Chương 3. PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

3.1. Đạo hàm

3.1.1. Định nghĩa đạo hàm, đạo hàm một phía, ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Định nghĩa **3.1.1.1.** Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a,b), tức là D(f) = (a,b). Khi đó, hàm số y = f(x) xác định tại lân cận điểm $x_0 \in D(f)$, xét x thuộc lân cận đó, đặt $\Delta x = x - x_0$ (được gọi là số gia của đối số tại điểm x_0, rõ ràng là $x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$) và $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ (được gọi là số gia của hàm số tại điểm x_0).

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, đồng thời chúng ta nói rằng, hàm số y = f(x) *khả vi* tại điểm x_0.

Vì x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng (a,b) nên chúng ta có thể dùng x thay cho x_0, khi đó $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ và nếu giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của hàm số y = f(x) tại điểm x, đồng thời chúng ta nói rằng, hàm số y = f(x) *khả vi* tại điểm x.

Nếu hàm số y = f(x) khả vi tại mọi điểm $x\in(a,b)$ thì ta nói rằng f(x) khả vi trong khoảng (a,b).

Chúng ta ký hiệu đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x bằng một trong các biểu thức: y’, y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ tùy từng trường hợp, nếu không gây ra bất kỳ sự hiểu nhầm nào.

Ví dụ **3.1.1.1.** Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số f(x) sau đây, tại điểm $x\in D(f)$

(a) y = f(x) = c (c là một hằng số) với D(f) = (a,b)

Chúng ta có Δy = f(x+Δx) – f(x) = c – c = 0

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0.$$

(b) y = f(x) = x^n ($n\in\mathbf{N}$) với D(f) = (a,b)

Chúng ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k\right] - x^n =$

$$\left[C_n^0 x^{n-0}(\Delta x)^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k\right] - x^n = \left[1.x^n.1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k\right] - x^n =$$

$$\left[x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k\right] - x^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k = (\Delta x)\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[C_n^1 x^{n-1}(\Delta x)^{1-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}\right] =$$

$$nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x)^{k-1} = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}.0 = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}.$$

(c) y = f(x) = a^x (a > 0) với D(f) = **R**

Chúng ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a.$$

(d) y = f(x) = sinx với D(f) = **R**

Chúng ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] =$$

$$= \left[\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right].\left[\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] = (\cos x).1 = \cos x.$$

Định nghĩa **3.1.1.2.** Trong Định nghĩa 3.1.1.1. nếu giới hạn $\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm bên trái* của hàm số y = f(x) tại điểm x, còn nếu giới hạn $\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm bên phải* của hàm số y = f(x) tại điểm x.

Chúng ta ký hiệu đạo hàm bên trái của hàm f(x) tại điểm x bằng f'(x–0) và đạo hàm bên phải của hàm f(x) tại điểm x bằng f'(x+0).

Định lý **3.1.1.1.** f'(x-0) = f'(x+0) = L ⇔ f'(x) = L (L là một số hữu hạn).

Ví dụ **3.1.1.2.** Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số y = f(x) = |x| = x.sgn(x)

Dễ thấy rằng D(f) = **R** và R(f) = [0,+∞)

- Khi x > 0 thì sgn(x) = 1 ⇒ y = f(x) = x ⇒ Δy = f(x+Δx) – f(x) = (x + Δx) – x = Δx

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1 = \operatorname{sgn}(x)$$

- Khi x < 0 thì sgn(x) = –1 ⇒ y = f(x) = –x ⇒Δy = f(x+Δx) – f(x) = – (x + Δx) – (–x) = –Δx

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(-1) = -1 = \operatorname{sgn}(x)$$

Do đó f'(x) = sgn(x) khi x ≠ 0.

- Khi x = 0:

$$+f'(0-0) = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}(-1) = -1$$

$$+f'(0+0) = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} 1 = 1$$

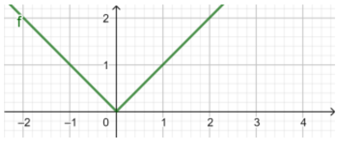
⇒ f'(0–0) ≠ f'(0+0) nên không tồn tại f'(0).

Định lý **3.1.1.2.** Hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a,b) nếu tồn tại đạo hàm tại điểm x∈(a,b) thì nó [hàm số y = f(x)] liên tục tại điểm x.

Nhận xét.

(1) Mệnh đề ngược của Định lý 3.1.1.2 chưa chắc đúng, tức là: Hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a,b) nếu liên tục tại điểm $x\in(a,b)$ thì chưa chắc nó [hàm số y = f(x)] tồn tại đạo hàm tại điểm x.

Chẳng hạn, chúng ta xét hàm số y = f(x) = |x| = x.sgn(x) ở Ví dụ 3.1.1.2. Đồ thị của hàm số này là



Hàm số này liên tục tại điểm x = 0 vì $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 0 = f(0)$, tuy nhiên, như chúng ta đã chứng minh ở Ví dụ 3.1.1.2., hàm số này không tồn tại đạo hàm tại điểm x = 0.

(2) Điều kiện cần để hàm số y = f(x) khả vi tại điểm $x = x_0$ là nó liên tục tại điểm này, điều kiện đủ để hàm số y = f(x) khả vi tại điểm $x = x_0$ là nó tồn tại đạo hàm tại điểm này.

Ví dụ. Xác định a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$ khả vi trên tập xác định của nó.

Bài giải. Hàm số $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$ có tập xác định D(f) = **R**.

Chúng ta đã biết, biểu thức $(a + bx^2)$ là hàm số sơ cấp nên khả vi tại $\forall x\in(-1,1) \subset D(f) =$ **R** và biểu thức $1/|x|$ cũng là hàm số sơ cấp nên khả vi tại $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \subset D(f) =$ **R**. Do đó, để hàm số $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$ khả vi trên D(f) thì hàm số này phải khả vi tại các điểm $x_0 = \pm 1$.

- Tại điểm $x_0 = -1$:

Điều kiện cần để hàm số $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = -1$ là hàm số này phải liên tục tại điểm $x_0 = -1$ tức là phải có $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = f(-1) = 1/|-1| = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1-0} 1/|x| = \lim_{x\to -1+0} (a + bx^2) \Leftrightarrow 1 = a + b \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (1-b) + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases},$$

Điều kiện đủ để hàm số $f(x) = \begin{cases} (1-b) + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = -1$ là hàm số này phải tồn tại đạo hàm tại điểm $x_0 = -1$ tức là phải có f'(–1–0) = f'(–1+0). Theo định nghĩa đạo hàm một phía của hàm số f(x) tại điểm $x_0 = -1$, chúng ta có

$$\begin{cases} f'(-1-0) = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{1}{|-1|}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{\dfrac{1}{-x} - 1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1}{-x} = 1 \\ f'(-1+0) = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{(1-b) + bx^2 - \dfrac{1}{|-1|}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1+0} b(x-1) = -2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = -2b$$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(1-b)+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = -1$ thì a và b phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}a+b=1\\ -2b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3/2\\ b=-1/2\end{cases}$.

- Tại điểm $x_0 = 1$:

Điều kiện cần để hàm số $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = 1$ là hàm số này phải liên tục tại điểm $x_0 = 1$ tức là phải có $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1) = 1/|1| = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1-0}(a+bx^2) = \lim_{x\to 1+0} 1/|x| \Leftrightarrow a+b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}(1-b)+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases},$$

Điều kiện đủ để hàm số $f(x)=\begin{cases}(1-b)+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = 1$ là hàm số này phải tồn tại đạo hàm tại điểm $x_0 = 1$ tức là phải có f'(1–0) = f'(1+0). Theo định nghĩa đạo hàm một phía của hàm số f(x) tại điểm $x_0 = 1$, chúng ta có

$$\begin{cases} f'(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(1-b)+bx^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{b(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} b(1+x) = 2b\\[2ex] f'(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\frac{1}{|x|}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{-1}{x} = -1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f'(1–0) = f'(1+0) $\Leftrightarrow$ 2b = –1

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}$ khả vi tại điểm $x_0 = 1$ thì a và b phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}a+b=1\\ 2b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3/2\\ b=-1/2\end{cases}$.

Kết luận: Hàm số $f(x)=\left.\begin{cases}a+bx^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}\right|_{(a=3/2,b=-1/2)} = \begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|\ge 1\end{cases}$ khả vi trên tập xác định của nó.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của nó [hàm số y = f(x)] tại điểm có hoành độ x.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm: Quan hệ giữa quãng đường s đi được của một vật thể, tương ứng với thời gian t, được thể hiện qua hàm số y = s(t). Khi đó, đạo hàm s'(t) là vận tốc chuyển động của vật thể tại thời điểm t.

