Đề thi giữa kỳ học phần MAT1042

Câu 1. Cho hàm số $f(x,y)=(ax+by)\sin\frac{a}{x}\sin\frac{b}{y}$

1.1. Tìm và vẽ đồ thị của tập xác định D(f).

1.2. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x,y)=\frac{x^m}{\sqrt{x^2+2y^2}}$ với x > 0, m > 0. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ khi $\begin{cases} m>1 \\ m\le 1 \end{cases}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x,y)=y\sqrt{y/x}$, chứng minh rằng $x^2 f''_{x^2}(x,y)=y^2 f''_{y^2}(x,y)$.

Câu 4. Xác định cực trị của hàm số $f(x,y)=xy\ln(x+2y)$ trên miền x > 0, y > 0.

Câu 5. Cho miền $D=\{(x,y)\in R^2 \mid y^2=x, y^2=2x, y=ax\}$ (a > 0). Xác định a nếu diện tích của D bằng $\frac{1}{2}$ đvdt.

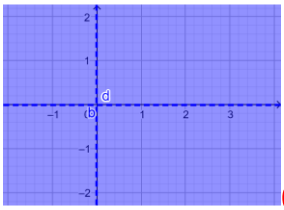
Đáp án và thang điểm

Câu 1.

1.1. Hàm số $f(x,y)=(ax+by)\sin\frac{a}{x}\sin\frac{b}{y}$ được xác định khi $\begin{cases} x\ne 0 \\ y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow xy\ne 0$.

Tập xác định của hàm số f(x,y) là D(f) = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy \ne 0\}$ là các điểm trong mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc Oxy không nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy.**(0,25đ)**

Đồ thị của tập xác định: Mầu xanh đậm, không kể các điểm nằm trên các trục Ox, Oy (đường đứt nét)

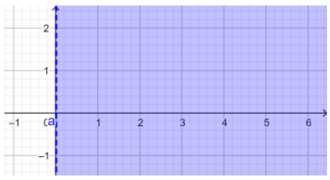


(0,25đ)

1.2 Chúng ta có $0\le |f(x,y)|=\left|(ax+by)\sin\frac{a}{x}\sin\frac{b}{y}\right|=|ax+by|\left|\sin\frac{a}{x}\right|\left|\sin\frac{b}{y}\right|\le |ax+by|.1.1=|ax+by|\le$ $|ax|+|by|=|a||x|+|b||y|\le M(|x|+|y|)\to 0$ khi (x,y) → (0,0), trong đó M = max(|a|,|b|)**(1,25đ)**

Theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.**(0,25đ)**

Câu 2. Theo yêu cầu của đầu bài thì tập xác định của hàm số f(x,y) là D(f) = $\{(x,y)\in R^2 \mid x > 0\}$ là nửa mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc Oxy nằm bên phải trục tung Oy, không kể trục tung Oy.**(0,25đ)**



Trường hợp m > 1:

Chúng ta có $0\le |f(x,y)|=\left|\frac{x^m}{\sqrt{x^2+2y^2}}\right|\le\frac{|x|^m}{\sqrt{x^2}}=\frac{|x|^m}{|x|}=|x|^{m-1}\to 0$ khi $x\to 0^+$, theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$.**(0,5đ)**

Trường hợp $0<m\le 1$:

Cho (x,y) → $(0^+,0)$ theo đường thẳng/cong $y = kx^m$ (tham số k ≠ 0), **(0,25đ)** khi đó

$$f(x,y)=f(x,kx^m)=\frac{x^m}{\sqrt{x^2+2(kx^m)^2}}=\frac{x^m}{\sqrt{x^2+2k^2x^{2m}}}=\frac{1}{\sqrt{x^{2(1-m)}+2k^2}}$$

+ Khi m = 1 thì $x^{2(1-m)}=x^{2(1-1)}=x^0=1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0^+} f(x,kx^1)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+2k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2k^2}}$$

Giá trị $\frac{1}{\sqrt{1+2k^2}}$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.**(0,5đ)**

+ Khi 0 < m < 1 ⇔ 0 < 2(1–m) < 2 $\Rightarrow \lim_{x\to0^+} x^{2(1-m)}=0$, do đó $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=$

$$\lim_{x\to0^+} f(x,kx^m)=\frac{1}{\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^{2(1-m)}+2k^2}}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to0^+} x^{2(1-m)}+2k^2}}==\frac{1}{\sqrt{0+2k^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}|k|}$$

Giá trị $\frac{1}{\sqrt{2}|k|}$ thay đổi khi k thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.**(0,5đ)**

Kết luận: $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=0$ khi m > 0 và $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi 0 < m ≤ 1.

