



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Reporte de Modelos

Nawel Carimán Fuenzalida

20 de Octubre del 2020

1. Modelos ARX

1.1. Análisis previo

Preprocesamiento de la señal autorregresiva

Para el presente informe, a la señal de salida $y(t)$ se le aplicaron dos filtros para estudiar su comportamiento

Filtro Savitzky-Golay (SG) Este filtro tiene la ventaja de preservar características como máximos y mínimos relativos o ancho de los picos. Esta fue implementada mediante la función *savgol.filter* dentro de la librería *scipy* (dentro de *Signal processing*). Particularmente se utilizó una ventana de tamaño 5 y orden del polinomio de 1. Dado que esta función es no causal, se aplicó un desfase de 2 muestras para que la señal tenga sentido en una aplicación online. Esto último se realizó repitiendo dos veces el valor inicial de la serie.

Filtro media móvil (MM) Este filtro tiene la ventaja de ser fácil de implementar y que puede ser diseñado de modo causal. Particularmente se utilizó una ventana rectangular (sin alguna forma especial) de 5 muestras. Dada la simplicidad de la misma, este filtro fue programado por el usuario de modo simple.

En la figura 1 se pueden ver la señal original y las señales filtrada. Notemos que tanto el filtro SG y de MM cuentan con un desfase respecto a la original.

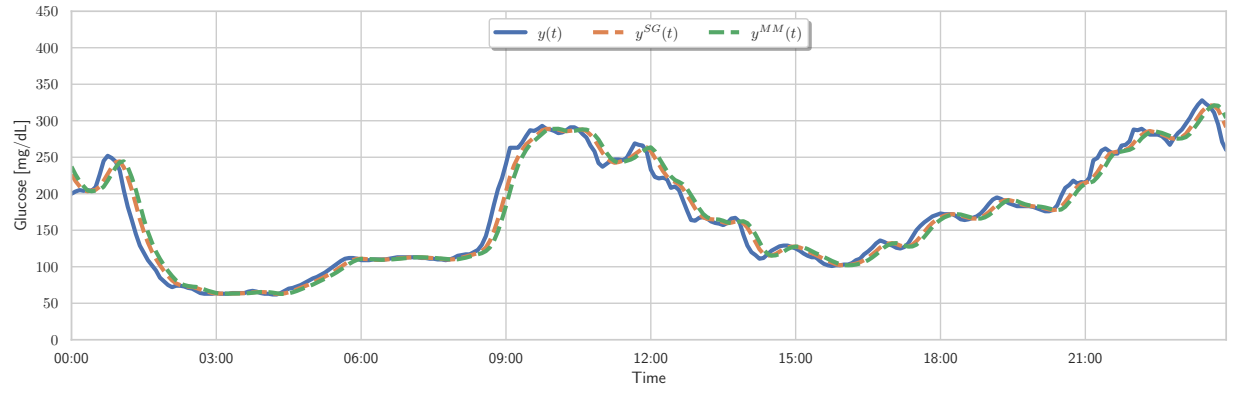


Figura 1: Señales en el tiempo: $y(t)$ señal original; $y^{SG}(t)$ señal con filtro Savitzky-Golay; $y^{MM}(t)$ señal filtrada con ventana móvil

Luego, definimos el error de desfase y fase como

$$e_{desfase}(t) = y^{filtrada}(t) - y(t) \quad (1)$$

$$e_{fase}(t) = y^{filtrada}(t + T) - y(t) \quad (2)$$

respectivamente, con T el valor del desfase (en este caso, $T = 2$). En las figuras 2 y 3 se pueden ver dichas señales para la misma ventana de tiempo de la figura 1. En las tablas 1 y 2 se muestran las estadísticas del error de estas señales. Con esto datos podemos notar que el filtro SG cuenta con mejores resultados que el filtro de MM.

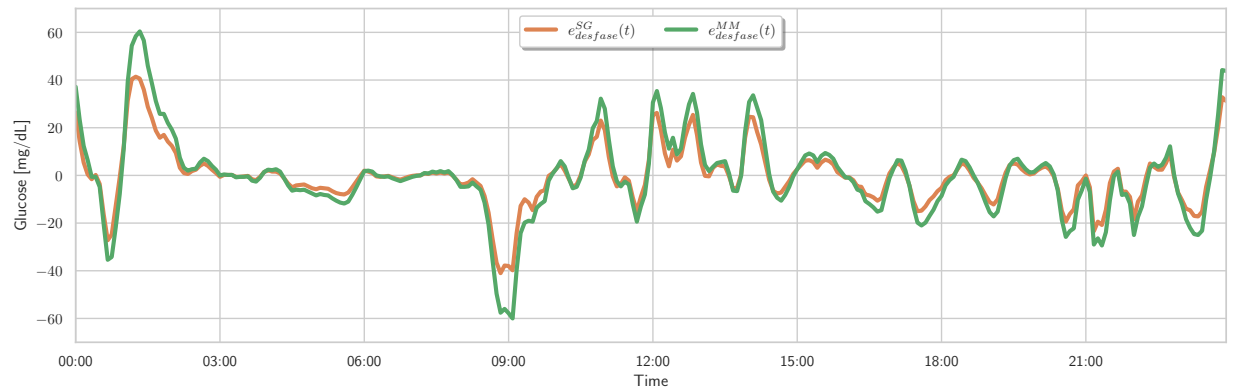


Figura 2: Señal de error en desfase: $e_{desfase}^{SG}(t)$ error de la señal con filtro Savitzky-Golay; $e_{desfase}^{MM}(t)$ error de la señal filtrada con ventana móvil

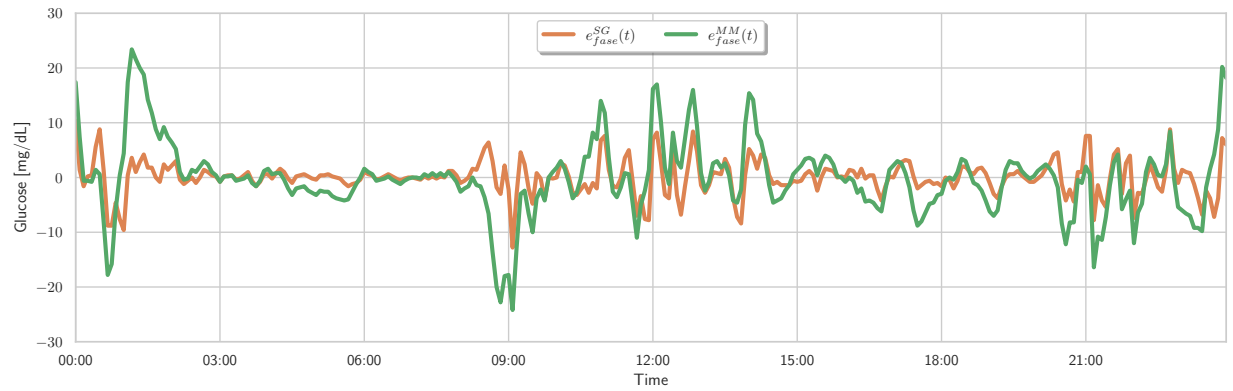


Figura 3: Señal de error en fase: $e_{fase}^{SG}(t)$ error de la señal con filtro Savitzky-Golay; $e_{fase}^{MM}(t)$ error de la señal filtrada con ventana móvil