3.1.2. Các quy tắc tính đạo hàm, bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp

Định lý **3.1.2.1.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) xác định trong khoảng (a,b) và tồn tại các đạo hàm f'(x), g'(x) tại điểm x∈(a,b), khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\dfrac{f(x)}{g(x)}\left[g(x)\neq 0\right]$ cũng tồn tại đạo hàm tại điểm x và được xác định như sau:

1. [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)
2. [f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)

3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ với $g(x)\neq 0$

Nhận xét.

(1) Có thể chứng minh Quy tắc 1. cho việc tính đạo hàm của tổng hữu hạn các hàm số, bằng phương pháp Quy nạp toán học $f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$.

(2) Có thể chứng minh Quy tắc 2. cho việc tính đạo hàm của tích hữu hạn các hàm số, bằng phương pháp Quy nạp toán học $f(x)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x) \Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k'(x)\prod_{i=1(i\neq k)}^{n} f_i(x)\right)$.

Định lý **3.1.2.2.** (*Đạo hàm của hàm hợp*). Giả sử hàm số u = f(x) có D(f), R(f) và tồn tại đạo hàm $u_x' = f'(x)$ tại điểm $x\in D(f)$; giả sử hàm số y = g(u) có D(g), R(g) và tồn tại đạo hàm $y_u' = g'(u)$ tại điểm $u\in D(g)$. Khi đó, nếu $R(f)\subset D(g)$ thì hàm hợp y = g[f(x)] tồn tại và đạo hàm y_x' tại x của nó tồn tại, được xác định bằng công thức $y_x' = y_u'.u_x'$.

Nhận xét. Có thể mở rộng định lý cho trường hợp hàm hợp của một số hữu hạn các hàm số. Chẳng hạn, nếu y = g(u), u = f(v), v = h(x) thì $y_x' = y_u'.u_v'.v_x'$

Định lý **3.1.2.3.** (*Đạo hàm của hàm ngược*)

Giả sử hàm số y = f(x) có D(f) và R(f), đơn điệu tăng (giảm) trên D(f) và tồn tại đạo hàm $y_x' = f'(x)\neq 0$ với $\forall x\in D(f)$, khi đó hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ tồn tại đạo hàm x_y' với $\forall y\in R(f)$ và được xác định bằng công thức $x_y' = 1/y_x'$.

Ví dụ. Tìm y_x' nếu y = y(x) thỏa mãn biểu thức $y^3 + 3y = x$.

Bài giải.

Hàm số $x = y^3 + 3y$ có D(f) = R(f) = **R**. Chúng ta có $x_y' = 3y^2+3>0$ với $x\in D(f)$, nên x đơn điệu tăng và như vậy tồn tại hàm ngược y = y(x) có D(y) = **R**. Do đó $y_x' = 1/x_y' = 1/3(1+y^2)$.

Định lý **3.1.2.4.** (*Đạo hàm theo tham số*)

Giả sử hàm số y = f(x) được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ trong đó các hàm số x(t), y(t) đều xác định trong khoảng (a,b), đồng thời tồn tại các đạo hàm x'(t), y'(t) [$x'(t)\neq 0$] tại điểm $t\in(a,b)$. Khi đó tồn tại đạo hàm $y_x' = f'(x)$ tại điểm x = x(t) và được xác định bằng công thức $y_x' = f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Định lý **3.1.2.5.** (*Đạo hàm của hàm ẩn*)

Giả sử y là hàm của đối số x được cho bởi đẳng thức F(x,y) = 0. Nếu tồn tại đạo hàm y_x' thì nó được xác định như sau:

(1) Tính đạo hàm vế trái của đẳng thức F(x,y) = 0 (khi xem y là hàm của x) và cho biểu thức của đạo hàm vừa tính được bằng không;

(2) Giải phương trình vừa nhận được đối với y_x' và nhận được $y_x' = f(x,y)$.

Ví dụ. Tìm y_x' nếu y = y(x) (a) $y^3 + 3y = x$, (b) $x^y = y^x$, (c) $x\sin y + y\sin x = 0$

Bài giải.

(a) $y^3+3y = x \Leftrightarrow y^3+3y-x=0 \Rightarrow 3y^2y_x' + 3y_x' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(y^2+1)y_x' = 1 \Leftrightarrow y_x' = \dfrac{1}{3(y^2+1)}$

(b) $x^y = y^x \Leftrightarrow x^y - y^x = 0 \Leftrightarrow e^{y\ln x} - e^{x\ln y} = 0 \Rightarrow \left(e^{y\ln x}\right)_x' - \left(e^{x\ln y}\right)_x' = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{y\ln x}\left(y'.\ln x+y.\frac{1}{x}\right)-e^{x\ln y}\left(\ln y+x.\frac{y'}{y}\right)=0\Leftrightarrow x^y\left(y'.\ln x+\frac{y}{x}\right)-y^x\left(\ln y+\frac{x}{y}.y'\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x^y\ln x-\frac{x}{y}y^x\right)y'=y^x\ln y-\frac{y}{x}x^y\Rightarrow y'=\frac{y^x\ln y-\frac{y}{x}x^y}{x^y\ln x-\frac{x}{y}y^x}=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}} \text{ vì } x^y=y^x$$

Nhận xét. $x^y=y^x\Leftrightarrow e^{y\ln x}=e^{x\ln y}\Rightarrow y\ln x=x\ln y\Rightarrow(y\ln x)'=(x\ln y)'$

$$\Rightarrow y'.\ln x+y.\frac{1}{x}=\ln y+x.\frac{y'}{y}\Rightarrow y'=\frac{\ln y-y/x}{\ln x-y/x}$$

(c) $x\sin y+y\sin x=0\Rightarrow$ (siny + x.y'.cosy) + (y'.sinx + y.cosx) = 0 $\Rightarrow y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$

Nhận xét. Việc sử dụng định nghĩa để tính đạo hàm của một hàm số được cho bởi một biểu thức phức tạp là không đơn giản. Khi đó, ta biến đổi biểu thức của hàm số về dạng đơn giản hơn và sử dụng 5 định lý (các quy tắc tính đạo hàm) ở trên cùng với Bảng đạo hàm của các hàm sơ cấp ở dưới để tính đạo hàm của hàm số đã cho.

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp

$$(x^a)'=ax^{a-1} \text{ với } a\in\mathbf{R}\Rightarrow\begin{cases}(x^n)'=nx^{n-1} & (n\in N)\\ (\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} & (n\in N^*)\end{cases}$$

$(a^x)'=a^x\ln a$ với $a>0\Rightarrow(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ với $a>0$ và $x\neq0\Rightarrow(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ với $x\neq0$

(sinx)' = cosx

(cosx)' = -sinx

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với |x| < 1

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với |x| < 1

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Ví dụ **3.1.2.1.** Tính đạo hàm f'(x) của hàm số y = f(x) = a^xsinx

Cách 1. *Sử dụng định nghĩa để tính*

Chúng ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x) - a^x\sin x = a^x[\sin x.(a^{\Delta x}\cos\Delta x - 1) + \cos x.a^{\Delta x}\sin\Delta x]$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}a^x\frac{\sin x.(a^{\Delta x}\cos\Delta x-1)+\cos x.a^{\Delta x}\sin\Delta x}{\Delta x}=$$

$$a^x\left[\sin x.\lim_{\Delta x\to0}\frac{a^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x.\lim_{\Delta x\to0}a^{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]$$

Chúng ta có

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\Delta x.\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\Delta x.\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\Delta x.\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}-\frac{1}{2}.\Delta x.\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2\right]=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}-\frac{1}{2}.\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x.\left(\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2=1.\ln a-\frac{1}{2}.0.1^2=\ln a$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}=a^0=1$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x(\sin x.\ln a+\cos x.1.1)=a^x(\ln a.\sin x+\cos x)$$

Cách 2. *Sử dụng quy tắc để tính*

Đặt $u(x) = a^x$ và $v(x) = \sin x \Rightarrow y = f(x) = u(x).v(x) \Rightarrow y' = f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) =$ $a^x.\ln a.\sin x + a^x.\cos x = a^x(\ln a.\sin x + \cos x)$

Ví dụ **3.1.2.2.** Tính đạo hàm f'(x) của các hàm số sau

(a) $y = \ln(\arctan x)$

Chúng ta thấy, đối số của hàm ln là một hàm số khác nên ta dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp. Đặt $u = \arctan x \Rightarrow y = \ln u \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = \frac{1}{u}.\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\arctan x}.\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$.