Cách khác. Đổi biến từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực suy rộng $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases}$, từ D(f) suy ra

$$\begin{cases} r>0 \\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 0<\cos\varphi\le1 \\ -1<\sin\varphi<1 \end{cases}.$$

Từ $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi=\frac{x}{r} \\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{r}y \end{cases} \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{x^2+2y^2}{r^2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2y^2}{r^2}=1 \Leftrightarrow x^2+2y^2=r^2$

$\Rightarrow (x,y)\to(0^+,0) \Leftrightarrow r\to0^+$

Thay $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases}$ vào f(x,y) chúng ta được

$$f(x,y)=\frac{x^m}{\sqrt{x^2+2y^2}}=\frac{(r\cos\varphi)^m}{\sqrt{(r\cos\varphi)^2+2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)^2}}-\frac{r^m\cos^m\varphi}{r}=r^{m-1}\cos^m\varphi$$

Tìm $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ khi $\begin{cases} m>1 \\ 0<m\le1 \end{cases}$

- Trường hợp m > 1:

$m>1 \Leftrightarrow m-1>0 \Rightarrow \lim_{r\to0^+} r^{m-1}=0$, mặt khác $0<\cos^m\varphi\le1$ nên $\lim_{r\to0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi=0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)=\lim_{r\to0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi=0.$

- Trường hợp 0 < m ≤ 1:

+ m = 1 $\Rightarrow \lim_{r\to0^+} r^{m-1}=\lim_{r\to0^+}1=1 \Rightarrow \lim_{r\to0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi=\lim_{r\to0^+}1.\cos^m\varphi=\cos^m\varphi$, giá trị này thay đổi khi φ thay đổi, theo định nghĩa thì $\lim_{r\to0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi$ không tồn tại. Do đó $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại.

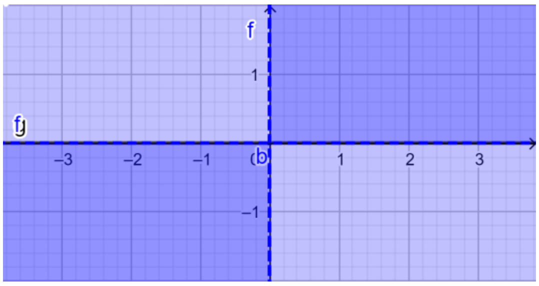
+ 0 < m < 1 ⇒ 1 – m > 0 $\Rightarrow \lim_{r\to0^+} r^{m-1}=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{r^{1-m}}=+\infty$, mặt khác $0<\cos^m\varphi\le1$

$\Rightarrow \lim_{r\to0^+} r^{m-1}\cos^m\varphi=+\infty$ vì $0<\cos^m\varphi<1$. Do đó $\lim_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại. **(0,5đ)**

Kết luận: $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y) = 0$ khi $m > 1$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0)} f(x,y)$ không tồn tại khi $0 < m \le 1$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ là D(f) = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x \ne 0$ và $xy \ge 0\}$**(0,25đ)**

Đồ thị của tập xác định: Phần xanh đậm, không kể các điểm nằm trên trục Oy (đường đứt nét)



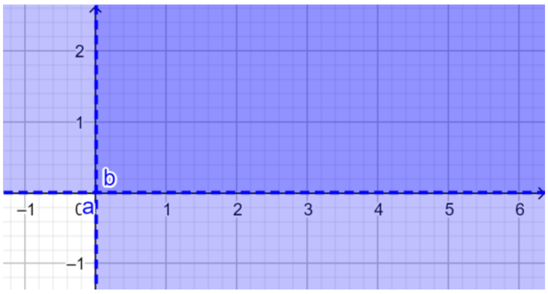
(0,25đ)

Để tính đạo hàm thuận lợi, chúng ta viết hàm số dưới dạng $f(x,y) = y\sqrt{\dfrac{y}{x}} = x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \textbf{(0,5đ)} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} \\ f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \textbf{(0,5đ)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 f''_{x^2}(x,y) = x^2.\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} \\ y^2 f''_{y^2}(x,y) = y^2\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow x^2 f''_{x^2}(x,y) = y^2 f''_{y^2}(x,y)\ \textbf{(0,5đ)}$$