	Filtro Savitzky-Golay	Filtro media móvil
Media	-0.093	-0.118
Desviación estándar	12.48	18.18
Máximo	49.6	71
Mínimo	-52.2	-70.2

Cuadro 1: Resumen de estadísticas del error para las señales desfasadas

	Filtro Savitzky-Golay	Filtro media móvil
Media	-0.00127	-0.0329
Desviación estándar	2.735	6.719
Máximo	16.2	26.8
Mínimo	-12.8	-32.2

Cuadro 2: Resumen de estadísticas del error para las señales en fase

Preprocesamiento de las señales exógenas

A continuación se describe el procesamiento previo que se les aplicó a las distintas señales exógenas.

Insulina bolo La principal variable manipulada es la insulina ultra rápida. En el conjunto de datos, esta cuenta con una acción impulsiva que describe el momento de infusión en el cuerpo humano, pero muchos estudios documentan que sólo es importante el momento en el que alcanza la sangre. Esto puede ser representado mediante la determinación de un filtro FIR, para luego convolucionar la señal impulsiva con dicho filtro para obtener un aproximado de la insulina plasmática. A continuación, se describen los distintos filtros utilizados para representar a esta señal.

Entrada impulsiva: Esta es la señal cruda, sin ningún tipo de procesamiento

Filtro gaussiano FIR truncado: El primer filtro utilizado es uno gaussiano truncado. Los parámetros son [1]:

- duración $N = 72$ (6 horas)
- tiempo muerto $d = 3$ (15 minutos)
- media $\mu = 12$ (60 minutos)
- desviación estándar $\sigma = 18$ (90 minutos)

Modelo de Hovorka : El modelo de Hovorka se describe según el siguiente sistema [2]:

$$\dot{S}_1(t) = u_{SC}(t) - \frac{S_1(t)}{t_{maxl}} \quad (3)$$

$$\dot{S}_2(t) = \frac{S_1(t)}{t_{maxl}} - \frac{S_2(t)}{t_{maxl}} \quad (4)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{S_2(t)}{t_{maxl}V_I} - K_e I(t) \quad (5)$$

donde $u_{SC}(t)$ es la entrada impulsiva e $I(t)$ la insulina plasmática. Los parámetros utilizados son $t_{maxl} = 55min$, $K_e = 0,138min^{-1}$, $V_i = 0,12L/Kg$.

Modelo biexponencial : Este modelo se describe según el siguiente sistema [2]:

$$\dot{I}_{SC}(t) = -\frac{I_{SC}(t)}{\tau_1} + \frac{u_{SC}(t)}{\tau_1 K_{CL}} \quad (6)$$

$$\dot{I}(t) = -\frac{I(t)}{\tau_2} + \frac{I_{SC}(t)}{\tau_2} \quad (7)$$

donde $u_{SC}(t)$ es la entrada impulsiva e $I(t)$ la insulina plasmática. Los parámetros utilizados son $\tau_1 = 55min$, $\tau_2 = 70min$, $K_{CL} = 1L/min$.

Modelo de remanencia : Definiremos la remanencia de la insulina como la proporción de insulina que queda en el cuerpo:

$$I_{rem}(t) = \int_0^{T_{max}} I(t)dt - \int_0^t I(t)dt \quad (8)$$

Notemos que se puede utilizar cualquier señal o modelo de insulina. Particularmente se utilizó el modelo de Hovorka.

En la figura 4 se puede la respuesta de cada uno de estos filtros. Cabe mencionar que todos los filtros fueron normalizados para que su valor máximo fuera de 1. En la figura 5 se puede ver una muestra del sensor continuo en conjunto con la estimación de la señal de insulina para cada filtro.

