrightarrow t = \dfrac{z - z_0}{u_z} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{u_x} = \dfrac{y - y_0}{u_y} = \dfrac{z - z_0}{u_z}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng trong không gian.

Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết hai điểm của đường thẳng đó.

Tìm phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) trong không gian đi qua điểm $A(x_A,y_A,z_A)$ và điểm $B(x_B,y_B,z_B)$ không trùng với điểm A.

Bài giải.

Dễ thấy rằng, véc tơ $\overrightarrow{AB}(x_A - x_A, y_B - y_B, z_A - z_B)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ). Theo giả thiết, điểm A không trùng với điểm B nên các số $x_B - x_A \neq 0$, $y_B - y_A \neq 0$, $z_B - z_A \neq 0$ do đó điều kiện đối với véc tơ chỉ phương là $(x_B - x_A)(y_B - y_A)(z_B - z_A) \neq 0$ được thỏa mãn.

Bây giờ, nếu chúng ta coi điểm A (hoặc điểm B) là điểm M_0 và coi véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ thì phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là $\begin{cases} x = x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z(t) = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

hoặc $\begin{cases} x = x(t) = x_B + (x_B - x_A)t \\ y = y(t) = y_B + (y_B - y_A)t \\ z = z(t) = z_B + (z_B - z_A)t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

Chúng ta cũng tìm được $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A}$ hoặc $\dfrac{x - x_B}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_B}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_B}{z_B - z_A}$ là phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) trong không gian.

P2.2. Tham số hóa phương trình của đường cong

Đường cong trong không gian thường được cho dưới dạng là giao tuyến của hai mặt trong không gian, có 3 trường hợp: (1) mặt phẳng giao với mặt phẳng, (2) mặt phẳng giao với mặt cong và (3) mặt cong giao với mặt cong).

Chúng ta lưu ý rằng: (1) Phương trình của giao tuyến L là nghiệm của hệ 2 phương trình, trong đó mỗi phương trình tương ứng với phương trình của mỗi mặt. (2) Không có một phương pháp chung nào để tham số hóa phương trình của đường cong được cho dưới dạng là giao tuyến của hai mặt trong không gian, mà chúng ta chỉ căn cứ vào từng trường hợp cụ thể của các mặt để thực hiện mà thôi.

Ví dụ 4. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với mặt phẳng z = y + 2.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} = y + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (y+2)^2 \\ z = y + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} - 1 \\ z = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{4} - 1 \\ z(t) = \dfrac{t^2}{4} + 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 5. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt paraboloit $z = x^2 + 4y^2$ với mặt trụ $y = 2x^2$.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ y = 2x^2 \end{cases}$

Đặt x = t và thay vào hệ phương trình trên chúng ta được $\begin{cases} z = t^2 + 16t^4 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t^2 \\ z(t) = t^2 + 16t^4 \end{cases}$$ ($t \in \mathbf{R}$) là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 6. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ với mặt phẳng $y = x$.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$

Thay $y = x$ vào phương trình của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$,

đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \cos t \\ \dfrac{z}{2} = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

Thay $x = \sqrt{2}\cos t$ vào phương trình $y = x$ chúng ta được $y = \sqrt{2}\cos t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\cos t \\ z(t) = 2\sin t \end{cases}$$ $(0 \le t \le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 7. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + 9y^2 = 4$ với mặt phẳng $x + 2y + 3z = 5$.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 4 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$

Chúng ta có $x^2 + 9y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y}{2}\right)^2 = 1$

Đẳng thức trên cho phép đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ \dfrac{3y}{2} = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \dfrac{2}{3}\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

Thay $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \dfrac{2}{3}\sin t \end{cases}$ vào phương trình $x + 2y + 3z = 5$ chúng ta được $2\cos t + \frac{4}{3}\sin t + 3z = 5$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cos t - \frac{4}{9}\sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \dfrac{2}{3}\sin t \\ z(t) = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\cos t - \dfrac{4}{9}\sin t \end{cases}$$ $(0 \le t \le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 8. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$ với mặt z = xy.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = xy \end{cases}$

Chúng ta có $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = 1$

Đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{3} = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

Thay $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ vào phương trình $z = xy$ chúng ta được $z = 9\cos t \sin t$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \\ z(t) = 9\cos t \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 9. Tìm phương trình tham số của đường L là giao tuyến của mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$ với mặt trụ $z = x^2$.

Bài giải.

Phương trình của đường L là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ z = x^2 \end{cases}$

Chúng ta có $4x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$

Đẳng thức này cho phép đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ \dfrac{y}{2} = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

Thay x = cost vào phương trình $z = x^2$ chúng ta được $z = \cos^2 t$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = \cos^2 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ là phương trình tham số của đường L.

