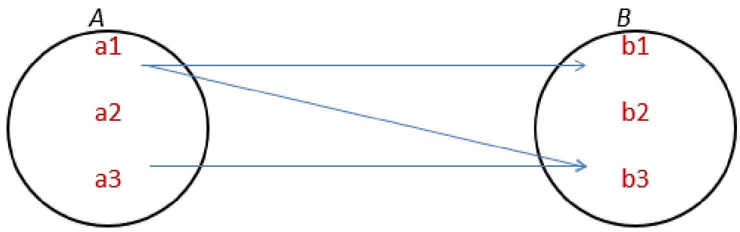
Quan hệ trên tập hợp

1) Quan hệ hai ngôi: Cho A và B là hai tập hợp, quan hệ hai ngôi từ A đến B là $R \subset A \times B$.

Nếu $(a,b) \in R$ ta nói a có quan hệ R với b, ký hiệu aRb. Ngược $(a,b) \notin R \vee a!Rb$

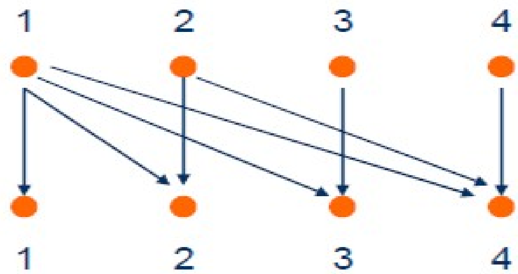


R = { (*a*1, *b*1), (*a*1, *b*3), (*a*3, *b*3) }

Nếu $A = B$, quan hệ R được gọi là quan hệ hai ngôi trên A.

Ví dụ: $A = \{1;2;3;4\}$ R là quan hệ ước số : $R = \{(a,b) \in A^2 : a\, ước\, của\, b\}$

$$R = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,4);(3,3);(4,4)\}$$



BT : Cho X ={2; 4; 6; 8; 10; 14; 16; 15}. Trên X cho quan hệ R (or |) là quan hệ "ước số của".

2) Các tính chất

a) Phản xạ: mỗi phần tử đều quan hệ được với chính nó, tức là,

$$(a,a) \in R\; hay\; aRa$$

Ví dụ $A = \{1;2;3;4\}\; và\; R_1\; quan\; hệ\; chia\; hết$

$$R_1 = \{(1,1);(2,1);(2,2);(3,1);(3,3);(4,1);(4,2);(4,4)\}$$

Thỏa tính chất phản xạ vì $(a,a) \in R$ với mọi $a \in A$.

Xét

$$R_2 = \{(1,1);(1,2);(2,2);(2,3);(4,1);(4,4)\} \rightarrow không\; phản\; xạ\; vì\; (3,3) \notin R$$

b) Đối xứng:

$$aRb \rightarrow bRa,\; tức\; là,\; (a,b) \in R\; và\; (b,a) \in R.$$

Ví dụ: $A = \{1;2;3;4\}$ R là quan hệ ước số : $R = \{(a,b) \in A^2 : a\, ước\, của\, b\}$

$$R=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,4);(3,3);(4,4)\}$$

Không đối xứng vì $(1,2)\in R$ nhưng $(2,1)\notin R$.

$$R_1\,quan\,hệ\,chia\,hết:R_1=\{(1,1);(2,1);(2,2);(3,1);(3,3);(4,1);(4,2);(4,4)\}$$

Không đối xứng vì $(2,1)\in R$ nhưng $(1,2)\notin R$.

$$R_2=\{(1,1);(1,2);(2,2);(2,3);(4,1);(4,4)\}$$

c) Phản phản xứng

$$aRb\,và\,bRa\,thì\,a=b$$

BT: Xét tính chất phản xứng của các quan hệ trên A. 5'

Với R, aRb (a là ước của b) và $bRa\left(tức\,b\,là\,ước\,của\,a\right)$, suy ra $a=b$. Phản xứng.

Với R_1, aR_1b (a chia hết b) và bRa (tức b chia hết cho a) suy ra $a=b$. Phản xứng.

d) Tính truyền

$$aRb\,và\,bRc\rightarrow aRc\,,tức\,là\,,(a,b)\in R\,và\,(b,c)\in R\,thì\,(a,c)\in R.$$

Ví dụ: $A=\{1;2;3;4\}$ R là quan hệ ước số : $R=\{(a,b)\in A^2:a\,ước\,của\,b\}$

Nếu aRb tức a ước của b, bRc tức b ước của c, suy ra a ước của c hay aRc

3) Biểu diễn quan hệ hai ngôi

Dùng ma trận

Ví dụ: $A=\{1;2;3;4\}$ và $B=\{a;b;c\}$, $R=\{(1,a);(1,b);(2,c);(3,c);(4,a)\}$

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

R là quan hệ hai ngôi từ A đến B. Ma trận biểu diễn được định nghĩa, M_R,

$$m_{ij}=\begin{cases} 0, \wedge (a_i,b_j)\notin R \\ 1, \wedge (a_i,b_j)\in R \end{cases}$$