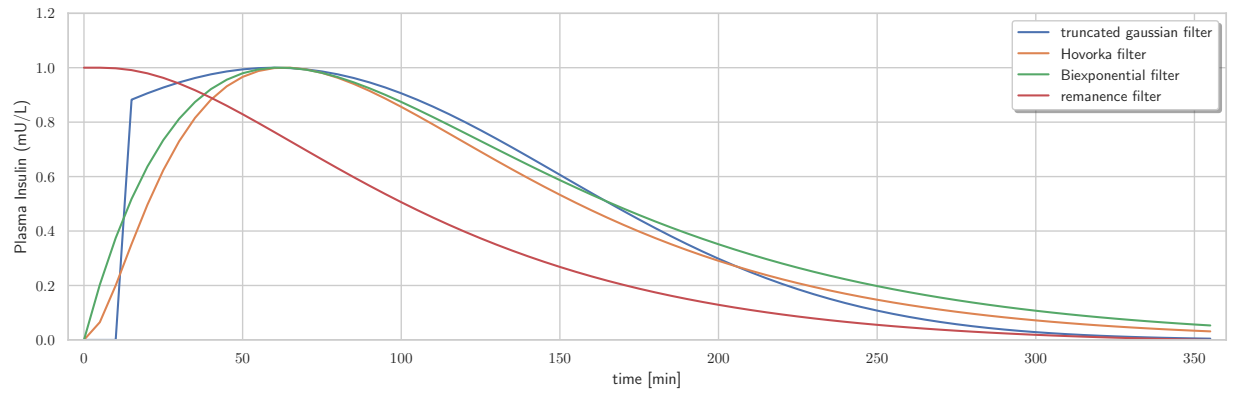


Figura 4: Respuesta de lo filtros para la insulina

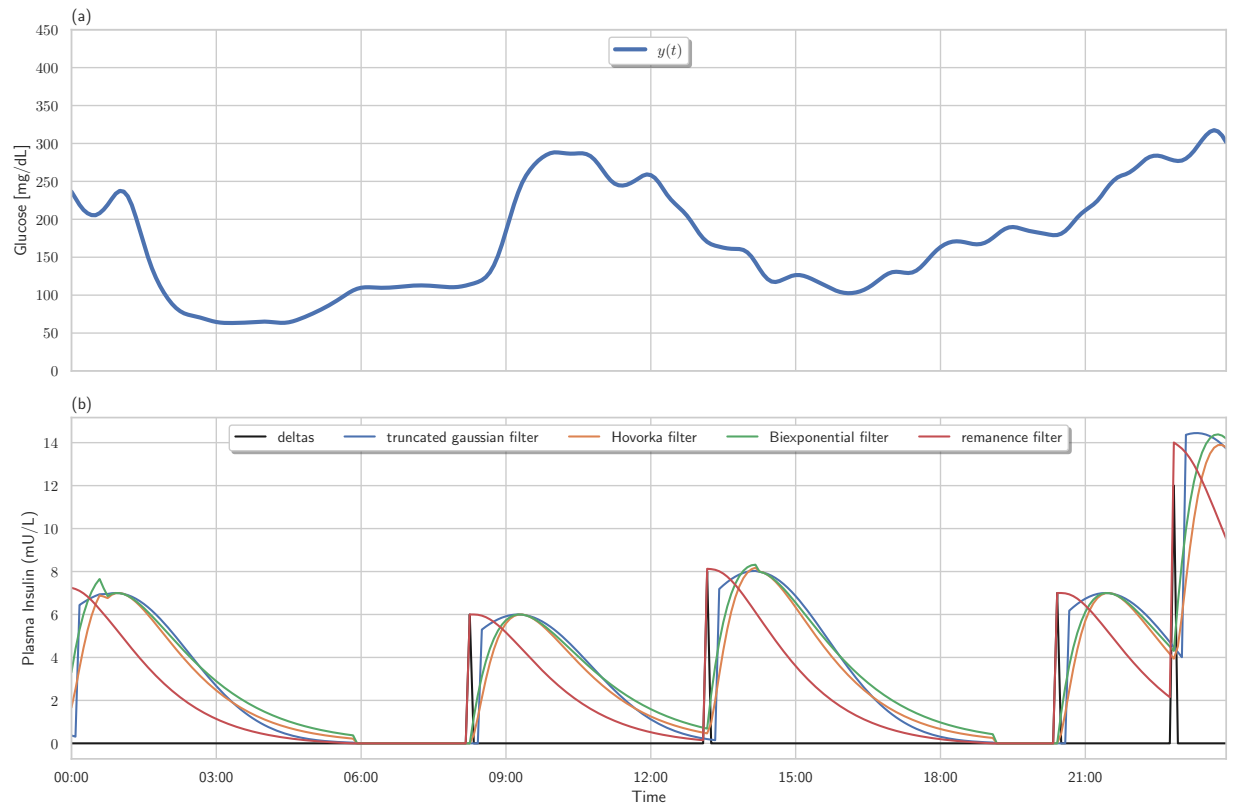


Figura 5: Serie de tiempo de las señales. (a) serie de medición del sensor continuo de glucosa; (b) Serie de tiempo de la estimación de insulina plasmática en la sangre para distintos filtros

Comida Así como la insulina es la principal variable manipulada, la comida es la principal perturbación medible del sistema. Esta también es reportada como un impulso de la cantidad de gramos de hidratos de carbono ingeridos, y es conveniente utilizar un filtro de respuesta finita para representar el sistema. Los utilizados se muestran a continuación:

Entrada impulsiva: Esta es la señal cruda, sin ningún tipo de procesamiento

Filtro gaussiano FIR truncado: El primer filtro utilizado es uno gaussiano truncado. Los parámetros son [1]:

- duración $N = 36$ (3 horas)
- tiempo muerto $d = 3$ (15 minutos)
- media $\mu = 8$ (40 minutos)
- desviación estándar $\sigma = 18$ (50 minutos)

Modelo de Hovorka : El modelo de Hovorka se describe según el siguiente sistema [3]:

$$U_G(t) = \frac{D_G A_G t e^{-t/t_{max,G}}}{t_{max,G}^2} \quad (9)$$

donde $U_G(t)$ la comida en el torrente sanguíneo. Los parámetros utilizados son $t_{max,G} = 40min$, $A_G = 0,8$, $D_G = 1$, aunque estos últimos no afectan a la señal dado que esta se normaliza.

En la figura 6 se puede la respuesta de cada uno de estos filtros. Cabe mencionar que todos los filtros fueron normalizados para que su valor máximo fuera de 1. En la figura 7 se puede ver una muestra del sensor continuo en conjunto con la estimación de la señal de insulina para cada filtro.