(b) $y = e^{\arcsin x}$

Chúng ta thấy, đối số của hàm số mũ cơ số e là một hàm số khác nên ta dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp. Đặt $u = \arcsin x \Rightarrow y = e^u \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = e^u.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $y = x^x$

Chúng ta thấy biểu thức x^x không phải hàm lũy thừa và cũng không phải hàm số mũ, nên dùng phép biến đổi $x^x = e^{x\ln x}$ hay $y = e^{x\ln x}$, bây giờ đặt $u(x) = x\ln x \Rightarrow y = e^u$

$$\Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = e^u.(x\ln x)'_x = e^{x\ln x}\left(\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = x^x(1+\ln x).$$

Ví dụ **3.1.2.3.** Hàm số $y = x + x^3$, tính đạo hàm x'_y.

Dễ thấy rằng D(f) = R(f) = **R**, hàm số này liên tục và đơn điệu trên D(f) vì đạo hàm $y'_x = 1+3x^2 > 0$ với $\forall x\in D(f)$, nên tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ với $D(f^{-1}) = R(f)$, do đó $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+3x^2}$.

Ví dụ **3.1.2.4.** Tính đạo hàm của hàm số y = f(x) được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) = a\cos^3 t \\ y = y(t) = b\sin^3 t \end{cases}$ với $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b.3\sin^2 t.\cos t}{a.3\cos^2 t.(-\sin t)} = -\frac{b}{a}\tan t$$

Ví dụ **3.1.2.5.** Giả sử hàm số y = y(x) thỏa mãn biểu thức arctany – y + x = 0, tính đạo hàm y'_x

Đạo hàm hai vế biểu thức arctany – y + x = 0 theo x khi xem y là hàm của đối số x ta được

$$(\arctan y)'_y.y'_x - y'_x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y'_x}{1+y^2} - y'_x + 1 \Rightarrow y'_x = 1 + \frac{1}{y^2}$$

3.1.3. Các định lý giá trị trung bình

Định lý **3.1.3.1.** (*Định lý Fermat*) Nếu hàm số y = f(x) có D(f) = (a,b) và R(f) = **R** [f: (a,b)→**R**] đạt cực trị và khả vi tại điểm $c \in (a,b)$ thì f'(c) = 0.

Định lý **3.1.3.2.** (*Định lý Rolle*) Giả sử hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi trong (a,b); khi đó nếu f(a) = f(b) thì tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho f'(c) = 0.

Định lý **3.1.3.3.** Định lý về số gia hữu hạn (*Định lý Lagrange*) Giả sử hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi trong (a,b); khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$.

Định lý **3.1.3.4.** (*Định lý Cauchy*) Giả sử các hàm số f(x), g(x) xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b), g'(x) ≠ 0 với mọi $x \in (a,b)$ và g(a) ≠ g(b); khi đó tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Nhận xét.

(1) Nếu f(a) = f(b) thì công thức $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$ trở thành f'(c) = 0, nghĩa là định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.

(2) Nếu g(x) = x thì công thức $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ trở thành $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$, nghĩa là định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy.

Ví dụ. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $|\sin a - \sin b| \le |a-b|$, (b) $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ với b < a

Bài giải

(a) Xét hàm số f(x) = sinx với D(f) = [a,b]; ta thấy $f(x) \in C_{[a,b]}$ và khả vi trong (a,b) vì hàm số sinx là hàm sơ cấp, do đó hàm số f(x) = sinx hoàn toàn thỏa mãn định lý Lagrange, nên áp dụng định lý Lagrange cho hàm số này ta được $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$ với $c \in (a,b)$ hay $\frac{\sin a - \sin b}{a-b} = \cos x\big|_{x=c} = \cos c$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin a - \sin b}{a-b}\right| = |\cos c| \le 1 \Leftrightarrow |\sin a - \sin b| \le |a-b|.$$

(b) Xét hàm số $f(x) = x^n$ với D(f) = [b,a]; ta thấy $f(x) \in C_{[b,a]}$ và khả vi trong (b,a) vì hàm số x^n là hàm sơ cấp, do đó hàm số $f(x) = x^n$ hoàn toàn thỏa mãn định lý Lagrange, nên áp dụng định lý Lagrange cho hàm số này ta được $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$ với $c \in (b,a)$ hay $\frac{a^n - b^n}{a-b} = nx^{n-1}\big|_{x=c} = nc^{n-1} \Rightarrow a^n - b^n = nc^{n-1}(a-b) \Rightarrow nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ vì b < a và $c \in (b,a)$.

Ví dụ. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ với x > 0, (b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với x > 0

Bài giải

(a) Xét hàm số $f(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$ với D(f) = [0,+∞), chúng ta có $f'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$ với x ≥ 0, nên hàm số f(x) đơn điệu tăng với ∀x ≥ 0, tức là $f(x)\geq f(0)=\ln(1+0)+\frac{0^2}{2}-0=0$ hay $\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x\geq 0\Leftrightarrow x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)$ với $x\geq 0$

Xét tiếp hàm số g(x) = x – ln(1+x) với D(g) = [0,+∞), chúng ta có $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geq 0$ với x ≥ 0, nên hàm số g(x) đơn điệu tăng với ∀x ≥ 0, tức là $g(x)\geq g(0)=0-\ln(1+0)=0$ hay $x-\ln(1+x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq\ln(1+x)$ với $x\geq 0$

Như vậy $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ với $x>0$.

Có thể chứng các bất đẳng thức bằng Định lý Rolle

(c) Xét hàm số f(x) = x – sinx với D(f) = [0,+∞), chúng ta có f'(x) = 1 – cosx ≥ 0 với x ≥ 0, nên hàm số f(x) đơn điệu tăng với ∀x ≥ 0, tức là $f(x)\geq f(0)=0-\sin 0=0$ hay x – sinx ≥ 0 ⇔ x ≥ sinx với $x\geq 0$

Bây giờ xét hàm số $g(x)=\sin x-x+x^3/6$ với D(f) = [0,+∞), chúng ta có $g'(x)=\cos x-1+x^2/2=\cos x-(1-x^2/2)$, bây giờ xét tiếp hàm số $h(x)=\cos x-(1-x^2/2)$, khi đó $h'(x)=-\sin x+x\geq 0$ khi x ≥ 0 (theo chứng minh trên), nên hàm số h(x) đơn điệu tăng với ∀x ≥ 0, tức là $h(x)\geq h(0)=\cos 0-(1-0^2/2)=0$ hay $\cos x-(1-x^2/2)\geq 0$ với ∀x ≥ 0, suy ra g'(x) ≥ 0 với ∀x ≥ 0, điều này có nghĩa là hàm số g(x) đơn điệu tăng với ∀x ≥ 0, tức là $g(x)\geq g(0)=\sin 0-0+0^3/6=0$ hay $\sin x-x+x^3/6\geq 0\Leftrightarrow\sin x\geq x-x^3/6$ với $\forall x\geq 0$

Như vậy $x-x^3/6<\sin x<x$ với $x>0$

3.2. Đạo hàm cấp cao

3.2.1. Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi tại mọi điểm x∈(a,b), khi đó f'(x) được gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số f(x) và ngoài ký hiệu như trên còn được ký hiệu là $f^{(1)}(x)$. Nếu hàm số f'(x) khả vi tại mọi điểm x∈(a,b) thì đạo hàm cấp 1 của f'(x) được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số f'(x) và được ký hiệu là f''(x) hay $f^{(2)}(x)$… Tổng quát: Nếu hàm số $f^{(n-1)}(x)$, được gọi là đạo hàm cấp n–1 của hàm số f(x), khả vi tại mọi điểm x∈(a,b) thì đạo hàm cấp 1 của $f^{(n-1)}(x)$, được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f(x), tức là $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây, mà sau này được sử dụng như là công thức đạo hàm cấp n cơ bản.

