Bài giải (tóm tắt) Bài tập GIẢI TÍCH 1 (Chương 5)

5.1. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số sau đây

(a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} \Rightarrow D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ

(b) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ

(c) $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n \Rightarrow C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{4}<1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ

(d) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$\Rightarrow$ tổng riêng $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

(e) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\Rightarrow$ tổng riêng $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

(f) $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

$\Rightarrow$ tổng riêng $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}\right)=$

$\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$

$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}\right)=$

$\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}-0+0\right)=\frac{1}{12} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

Nhận xét. Các chuỗi số ở (d), (e) và (f) nếu dùng Quy tắc D'Alembert thì không khẳng định được chuỗi hội tụ vì $D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

(g) Chuỗi $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...$ là tổng vô hạn các số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu tiên $u_1 = 2/3$ và công bội $q = 1/2 < 1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ và có tổng $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{2}{3}.\frac{1}{1-1/2}=\frac{4}{3}$.

(h) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}} \Rightarrow D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}<1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

(i) $0,6+0,51+0,501+0,5001+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10^n}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thỏa mãn.

(k) $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}\Rightarrow D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1\Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

(l) $1,1-1,01+1,001-1,0001+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1\neq 0\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thỏa mãn.

(m) $1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Rightarrow$ tổng riêng $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}=\begin{cases}0 & \text{khi } n=2k\\ 1 & \text{khi } n=2k+1\end{cases}\Rightarrow$ không tồn tại $\lim_{n\to\infty}S_n\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

5.2. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số sau đây

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4.2^n-3}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ với $p<1$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$ với $m>1$

Bài giải.

(a) $u_n=\frac{n}{10^n+1}<\frac{n}{10^n}=v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ hội tụ vì $D=\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{10}<1$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+1}$ hội tụ.

(b) $u_n=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ hội tụ vì $|q|<1$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ hội tụ.

(c) $D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Cách khác. $u_n=\frac{1}{4.2^n-3}<\frac{1}{4.2^n-4}=\frac{1}{4(2^n-1)}<\frac{1}{2^n-1}=v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ hội tụ vì $D=\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Cách khác. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ hội tụ vì $|q|=\frac{1}{2}<1$,

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4.2^n-3}$ hội tụ vì $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{4}$

(d) $u_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\ (\forall k\geq 1)$

$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-0=1\Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

Nhận xét. Các chuỗi số ở (d) dùng Quy tắc D'Alembert thì không khẳng định được chuỗi hội tụ vì $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

(e) $u_n=\frac{4^n}{(2^n+1)^2}=\frac{(2^n)^2}{(2^n+1)^2}=\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)^2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)^2$

$=\left[1\Big/\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{1+0}\right)^2=1^2=1\neq 0$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ phân kỳ vì điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thỏa mãn.

(f) So sánh $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,(p<1)$ với chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ,

vì $u_n=\frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}=v_n\,(\forall n\geq 1)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ phân kỳ.

(g) Đặt $\frac{m-1}{m}=q\Rightarrow 0<q<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ hội tụ.

5.3. Áp dụng dấu hiệu so sánh (1) để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$

Bài giải.

(a) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n=\frac{1}{\ln n}$ so sánh với chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $v_n=\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ. Vì $u_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}=v_n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n=\frac{2^n}{5^n+1}$ so sánh với $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ hội tụ vì $\left|\frac{2}{5}\right|<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ

vì $u_n=\frac{2^n}{5^n+1}<\frac{2^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n=v_n$.

5.4. Áp dụng dấu hiệu so sánh (2) để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau đây

(a) $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots$ (b) $\frac{1}{2.1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2.2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2.3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2.4-1}+\ldots$

Bài giải.

(a) $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n=\frac{2^n+1}{5^n+1}$ so sánh với $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ hội tụ vì $\left|\frac{2}{5}\right|<1$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

(b) $\frac{1}{2.1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2.2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2.3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2.4-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n=\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ so sánh với $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ là chuỗi phân kỳ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{2}$.

5.5. Áp dụng dấu hiệu so sánh (3) để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau đây

(a) $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\ldots$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $(p>1)$

Bài giải.

(a) $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ ,u_n=\frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}\equiv f(n)$.

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(10x-1)\ln(10x-1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(10x-1)\ln(10x-1)}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{10}\int_1^b\frac{d[\ln(10x-1)]}{\ln(10x-1)}=$$

$$\frac{\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln(10x-1)|\Big|_1^b}{10}=\frac{-\ln(\ln 9)+\lim_{b\to+\infty}\ln[\ln(10b-1)]}{10}=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ phân kỳ.}$$

Chứng minh $f(t)=\frac{1}{t\ln t}$ $(t>1)$ đơn điệu giảm.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ ,u_n=\frac{1}{n^p}\equiv f(n)$.

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=$$

$\frac{1}{p-1}+\frac{1}{1-p}.0=\frac{1}{p-1}$ khi $p>1$, $\Rightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ khi $p>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hội tụ khi $p>1$.

Chứng minh $f(t)=\frac{1}{x^p}$ $(p>1,\ x>1)$ đơn điệu giảm.