Câu 4. Theo yêu cầu của đầu bài, tập xác định của hàm số $f(x,y) = xy\ln(x+2y)$ là D(f) = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x > 0, y > 0\}$**(0,25đ)**



Chúng ta có $\begin{cases} f'_x(x,y) = y\ln(x+2y) + \dfrac{xy}{x+2y} \\ f'_y(x,y) = x\ln(x+2y) + \dfrac{2xy}{x+2y} \end{cases}$ **(0,25đ)**

Điểm dừng (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ln(x+2y) + \dfrac{xy}{x+2y} = 0 \\ x\ln(x+2y) + \dfrac{2xy}{x+2y} = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0, y_0) = \left(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}\right) \in D(f)$.

Do đó, hàm số có điểm dừng duy nhất là $(x_0, y_0) = \left(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}\right)$ **(0,25đ)**

Chúng ta có $\begin{cases} A(x,y) \equiv f''_{x^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[y\ln(x+2y) + \dfrac{xy}{x+2y} \right] = \dfrac{xy+4y^2}{(x+2y)^2} \\ B(x,y) \equiv f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[y\ln(x+2y) + \dfrac{xy}{x+2y} \right] = \ln(x+2y) + \dfrac{x^2+2xy+4y^2}{(x+2y)^2} \\ C(x,y) \equiv f''_{y^2}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x\ln(x+2y) + \dfrac{2xy}{x+2y} \right] = \dfrac{4x^2+4xy}{(x+2y)^2} \end{cases}$

(0,25đ) $\Rightarrow \begin{cases} A(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = f''_{x^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 3/8 \\ B(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = f''_{xy}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 1/4 \text{ (0,25đ)} \\ C(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = f''_{y^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 3/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = B^2(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) - A(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})C(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = -1/2$.**(0,25đ)**

Tại điểm dừng $(x_0, y_0) = (1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})$ có $\begin{cases} \Delta(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = -1/2 < 0 \\ A(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 3/8 > 0 \end{cases}$ **(0,25đ)** nên hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm này và $f_{ct} = f(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = -1/16e$.**(0,25đ)**

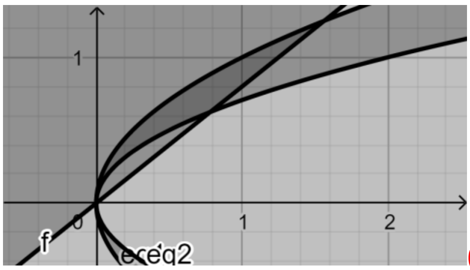
Cách khác. Sau khi tính được $\Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 3/8 \\ f''_{xy}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 1/4 \\ f''_{y^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = 3/2 \end{cases}$ chúng ta có vi phân toàn phần cấp 2 tại điểm $(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})$: $d^2f(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) =$

$f''_{x^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})dx^2 + 2f''_{xy}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})dxdy + f''_{y^2}(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})dy^2 = \dfrac{3}{8}dx^2 + 2.\dfrac{1}{4}dxdy + \dfrac{3}{2}dy^2$ là dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận tương ứng là $\begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính $A_1 = \det(3/8) = 3/8 > 0$, $A_2 = \det\begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} > 0$ nên dạng toàn phương $d^2f(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})$ xác định dương, do đó hàm số f(x,y) đạt cực tiểu địa phương tại điểm $(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e})$ và $f_{ct} = f(1/2\sqrt{e}, 1/4\sqrt{e}) = -\dfrac{1}{16e}$.

Câu 5.

Miền $D = \{(x,y) \in R^2 \mid y^2 = x; y^2 = 2x; y = ax\}$ (a > 0) có đồ thị trong hệ tọa độ Descarter Oxy vuông góc là



(0,25đ)

Parabol $y^2 = x$ giao với parabol $y^2 = 2x$ tại điểm O(0,0); parabol $y^2 = x$ giao với đường thẳng y = ax tại điểm O(0,0) và điểm $A(1/a^2, 1/a)$; parabol $y^2 = 2x$ giao với đường thẳng y = ax tại điểm O(0,0) và điểm $B(2/a^2, 2/a)$. **(0,25đ)**

