

Resolución de problemas de valor inicial

Resolución de problemas de valor inicial

Padula, Nicolás, De Filippis, Darío

{dariodefilippis, nicolasvpadula}@gmail.com

UTN-FRSF

Matemática Superior - Trabajo Práctico N°4

Resolución de problemas de valor inicial

Introducción

Se propone un enfoque numérico basado en Diferencias Finitas para la resolución del problema térmico dado por:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T)$$

En una placa de de acero de 1x1 metro, con condiciones iniciales de $T(1,1) = 200^\circ\text{C}$ y $T(0,0) = 20^\circ\text{C}$.

El enunciado establece que la resolución debe darse para el estado estacionario, esto es, cuando la derivada temporal de T equivale a cero. Dado que K es una constante, puede factorizarse y el problema queda determinado por la ecuación de Laplace:

$$0 = K \nabla^2 T$$

Partiendo del desarrollo en series de Taylor se pueden obtener aproximaciones a la segunda derivada en un punto:

La segunda diferencia centrada, con orden de error $O(h^2)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

La segunda diferencia hacia adelante y hacia atrás, con orden de error $O(h)$:

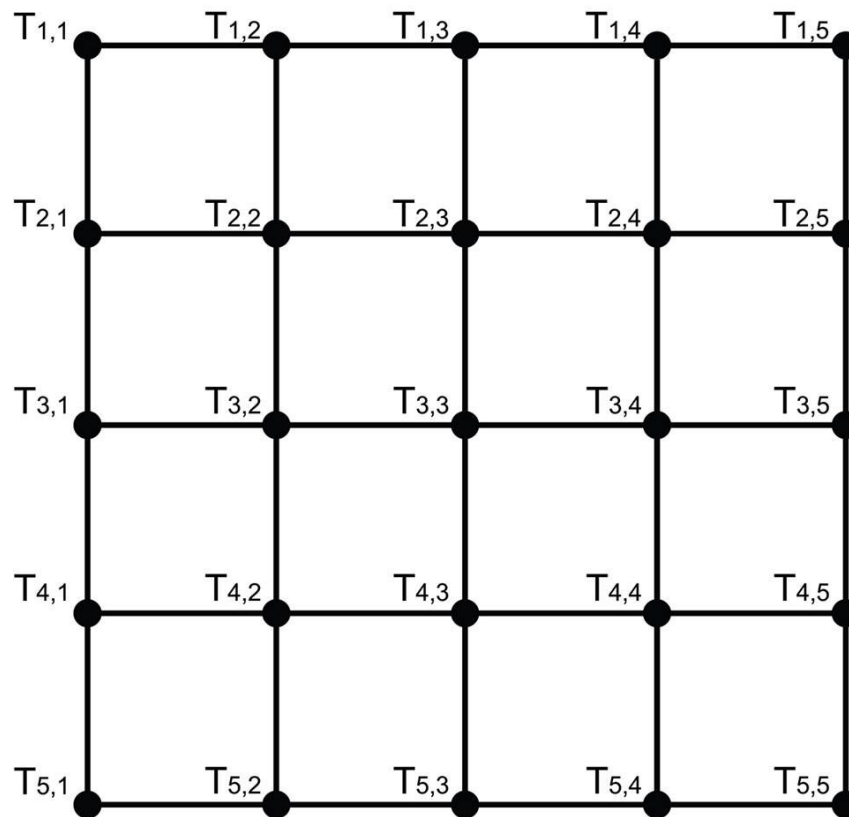
Resolución de problemas de valor inicial