(a) $f(x) = x^a$ (a∈**R**)

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là $f'(x) = ax^{a-1}$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là $f''(x) = [f'(x)]' = (ax^{a-1}) = a(a-1)x^{a-2}$

- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) là $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$

Chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 công thức đúng

- Giả sử công thức đúng với n, tức là chúng ta có $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$

- Chúng ta phải chứng minh công thức đúng với n + 1, thật vậy: theo định nghĩa thì $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$ hay $f^{(n+1)}(x) = [a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}]' = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(a-n)x^{a-n-1} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)[a-(n+1)+1]x^{a-(n+1)}$ (đpcm)

Đặc biệt, khi $a = m \in \mathbf{N}^*$ thì $\left(x^m\right)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & \text{khi } n < m \\ n! & \text{khi } n = m \\ 0 & \text{khi } n > m \end{cases}$

(b) $f(x) = a^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n = a^x\ln^n a$. Đặc biệt, khi a = e thì $(e^x)^{(n)} = e^x$

(c) f(x) = sinx, chúng ta thấy $\begin{cases} f^{(1)}(x) = \cos x, & f^{(2)}(x) = -\sin x \\ f^{(3)}(x) = -\cos x, & f^{(4)}(x) = \sin x \\ f^{(5)}(x) = \cos x, & f^{(6)}(x) = -\sin x \end{cases}$

Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) = sinx là $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ (-1)^k \sin x & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1, tương ứng với k = 0 thì $(\sin x)^{(1)} = (-1)^0\cos x = \cos x$; còn khi n = 2, tương ứng với k = 1 thì $(\sin x)^{(2)} = (-1)^1\sin x = -\sin x$; công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là chúng ta có $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ (-1)^k \sin x & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases}$

- Chúng ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy

+ Với n = 2k+1 thì n+1 = (2k+1)+1 = 2(k+1), theo định nghĩa thì $(\sin x)^{(n+1)} = [(\sin x)^{(n)}]' = [(-1)^k\cos x]' = (-1)^k(-1)\sin x = (-1)^{k+1}\sin x = (\sin x)^{(n+1)}$;

+ Với n = 2k thì n+1 = 2k+1, theo định nghĩa chúng ta có $(\sin x)^{(n+1)} = [(\sin x)^{(n)}]' = [(-1)^k\sin x]' = (-1)^k\cos x = (\sin x)^{(n+1)}$ (đpcm).

Cách khác:

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) = sinx là $f^{(1)}(x) = (\sin x)^{(1)} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) = sinx là

$$f^{(2)}(x) = \left[f^{(1)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

- Đạo hàm cấp 3 của f(x) = sinx là

$$f^{(3)}(x) = \left[f^{(2)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$$

- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) = sinx là $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x) = (\sin x)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là chúng ta có $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$.

- Chúng ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)^{(1)}\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = 1.\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) =$$

$\cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[x+(n+1).\frac{\pi}{2}\right]$ (đpcm).

Tóm lại $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\sin x & \text{khi} \quad n=2k\\(-1)^k\cos x & \text{khi} \quad n=2k+1\end{cases}$

(d) f(x) = cosx, coi như bài tập, sinh viên tự chứng minh

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\cos x & \text{khi} \quad n=2k\\(-1)^{k+1}\sin x & \text{khi} \quad n=2k+1\end{cases}$$

(e) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ với $x\neq -1 \Leftrightarrow$ D(f) = **R**\{–1} = (–∞,–1)∪(–1,+∞)

Ta viết f(x) dưới dạng tương đương $f(x)=(1+x)^{-1}$

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là

$f^{(1)}(x)=\left[(1+x)^{-1}\right]^{(1)}=(-1)(1+x)^{-1-1}(1+x)'=(-1)(1+x)^{-2}.1=(-1).1.\frac{1}{(1+x)^2}$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là

$f^{(2)}(x)=\left[(-1).1.(1+x)^{-2}\right]^{(1)}=(-1).1.(-2).(1+x)^{-2-1}(1+x)'=(-1).(-1).1.2.(1+x)^{-3}.1=(-1)^2.2!.\frac{1}{(1+x)^3}$

- Dự đoán $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x)=(-1)^1\frac{1!}{(1+x)^{1+1}}=(-1)^1\frac{1}{(1+x)^2}$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là chúng ta có $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

- Chúng ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]^{(1)}=\left[(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right]^{(1)}=\left[(-1)^n.n!.(1+x)^{-(n+1)}\right]^{(1)}=$

$(-1)^n.n!.\left[-(n+1)\right](1+x)^{-(n+1)-1}(1+x)'=(-1)^{n+1}(n+1)!.(1+x)^{-(n+1)-1}=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(1+x)^{(n+1)+1}}$ (đpcm)

(f) $f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+(-x)}$ với $x\neq 1$, coi như bài tập, sinh viên tự chứng minh $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(g) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ với $x\neq\pm1$

Ta biến đổi f(x) thành dạng đơn giản hơn $f(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{a}{1+x}+\frac{b}{1-x}=$

$\frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\frac{(-a+b)x+(a+b)}{(1+x)(1-x)}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=0\\a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$, do đó

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\Rightarrow f^{n}(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right]$$

Do đó, từ kết quả của các ví dụ (f), (g) suy ra $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$

(h) f(x) = lnx với x > 0

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là $f^{(1)}(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là $f^{(2)}(x) = \left[f^{(1)}(x)\right]^{(1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(1)} = (-1).\frac{1}{x^2} = (-1)^1.\frac{1}{x^2}$

- Đạo hàm cấp 3 của f(x) là $f^{(3)}(x) = \left[f^{(2)}(x)\right]^{(1)} = \left[(-1)^1.\frac{1}{x^2}\right]^{(1)} = (-1).(-2).\frac{1}{x^3} = (-1)^2.2!.\frac{1}{x^3}$

- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) là $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = \frac{(-1)^0 0!}{x} = \frac{1}{x}$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là chúng ta có $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

- Chúng ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]^{(1)} = \left[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right]^{(1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!.(-n)}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \text{ (đpcm)}$$

3.2.2. Công thức Leibniz

Quy tắc tính đạo hàm (1) của Định lý 3.1.2.1. được tổng quát hóa và chứng minh một cách đơn giản $[f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$, còn quy tắc (2) cũng của định lý này được tổng quát hóa như sau và được gọi là Công thức Leibniz.

Giả sử $f(x)\in C_{[a,b]}$, $g(x)\in C_{[a,b]}$ và tồn tại các đạo hàm $f^{(k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$ $(1 \le k \le n)$ tại mọi điểm $x\in(a,b)$, khi đó hàm số f(x).g(x) cũng tồn tại đạo hàm đến cấp n tại mọi điểm $x\in(a,b)$ và được xác định bằng công thức $\left[f(x).g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)$ với quy ước $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ và $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$.

Nhận xét. Về mặt hình thức, Công thức Leibniz "giống như" Công thức Nhị thức Newton!

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = x^3\sin x$

Nếu đặt $u(x) = x^3$ và $v(x) = \sin x$ thì $f^{(n)}(x) = [x^3\sin x]^{(n)} = [u(x).v(x)]^{(n)} = [v(x).u(x)]^{(n)}$, áp dụng Công thức Leibniz ta được $\left[v(x).u(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x)$.

Chúng ta thấy $u'(x) = 3x^2$, $u''(x) = 6x$, $u^{(3)}(x) = 6$, $u^{(k)}(x) = 0$ với $k \ge 4$ nên

$$\left[f(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{3} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x) =$$

$$C_n^0 v^{(n)}(x).x^3 + C_n^1 v^{(n-1)}(x).3x^2 + C_n^2 v^{(n-2)}(x).6x + C_n^3 v^{(n-3)}(x).6 =$$

$$x^3.v^{(n)}(x) + 3nx^2.v^{(n-1)}(x) + 3n(n-1)x.v^{(n-2)}(x) + n(n-1)(n-2).v^{(n-3)}(x)$$

trong đó $v^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$, $v^{(n-1)}(x) = \sin\left[x + (n-1).\frac{\pi}{2}\right] = -\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$,

$v^{(n-2)}(x) = \sin\left[x + (n-2).\frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$ và $v^{(n-3)}(x) = \sin\left[x + (n-3).\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \left[f(x)\right]^{(n)} = x\left[x^2 - 3n(n-1)\right]\sin\left(x + \frac{nx}{2}\right) - n\left[3x^2 - (n-1)(n-2)\right]\cos\left(x + \frac{nx}{2}\right)$$

3.2.3. Công thức Taylor, các khai triển cơ bản

Cho hàm số $f(x)\in C_{[a,b]}$ và tồn tại các đạo hàm $f^{(k)}(x)$ ($\forall k\in\mathbf{N}^*$) tại mọi điểm $x_0\in(a,b)$, khi đó $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ với quy ước $f^{(0)}(x_0)\equiv f(x_0)$ và $0!\equiv 1$, được gọi là Công thức Taylor hay Khai triển Taylor của hàm f(x) tại điểm $x = x_0$. Như vậy, vế phải của Khai triển Taylor là một đa thức có bậc vô hạn đối với $(x–x_0)$.

