

## Buổi 2: Lập luận/ các quy tắc suy diễn

Từ các mệnh đề  $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$  hằng đúng (hàm mệnh đề luôn có chân trị 1)

### 1) Qui tắc khẳng định

$p \rightarrow q$	Giả thiết	1	
$p$	Giả thiết	1	
$\therefore q$	Kết luận		1

### 2) Qui tắc phủ định

$p \rightarrow q$	Giả thiết	1	
$\neg q$	Giả thiết	1	
$\therefore p'$	Kết luận		1

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

### 3) Qui tắc tam đoạn luận

$p \rightarrow q$	Giả thiết	1	
$q \rightarrow r$	Giả thiết	1	
$\therefore p \rightarrow r$	Kết luận		1

### 4) Tam đoạn luận rời

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p) \rightarrow r$$

### 5) Qui tắc phản ví dụ

$p \rightarrow r$	1	1		
$p$	1	1		$p=1$
$\neg r \rightarrow q$	1	1	$r'=0 \vee r=1$	
$\therefore q$	1?	0		

Kết luận với  $p=1, r=1$  và  $q=0$  phản ví dụ chứng minh lập luận trên là sai.

Ông Minh nói rằng nếu không **được tăng lương** thì **ông ta sẽ nghỉ việc**. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và **vợ ông ấy bị mất việc** thì phải bán xe. Biết rằng

nếu vợ ông Minh hay **đi làm trễ** thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ?

P: Ông Minh được tăng lương

Q: Ông Minh nghỉ việc

R: Vợ ông mất việc

S: Bán xe

T: Vợ hay **đi làm trễ**.

$p' \rightarrow q$	1	1				
$q \wedge r \rightarrow s$	1	1			$q \wedge r : 0$	$q = 0$
$t \rightarrow r$	1	1		$r : 1$		
$p$	1	1	$p : 1$			
$s' \rightarrow t' ?$	1 ?	0	$s : 0$ và $t : 1$			

Với  $q=1, p=1, r=1, s=0$  và  $t=1$ , thì các giả thiết đúng nhưng phát biểu trong bài toán là sai. Nên lập luận/ suy luận bài toán là sai.

$$s' \rightarrow t' \text{ sai} - 0 : \text{khi và chỉ khi } s' : 1 \text{ và } t' : 0$$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vậy phát biểu trên là sai.

BT : Nếu Sơn Tùng không **đến buổi diễn** hoặc **số vé bán ra ít hơn 1000** thì **đêm diễn sẽ bị hủy** và **Skies sẽ buồn**. Nếu đêm diễn bị hủy thì **tiền sẽ được hoàn lại**. Nhưng tiền vé không được hoàn lại. Vậy Sơn Tùng có đến biểu diễn.

P: Sếp sẽ đến

Q:  $< 1000$  vé

R: đêm diễn bị hủy

T: Skies buồn

S: Tiền sẽ được hoàn lại.

$(p' \vee q) \rightarrow r \wedge t$	1	1			$p' \vee q : 0$	$p : 0$ và $q : 0$	$p : 1$	Mâu thuẫn
$r \rightarrow s$	1	1		$r : 0$				
$s'$	1	1	$s : 0$					
$p ?$	1?	0	$p : 0$					

Giả thiết phản chứng sai (không có phản ví dụ) do đó kết luận của đề bài là đúng.

$(p' \vee q) \rightarrow r \wedge t$	1	$(p' \vee q) \rightarrow r \wedge t$	$(p' \vee q)'$	$p \wedge q'$	$p$
$r \rightarrow s$	1	$r'$			
$s'$	1				
$p ?$	1?				

### 3. Kiểm tra tính đúng đắn của các suy luận sau:

$$\text{a)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow \bar{r} \end{array}}{\therefore \bar{q}}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \bar{q} \\ \hline \bar{r} \end{array}}{\therefore p \vee r}$$

$$\text{c)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \bar{q} \rightarrow \bar{p} \\ \hline p \end{array}}{\therefore r}$$

$$\text{d)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \rightarrow r \\ \bar{p} \rightarrow q \\ \hline q \rightarrow s \end{array}}{\therefore \bar{r} \rightarrow s}$$

$$\text{e)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \vee \bar{s} \\ \hline \bar{s} \rightarrow \bar{q} \end{array}}{\therefore s}$$

$$\text{f)} \quad \frac{\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \hline \bar{s} \end{array}}{\therefore t}$$

- a) Từ (1) và (3):  $p$  và  $p \rightarrow r'$  ta được  $r'(4)$ . Kết hợp (3) :  $q \rightarrow r$  và (4) :  $r'$ . Ta được  $q'$ . Như vậy biểu thức suy luận đúng.
- b) Từ (1) :  $p \rightarrow q$  và (2)  $q'$ , ta được  $p'(4)$ . Từ (3) :  $r'$  và (4) :  $p'$  Ta được  $(p \vee r)'$ . Như vậy biểu thức suy luận trên là đúng.
- c)

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	1	1					$p \rightarrow (q \rightarrow r) : 1$	Mâu thuẫn
$\bar{q} \rightarrow p'$	1	1		$\bar{q} \rightarrow p' : 1$	$q : 1$			
$p$	1	1	$p : 1$					
$r$	1?	0	$r : 0$			$q \rightarrow r : 0$		

Giả thiết phản chứng sai (không tìm phản ví dụ nào). Do đó suy luận trên đúng.