5.6. Áp dụng Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$ (b) $3+2{,}1^2+2{,}01^3+2{,}001^4+...$

(c) $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2.2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3.3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4.4^5+...$ (d) $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2.\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3.\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4.\frac{1}{4^5}+...$

Bài giải.

(a) $u_n=\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n\Rightarrow C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{2}{5}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

(b) $u_n=\left(2+\frac{1}{10^{n-1}}\right)^n\Rightarrow C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=2>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

(c) $u_n=\left(\frac{10}{11}\right)^n n^5\Rightarrow D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{10}{11}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

(d) $u_n=\left(\frac{11}{10}\right)^n\frac{1}{n^5}\Rightarrow D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{11}{10}>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

5.7. Nghiên cứu sự hội tụ và xác lập đặc tính của sự hội tụ (hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện) của các chuỗi đan dấu sau

(a) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$ (b) $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$

Bài giải.

(a) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ ,u_n=\frac{3n-2}{3n-1}$ vì $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{3n-1}=1\neq 0$ không thỏa mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ phân kỳ.

(b) $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, $u_n=1+\dfrac{n}{10^n}$ vì $\lim_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$ không thỏa mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ phân kỳ.

(c) $u_n=\dfrac{n+1}{n^2+n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=0$ và u_n đơn điệu giảm

vì $u_n=\dfrac{n+1}{n^2+n+1}>\dfrac{(n+1)+1}{(n+1)^2+(n+1)+1}=u_{n+1}\Leftrightarrow n^2+3n+1>0$ đúng ($\forall n\geq 1$).

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz.

So sánh chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2+n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$ với chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2+n+1}=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ có điều kiện.

5.8. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$

Bài giải.

Số hạng tổng quát của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ là $u_n(x)=\dfrac{1}{1+(x^2)^n}$

- Nếu |x| < 1 thì $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+(x^2)^n}=\dfrac{1}{1+\lim_{n\to\infty}(x^2)^n}=\dfrac{1}{1+0}=1\neq 0$ chuỗi phân kỳ.

- Nếu |x| = 1 thì chuỗi trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}=+\infty\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

- Nếu |x| > 1 thì so sánh chuỗi này với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$, $v(x)=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ là chuỗi hội tụ vì chuỗi là tổng các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu tiên là $\dfrac{1}{x^2}$ và công bội $q=\dfrac{1}{x^2}<1$.

Vì $u_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}<\dfrac{1}{x^{2n}}=v_n(x)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ.

Miền hội tụ của chuỗi là $X=\{x\in R:|x|>1\}\Leftrightarrow X=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5.9. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ (b) $2x^5+\dfrac{4x^{10}}{3}+\dfrac{8x^{15}}{5}+\dfrac{16x^{20}}{7}+...$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

Bài giải.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ với $a_n=\dfrac{1}{n!}\Rightarrow\rho=\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0\Rightarrow R=+\infty$.

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ hội tụ với $\forall x\in\mathbf{R}$.

Cách khác.

Viết chuỗi dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, theo Quy tắc D'Alembert thì

$D(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0 < 1$ với $\forall x\in \mathbf{R}$ nên chuỗi hội tụ với $\forall x\in\mathbf{R}$, tức là miền hội tụ của chuỗi này là toàn bộ tập số thực **R**.

Nhận xét. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hội tụ với $\forall x\in\mathbf{R}$ nên $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ với $\forall x\in\mathbf{R}$.

(b) Đặt $t = x^5$ $\Rightarrow 2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{7} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}x^{5n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n$ với $a_n = \frac{2^n}{2n-1} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \Rightarrow$ bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$.

- Tại $t = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ chuỗi trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ là chuỗi phân kỳ khi so sánh với chuỗi điều hòa.

- Tại $t = -\frac{1}{2}$ hay $x = -\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ là chuỗi hội tụ có điều kiện.

Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}x^{5n}$ là $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \le x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ hay $\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$.

Cách khác.

Viết chuỗi dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \frac{2^n}{2n-1}x^{5n}$, theo Quy tắc D'Alembert thì

$D(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 2|x^5| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[5]{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi là $\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$.

Tại hai đầu mút, chúng ta khảo sát tính hội tụ/phân kỳ tương tự như trên và cũng nhận được miền hội tụ của chuỗi là $\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$.

(c) Đặt $t = (x-2)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n$ với $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

$\Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$, do đó bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

Khoảng hội tụ của chuỗi là $|t| < 2 \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$.

Tại hai đầu mút $x = 2 \pm \sqrt{2}$ chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n = \left[\lim_{2n+1\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+1/n}} = \sqrt{e} \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thỏa mãn

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$ là $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$.

Cách khác.

Viết chuỗi dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$, theo Quy tắc Cauchy thì $C(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}\right|} = \dfrac{(x-2)^2}{2} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ nếu $C(x) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{2} \Leftrightarrow$

$2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2} \Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi là $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$.

Tại hai đầu mút, chúng ta khảo sát tính hội tụ/phân kỳ tương tự như trên và nhận được miền hội tụ của chuỗi là $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$.