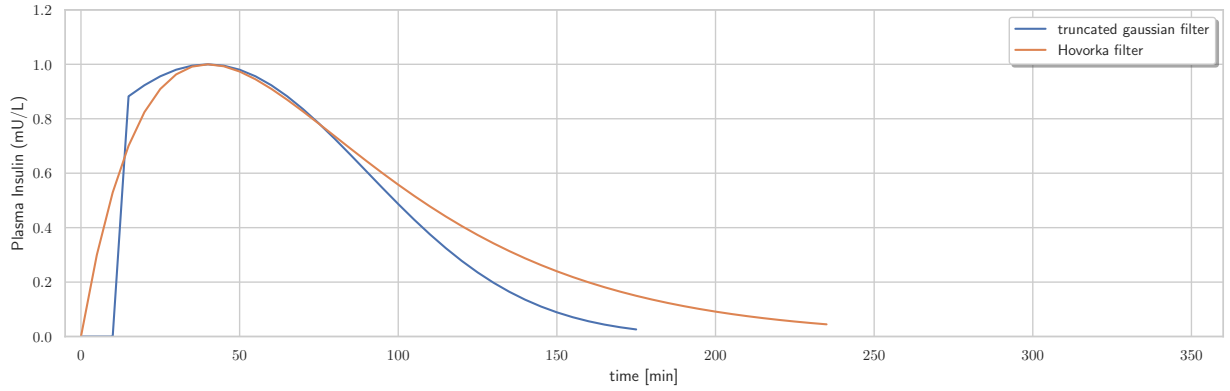


Figura 6: Respuesta de lo filtros para la comida

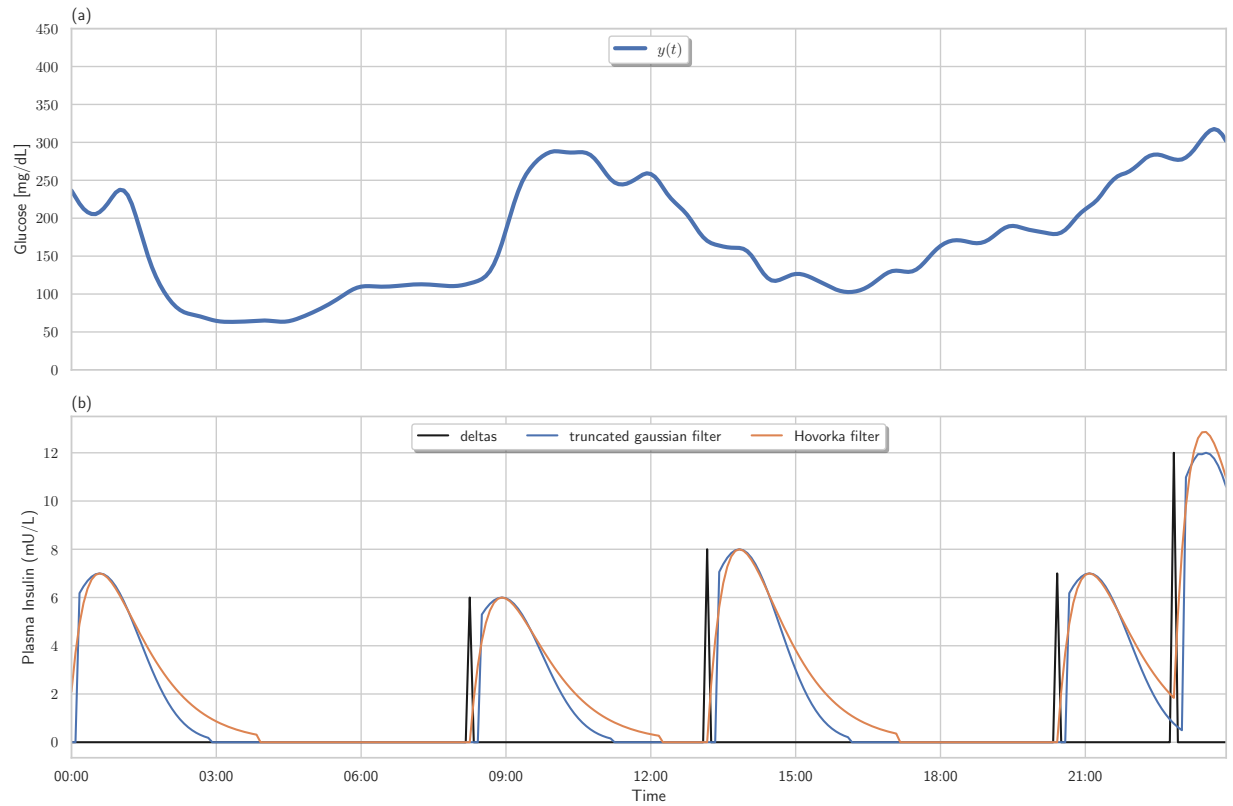


Figura 7: Serie de tiempo de las señales. (a) serie de medición del sensor continuo de glucosa; (b) Serie de tiempo de la estimación de comida en la sangre para distintos filtros

1.2. Modelo ARX

Descripción

Un modelo autorregresivo con entrada exógena con orden de regresión n_a y orden de la entrada exógena n_b ($\text{ARX}(n_a, n_b)$) se define según la siguiente ecuación:

$$y(t) + a_1 y(t-1) \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) \cdots b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (10)$$

De esta ecuación, podemos obtener que la predicción del siguiente paso será:

$$\hat{y}_{t+1}(t|t-1) = -a_1 y(t-1) \cdots -a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) \cdots b_{n_b} u(t-n_b) \quad (11)$$

donde se explicita que la predicción en el tiempo t depende de los datos conocidos hasta $t-1$. Luego, si definimos

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b}]^T \quad (12)$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b)]^T \quad (13)$$

como *vector de parámetros* y *vector de regresión* respectivamente, podemos escribir la predicción de modo compacto como:

$$\hat{y}_{t+1}(t|\theta) = \theta^T \varphi(t) \quad (14)$$

Más aún, podemos definir la predicción a k pasos adelante como:

$$\hat{y}_{t+k}(t|y(t-k); u(t-1); \theta) = \theta^T \varphi(t) \quad (15)$$

Notemos que el valor de \hat{y} depende del vector de parámetros θ , de los datos autorregresivos y hasta $t-k$ y de la entrada exógena u hasta $t-1$.

Implementación

El conjunto completo de datos cuenta con 6 días de datos muestreados cada $T_s = 5$ minutos (1728 datos). Los primeros 4 días (1152 datos) fueron asignados para entrenamiento y los últimos 2 días para prueba (576 datos).

Para entrenar el sistema, e utiliza el modelo $\text{ARX}(n_a, n_b)$ SISO, se utilizó la función **ARX** de *MATLAB*. Esta recibe como parámetros el conjunto de dato y el orden del modelo **[na nb nk]**, que representan el orden de la autorregresión, el orden de la entrada exógena y el orden del tiempo muerto de la entrada exógena respectivamente. Para probar el modelo, se fijó **nk = 1**, y se fue variando el orden entre 1 y 100 según **na = nb**. Con el modelo generado se extrae el vector de parámetro θ .

Para generar la predicción, consideramos que cada conjunto de datos vienen dados por

$$z = \{y(1), u(1), \dots, y(N), u(N)\} \quad (16)$$

luego, si $n = \max\{n_a, n_b\}$ definimos las matrices de datos como:

$$\varphi_y = \begin{bmatrix} -\hat{y}_{t+k}(n+k) & \cdots & -\hat{y}_{t+k}(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{y}_{t+1}(n+1) & \cdots & -\hat{y}_{t+1}(N-k) \\ -y(n) & \cdots & -y(N-k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(1) & \cdots & -y(N-n-k-1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\varphi_u = \begin{bmatrix} u(n+k) & \cdots & u(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n+1) & \cdots & u(N-k) \\ u(n) & \cdots & u(N-k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(1) & \cdots & u(N-n-k-1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Notemos que la matriz φ_y cuenta con los valores a predecir para el tiempo k . Al momento inicial, estos valores son dejados en cero y en cada paso de predicción se actualiza su valor. Para predecir los valores para el tiempo $l, 1 \leq l \leq k$, se calcula

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+l} = \theta^T \begin{bmatrix} \varphi_u^l \\ \varphi_y^l \end{bmatrix} \quad (19)$$

con φ_u^l, φ_y^l las submatrices de de datos para la predicción de l y $\hat{\mathbf{y}}_{t+l} = [\hat{y}_{t+l}(n+l) \quad \cdots \quad \hat{y}_{t+l}(N)]$ los datos predicho l pasos adelante.

Dado que se trabajan con distintos ordenes y el número total de datos predichos depende de esto, el cálculo de las métricas considerará el subconjunto de tamaño fijo dado por

$$z_{metrics} = \{y(n_{max} + k), \hat{y}_{t+k}(N_{max} + k), \dots, y(N), \hat{y}_{t+k}(N), \} \quad (20)$$

donde n_{max} es el orden máximo utilizado (número de iteraciones). De este modo nos aseguramos de que las métricas estén menos influidas por la existencia de segmentos difíciles de predecir y que refleje más la precisión del modelo.