Giả sử $n\in\mathbf{N}^*$, ta tách vế phải của Khai triển Taylor thành hai phần: Phần đầu $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ là đa thức bậc n đối với $(x–x_0)$, phần sau $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ là tổng các số hạng mà bậc có bậc cao hơn n đối với $(x–x_0)$, ký hiệu $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\equiv o\left((x-x_0)^n\right)$ và gọi phần này là VCB bậc cao hơn n đối với $(x–x_0)$. Khi đó, trong lân cận điểm $x = x_0$ (khi $|x–x_0|$ khá nhỏ), chúng ta có thể xấp xỉ $f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ sau khi bỏ đi $o\left((x-x_0)^n\right)$.

Đặc biệt, khi c = 0 thì Khai triển Taylor được gọi là Khai triển Mac Laurin, tức là $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ được gọi là Khai triển Mac Laurin của hàm f(x) tại điểm x = 0.

Định lý. Khai triển Taylor của hàm số f(x) tương đương Khai triển Mac Laurin của hàm số f(x).

Khai triển Mac Laurin của một số hàm sơ cấp

(1) $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^n=$

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\ (\alpha\in\mathbf{R})$$

- Khi $\alpha = n$ ($n\in\mathbf{N}^*$)

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k+...+x^n$$

- Khi $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k=1-x+x^2-...+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

(2) $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(3) $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$

(4) $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(5) $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$

Nhận xét.

(1) Việc khai triển một hàm số f(x) bất kỳ thành một đa thức bậc cao qua Công thức Taylor hay Công thức Mac Laurin, nói chung là không đơn giản vì việc tính các đạo hàm bậc cao khá cồng kềnh. Do đó, để thực hiện việc trên, chúng ta không nên tính toán trực tiếp mà nên biến đổi hàm số f(x) về dạng sao cho có thể sử dụng được các khai triển cơ bản đã biết.

(2) Chúng ta chứng minh $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$, thật vậy, như chúng ta đã biết $o(x^n)$ là đa thức có

Ví dụ. Khai triển Mac Laurin các hàm số sau

(a) $f(x) = e^{x^2}$, (b) $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$, (c) $f(x) = 1/(3x-1)$

Bài giải

(a) Chúng ta có $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, đặt t = x^2 $\Rightarrow f(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

(b) Chúng ta có $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(c) Chúng ta có $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1+(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, đặt t = 3x

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3x-1} = -\frac{1}{1-3x} = -\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$$

Ví dụ. Khai triển Mac Laurin hàm số f(x) = sin(sinx) đến x^5

Bài giải

Chúng ta có $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \Rightarrow \sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) =$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^5}{5!} + o(x^5) =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2.\frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) =$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{1}{3!}\frac{3x^5}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

Nhận xét. Nói chung, việc tính đạo hàm cấp cao của hàm số tại một điểm xác định là không đơn giản. Chẳng hạn, tính đạo hàm cấp 10 của hàm số f(x) = x^2ln(1+2x) tại điểm x = 0. Để thực hiện công việc này, theo quy trình chúng ta phải lần lượt tính đạo hàm cấp 1, đạo hàm cấp 2, …, đạo hàm cấp 10 của f(x) và cuối cùng thay x = 0 vào biểu thức của đạo hàm cấp 10 của f(x). Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán này là chỉ tính đạo hàm cấp 10 của f(x) tại điểm x = 0, nên chúng ta sẽ thực hiện như sau.

Theo Khai triển Mac Laurin $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = ... + \frac{f^{(10)}(0)}{10!} x^{10} + ...$ (*)

Chúng ta có $\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}$, đặt t = 2x $\Rightarrow \ln(1+2x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2x)^k}{k}$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \ln(1+2x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^k}{k} x^{k+2} =$$

$$(-1)^0 \frac{2^1}{1} x^3 + (-1)^1 \frac{2^2}{2} x^4 + ... + (-1)^7 \frac{2^8}{8} x^{10} + ... = 2x^3 - 2x^4 + ... - 32x^{10} + ... \text{ (**)}$$

Vì (*) và (**) là hai cách biểu thị của cùng một hàm số f(x) nên suy ra $\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = -32 \Rightarrow f^{(10)}(0) = -32.10!$

Ví dụ. Tìm giới hạn $\lim_{x \to 0} f(x)$ với $f(x) = \frac{\arctan(x^2) - x\ln(1+x)}{x^3}$

Chúng ta có $\begin{cases} \arctan(x^2) = x^2 - \dfrac{(x^2)^3}{3} + o(x^6) = x^2 - \dfrac{x^6}{3} + o(x^6) = x^2 + o(x^3) \\ x\ln(1+x) = x\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x^2 - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \arctan(x^2) - x\ln(1+x) = \left[x^2 + o(x^3)\right] - \left[x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right] = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Tính giới hạn của hàm số bằng cách thay thế VCB tương đương

Định nghĩa. (1) Nếu x_0 hữu hạn/vô hạn thì $\alpha(x)$ được gọi là VCB khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$; (2) Nếu C là hằng số thì VCB $\alpha_1(x)$ khi $x \to x_0$ và VCB $\alpha_2(x)$ khi $x \to x_0$ được gọi là VCB tương đương $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = C$. VCB $\alpha(x)$ khi $x \to x_0$ tương đương với VCB $\beta(x)$ khi $x \to x_0$ được viết là $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to x_0$.

Định lý. Nếu L hữu hạn, x_0 hữu hạn/vô hạn thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - L$ là VCB khi $x \to x_0$.

Định lý. Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$, giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L$, khi đó

(1) Nếu L = 0 thì VCB $\alpha(x)$ có bậc cao hơn bậc của VCB $\beta(x)$.
(2) Nếu $L \neq 0$ và L hữu hạn thì VCB $\alpha(x)$ có bậc bằng bậc của VCB $\beta(x)$
(3) Nếu L vô hạn thì VCB $\alpha(x)$ có bậc nhỏ hơn bậc của VCB $\beta(x)$.

Tính chất. (1) Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ thì $C\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ (C là hằng số, x_0 hữu hạn/vô hạn); (2) Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ và nếu f(x) là hàm giới nội (bị chặn) thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ (x_0 hữu hạn/vô hạn); (3) Nếu $\alpha_k(x)$ ($k = 1 \div n$) là n VCB khi $x \to x_0$ thì $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\alpha_k(x)$ khi $x \to x_0$ là VCB (C_k là các hằng số, x_0 hữu hạn hay vô hạn).

Một số VCB tương đương đơn giản nhất

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ($\alpha > 0$) khi $x \to 0$.

Ví dụ. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4x^2+1} - 1}{\tan x \tan 3x}$

Bài giải. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Chúng ta có $\sqrt{4x^2+1} - 1 = (4x^2+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}(4x^2) = 2x^2$, tanx ~ x và tan2x ~ 2x khi $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1} - 1}{\tan x \tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x.3x} = \frac{2}{3}.$$

Một số sai lầm khi tính giới hạn của hàm số bằng phương pháp thay thế VCB tương đương

Ví dụ. Tính các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2 + x + 1}$

Bài giải.

(a) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Nếu chúng ta thay thế tương đương sinx ~ x khi x $\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0$. Kết quả này là sai vì nếu sử dụng Quy tắc L'Hospitale để tính giới hạn trên thì chúng ta nhận được kết quả đúng là 1/6, cụ thể như sau: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và thỏa mãn các điều kiện của Quy tắc L'Hospitale nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{(L)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ lại có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và thỏa mãn các điều kiện của Quy tắc L'Hospitale nên tiếp tục sử dụng Quy tắc L'Hospitale $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{(L)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{6}.1=\dfrac{1}{6}$(hoặc tiếp tục sử dụng Quy tắc L'Hospitale một lần nữa).

Chúng ta có thể tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ bằng cách thay thế $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ khi $x\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left(x-x^3/6+o(x^3)\right)}{x^3}=\dfrac{1}{6}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{6}+0=\dfrac{1}{6}$.

(b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ có dạng vô định 1^∞. Nếu chúng ta thay thế tương đương tanx ~ x khi $x\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$ vẫn là dạng vô định 1^∞. Như vậy, bằng phương pháp thay thế VCB tương đương, chúng ta không tính được giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Bây giờ, chúng ta đi tính giới hạn này bằng phương pháp khác, chúng ta nhận thấy rằng $\dfrac{\tan x}{x}\to 1$ khi $x\to 0 \Rightarrow \dfrac{\tan x}{x}-1\to 0$ khi $x\to 0$.

Chúng ta có $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}=\left[1+\left(\dfrac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\tan x}{x}-1}.\left(\frac{\tan x}{x}-1\right).\frac{1}{x^2}}=\left\{\left[1+\left(\dfrac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\tan x}{x}-1}}\right\}^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$

$+\ \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\tan x}{x}-1}}=\lim\limits_{\frac{\tan x}{x}-1\to 0}\left[1+\left(\dfrac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\tan x}{x}-1}}=e$;

$+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\overset{(L')}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\dfrac{1}{(\lim\limits_{x\to 0}\cos x)^2}=\dfrac{1}{3}.1^2.\dfrac{1}{1^2}=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.