d)					
P->r	1	1			1-> 0: 0 ->mâu thuẫn
p' -> q	1	1			p:1
q-> s	1	1		q:0	
r' -> s	1?	0	s:0, r:0		
Vậy phát biểu trên là đúng					
e)					
P<->q	1	1			p:0
q -> r	1	1			q:0 -> r có thể 0 hoặc 1
r v s'	1	1			s':1 -> r có thể 0 hoặc 1
s' -> q'	1	1		q:0	
s	1?	0	s:0		
Vậy phát biểu trên là sai với ví dụ phản (p:0,q:0,r:0,s:0)					
f)					
P^q	1	1			Mâu thuẫn
p -> (r^q)	1	1			p:0
r -> (s v t)	1	1		r:0	
s'	1	1	s:0		
t	1?	0	t:0		
Vậy phát biểu trên là đúng					

BT:

$$\begin{array}{c}
 \neg P \vee Q & p \vee (q \wedge t) \\
 \neg P \rightarrow R & p \rightarrow (r \rightarrow t) \\
 Q \rightarrow S & t \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore \neg R \rightarrow S & \frac{q}{\therefore \neg s \rightarrow \neg r}
 \end{array}$$

Mệnh đề: là một khẳng định có tính đúng/sai DUY NHẤT

$p(n): 2n+1$  là số nguyên tố  $\rightarrow$  ko mđ, tính đúng sai n

$q(x, y): x+2y=1$   $\rightarrow$  ko mđ vì  $(x, y)$

Vị từ: phát biểu, khẳng định,.. phụ thuộc tham số, biến.

Nhắc lại:  $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \text{xor}$  cũng là các phép toán trên vị từ

$$\neg p(x), p(x) \vee q(x),$$

$$E(p, q, \dots)$$

Lương tự: mệnh đề hóa vị từ, biến vị tự thành mệnh đề

- a) “Với mọi  $x \in A, p(x)$ ” đúng khi và chỉ khi  $p(x)$  đúng với mọi  $x \in A$
- $$\forall x \in A, p(x)$$

b) “Tồn tại (có ít nhất)  $x \in A, p(x)$  đúng khi có ít nhất  $x \in A$  sao cho  $p(x)$  đúng  
 $\exists x \in A, p(x)$

Ví dụ:

Tất cả chim ruồi đều có màu sắc sờ  $\rightarrow \forall x \in A, (p(x) \rightarrow s(x))$

Không có chim lớn nào sống bằng mật ong  $\rightarrow \neg \exists x \in A, (q(x) \wedge r'(x))$

Các chim không sống bằng mật ong thì đều có màu xám  $\rightarrow \forall x \in A, (\neg r(x) \rightarrow s'(x))$

Chim ruồi nhỏ  $\rightarrow \forall x \in A, (p(x) \rightarrow q'(x))$

Đặt:  $A$ : tập tất cả các loài chim

$p(x)$ :  $x$  chim ruồi,

$q(x)$ :  $x$  chim lớn,

$r(x)$ :  $x$  sống bằng mật ong,

$s(x)$ :  $x$  có màu sắc sờ

Lượng hóa cho hai biến :

- a)  $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y) = \forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$
- b)  $\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$
- c)  $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$
- d)  $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$

Bài toán : Phủ định mệnh đề lượng tử hóa và xác định chân trị của dạng mệnh đề trên.

Ví dụ :

$$\forall x \in R, x^2 + 6x + 5 \leq 0 \rightarrow ?$$

Ta thấy nếu  $x=0$ ,  $p(0)$  sai (trong đó  $p(x): x^2 + 6x + 5 \leq 0$ ). Mệnh đề sai !

$$\forall x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1 \rightarrow ?$$

Nếu lấy  $x=y=1$ ,  $p(1, 1)$  sai (trong đó  $p(x, y): 2x + y < 1$ ). Mđ sai.

$$\exists x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1 \rightarrow ?$$

Lấy  $y=-2x-2$ . Ta có  $p(x, y): -2 < 1$  sai. Mđ sai.

$$\forall x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1 \rightarrow ?$$

Với  $x$  bất kỳ, chọn  $y=-2x$ , ta có  $p(x, y): 0 < 1$ . đúng. Mđ đúng.

$$\exists x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1 \rightarrow ?$$

Chọn  $x=y=0$ , ta có  $p(0, 0): 0 < 1$ . đúng. Mđ đúng.

BT :

$$\forall x \in R, \exists y \in R, x^2 < y$$

Cho  $x = x_0$  (*nào đó*), tìm  $y$  theo  $x_0$  sao  $p(x, y)$  đúng thì mới đúng.

Nếu không tìm được  $y$  nào đó sao cho  $p(x, y)$  đúng thì mới sai.

Ở đây, ta chọn  $y = x_0^2 + 1$ , dẫn đến  $p(x_0, x_0^2 + 1) : x_0^2 < x_0^2 + 1$ . *đúng*. Mới đúng.

Tìm dạng phủ định.  $\forall \rightarrow \exists$  và ngược lại và  $p \rightarrow p'$ .

Ví dụ :

A:  $\forall x \in R, 2x+1 \leq 0 \rightarrow A' : \exists x \in R, 2x+1 > 0$

B:  $\forall x \in R, \exists y \in R, (x^2 = y^2) \rightarrow B' : \exists x \in R, \forall y \in R, (x^2 \neq y^2)$

C:  $\forall x \in R, \exists y \in R, (x^2 \geq y^2) \rightarrow (x \geq y) \rightarrow C' : \exists x \in R, \forall y \in R, (x^2 \geq y^2) \wedge (x < y)$

D:  $\exists x \in R, \forall y \in R, (xy < 0) \wedge (x - 4y = 5) \rightarrow D' : \forall x \in R, \exists y \in R, (xy < 0)' \vee (x - 4y = 5)'$