Resultados ARX SISO

Para evaluar el desempeño, se utilizó la métrica de la raíz del error cuadrático medio (root mean square error o RMSE). Esta está definida como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_{t+k}(i) - y(i)^2} \quad (21)$$

En la figura 8 y 9 se muestran el RMSE las distintas señales del bolo separados por tipo de filtro y conjunto de entrenamiento y prueba respectivamente, para distintos ordenes. Lo mismo se muestra en las figuras 10 y 11.

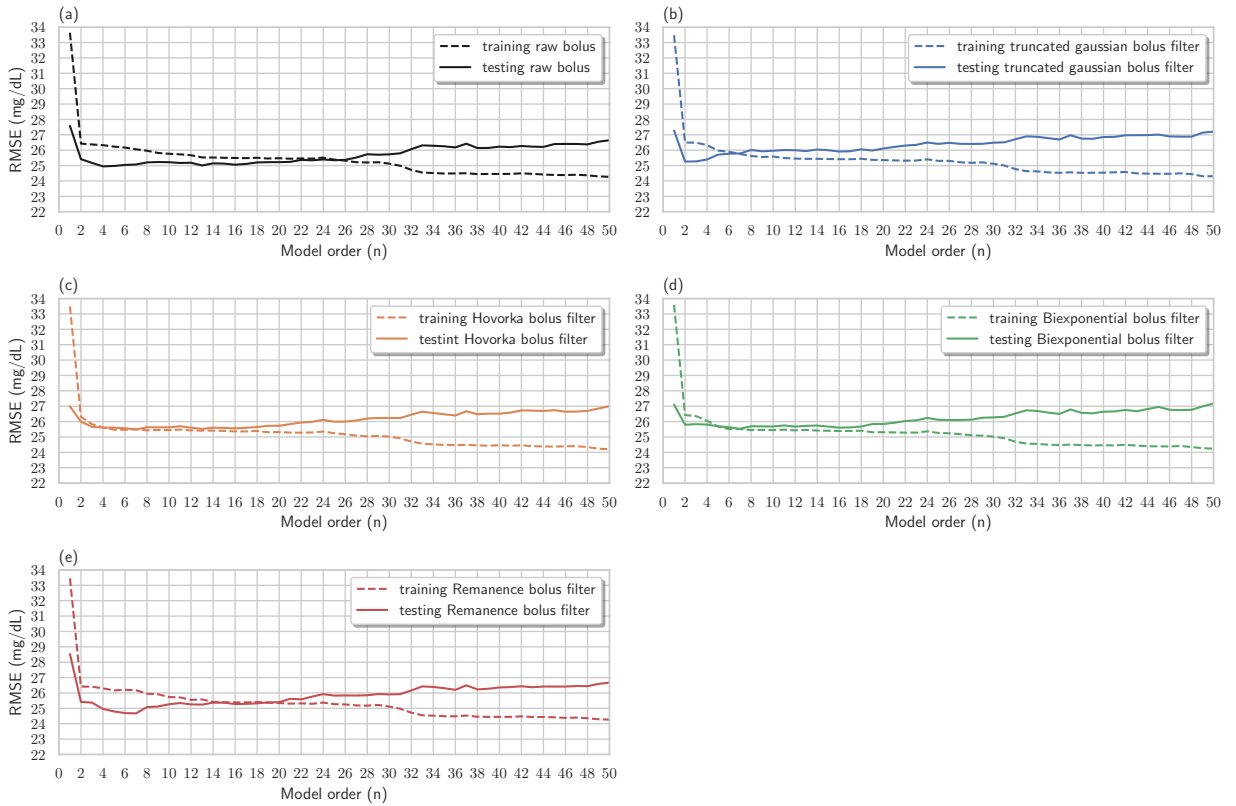


Figura 8: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de bolo para distintos ordenes. (a) datos crudos; (b) datos con filtro gaussiano truncado; (c) datos con filtro del modelo de Hovorka; (d) datos con filtro del modelo biexponencial; (e) datos con filtro de remanencia

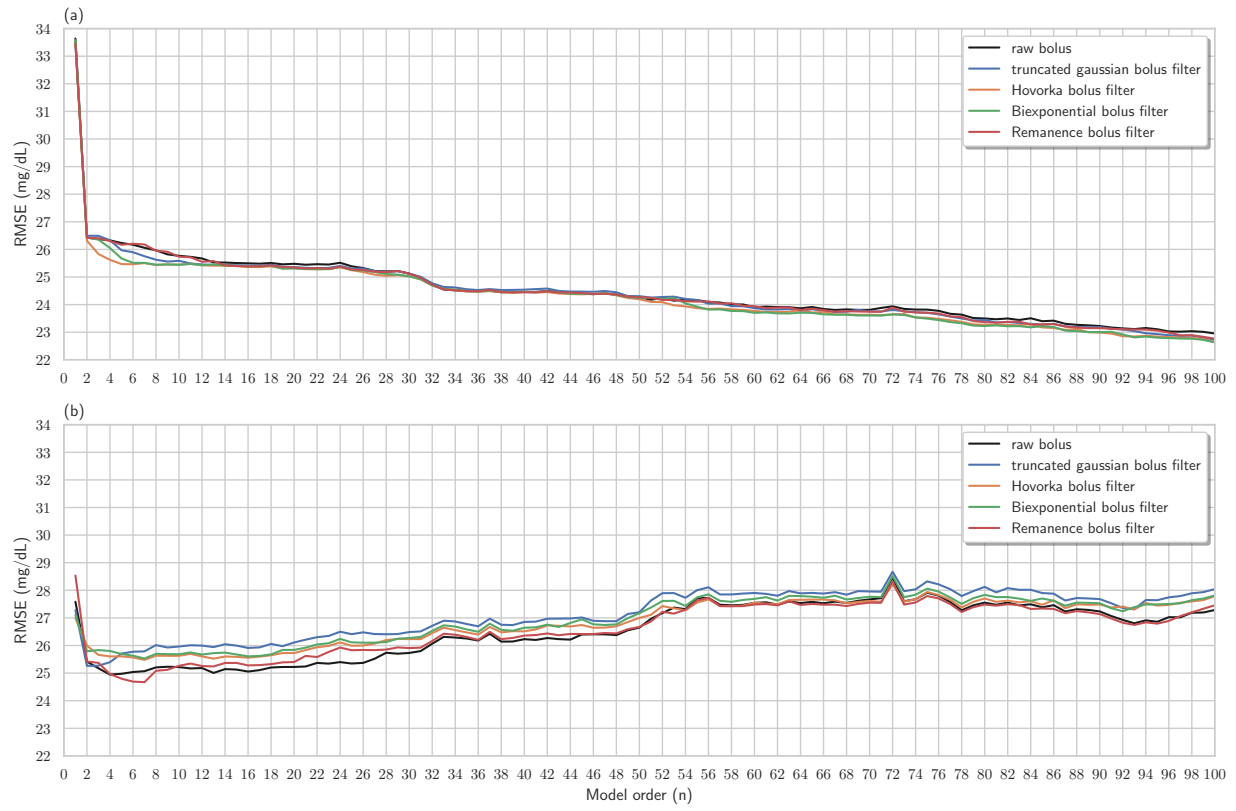


Figura 9: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de bolo para distintos ordenes. (a) conjuntos de entrenamiento; (b) conjuntos de prueba