(c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ khi x $\to+\infty$. Nếu chúng ta thay thế tương đương sinx~x $\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{x^2+x+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0+0}=1$.

Kết quả này là sai vì $\sin^2x$ và $(x^2 + x + 1)$ không phải là các VCB khi x $\to+\infty$.

Giới hạn này được tính đúng như sau:

Chúng ta có $0\le\left|\frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}\right|=\left|\frac{1}{x^2+x+1}\right|.\sin^2 x\le\left|\frac{1}{x^2+x+1}\right|.1^2=\left|\frac{1}{x^2+x+1}\right|\to 0$ khi x $\to+\infty$

Theo Nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}=0$.

3.3. Định lý L'Hospitale

Định lý **3.3.1.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) thỏa mãn các điều kiện

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (a có thể hữu hạn hoặc vô hạn)

(2) Các hàm số f(x), g(x) khả vi trong lân cận nào đó của điểm x = a và g(x) ≠ 0 trong lân cận đó, có thể trừ ra chính điểm x = a

(3) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Nhận xét **3.3.1.** Định lý 3.3.1. cho khả năng tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ **3.3.1.** Tìm các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x^2)}{\ln[\cos(2x^2-x)]}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln(1+1/x^2)}$

Bài giải

(a) Chúng ta thấy f(x) = $\sin(3x^2)\to0$ và g(x) = $\ln[\cos(2x^2 - x)]\to0$ khi $x\to0$, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\frac{0}{0}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trên tập xác định của mỗi hàm; mặt khác chúng ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-6x\cos(3x^2)}{(4x-1)\tan(2x^2-x)}=-6\lim_{x\to0}\frac{x\cos(3x^2)}{(4x-1)(2x^2-x)\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=$$

$$-6\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cos(3x^2)}{x}}{(4x-1).\frac{2x^2-x}{x}.\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=-6\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x^2)}{(4x-1)(2x-1)\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=$$

$$-6.\frac{\lim\limits_{3x^2\to0}\cos(3x^2)}{(4\lim\limits_{x\to0}x-1)(2\lim\limits_{x\to0}x-1)\lim\limits_{2x^2-x\to0}\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=-6.\frac{1}{(4.0-1)(2.0-1).1}=-6$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2)}{\ln[\cos(2x^2-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-6$$

(b) Chúng ta thấy $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x\to 0$ và $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\to 0$ khi $x\to+\infty$, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\frac{0}{0}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trên tập xác định tương ứng của mỗi hàm; mặt khác chúng ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+1/x^2}.\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$$

Định lý **3.3.2.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) thỏa mãn các điều kiện

(1) $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ (a có thể hữu hạn hoặc vô cùng)

(2) Các hàm số f(x), g(x) khả vi trong lân cận nào đó của điểm x = a và g(x) ≠ 0 trong lân cận đó, có thể trừ ra chính điểm x = a

(3) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Khi đó $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Nhận xét **3.3.2.** Định lý 3.3.2. cho khả năng tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ **3.3.2.**

Tìm các giới hạn (a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$ với a > 0, (b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}$ với m∈**N** và a > 1, (c) $\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$

Bài giải

(a) Chúng ta thấy f(x) = lnx→+∞ và g(x) = x^a→+∞ khi x→+∞, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trên tập xác định của mỗi hàm; mặt khác chúng ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=\frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$$

(b) Giới hạn cần tìm có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x\ln a}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^x\ln^2 a}\overset{(L')}{=}...\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{m!}{a^x\ln^m a}=\frac{m!}{\ln^m a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=\frac{m!}{\ln^m a}.0=0$$

(c) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x.2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\lim_{x\to+0}\cos x}{\lim_{\frac{x}{2}\to+0}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

Nhận xét **3.3.3.**

(1) Nội dung của các Định lý 3.3.1., 3.3.2. tương tự nhau, chỉ khác nhau điều kiện (1), nên chúng ta có thể phát biểu thành một định lý như sau: Nếu khi x→a (hoặc x→∞) các hàm số f(x), g(x) cùng có giới hạn bằng 0 hoặc bằng ∞, tức là $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nếu giới hạn ở vế trái đẳng thức trên tồn tại (hữu hạn hoặc vô cùng).

(2) Để tính giới hạn của một hàm số thỏa mãn các điều kiện của Định lý L'Hospitale (hay còn được gọi là Quy tắc L'Hospitale) chúng ta có thể sử dụng tiếp quy tắc này nếu biểu thức tính được sau khi sử dụng Quy tắc, vẫn thỏa mãn các điều kiện của Quy tắc.

(3) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định 0.∞, tức là tìm $\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)$ với $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ thì biến đổi tích f(x).g(x) thành $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ dạng vô định $\frac{0}{0}$, hoặc $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(4) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định ∞ - ∞, tức là tìm $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ với $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ thì biến đổi f(x) - g(x) thành dạng tích như sau

hoặc là $f(x)-g(x)=f(x).g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]$, hoặc là $f(x)-g(x)=f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$, hoặc là $f(x)-g(x)=g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]$ đều có khả năng có dạng vô định 0.∞, sau đó sử dụng Nhận xét 3.3.3.(2) để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(5) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định 0^0, ∞^0, 1^∞, tức là phải tìm giới hạn của biểu thức $f(x)^{g(x)}$ thì ta dùng phép biến đổi $f(x)^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}$ và do tính liên tục của hàm số mũ ta được $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x).\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x).\ln f(x)}$. Sau đó, sử dụng Nhận xét 3.3.3.(2) đối với giới hạn $\lim\limits_{x\to a}g(x).\ln f(x)$ để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(6) Mặc dù Định lý L'Hospitale là một công cụ mạnh để tìm giới hạn nhưng nó không phải là một công cụ vạn năng, nghĩa là nó không thể thay thế toàn bộ các phương pháp tìm giới hạn khác.

Ví dụ **3.3.3.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

Bài giải

Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 0.∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(2) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\cot x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{-1/\sin^2 x}=-\lim_{x\to\pi/2}\sin^2 x=$$

$$-\left(\lim_{x\to\pi/2}\sin x\right)^2=-1^2=-1$$

Ví dụ **3.3.4.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

Bài giải

Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định ∞ - ∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(3) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x-1}\left[(x-1)-\ln x\right]=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1-\ln x)'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x-1+x\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to1}\ln x+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ **3.3.5.** Tìm các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, (c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\tan x^{\tan 2x}$

Bài giải

(a) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 0^0 nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{6}{1+2\ln x}.\ln x}=e^{6\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln x}{1+2\ln x}}$$, chúng ta có $6\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln x}\overset{(L')}{=}6\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{(\ln x)'}{(1+2\ln x)'}=$

$$6\lim_{x\to0+0}\frac{1/x}{2.1/x}=6\lim_{x\to0+0}\frac{1}{2}=6.\frac{1}{2}=3\Rightarrow\lim_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}=e^3$$

(b) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định ∞^0 nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}}$$

Chúng ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}\overset{(L')}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^1=e$$

(c) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 1^∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to\pi/4}\tan x^{\tan 2x}=\lim_{x\to\pi/4}e^{\tan 2x\ln(\tan x)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln(\tan x)}$$

Chúng ta có

$$\lim_{x\to\pi/4}\tan 2x\ln(\tan x)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\left[\ln(\tan x)\right]'}{(\cot 2x)'}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}}{-2/\sin^2 2x}=$$

$$-\lim_{x\to\pi/4}\sin 2x=-1\Rightarrow\lim_{x\to\pi/4}\tan x^{\tan 2x}=e^{-1}=1/e.$$

Ví dụ **3.3.6.** Chứng minh rằng các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ không thể tìm được bằng Quy tắc L'Hospitale, trong khi các giới hạn này có thể tìm được bằng phương pháp khác.

Bài giải

(a) Chúng ta thấy $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \to 0$ khi x→0 vì $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, g(x) = sinx→0 khi x→0; nên biểu thức cần tìm giới hạn $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Tuy nhiên, nếu sử dụng Quy tắc L'Hospitale $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ không tồn tại, trong khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1\end{cases}$. Trong trường hợp này, điều kiện (3) của Quy tắc L'Hospitale không thỏa mãn, nên không thể tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ bằng Quy tắc này được.

