

# Mathe 2

npikall

10.03.2025

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Lineare Algebra</b>	<b>2</b>
1.1 Vektoren .....	2
1.2 Matrizen .....	4
1.3 Determinante .....	6
1.4 Lineartransformation .....	7
1.5 Lineare Gleichungssysteme .....	7
1.6 Eigenwert Problem .....	8
1.7 Lineare Differentialgleichung .....	9
1.7.1 Lin. DG erster Ordnung .....	9
<b>2 Differentialrechnung in zwei oder mehr Variablen</b>	<b>9</b>
2.1 Partielle Ableitung .....	9
2.2 Taylorformel .....	10
2.3 Maxima und Minima .....	11
<b>3 Multivariate Integralrechnung</b>	<b>11</b>
3.1 Doppel- und Dreifach Integrale .....	11
3.2 Vektorfelder .....	13
3.3 Kurvenintegrale .....	13
3.4 Oberflächenintegrale .....	14
<b>4 Altfragen von 12.10.2023</b>	<b>15</b>
<b>5 Altfragen 12.01.2024</b>	<b>16</b>

# 1 Lineare Algebra

## 1.1 Vektoren

### Def. 1.1: Vektoroperationen

Vektoraddition:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation:

$$r \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot x_1 \\ \vdots \\ r \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt (inneres Produkt):

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

### Def. 1.2: Vektorraum

Reeller Vektorraum ist jene Menge  $V$ , deren Elemente Vektoren heißen. Es gilt:

$$u, v \in V \longrightarrow u + v = \vec{x} \quad (\text{Summe aus Vektoren})$$

$$a \in V \longrightarrow a \cdot v \quad (\text{Skalares Produkt})$$

Dabei sind folgende Grundeigenschaften erfüllt: Kommutativ, Assoziativ...

### Def. 1.3: Lineare Abhängigkeit

Es seien  $v_1, \dots, v_k \in V$  und  $a_1, \dots, a_k \in R$ .  $v_i$  sind linear abhängig, wenn:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \quad (\text{Linearkombination})$$

Sprich wenn es eine Summe aus Vektoren gibt die den Nullvektor bilden. Allerdings sind Vektoren linear unabhängig wenn nur folgende Linearkombination den Nullvektor ergibt:

$$0v_1 + \dots + 0v_k = \vec{0} \quad (\text{linear unabhängig})$$

**Def. 1.4: Lineare Hülle und erzeugendensystem**

Die lineare Hülle ist jener Raum der durch Linearkombination aus Vektoren aufgespannt wird. Es seien  $M$  eine Teilmenge von  $V$  und die lineare Hülle von  $M$  ein Unterraum. Wenn gilt

$$\text{LH}(M) = V$$

dann ist  $M$  ein Erzeugendensystem.

**Def. 1.5: Dimension**

Die Dimension ist die maximale Anzahl ( $n$ ) an linear unabhängigen Vektoren. Somit können  $n$  Vektoren linear unabhängig sein und  $n+1$  Vektoren sind zwangsweise linear abhängig.

**Def. 1.6: Basis**

Jedes System von  $n$  linear unabhängigen Vektoren bildet eine Basis von  $V$ . Es seien  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$  und  $b_1, \dots, b_n \in B$

$$\vec{v} = v_1 \cdot b_1 + \dots + v_n \cdot b_n \quad (\text{linear Kombination aus Basisvektoren})$$

**Kriterium für Basen:**

Die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  sind Basen, wenn gilt:

$$\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \neq 0$$

Sprich wenn das aufgespannte Volumen der Vektoren nicht 0 ist.

**Def. 1.7: Euklidischer Vektorraum**

Wenn Vektoren nicht nur addiert und mit einem Skalar multipliziert werden können, sondern es das "innere Produkt" gibt, dann liegt ein euklidischer VR vor.

- (i) Positiv Definit  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- (ii) Kommutivität  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- (iii) Distributivität  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- (iv)  $\vec{a} \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$

**Def. 1.8: Euklidische Norm/Länge**

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2$$

$$\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

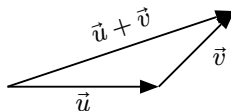
**Def. 1.9: Wichtige Ungleichungen**

Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

**Def. 1.10: Orthogonal, Winkel**

Es seien zwei Vektoren  $u, v \in V$ , dann sind diese orthogonal, wenn:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Wenn nicht 0 dann ist der Winkel zwischen den Vektoren gegeben durch:

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

**Def. 1.11: Orthonormalbasis**

Es sei  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  Basis von  $V$  und es ist  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  ONB von  $V$  gesucht. Dabei soll die lineare Hülle der Basis und der ONB gleich sein.