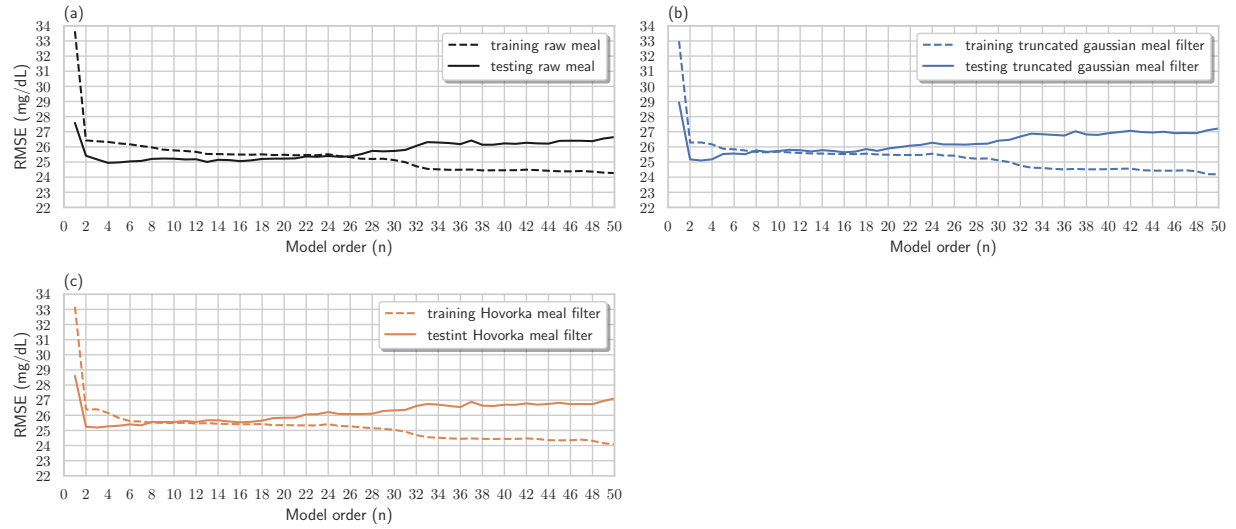


Figura 10: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de comida para distintos ordenes. (a) datos crudos; (b) datos con filtro gaussiano truncado; (c) datos con filtro del modelo de Hovorka

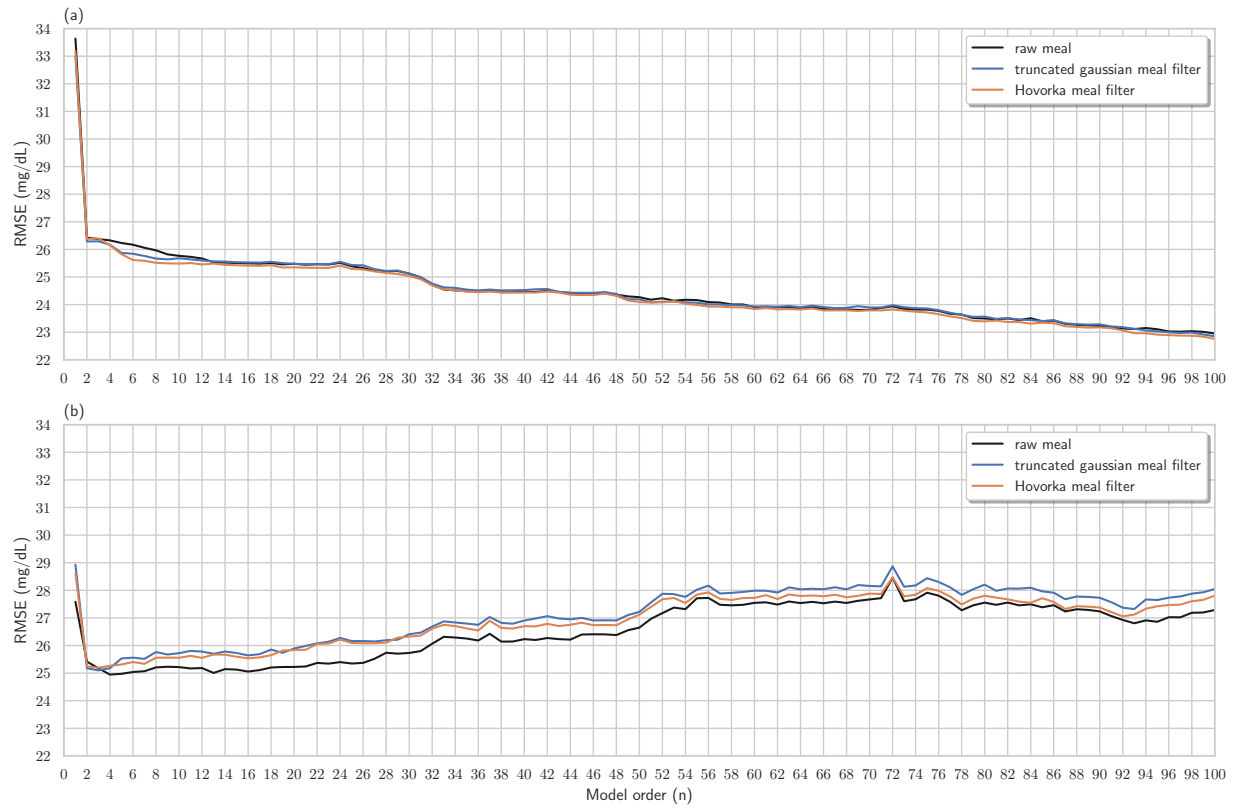


Figura 11: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de comida para distintos ordenes. (a) conjuntos de entrenamiento; (b) conjuntos de prueba

Análisis

En las figuras notamos que el conjunto de entrenamiento tiene una tendencia monótona decreciente, mientras que el conjunto de prueba posee un mínimo dentro del intervalo (no en los extremos), lo que suele denotar sobre entrenamiento.