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

Metodología

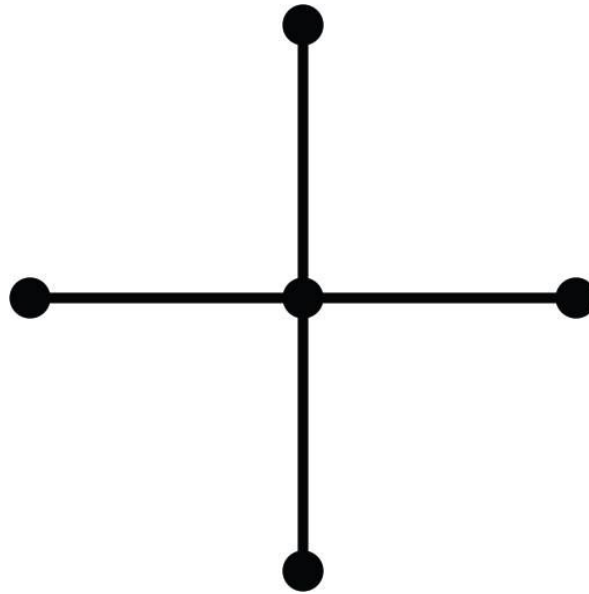
Se discretizó la placa con un $h=0.25$, resultando en una configuración que se muestra en la imagen siguiente:



Quedando configurado un sistema de 25 vértices, es decir, 25 variables.

Para los nodos interiores, se utilizó una aproximación al Laplaciano basado en las derivadas parciales centradas tanto en x como en y , es decir se usó el stencil:

Resolución de problemas de valor inicial



Resultando las siguientes ecuaciones:

$$T(1,2) + T(3,2) - 4T(2,2) + T(2,1) + T(2,3) = 0$$

$$T(1,3) + T(3,3) - 4T(2,3) + T(2,2) + T(2,4) = 0$$

$$T(1,4) + T(3,4) - 4T(2,4) + T(2,3) + T(2,5) = 0$$

$$T(2,2) + T(4,2) - 4T(3,2) + T(3,1) + T(3,3) = 0$$

$$T(2,3) + T(4,3) - 4T(3,3) + T(3,2) + T(3,4) = 0$$

$$T(2,4) + T(4,4) - 4T(3,4) + T(3,3) + T(3,5) = 0$$

$$T(3,2) + T(5,2) - 4T(4,2) + T(4,1) + T(4,3) = 0$$

$$T(3,3) + T(5,3) - 4T(4,3) + T(4,2) + T(4,4) = 0$$

$$T(3,4) + T(5,4) - 4T(4,4) + T(4,3) + T(4,5) = 0$$

Para los nodos en la frontera de la placa, dado que el problema no presenta condiciones de

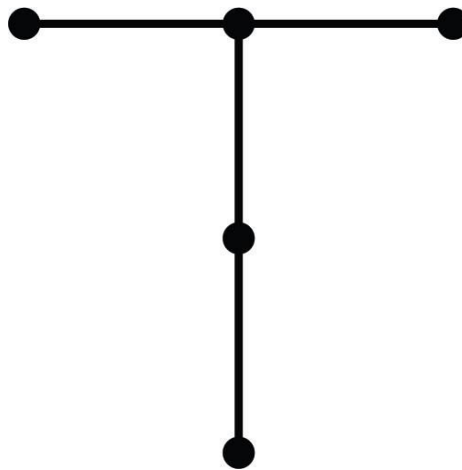
Neumann o Dirichlet excepto en $T(1,1)$ y $T(0,0)$, se usaron stencils partiendo de las

Resolución de problemas de valor inicial

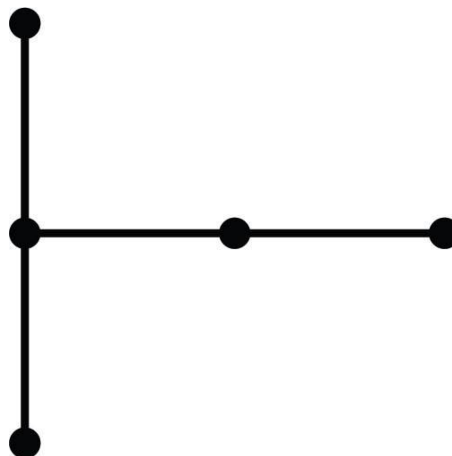
aproximaciones hacia adelante o hacia atrás según corresponda, debe considerarse que estas aproximaciones tienen un orden de error mayor a una aproximación centrada, por lo tanto el error será mayor en los bordes de la placa, y se concentrará sobre todo en las esquinas, donde se aproxima el Laplaciano con diferencias descentradas para ambas derivadas.