Nhận biết tính chất của quan hệ hai ngôi trên A. Trong trường hợp này M ma trận vuông

+ R đối xứng: M_R đối xứng

+ Phản xạ: $m_{ii}=1$

+ Phản xứng

$$\begin{array}{c|ccc} & u & v & w \\ \hline u & 1 & 0 & 1 \\ v & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Bài 5: Đối với mỗi quan hệ được cho dưới đây trên tập {1, 2, 3, 4}, hãy xác định xem nó có phản xạ, đối xứng, bắc cầu (tính truyền) không ?

a) {(1, 2), (2, 3), (3, 2)}

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, và\, b \begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

+ Không phản xạ: $(1,1)\notin R$
+ Đối xứng : $(1,2)\in R$ nhưng $(2,1)\notin R$.
+ Không bắc cầu: $(1,2)\in R$ và $(2,3)\in R$, nhưng $(1,3)\notin R$.

b) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

+ Phản xạ
+ Đối xứng. (1,1)
+ Truyền (bắc cầu).

c) {(1, 3), (1, 4), (2, 3) ,(3, 1), (3, 2) , (4,1)}

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

+) Không phản xạ. $(1,1) \notin R$.
+ Đối xứng: vì ma trận biểu diễn đối xứng. Hay $(1,3)\, và\, (3,1) \in R . (2,3),(3,2) \in R, (1,4)(4,1) \in R$
+ Tính truyền. Không truyền vì $(1,3) \in R\, và\, (3,1) \in R\, nhưng\, (1,1) \notin R$.

Bài 4: Liệt kê tất cả các cặp trong quan hệ R = {(a, b) | (2a = b hoặc a=2b) } trên tập {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Biểu diễn quan hệ trên dưới dạng đồ thị và dưới dạng ma trận.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0

+ Đối xứng

+ Không phản xạ:

+ Phản xứng: $(a,b) \in R\, và\, (b,a) \in R\, thì\, a=b$. Không phản xứng $(1,2)\, và\, (2,1) \in R\, nhưng\, 1 \neq 2$.

+ Tính truyền: Không truyền. $aRb : ta\, có\, a=2b \vee b=2a$

$$bRc : ta\, có\, b=2c\, hoặc\, c=2b$$

$$aRc : a=2c\, ?$$

Xét $a=2b$:

$$Nếu : b=2c\, thì\, a=4c. Vậy\, a!Rc$$

$$Nếu : c=2b\, thì\, a=c. Vậy\, a!Rc$$

Xét $b=2a$

$$Nếu : b=2c\, thì\, a=c. Vậy\, a!Rc$$

$$Nếu : c=2b\, thì\, \frac{c}{2}=2a. Vậy\, a!Rc$$

Bài 21: Cho R1 và R2 là hai quan hệ trên tập A được biểu diễn bằng các ma trận:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) R1 ∪ R2, R1 ∩ R2
b) R1¿R2, R2¿ R1
c) $\overline{R1}$

$$A=\{a,b,c\}$$

$$R1=\{(a,b);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a)\}$$

$$R2=\{(a,b);(b,b);(b,a);(c,a);(c,b);(c,c)\}$$

$$R1\cup R1=\{(a,b);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$$

$$M_{R1\cup R2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=M_{R_1}\vee M_{R2}$$

$$M_{R1\cap R2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$R1\cap R2=\{(a,b);(b,b);(b,c);(c,a)\}$$

$$M_{R1\setminus R2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow R1\setminus R1=\{(b,a)\}$$

$$M_{R2\setminus R1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow R2\setminus R1=\{(c,b);(c,c)\}$$

$$\overline{M_{R1}}=\overline{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\overline{R1}=\{(a,a);(a,c);(c,b);(c,c)\}$$

Bài 10: Trên tập A={1,2,3,4}, cho các quan hệ R1 = {(a,b)| a là ước của b}, R2 = {(a,b)| a = b^2}, R3 = {(a,b)| a = b}. Tìm:

a) R1 $\cup$ R2
b) R1 \ R3
c) R1 $\cap$ R2 $\cap$ R3

Bài 11: Cho các quan hệ trên tập gồm các số thực

R1 = {(a, b) $\in$ R^2| a > b}, quan hệ "lớn hơn",
R2 = {(a, b) $\in$ R^2| a $\geq$ b}, quan hệ "lớn hơn hoặc bằng",
R3 = {(a, b) $\in$ R^2| a < b}, quan hệ "nhỏ hơn",
R4 = {(a, b) $\in$ R^2| a $\leq$ b}, quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng"

Tìm:

a) R1 $\cap$ R2
b) R2 $\cap$ R4
c) R1 $\cup$ R3