Ta tìm giới hạn này bằng cách khác

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ vì } \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1.$$

(b) Chúng ta thấy f(x) = x – sinx → ∞ và g(x) = x + sinx → ∞ khi x → +∞; nên biểu thức cần tìm giới hạn $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\tan^2\frac{x}{2}$ không tồn tại, tức là điều kiện (3) của Quy tắc L'Hospitale không thỏa mãn, nên không thể tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ bằng Quy tắc này được.

Ta tìm giới hạn này bằng cách khác

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-\sin x}{x}}{\frac{x+\sin x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \text{ vì } |\sin x| \le 1.$$

Một số phương pháp chính để tìm giới hạn của hàm số

Nhận xét. Việc tìm giới hạn của hàm số là việc khử các dạng vô định (có 7 dạng) bằng các phương pháp khác nhau.

(1) Sử dụng định nghĩa (bằng ngôn ngữ "ε-δ") của giới hạn.

(2) Biến đổi biểu thức của hàm số về dạng của các giới hạn cơ bản. (*nên ưu tiên cho phương pháp này*).

(3) Đạo hàm tại một điểm của một hàm số bằng đạo hàm của hàm số đó cũng tại điểm đó theo quy tắc tính đạo hàm.

(4) Sử dụng Quy tắc L'Hospitale.

(5) Thay thế VCB tương đương.

(6) Phối hợp các phương pháp trên, chẳng hạn nếu sử dụng phương pháp Thay thế VCB tương đương trước khi sử dụng Quy tắc L'Hospitale thì việc tính toán/biến đổi các biểu thức thường là đơn giản hơn.

3.4. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa **3.4.1.** Hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu với $\forall a\in I$, $\forall b\in I$ và với $\forall t\in[0,1]$ luôn có $tf(a) + (1 - t)f(b) \geq f[ta + (1 - t)b]$.

Xem ý nghĩa hình học của hàm số lồi trong [1].

Định nghĩa **3.4.2.** Hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lõm nếu với $\forall a\in I$, $\forall b\in I$ và với $\forall t\in[0,1]$ luôn có $tf(a) + (1 - t)f(b) \leq f[ta + (1 - t)b]$.

Xem ý nghĩa hình học của hàm số lõm trong [1].

Việc ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số dựa trên các định lý sau đây.

Định lý **3.4.1.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trong (a,b). Khi đó:

(1) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trên $[a,b]$ là $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ với $\forall x\in(a,b)$.

(2) Nếu $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ với $\forall x\in(a,b)$ và nếu $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ tại ít nhất một điểm $x\in(a,b)$ thì $f(b) > f(a)$ $[f(b) < f(a)]$.

Định lý **3.4.2.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trong (a,b) (có thể trừ ra một số hữu hạn điểm); giả sử $c\in(a,b)$ tức là $a < c < b$ (có thể tại $x = c$ hàm số $f(x)$ không khả vi).

(1) Nếu khi x đi qua $x = c$ (từ trái sang phải) mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (-) thì $f(x)$ đạt cực đại tại đó.

(2) Nếu khi x đi qua $x = c$ (từ trái sang phải) mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương (-) sang âm (+) thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại đó.

(3) Nếu khi x đi qua $x = c$ mà $f'(x)$ không đổi dấu thì $f(x)$ không đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm đó.

Định lý **3.4.3.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I nào đó và giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 $f''(x) > 0$ trong I. Khi đó, với $a < b$, $\forall a\in I$ và $\forall b\in I$; hàm số $f(x)$ lồi trong $[a,b]$.

Định lý **3.4.4.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I nào đó và giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 $f''(x) < 0$ trong I. Khi đó, với $a < b$, $\forall a\in I$ và $\forall b\in I$; hàm số $f(x)$ lõm trong $[a,b]$.

Việc khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thường được thực hiện theo trình tự như sau:

(1) Xác định D(f)

(2) Xác định tính chẵn, lẻ và tuần hoàn của hàm số

(3) Tìm $f'(x)$, tìm khoảng đơn điệu tăng, giảm

(4) Xác định các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có)

(5) Tìm $f''(x)$, xác định điểm uốn (nếu có), xác định tính lồi, lõm (nếu cần)

(6) Tìm các đường tiệm cận đứng, ngang và xiên (nếu có)

(7) Lập bảng biến thiên

(8) Vẽ đồ thị

Xem các ví dụ trong [1].

3.5. Vi phân cấp 1 và vi phân cấp cao, ứng dụng vào phép tính gần đúng

Giả sử hàm số $y = f(x)\in C_{[a,b]}$, nếu tại điểm $x = x_0\in(a,b)$ cho đối số x một số gia $\Delta x = x - x_0$ thì tương ứng, hàm số $y = f(x)$ cũng có số gia $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục nên khi $\Delta x\to 0$ thì $\Delta y\to 0$. Như vậy, nếu lấy Δx làm VCB thì Δy là hàm số của Δx. Do đó, nếu ở lân cận điểm $x = x_0$ thì số gia Δy của hàm, tương ứng với số gia Δx của đối số, có thể viết được dưới dạng

$\Delta y = A.\Delta x + o(\Delta x)$, trong đó A là một số thực chỉ phụ thuộc vào x_0 còn $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx. Dựa vào định nghĩa của đạo hàm chúng ta có thể xác định được A như sau.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x = x_0 chúng ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A.\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$ vì $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx. Suy ra $\Delta y \approx f'(x_0).\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$ hay **$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$**. Ta sử dụng công thức này để tính gần đúng giá trị của một hàm số tại một điểm x nếu biết giá trị của hàm số tại một điểm x_0 rất gần với điểm x.

Ví dụ **3.5.1.** Tính giá trị gần đúng của các hàm số y = f(x) tại điểm x tương ứng

(a) $y = f(x) = \sqrt{x}$ tại x = 3,98; (b) $y = f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ tại x = 0,15

Bài giải

(a) Chọn $x_0 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = x - x_0 = 3{,}98 - 4 = -0{,}02 \\ y_0 = f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$, mặt khác $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $\sqrt{3{,}98} \approx 2 + \frac{1}{4}.(-0{,}02) = 1{,}995$

(b) Chọn $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = x - x_0 = 0{,}15 - 0 = 0{,}15 \\ y_0 = f(x_0) = f(0) = \sqrt[5]{\frac{2-0}{2+0}} = 1 \end{cases}$, mặt khác $f'(x) = -\frac{4}{5(2+x)^2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{4}{5}}$

$f'(x_0) = -\frac{4}{5(2+x_0)^2}\left(\frac{2+x_0}{2-x_0}\right)^{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5(2+0)^2}\left(\frac{2+0}{2-0}\right)^{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{5} = -0{,}2$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $f(0{,}15) \approx 1 - 0{,}2.0{,}15 = 0{,}97$

Ví dụ **3.5.2.** Tính giá trị gần đúng của (a) $\sqrt[3]{26{,}19}$; (b) $\sin 29^0$

Bài giải

(a) Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, nếu chọn x_0 = 27 thì $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{27} = 3$, $f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$ và Δx = 26,19 – 27 = -0,81. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $\sqrt[3]{26{,}19} \approx 3 + \frac{1}{27}.(-0{,}81) = 2{,}97$

(b) Xét hàm số f(x) = sinx với $x = \frac{\pi}{180^0}.29^0 = \frac{29\pi}{180}$. Chọn $x_0 = \frac{\pi}{180^0}.30^0 = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ và $\Delta x = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}$. Mặt khác f'(x) = cosx $\Rightarrow f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được

$$\sin 29^0 \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.(-\frac{\pi}{180}) \approx 0{,}48$$

Định nghĩa **3.5.1.** (*Vi phân cấp 1*) Giả sử hàm số y = f(x)$\in C_{[a,b]}$ và khả vi (tức là tồn tại đạo hàm) tại mọi điểm x = $x_0 \in (a,b)$. Khi đó biểu thức $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là vi phân cấp 1 của hàm số y =

f(x) tại điểm $x = x_0$ và ký hiệu là dy hoặc df, nghĩa là $dy = f'(x_0)\Delta x$ hoặc $df = f'(x_0)\Delta x$. Đặc biệt, khi $f(x) = x$ thì $dx = f'(x_0)\Delta x = (x)'\big|_{x=x_0}\Delta x = 1\big|_{x=x_0}\Delta x = \Delta x$, do đó $dy = f'(x_0)dx$.

Vì x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng (a,b) nên chúng ta có thể dùng x thay cho x_0 và như vậy $dy = f'(x)dx$ được gọi là vi phân cấp 1 của hàm số f(x) tại điểm x. Từ đây ta suy ra $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, nghĩa là đạo hàm của hàm y = f(x) tại điểm x là tỷ số của hai vi phân dy và dx tại điểm x, điều này cũng giải thích cho việc dùng ký hiệu $\frac{dy}{dx}$ thay cho ký hiệu f'(x).