Los stencils usados fueron:

Borde superior:

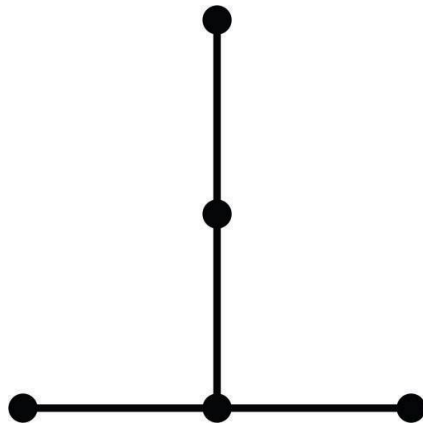


Borde izquierdo:

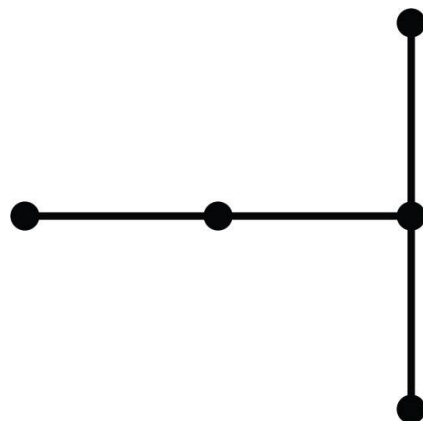


Resolución de problemas de valor inicial

Borde inferior:

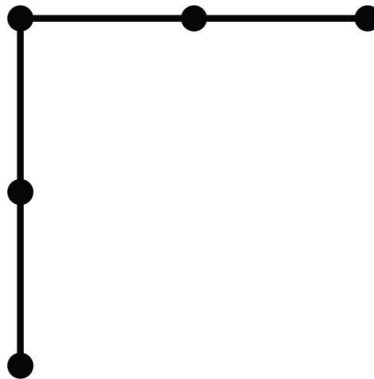


Borde derecho:

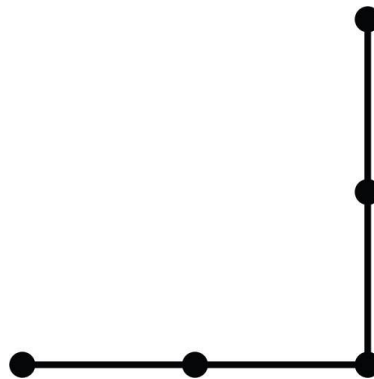


Resolución de problemas de valor inicial

Esquina superior izquierda:



Esquina inferior derecha:



De estas aproximaciones resultaron las ecuaciones:

Borde superior:

$$T(1,3) - 2T(1,2) + T(1,1) + T(3,1) - 2T(2,1) + T(1,1) = 0$$

$$T(1,3) - 2T(1,2) + T(1,1) + T(3,2) - 2T(2,2) + T(1,2) = 0$$

$$T(1,4) - 2T(1,3) + T(1,2) + T(3,3) - 2T(2,3) + T(1,3) = 0$$

$$T(1,5) - 2T(1,4) + T(1,3) + T(3,4) - 2T(2,4) + T(1,4) = 0$$

Borde izquierdo:

Resolución de problemas de valor inicial

$$T(2,3) - 2T(2,2) + T(2,1) + T(3,1) - 2T(2,1) + T(1,1) = 0$$

$$T(3,3) - 2T(3,2) + T(3,1) + T(4,1) - 2T(3,1) + T(2,1) = 0$$

$$T(4,3) - 2T(4,2) + T(4,1) + T(5,1) - 2T(4,1) + T(3,1) = 0$$

Borde inferior:

$$T(5,3) - 2T(5,2) + T(5,1) + T(5,2) - 2T(4,2) + T(3,2) = 0$$

$$T(5,4) - 2T(5,3) + T(5,2) + T(5,3) - 2T(4,3) + T(3,3) = 0$$

$$T(5,5) - 2T(5,4) + T(5,3) + T(5,4) - 2T(4,4) + T(3,4) = 0$$

$$T(5,5) - 2T(5,4) + T(5,3) + T(5,5) - 2T(4,5) + T(3,5) = 0$$

Borde derecho:

$$T(2,5) - 2T(2,4) + T(2,3) + T(3,5) - 2T(2,5) + T(1,5) = 0$$

$$T(3,5) - 2T(3,4) + T(3,3) + T(4,5) - 2T(3,5) + T(2,5) = 0$$

$$T(4,5) - 2T(4,4) + T(4,3) + T(5,5) - 2T(4,5) + T(3,5) = 0$$

Efectuando la sustitución de los términos que son datos ($T(1,5)$ y $T(5,1)$) y despejando los términos independientes, se renombraron las 23 variables restantes. El sistema resultante es de 23×23 :

Resolución de problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} X_3 - 2X_2 + 2X_1 + X_{10} - 2X_5 &= 0 \\ X_3 - X_2 + X_1 + X_{11} - 2X_6 &= 0 \\ X_4 - X_3 + X_2 + X_{12} - 2X_7 &= 0 \\ -X_4 + X_3 + X_{13} - 2X_8 &= -200 \\ X_7 - 2X_6 + X_{10} - X_5 + X_1 &= 0 \\ X_{12} - 2X_{11} + X_{15} - X_{10} + X_5 &= 0 \\ X_{17} - 2X_{16} - X_{15} + X_{10} &= -20 \\ X_{21} - X_{20} - 2X_{16} + X_{11} &= -20 \\ X_{22} - X_{21} + X_{20} - 2X_{17} + X_{12} &= 0 \\ X_{23} - X_{22} + X_{21} - 2X_{18} + X_{13} &= 0 \\ 2X_{23} - 2X_{22} + X_{21} - 2X_{19} + X_{14} &= 0 \\ -2X_8 + X_7 + X_{14} - X_9 &= -200 \\ -2X_{13} + X_{12} + X_{19} - X_{14} + X_9 &= 0 \\ -2X_{18} + X_{17} + X_{23} - X_{19} + X_{14} &= 0 \\ X_2 + X_{11} - 4X_6 + X_5 + X_7 &= 0 \\ X_3 + X_{12} - 4X_7 + X_6 + X_8 &= 0 \\ X_4 + X_{13} - 4X_8 + X_7 + X_9 &= 0 \\ X_6 + X_{16} - 4X_{11} + X_{10} + X_{12} &= 0 \\ X_7 + X_{17} - 4X_{12} + X_{11} + X_{13} &= 0 \\ X_8 + X_{18} - 4X_{13} + X_{12} + X_{14} &= 0 \\ X_{11} + X_{20} - 4X_{16} + X_{15} + X_{17} &= 0 \\ X_{12} + X_{21} - 4X_{17} + X_{16} + X_{18} &= 0 \\ X_{13} + X_{22} - 4X_{18} + X_{17} + X_{19} &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, resulta una matriz sparse de 23x23 y un vector de términos independientes de 23 elementos. Sea S a la matriz obtenida, b el vector de términos independientes y T el vector incógnita que representa la distribución discretizada de temperaturas a lo largo de la placa, el sistema resultante es:

Resolución de problemas de valor inicial

$$b = \frac{K}{h^2}ST$$

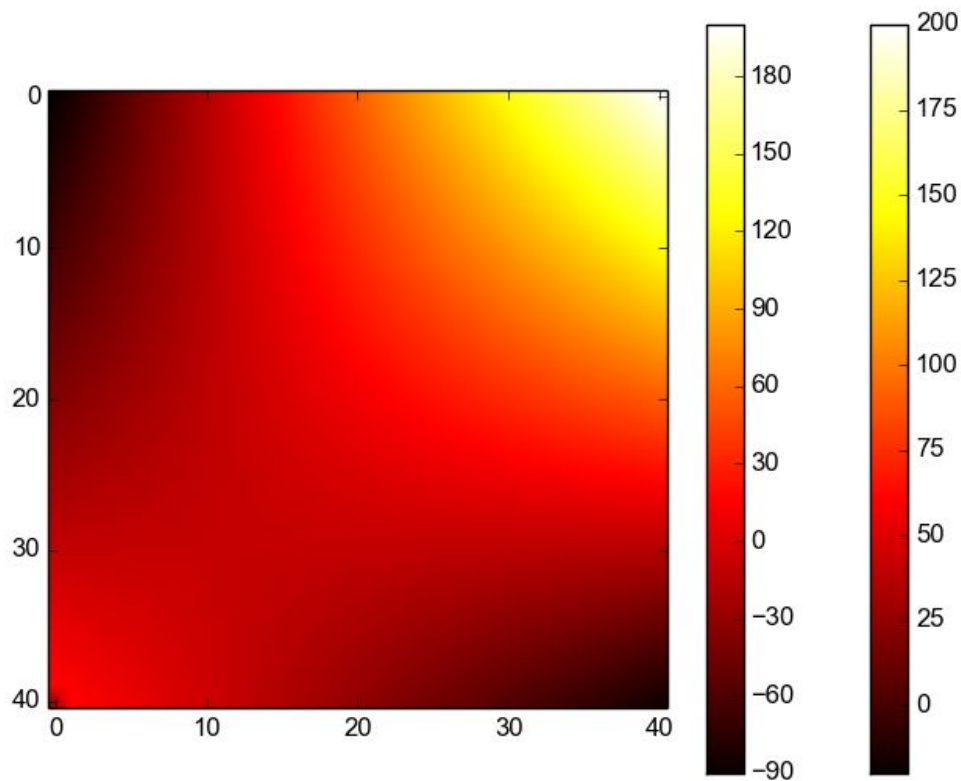
Partiendo de este planteo, se implementó un algoritmo para la generalización de la construcción del sistema para un h arbitrario. Finalmente, dado que el sistema planteado no tiene solución única, se resolvió mediante mínimos cuadrados (matriz pseudoinversa) usando el método *lstsq* de Scipy. Esto se hizo para un $h=0.025$, dando como resultado una grilla de 1681 puntos. (1679 incógnitas en total).

Se graficó el resultado obtenido como un mapa de calor. Los resultados se presentan a continuación.

Resolución de problemas de valor inicial

Resultados

El mapa de calor para la solución aproximada es:



Discusión y conclusiones

Si bien este trabajo carece de una estimación del error cometido en la aproximación, por inspección del mapa de calor se aprecia una distribución de temperatura congruente con el estado inicial del problema. Debe considerarse que el error en las fronteras será mayor a la parte interna de la grilla, dado que allí se utilizan aproximaciones a la derivada con error $O(h)$. Esto se magnifica en las esquinas, donde ambas derivadas se aproximan con error $O(h)$.

Resolución de problemas de valor inicial

Finalmente, debe tenerse en cuenta que debido al bajo orden de error se requiere un h muy bajo para tener una buena aproximación, a su vez, esto implica un gran impacto en la performance, tanto en consumo de memoria para la construcción de S como a la hora de aproximar mediante mínimos cuadrados.

Referencias

1. Método de las diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales elípticas.
CC3501-2 Modelación y Computación Gráfica para Ingenieros. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de Chile.
2. Ledesma Carrillo, A., Mendoza Bernal, O. Introducción al Método de las Diferencias Finitas y su Implementación Computacional. Facultad de Ciencias, UNAM. 2015.