Bài tập

3.1. Tính $I = \int_L xy\,ds$

(a) L là cung của đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ nằm trong góc vuông thứ nhất ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

(b) L là các cạnh của hình chữ nhật OABC có tọa độ các đỉnh là O(0,0), A(4,0), B(4,2) và C(0,2).

(c) L là các cạnh của hình vuông $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

3.2. Tính $I = \int_L (x^2 + y^2)\,ds$

(a) L là đoạn thẳng nối điểm O(0,0) với điểm A(2,4).

(b) L là các cạnh của ΔOAB có tọa độ các đỉnh là O(0,0), A(1,1) và B(–1,1).

(c) L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

3.3. Tính $I = \int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$ với C là đường cong có phương trình trong hệ tọa độ cực (r,φ) là $r = 4\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Vẽ đồ thị của đường cong C.

3.4. Tính các tích phân sau đây

(a) $I = \int_L \sqrt{2y}ds$, cung L có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \\ z = t^3/3 \end{cases}$ với $0 \le t \le 1$.

(b) $I = \int_L (x^2+y^2+z^2)ds$, cung L là đường xoắn ốc có phương trình tham số $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ và $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $I = \int_L \sqrt{5(x^2-y^2)+24xy+(z-1)^2+4}ds$, L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ với mặt phẳng $2x - 3y + z = 1$.

(d) $I = \int_L x^2 ds$, L là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) với mặt phẳng $x + y + z = 0$.

3.5. Tính khối lượng của sợi dây có phương trình

(a) là đường cong phẳng $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ với $0 \le x \le a$ ($a > 0$), biết rằng khối lượng riêng của đường cong tại điểm (x,y) là $f(x,y) = 1/y$.

(b) là đường xoắn ốc $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ với $0 \le t \le 2\pi$, $a = b = 1$, biết rằng khối lượng riêng của sợi dây tại điểm (x,y,z) là $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.6. Tính độ dài cung có phương trình $y = \frac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x}$ ($1 \le x \le e$).

3.7. Tính các tích phân đường loại hai

(a) $I = \int_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ trên L là các đoạn thẳng từ A đến B và từ B đến C với A(0,0), B(2,2) và C(4,0).

(b) $I = \int_L ydx - (y+x^2)dy$ trên cung phẳng L là cung của đường parabol $y = 2x - x^2$ nằm phía trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ.

(c) $I = \int_L (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ trên L là đường $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \le x \le 2$) theo chiều tăng của x.

(d) $I = \int_L (2a-y)dx + xdy$ trên L là đường $\begin{cases} x(t) = a(1-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{cases}$ với $0 \le t \le 2\pi$ và $a > 0$.

(e) $I = \oint_{L^+} (x+y)dx + (x-y)dy$ trên L là đường ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(f) $I = \int_{AB} \frac{(x^2 - y^2)dy - 2xydx}{x^2 + y^2}$ trên cung AB là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ về phía $x \geq 0$ nối từ điểm A(0,0) đến điểm B(0,2).

3.8. Tính tích phân đường loại hai $I = \int_{AB} (xy - 1)dx + x^2 ydy$ trên đường nối từ điểm A(1,0) đến điểm B(0,2) theo chiều dương trong 3 trường hợp (a) $2x + y = 2$; (b) $4x + y^2 = 4$; (c) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

3.9. Tính trực tiếp các tích phân đường loại hai sau đây, sau đó kiểm tra kết quả bằng cách tính qua công thức Green

(a) $I = \oint_{L^+} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ trên L là đường cong kín tạo bởi hai cung parabol $y = x^2$, $x = y^2$.

(b) $I = \oint_{L^+} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ trên L là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

(c) $I = \oint_{ABCA} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ trên cạnh AB (từ điểm A đến điểm B), cạnh BC (từ điểm B đến điểm C) và cạnh CA (từ điểm C đến điểm A) của ΔABC với A(0,0), B(1,0) và C(0,1).

3.10. Tính các tích phân đường loại hai

(a) $I = \oint_{L^+} xy\left(\frac{x}{2} + y\right)dy - xy\left(x + \frac{y}{2}\right)dx$ trên L là ba cạnh của ΔABC với A(-1,0), B(1,-2) và C(1,2).

(b) $I = \oint_{L^+} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ trên L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

(c) $I = \int_{OAB} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$ trên cạnh OA (từ điểm O đến điểm A) và cạnh AB (từ điểm A đến điểm B) của ΔOAB với O(0,0), A(1,1) và B(0,2).

