Transformada de Coseno Discreta

Aplicación a compresión de imágenes

Introducción al Procesamiento de Imágenes

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

8 de noviembre de 2017

Transformada Discreta del Coseno

Idea intuitiva (continua)

- Expresar una función real f en la base $\{1, \cos(x), \cos(2x), \ldots\}$

En el plano discreto...

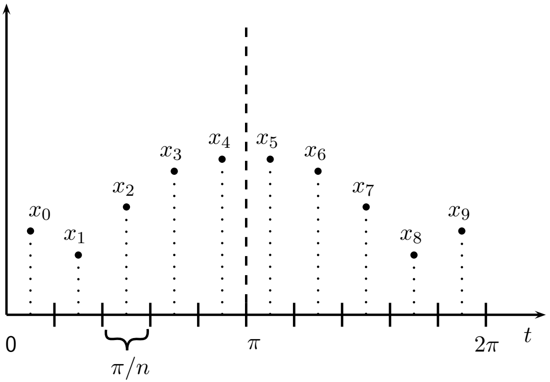
- Es un cambio de base
- La base usada se compone de cosenos discretizados a distintas frecuencias

Aprovechando paridad

- El coseno es par alrededor de π: $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$

Dado x_i datos $(i = 0, \ldots, n-1)$, generamos una versión simétrica de $2n$ valores:

$x_n = x_{n-1}$
$x_{n+1} = x_{n-2}$
$\vdots$
$x_{2n-1} = x_0$



Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Aprovechando paridad

- Duplico la cantidad de puntos a $2n$ (ahora: $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$)
- Me ubico en intervalo $[0, 2\pi]$
- Divido en intervalos de longitud π/n
- Ubico los puntos en $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \ldots, (t_{2n-1}, x_{2n-1})$ donde
  $t_0 = \frac{\pi}{2n}$
  $t_1 = t_0 + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} = (1 + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$
  $\vdots$
  $t_i = (i + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$
- En puntos t_i discretizo la familia del coseno

Aprovechando paridad

- Utilizando estos puntos genero los vectores de mi base

$$w^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos(0 \cdot t_0) \\ \cos(0 \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos(0 \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}, w^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos(1 \cdot t_0) \\ \cos(1 \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos(1 \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}, \ldots$$

$$w^{(n-1)} = \begin{pmatrix} \cos((n-1) \cdot t_0) \\ \cos((n-1) \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos((n-1) \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}$$