Notar que los mínimo del conjunto de entrenamiento se alcanzan para ordenes bajos ($n < 8$) con valores cercanos a 25 mg/dL, pero también notamos que existe en las curvas de entrenamiento y pruebas cercano a 25,5 mg/dL donde el orden varía según el modelo utilizado. Para el caso de las señales con los datos crudos, notamos que este cruce ocurre en un orden cercano a $n = 25$, lo que equivale a un historial de tiempo cercano a 2 horas. Para los filtros de Hovorka y biexponencial tenemos que el cruce ocurre en ordenes bajos, cercanos a $n = 2$ y las curvas se más unidas al variar un poco el orden.

Lo anterior denota que existe una dinámica importante en la absorción de la insulina y comida con información importante para el modelo con un retardo cercano a 2 horas, además de validar que los modelos de Horkova y Biexponencial son más robustos al variar el orden cerca del óptimo.

Resultados ARX MISO

Modificando la matriz de datos de las entradas

$$\varphi_u = \begin{bmatrix} \varphi_u^{bolo} \\ \varphi_u^{meal} \end{bmatrix} \quad (22)$$

y el vector de parámetros

$$\begin{bmatrix} a_1^{bolo} & \dots & a_{n_a}^{bolo} & a_1^{meal} & \dots & a_{n_a}^{meal} & b_1 & \dots & b_{n_b} \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

podemos utilizar el modelo para predecir con dos entradas. En las figuras 12, 13 y 14 se muestran los resultados del RMSE para las entradas de bolos y comida. De estas figuras podemos observar que el error para el conjunto de prueba difícilmente puede bajar de 25 mg/dL, donde al elegir mejor el filtro logramos mayor robustez ante variaciones en el orden del modelo para combinaciones específicas de los filtro para el bolo y la comida.

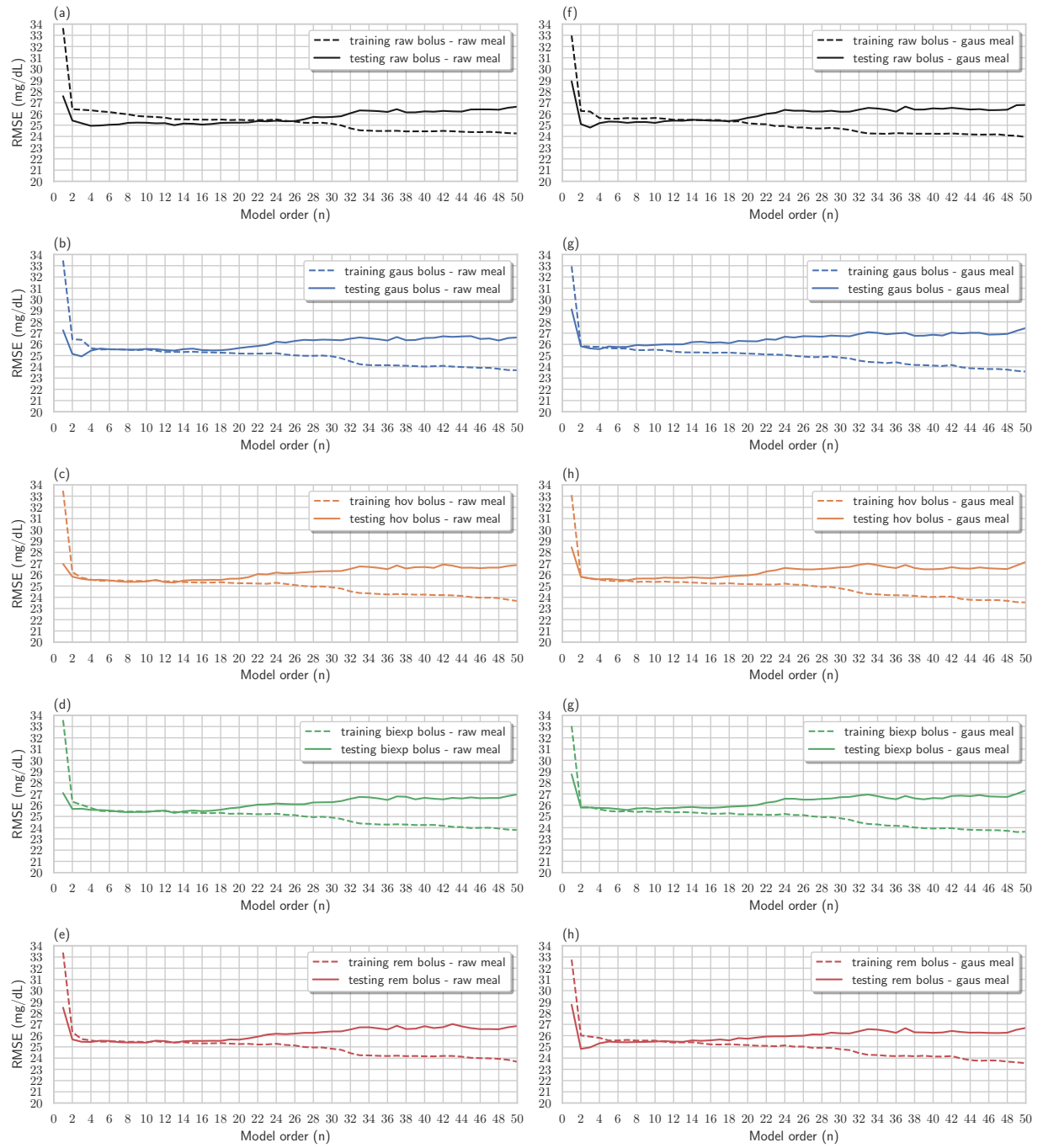


Figura 12: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de bolo y comida para distintos ordenes