3.11. Cho tích phân đường loại hai $I = \int_L \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{3x^2 - y^2}{x}dx + \frac{3y^2 - x^2}{y}dy\right)$

(a) Tích phân này có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không?

(b) Tính tích phân này trên cung AB được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin^2 t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ theo chiều tăng của tham số ứng ($t = 0$ ứng với điểm đầu A và $t = \frac{\pi}{2}$ ứng với điểm cuối B).

3.12. Tìm các tham số m, n để tích phân đường loại hai $I = \int_{AB} \frac{(mx - y)dx + (nx + y)dy}{x^2 + y^2}$ không phụ thuộc vào dạng của đường lấy tích phân.

3.13. Tìm các tham số m, n để tích phân đường loại hai

$I = \oint_L [(x + a)(y + b)^2 + (n - m)by + may]dx + [(x + a)^2(y + b) + 2(n - 1)ax]dy = 0$ với mọi đường cong kín L và với mọi giá trị của a và b.

3.14. Tìm tham số m để biểu thức $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^m}$ là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đấy.

3.15. Chứng minh rằng biểu thức $6xe^y dx + (3x^2 + y + 1)e^y dy$ là vi phân toàn phần cấp 1 của một hàm số u(x,y) nào đó.Tìm hàm số u(x,y).

3.16. Xác định hàm số u(x,y) thỏa mãn $du(x,y) = 2xy^3dx + (3x^2y^2 + \cos y)dy$.

3.17. Các đề thi về tích phân đường

(a) Tính tích phân đường $\oint_{C^+}(xy+y)dx+xydy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.(năm học 2017-2018)

(b) Cho tích phân đường $\int_L (y+\sin x)dx-(x+e^y)dy$: ($b_1$) Tính I nếu L là đoạn thẳng AB với A(1,1) và B(1,–1); (b_2) Sử dụng (b_1) và công thức Green để tính I nếu L là nửa đường tròn (C) $x^2 + y^2 = 2x$ ($x \geq 1$), chiều của (C) là ngược chiều kim đồng hồ.(năm học 2018-2019)

(c) Tính tích phân đường $\oint_C y^2dx+xydy$ với C là đường biên kín định hướng dương của nửa hình khuyên bên trên trục Ox nằm giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$.(năm học 2019-2020)

(d) Cho C là chu tuyến định hướng dương của ΔABC với A(0,0), B(a,a) và C(0,2a) (a > 0). Tính tích phân đường $\oint_C (2xy-x^3)dx+(x+y^3)dy$ theo hai cách: tính trực tiếp và sử dụng công thức Green.(năm học 2020-2021)

(e) Tính tích phân đường $\oint_C (\sqrt{x^4+1}+y)dx+(\sqrt{y^4+1}+xe^x)dy$ với C là biên của tam giác, đi từ điểm (0,0) đến điểm (1,1), đi tiếp đến điểm (2,0) và trở về điểm (0,0).(năm học 2021-2022)

3.18. Tính các tích phân mặt loại một

(a) $I=\iint_S z(x^2+y^2)dS$, S là phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (a > 0) ứng với x ≥ 0 và y ≥ 0.

(b) $I=\iint_S (2x+2y+z-1)dS$, S là phần của mặt phẳng x + y + z = 1 nằm trong góc vuông phần tám thứ nhất.

(c) $I=\iint_S yzdS$, S là phần của mặt phẳng 2x – 2y – z + 2 = 0 thỏa mãn điều kiện 0 ≤ x ≤ 1 và 0 ≤ y ≤ x.

3.19. Tính các tích phân mặt loại hai

(a) $I=\iint_S z(x^2+y^2)dxdy$, S là mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (z ≥ 0) có véc tơ pháp tuyến hướng lên phía trên.

(b) $I=\iint_S ydxdz+z^2dxdy$, S là mặt phía ngoài của mặt ellipsoit $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ nằm trong góc vuông phần tám thứ nhất và có véc tơ pháp tuyến hướng lên phía trên.

(c) $I=\iint_S xdydz+dxdz-dxdy$, S là mặt phẳng (ABC) với A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3) và có véc tơ pháp tuyến hướng lên phía trên.

3.20. Tính diện tích miền phẳng bằng tích phân đường lấy theo chu tuyến kín của miền.

(a) Miền phẳng là tứ giác giới hạn bởi 4 đường thẳng x = y, x = 2y, x + y = 2, x + 3y = 2.

(b) Miền phẳng là tứ giác cong giới hạn bởi 4 đường cong $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$.

3.21. Tính $I=\iint_S \frac{x^2}{z^3}dS$, S là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm dưới mặt phẳng z = 2.(đề thi năm học 2019-2020)