Gram - Schmidt Verfahren:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{b}_1 &= \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \cdot \vec{x}_1 \quad \rightarrow \quad \|\vec{b}_1\| = 1 \\ \text{(ii)} \quad \vec{b}_2' &= \vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{b}_1) \cdot \vec{b}_1 \quad \rightarrow \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{b}_2'}{\|\vec{b}_2'\|} \\ \text{(iii)} \quad \vec{b}_3' &= \vec{x}_3 - (\vec{x}_3 \cdot \vec{b}_1) \cdot \vec{b}_1 - \vec{x}_3 \cdot (\vec{x}_3 \cdot \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 &= \frac{\vec{b}_3'}{\|\vec{b}_3'\|} \end{aligned}$$

**1.2 Matrizen****Def. 1.12: Basis**

Rechteckschema mit reellen Zahlen, mit m Zeilen und n Spalten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ist  $m=n$  dann liegt eine quadratische Matrix vor.

**Def. 1.13: Operationen mit Matrizen**

Addition (elementeweise):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation (mit Skalar):

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & \cdots & a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{21} & \cdots & a \cdot a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{m1} & \cdots & a \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation (Zeile mal Spalte):

$$A_{m_A, n_A} \cdot B_{m_B, n_B} = C_{m_A, n_B} \rightarrow n_A = m_B$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

**Def. 1.14: Potenzen von Matrizen**

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$$

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$

$$(AB)^k = A^k B^k$$

**Def. 1.15: Transponierte Matrix**

$$(i) \quad (A^T)^T = A$$

$$(ii) \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(iii) \quad (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

Bei einer symmetrischen Matrix gilt:  $A^T = A$

### 1.3 Determinante

**Def. 1.16: Determinante**

Es sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix. Daher ist  $\det(A) \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Determinante entspricht dem Volumen, des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Raumes. (2D = Parallelogram, 3D = Parallelepipiped).

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \rightarrow \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

**Def. 1.17: Eigenschaften von Determinanten**

Folgende Eigenschaften gelten für Determinanten:

1. Vertauscht man 2 Spalten oder Zeilen so gilt:  $|A| \rightarrow -|A|$
2. Multipliziert man eine Zeile oder Spalte, dann:  $|A| \rightarrow a \cdot |A|$
3. addiert man ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte, dann:  $|A| = |A|$
4.  $|A| = |A^T|$
5.  $|AB| = |A| \cdot |B|$

**Def. 1.18: Funktionaldeterminante**

Die Funktionaldeterminante gibt die lokale Flächenvergrößerung bei folgender Abbildung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Dabei ist die Funktionaldeterminante wie folgt definiert:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

**Def. 1.19: Inverse Matrix**

Eine  $n \times n$  Matrix  $A$  ist singulär, falls  $|A| = 0$ . Sonst heißt sie regulär oder nicht singulär.  $A$  sei nun regulär, dann gilt:

$$A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\|A\|} \cdot (A_{ij}^T)$$

Weiters gilt für die Inverse Matrix:

$$(i) \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(ii) \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(iii) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**1.4 Lineartransformation****Def. 1.20: Lineartransformation**

Eine Abbildung  $A : U \rightarrow V$  ( $U, V$  sind Vektorräume) heißt linear, wenn gilt:

$$(i) \text{ Additivität: } A(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v})$$

$$(ii) \text{ Homogenität: } A(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot A(\vec{u})$$

**1.5 Lineare Gleichungssysteme****Def. 1.21: Lineare Gleichungssysteme**

Gleichungen der Form  $A\vec{x} = \vec{a}$  sind lineare Gleichungssysteme.  $A$  ist eine  $m \times n$  Matrix und  $\vec{a}$  ist der Störvektor. Es wird  $\vec{x}$  gesucht, welcher der *Least Squares* Approximation entspricht.

**Def. 1.22: Rang einer Matrix**

Der Rang ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spaltenvektoren in einem System. Der Rang ändert sich nicht, wenn:

1. 2 Zeilen oder Spalten vertauscht werden.
2. Zeilen oder Spalten multipliziert werden.
3. Vielfache von Zeilen oder Spalten zu anderen addiert werden.
4. Zeilen und Spalten vertauscht sind ( $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$ ).

**Rangkriterium:**

- Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{a})$
- Ist das lin. Gleichungssystem lösbar, dann erfüllen die Lösungen d. GLS eine Ebene der Dimension  $n - \text{Rang}(A)$

**Ausgleichsrechnung:**

Wenn ein GLS überbestimmt ist gibt es keine Lösung. Nun sei:

$$A \cdot \vec{x} \neq \vec{a} \iff A \cdot \vec{x} - \vec{a} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|A \cdot \vec{x} - \vec{a}\| > 0 \quad (\text{Fehlerquadrat})$$

$$\longrightarrow A^T \cdot A \cdot \vec{x}^* = A^T \cdot \vec{a} \quad (\vec{x}^* \text{ minimierter Fehler})$$

## 1.6 Eigenwert Problem

### Def. 1.23: Orthogonale Matrix

Eine Matrix heißt orthogonal, wenn  $A \cdot A^T = I$ . Sie sind also nicht singulär ( $A^{-1} = A^T$ ). Die Zeilen und Spaltenvektoren bilden eine orthonormal Basis. Sind A, B orthogonal, dann auch I, AB,  $A^{-1}$ ,  $A^T$ . Geometrisch ist eine orthogonale Matrix eine Drehung oder Spiegelung.