(d) Viết chuỗi dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$, theo Quy tắc Cauchy thì $C(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x-1|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0 & \text{khi } |x-1| \le 1 \\ +\infty & \text{khi } |x-1| > 1 \end{cases} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ nếu $C(x) < 1 \Leftrightarrow |x-1| \le 1$ $\Leftrightarrow 0 \le x \le 2$ là miền hội tụ của chuỗi.

(e) Chúng ta viết chuỗi dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với $u_n(x) = \dfrac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$, do đó theo Quy tắc D'Alembert thì $D(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{khi } |x| \le 1 \\ +\infty & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$ thì chuỗi hội tụ nếu $D(x) < 1$ hay $|x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ là miền hội tụ của chuỗi.

5.10. Tìm tổng của các chuỗi

(a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{3x^2}{a^3} + \dfrac{4x^3}{a^4} + \dots$ $(a > 0)$

(b) $\dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{x^3}{3a^2} + \dfrac{x^4}{4a^3} + \dots$ $(a > 0)$

(c) $\dfrac{1.2}{a^2} + \dfrac{2.3x}{a^3} + \dfrac{3.4x^2}{a^4} + \dots$ $(a > 0)$

(d) $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \dots$

Bài giải.

(a) $u_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{a^n} = a_n x^{n-1}$ với $a_n = \dfrac{n}{a^n}$

$\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow$ bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \dfrac{1}{\rho} = a \Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi là $(-a, a)$.

- Tại đầu mút $x = -a$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-a)^{n-1}}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{a} = \dfrac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

- Tại đầu mút $x = a$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{na^{n-1}}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a} = \dfrac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n$ là chuỗi phân kỳ vì $\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đang xét là $(-a, a)$. Để tìm tổng $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{a^n}$ trong miền hội tụ $(-a, a)$ của nó, chúng ta tích phân đẳng thức trên $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nt^{n-1}}{a^n}$ với $t \in [0, x]$

$$s(x)=\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{a^n}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{a}\right)^k=\frac{x}{a-x}$$

khi $x\in(-a,a)\Leftrightarrow\left|\frac{x}{a}\right|<1\Rightarrow S(x)=s'(x)=\left(\frac{x}{a-x}\right)'=\frac{a}{(a-x)^2}$.

(b) $u_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}=a_nx^{n+1}$ với $a_n=\dfrac{1}{(n+1)a^n}$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{1}{a}\Rightarrow$ bán kính hội tụ của chuỗi là $R=\dfrac{1}{\rho}=a$, nên khoảng hội tụ của chuỗi là $(-a,a)$.

- Tại đầu mút $x=-a$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}=a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ là chuỗi đan dấu, hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz.

- Tại đầu mút $x=a$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}=a\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa nên phân kỳ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi đang xét là $[-a,a)$. Để tìm tổng $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}$ trong trong miền hội tụ $[-a,a)$ của nó, chúng ta đạo hàm đẳng thức $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}$ thì được

$$s(x)=S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{a}\right)^k=\frac{x}{a-x}$$

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n=0$ khi $x\in[-a,a)\Leftrightarrow-1\le\dfrac{x}{a}<1$.

$$\Rightarrow S(x)=\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\frac{tdt}{a-t}=\left(-t-a\ln|a-t|\right)\Big|_0^x=-x+a\ln\left(\frac{a}{a-x}\right)$$

(c) Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n(x)=\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{a^{n+1}}$

Thực hiện tương tự như (a) hai lần $\Rightarrow S(x)=\dfrac{2a}{(a-x)^3}$ với miền hội tụ $(-a,a)$.

(d) Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n(x)=(-1)^n2nx^{2n-1}$

Thực hiện tương tự như (a) $\Rightarrow S(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ với miền hội tụ $(-1,1)$.

5.11. Khai triển hàm f(x) thành chuỗi lũy thừa

(a) $f(x)=e^{-x^2}$ theo lũy thừa của x

(b) f(x) = lnx theo lũy thừa của (x – 1)

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ theo lũy thừa của (x – 2)

(d) f(x) = ln(x + a) với a > 0, theo lũy thừa của x

Bài giải.

(a) Thay $t=-x^2$ vào khai triển đã biết $e^t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ có miền hội tụ $(-\infty<t<+\infty)$

$$\Rightarrow f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\text{ có miền hội tụ }(-\infty<x<+\infty)$$

(b) Thay t = x – 1 vào khai triển đã biết $\ln(1+t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$ có miền hội tụ $(-1<t\le1)$

$$\Rightarrow f(x) = \ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \text{ có miền hội } (0 < x \le 2).$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)}$ nên có thể xem f(x) như là tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu tiên là $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội $q = -\dfrac{x-2}{2} \Rightarrow u_n = u_1 q^n = (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} \text{ có miền hội tụ } |q| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

(d) $f(x) = \ln(x+a) = \ln\left[a\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\right] = \ln a + \ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$, thay $t = \dfrac{x}{a}$ vào khai triển đã biết

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} \text{ có miền hội tụ } (-1 < t \le 1)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n} \Rightarrow f(x) = \ln(x+a) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n}$$

có miền hội tụ $(-a < x \le a)$