Transformada Discreta del Coseno

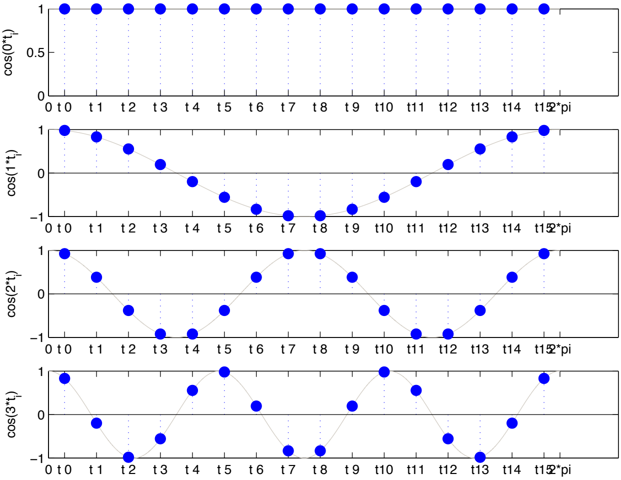
Derivación $(n = 8)$

$w^{(0)}$

$w^{(1)}$

$w^{(2)}$

$w^{(3)}$



Transformada Discreta del Coseno

Derivación $(n = 8)$

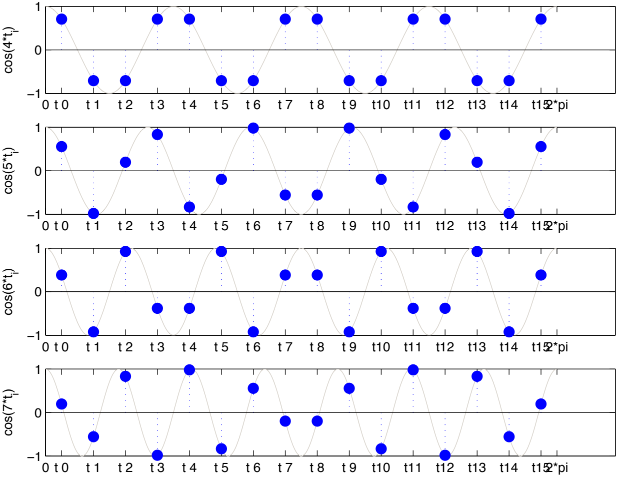
$w^{(4)}$

$w^{(5)}$

$w^{(6)}$

$w^{(7)}$

$\vdots$



Propiedad

- El conjunto de vectores $\mathcal{W} = \{w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}\}$ es ortogonal.

$$
{w^{(k)}}^t w^{(j)} = \sum_{i=0}^{2n-1} \cos(k \cdot t_i) \cos(j \cdot t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ n & \text{si } k = j \neq 0 \\ 2n & \text{si } k = j = 0 \end{cases}
$$

Propiedad

- El conjunto de vectores $\mathcal{W} = \{w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}\}$ es ortogonal.

$$
{w^{(k)}}^t w^{(j)} = \sum_{i=0}^{2n-1} \cos(k \cdot t_i) \cos(j \cdot t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ n & \text{si } k = j \neq 0 \\ 2n & \text{si } k = j = 0 \end{cases}
$$

Luego,

$$
\|w^{(0)}\|_2 = \sqrt{{w^{(0)}}^t w^{(0)}} = \sqrt{2n}
$$

$$
\|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{{w^{(k)}}^t w^{(k)}} = \sqrt{n}, \qquad \text{si } k \neq 0
$$

Propiedad

- El conjunto de vectores $\mathcal{W} = \{w^{(0)}, \dots, w^{(n-1)}\}$ es ortogonal.

$$\|w^{(0)}\|_2 = \sqrt{{w^{(0)}}^t w^{(0)}} = \sqrt{2n}$$

$$\|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{{w^{(k)}}^t w^{(k)}} = \sqrt{n}, \qquad \text{si } k \neq 0$$

Para que todos tengan la misma norma:

- Defino $\boxed{v^{(k)} = C(k) \cdot w^{(k)}}$, con $C(k) = \begin{cases} \sqrt{1/n} & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{2/n} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$

Así,

$$\|v^{(k)}\|_2 = \|C(k) \cdot w^{(k)}\|_2 = |C(k)| \, \|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{2}$$

Objetivo

- Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}]^t$ nuestro vector (o señal) a transformar.
- Queremos escribir a $\mathbf{x}$ como combinación lineal de los n vectores del conjunto $\mathcal{V} = \{v^{(0)}, \ldots, v^{(n-1)}\}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \, v^{(k)}$$

- ¿Cuánto valen las coordenadas d_k?

Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Hallando los coeficientes d_k.

- Consideremos un elemento $v^{(j)}$ de $\mathcal{V}$, con $0 \leq j < n$.

$$\mathbf{x}^t\, v^{(j)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} d_k v^{(k)} \right)^t v^{(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \underbrace{{v^{(k)}}^t v^{(j)}}_{\substack{0 \\ (\text{si } k \neq j)}} = d_j\, {v^{(j)}}^t v^{(j)} = 2 d_j$$

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\, \mathbf{x}^t\, v^{(j)}$$

Transformada Discreta del Coseno

Hallando los coeficientes d_k

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^t\,v^{(j)} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1} x_i v_i^{(j)} = \frac{1}{2}[x_0 v_0^{(j)} + \ldots + x_{2n-1} v_{2n-1}^{(j)}]$$

- Pero recordemos que:
  $x_n = x_{n-1},\, x_{n+1} = x_{n-2}, \ldots, x_{2n-1} = x_0.$
- También (coseno par):
  $v_n^{(j)} = v_{n-1}^{(j)},\, v_{n+1}^{(j)} = v_{n-2}^{(j)}, \ldots, v_{2n-1}^{(j)} = v_0^{(j)}.$

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1} x_i v_i^{(j)} = \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i^{(j)}\right) = \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot C(j)\cdot\cos(j\cdot t_i)}$$

Extensión a 2D

Dada una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos extender fácilmente la transformada DCT a señales de dos dimensiones. Para ello, aplicamos la transformación primero por filas y luego por columnas.