Từ đồ thị của miền D suy ra diện tích S của miền D là $S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy$ và nếu chiếu D lên trục Oy thì $D=D_1\cup D_2$ với $\begin{cases} D_1=\begin{cases}0\le y\le 1/a\\ y^2/2\le x\le y^2\end{cases}\\ D_2=\begin{cases}1/a\le y\le 2/a\\ y^2/2\le x\le y/a\end{cases}\end{cases}$ $(a>0)$ **(0,5đ)**

$$\Rightarrow S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy=\int_0^{1/a}dy\int_{y^2/2}^{y^2}dx+\int_{1/a}^{2/a}dy\int_{y^2/2}^{y/a}dx=\int_0^{1/a}\left(x\Big|_{x=y^2/2}^{x=y^2}\right)dy+\int_{1/a}^{2/a}\left(x\Big|_{x=y^2/2}^{x=y/a}\right)dy=$$

$$\int_0^{1/a}\left(y^2-\frac{y^2}{2}\right)dy+\int_{1/a}^{2/a}\left(\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^{1/a}y^2dy+\int_{1/a}^{2/a}\left(\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1/a}+\left(\frac{1}{a}\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=1/a}^{y=2/a}=$$

$\dfrac{1}{6a^3}+\dfrac{1}{3a^3}=\dfrac{1}{2a^3}$.**(0,75đ)**

Hoặc nếu chiếu D lên trục Ox thì $D=D_1\cup D_2$ với $\begin{cases} D_1=\begin{cases}0\le x\le 1/a^2\\ \sqrt{x}\le y\le\sqrt{2x}\end{cases}\\ D_2=\begin{cases}1/a^2\le x\le 2/a^2\\ ax\le y\le\sqrt{2x}\end{cases}\end{cases}$ $(a>0)$

$$\Rightarrow S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy=\int_0^{1/a^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}}dy+\int_{1/a^2}^{2/a^2}dx\int_{ax}^{\sqrt{2x}}dy=\int_0^{1/a^2}\left(y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=\sqrt{2x}}\right)dx+\int_{1/a^2}^{2/a^2}\left(y\Big|_{y=ax}^{y=\sqrt{2x}}\right)dx=$$

$$\int_0^{1/a^2}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x}\right)dx+\int_{1/a^2}^{2/a^2}\left(\sqrt{2x}-ax\right)dx=(\sqrt{2}-1)\int_0^{1/a^2}x^{\frac{1}{2}}dx+\sqrt{2}\int_{1/a^2}^{2/a^2}x^{\frac{1}{2}}dx-a\int_{1/a^2}^{2/a^2}xdx=$$

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1/a^2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=1/a^2}^{x=2/a^2}-\frac{a}{2}x^2\Big|_{x=1/a^2}^{x=2/a^2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}\frac{1}{a^3}+\frac{2(4-\sqrt{2})}{3}\frac{1}{a^3}-\frac{3}{2}\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2a^3}.$$

*Có thể tính diện tích S của miền D như sau

$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1} dxdy-\iint\limits_{D_2} dxdy$ trên miền $D=D_1\setminus D_2$ với $\begin{cases} D_1=\begin{cases}0\le x\le 2/a^2\\ ax\le y\le\sqrt{2x}\end{cases}\\ D_2=\begin{cases}0\le x\le 1/a^2\\ ax\le y\le\sqrt{x}\end{cases}\end{cases}$ $(a>0)$

$$\Rightarrow S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1} dxdy-\iint\limits_{D_2} dxdy=\int_0^{2/a^2}dx\int_{ax}^{\sqrt{2x}}dy-\int_0^{1/a^2}dx\int_{ax}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^{2/a^2}\left(y\Big|_{y=ax}^{y=\sqrt{2x}}\right)dx-\int_0^{1/a^2}\left(y\Big|_{y=ax}^{y=\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$\int_0^{2/a^2}(\sqrt{2x}-ax)dx-\int_0^{1/a^2}(\sqrt{x}-ax)dx=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2/a^2}-\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1/a^2}=$$

$\dfrac{2}{3a^3}-\dfrac{1}{6a^3}=\dfrac{1}{2a^3}$.

Lưu ý. Ký hiệu các miền D_1, D_2 ở các cách tính khác nhau là khác nhau.

Tìm a từ đẳng thức $S=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2a^3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a^3=1\Leftrightarrow a=1$.**(0,25đ)**