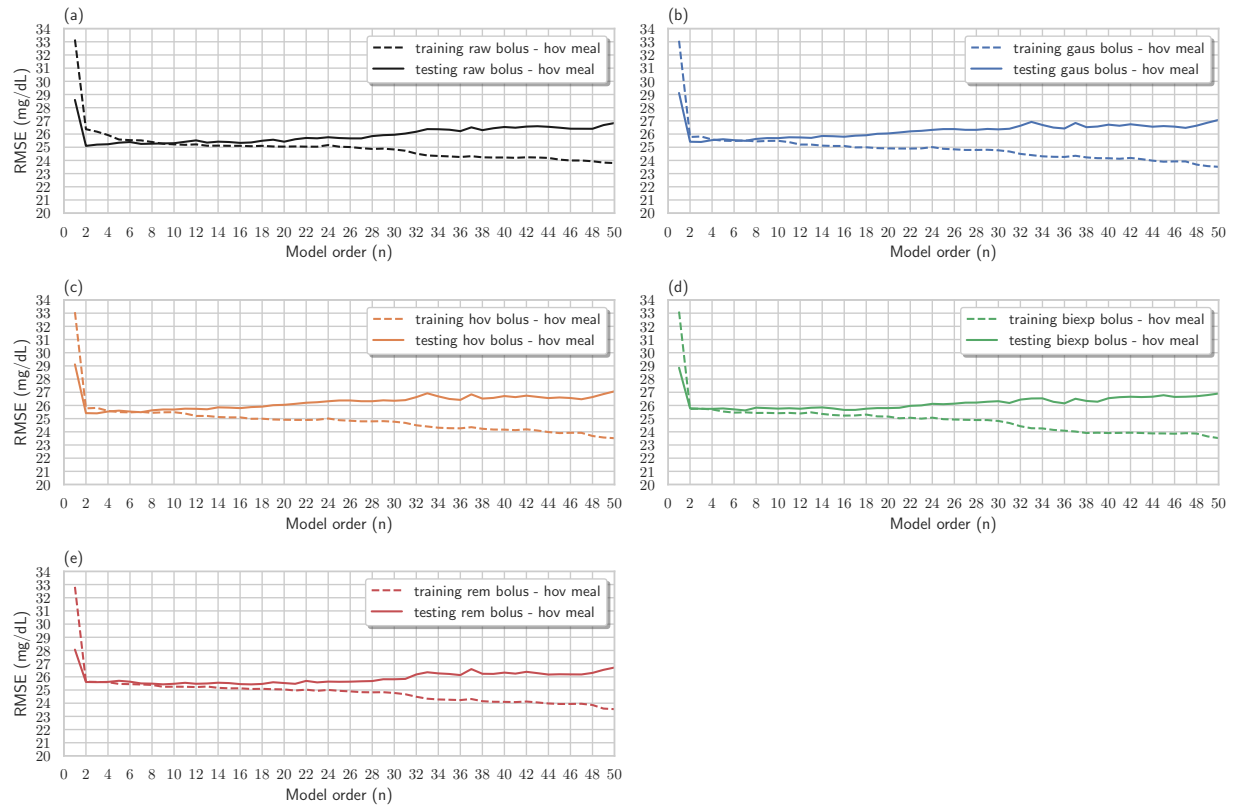


Figura 13: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de bolo y comida para distintos ordenes

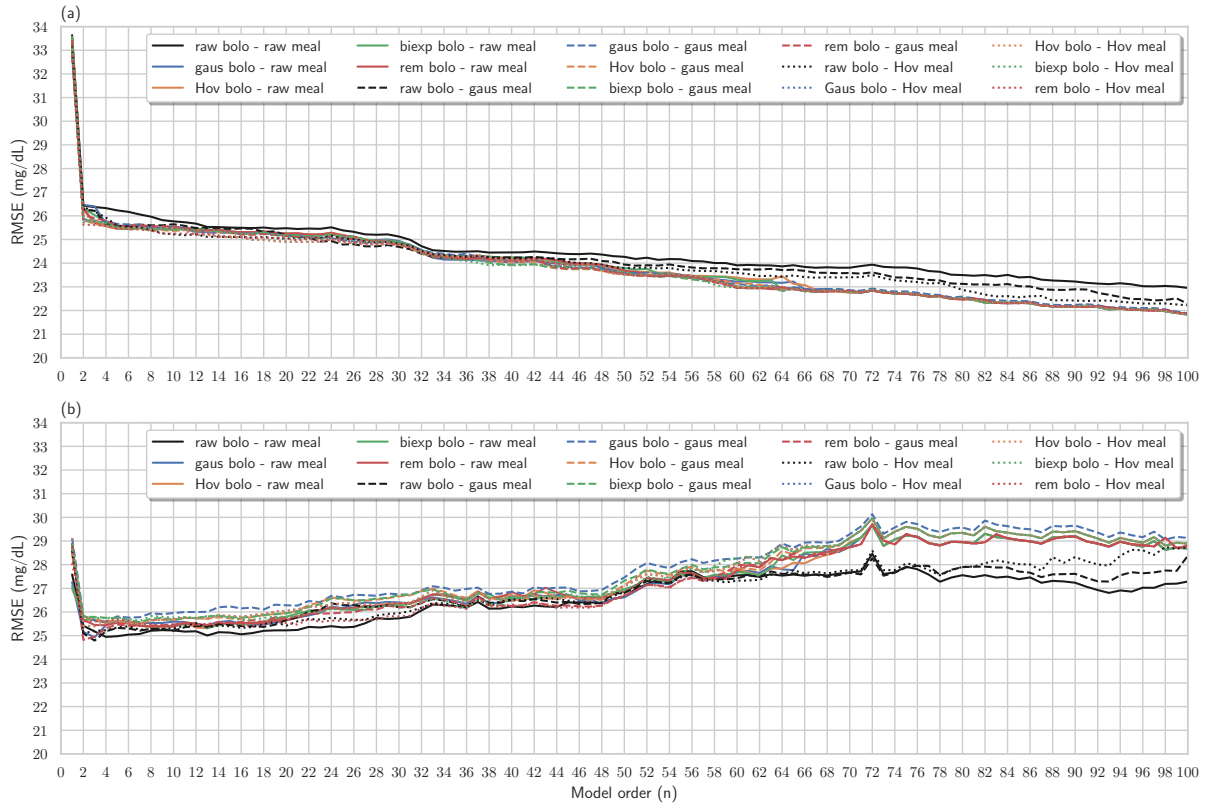


Figura 14: $RMSE$ para distintos tipos de entrada señal de bolo y comida para distintos ordenes. (a) conjuntos de entrenamiento; (b) conjuntos de prueba

Referencias

- [1] J. Xie and Q. Wang, “A nonlinear data-driven model of glucose dynamics accounting for physical activity for type 1 diabetes: an in silico study,” in *Dynamic Systems and Control Conference*, vol. 50695, p. V001T09A002, American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [2] J. Bondia, S. Romero-Vivo, B. Ricarte, and J. L. Diez, “Insulin estimation and prediction: a review of the estimation and prediction of subcutaneous insulin pharmacokinetics in closed-loop glucose control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 38, no. 1, pp. 47–66, 2018.
- [3] R. Hovorka, V. Canonico, L. J. Chassin, U. Haueter, M. Massi-Benedetti, M. O. Federici, T. R. Pieber, H. C. Schaller, L. Schaupp, T. Vering, *et al.*, “Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabetes,” *Physiological measurement*, vol. 25, no. 4, p. 905, 2004.