Các tính chất của vi phân cấp 1

(1) $d[\alpha f(x)] = \alpha d[f(x)]$

(2) $d[f(x) + g(x)] = d[f(x)] + d[g(x)]$

(3) $d[f(x)g(x)] = g(x)d[f(x)] + f(x)d[g(x)]$

(4) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)d[f(x)] - f(x)d[g(x)]}{g^2(x)}$ với $g(x) \neq 0$

(5) Công thức đối với vi phân cấp 1 đúng cả trong trường hợp khi đối số của hàm số không phải là biến độc lập, tức là vẫn đúng đối với hàm hợp. Tính chất này được gọi là tính bất biến về dạng của vi phân cấp 1.

Bảng vi phân cấp 1 của các hàm sơ cấp

TT	x là biến độc lập	Biến u = u(x)
1	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$	$d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}du$
2	$d(a^x) = a^x \ln a dx \Rightarrow d(e^x) = e^x dx$	$d(a^u) = a^u \ln a du \Rightarrow d(e^u) = e^u du$
3	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$ với $a > 0$ và $x \neq 0$ $\Rightarrow d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ với $a > 0$ và $x \neq 0$	$d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a}$ với $a > 0$ và $u \neq 0$ $\Rightarrow d(\ln u) = \frac{du}{u}$ với $a > 0$ và $u \neq 0$
4	d(sinx) = cosxdx	d(sinu) = cosudu
5	d(cosx) = -sinxdx	d(cosu) = -sinudu
6	$d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d(\tan u) = \frac{du}{\cos^2 u}$
7	$d(\cot x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d(\cot u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$
8	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ với $\lvert x \rvert < 1$	$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ với $\lvert u \rvert < 1$
9	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ với $\lvert x \rvert < 1$	$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ với $\lvert u \rvert < 1$
10	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$d(\arctan u) = \frac{du}{1+u^2}$
11	$d(\text{arccot} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$	$d(\text{arccot} u) = -\frac{du}{1+u^2}$

Định nghĩa **3.5.2.** (*Vi phân cấp cao*) Giả sử $dy = f'(x)dx$ là vi phân cấp 1 của hàm số y = f(x) tại điểm x, khi x thay đổi, nó cũng thay đổi theo, do đó nó là hàm số của x. Nếu hàm số này cũng có vi phân cấp 1 tại điểm x thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp 2 của hàm số y = f(x) và được ký hiệu là $d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = f^{(2)}(x)dx^2$. Tổng quát, vi phân cấp n của hàm số y = f(x) là vi phân cấp 1 của vi phân cấp n-1 của hàm số f(x) và được ký hiệu là $d^ny = d(d^{n-1}y) = d[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}] = f^{(n)}(x)dx^n$.

Các tính chất của vi phân cấp cao

(1) $d^n[\alpha f(x)] = \alpha d^n[f(x)]$

(2) $d^n[f(x) + g(x)] = d^n[f(x)] + d^n[g(x)]$

(3) $d^n\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}\left[f(x)\right] d^k\left[g(x)\right]$

Lưu ý. Công thức đối với vi phân cấp $n \geq 2$ *không còn đúng* khi đối số của hàm số không phải là biến độc lập.

Bài tập

3.1. Xác định a, b để các hàm sau đây, liên tục và khả vi trên tập xác định của nó

(a) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{khi} \quad x > 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi} \quad x < 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{khi} \quad x \geq 0 \end{cases}$

3.2. Dùng định nghĩa đạo hàm, tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{12} - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x - 16}{x - 4}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - 3}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x - 1}$

HD: (a) Xét hàm số $f(x) = (1+x)^{12}$, tìm f’(0) theo 2 cách: Cách 1. Dùng định nghĩa đạo hàm sẽ nhận được biểu thức giới hạn cần tính; Cách 2. Theo quy tắc. Hai kết quả này phải bằng nhau vì cùng là f’(0). Cách giải (b), (c) và (d) tương tự như cách giải (a).

3.3. Tính f’(0) của các hàm số (a) $f(x) = |x|\sin x$, (b) $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + kx)$

3.4. Tính các đạo hàm một phía của hàm số f(x) tại x_0

(a) $f(x) = |\ln(1+x)|$ tại $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}|x|$ tại $x_0 = 0$

(c) $f(x) = |\sin x|$ (d) $f(x) = x|x - 1|$ tại $x_0 = 1$

3.5. Tính đạo hàm của các hàm số sau

(a) $y = \arcsin \dfrac{2x^2}{1 + x^4}$ ($|x| < 1$) (b) $y = x^{x^x}$ ($x > 0$)

(c) $y = a^{x^x}$ ($a > 0, x > 0$) (d) $y = x^{a^x}$ ($a > 0, x > 0$)

(e) $y = x^{x^a}$ ($x > 0$) (f) $y = x.|x|$

(g) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (h) $y = (\sin x)^{\tan x}$

(i) $y = e^x \arctan e^x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}}$

3.6. (a) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết $x = x(y)$ thỏa mãn biểu thức $y = x + \ln x$ với $x > 0$; (b) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết $x = x(y)$ thỏa mãn biểu thức $y = x + e^x$; (c) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết $x = x(y)$ thỏa mãn biểu thức $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ với $x < 0$.

3.7. Tính đạo hàm y'_x của các hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng tham số

(a) $\begin{cases} x = a\sin t + \sin at \\ y = a\cos t + \cos at \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ với $0 \leq t \leq \pi$

(c) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1 + t) \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 1 + e^{at} \\ y = at + e^{-at} \end{cases}$

3.8. Tìm đạo hàm y'_x của các hàm ẩn

(a) $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$ (b) $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ với $x \neq 0$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ (d) $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

3.9. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $M(x_0,y_0)$ nằm trên elip.

HD: Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm và quy tắc tính đạo hàm của hàm ẩn.

3.10. Chứng minh rằng, đạo hàm f'(x) của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ có nghiệm thực trong (-1,1).

3.11. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$

(b) $\frac{a-b}{b} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{a}$ với $0 < a < b$

HD: Sử dụng định lý Lagrange cho từng hàm số thích hợp với mỗi bất đẳng thức.

3.12. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $e^x > 1 + x$ với $x \neq 0$, (b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

HD: Đối với mỗi bất đẳng thức, xét hàm số f(x) thích hợp, chẳng hạn $f(x) = e^x - x - 1$ đối với (a). Lưu ý rằng, nếu f'(x) > 0 thì hàm số f(x) đơn điệu tăng, còn nếu f'(x) < 0 thì hàm số đơn điệu giảm.

3.13. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) khả vi đến cấp n thì $[f(ax+b)]_x^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

HD: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

3.14. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số f(x) sau đây, tại điểm $x = x_0$ tương ứng

(a) f(x) = arctanx tại x = 0 (b) $f(x) = x^{n-1}\ln x$ tại x = 1

3.15. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(cx + d \neq 0)$, từ kết quả nhận được suy ra đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \frac{ax}{cx+d}$ $(cx + d \neq 0)$ (b) $f(x) = \frac{b}{cx+d}$ $(cx + d \neq 0)$

(c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $(x \neq 1)$ (d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $(x \neq -1)$ (e) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

3.16. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$ $(x \neq \pm a)$ (b) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ $(x \neq 1)$

(c) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ $(x \neq 0$ và $x \neq 1)$ (d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(x \neq 1$ và $x \neq 2)$

(e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ $(x \neq \pm 2)$ (f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$

(g) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx+c}}$ $(bx + c > 0)$ (h) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ $(x^2 + x - 2 > 0)$

(i) $f(x) = \frac{1-x}{e^x}$ (k) $f(x) = e^x x^n$

3.17. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) f(x) = sin(ax) (b) cos(ax)

(c) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)$ (d) $f(x) = \cos(ax)\cos(bx)$ (e) $f(x) = \sin(ax)\sin(bx)$

(f) $f(x) = \sin^2 x$ (g) $f(x) = \cos^2 x$ (h) $f(x) = \sin^2 x.\cos^2 x$

3.18. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ (b) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$

3.19. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sin(dx)$ (b) $f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(dx)$

(c) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{dx}$ (d) $f(x) = \ln\frac{ax+b}{ax-b}\left(\frac{ax+b}{ax-b} > 0\right)$

3.20. Dùng Quy tắc L'Hospitale để tìm các giới hạn của các hàm số trong Bài giảng và trong Bài tập Chương 2, nếu sử dụng được quy tắc này.