### Def. 1.24: Eigenwertproblem

A sei eine  $n \times n$  Matrix. Gesucht ist  $A \cdot x = \lambda \cdot x$ .  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  ist hier der Eigenwerte und dazugehörige Vektoren sind Eigenvektoren (ein Vektor der auf sich selbst abbildet).

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot I \cdot \vec{x}$$

$$A \cdot \vec{x} - \lambda I \vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$$

Eigenwerte sind jene  $\lambda$  für die gilt (charakteristisches Polynom):

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

### Def. 1.25: Transformation auf Diagonalgestalt

A sei eine  $n \times n$  Matrix. A ist genau dann äquivalent zu einer Diagonalmatrix, wenn sie n linear unabhängige EV besitzt.

$$A \cdot \vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1$$

$$\vdots$$

$$A \cdot \vec{x}_n = \lambda_n \cdot \vec{x}_n$$

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  sind dabei lin. unabhängige EV. Es sei nun  $S = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ , somit gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bei symmetrischen Matrizen hat man immer Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte sind immer reel.

### Def. 1.26: Hauptachsentransformation

Man betrachte Quadriken der Form

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = a \quad (A = A^T)$$

$$A = S^{-1}DS \rightarrow D = S^{-1}AS$$

$$q(\vec{x}') = \vec{x}'^T \cdot D \cdot \vec{x}'$$



## 1.7 Lineare Differentialgleichung

### 1.7.1 Lin. DG erster Ordnung

**Def. 1.27: Homogener Fall**

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x)y(x) \\ \vec{y}'(t) &= A \cdot \vec{y}(t) \\ \rightarrow y(x) &= c \cdot e^{\int f(x) dx} \\ \rightarrow y(x) &= e^{At} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

**Def. 1.28: Inhomogener fall**

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x) \cdot y(x) + g(x) \\ \rightarrow y &= y_h + y_p \\ \rightarrow y_h &= c \cdot e^{\int f(x) dx} \\ \rightarrow y_p &= y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h} dx\end{aligned}$$

## 2 Differentialrechnung in zwei oder mehr Variablen

### 2.1 Partielle Ableitung

**Def. 2.1: Partielle Ableitung**

Eine Funktion ist partiell differenzierbar, falls die Ableitung an der Stelle nach einer Variablen differenzierbar ist. Sie heißt total oder absolut differenzierbar, falls beide partiellen Ableitungen vorhanden sind.

Kettenregel:

$$\begin{aligned}g(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \Rightarrow g'(t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \\ &= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ g'(t) &= f_x(x, y) \cdot x' + f_y(x, y) \cdot y'\end{aligned}$$

Schwarzscher Vertauschbarkeitssatz:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

**Def. 2.2: Richtungsableitung**

Gerade durch Punkt  $A = (a, b)$  mit  $A + te \quad t \in \mathbb{R}, e = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$

$$\frac{d}{dt} f(A + te) \big|_{t=0} = f_x(a, b) \cdot \cos \varphi + f_y(a, b) \cdot \sin \varphi = \frac{\partial f}{\partial e}$$

$$\text{grad } f(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} A = \text{grad } f(A) \cdot e$$

## 2.2 Taylorformel

**Def. 2.3: Taylorformel**

Man schränkt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf eine Strecke  $[A, C] \subset D$  ein ( $A = (a, b)^T, C = (c, d)^T$ ).  
Man erhält eine Funktion mit der Gestalt:

$$g(t) = f(A + t \cdot (C - A)), \quad t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow g'(t) = f_x(a + t(C - A)) \cdot (C - A) + f_y(a + t(C - A)) \cdot (d - b)$$

**Def. 2.4: Lokale Gestalt eines Flächenstücks**

Tangentialebene an  $A \in D$  an der Stelle  $(A, f(A))$ :

$$z = f(A) + f_x(A) \cdot (x - a) + f_y(A) \cdot (y - b)$$

$$\text{Normalvektor: } N = \begin{pmatrix} f_x(A) \\ f_y(A) \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Def. 2.5: Schmiegeparaboloid der Fläche**

Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung hat, dann gibt es Schmiegeparaboloide.

...

- $q$  ist positiv oder negativ definit  $[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 > 0] \rightarrow$  elliptisch
- $q$  ist indefinit  $[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 < 0] \rightarrow$  hyperbolisch
- $q$  ist positiv oder negativ semidefinit  $[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 = 0] \rightarrow$  parabolisch

## 2.3 Maxima und Minima

### Def. 2.6: Innere Extremstellen

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $a$  sei Stelle eines lokalen Extremum, wenn gilt:

$$f_x(a) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(a) = 0$$

$$\text{grad } f(a) = 0$$

Leibnizsches Kriterium:

- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 > 0$  und  $f_{xx}(a) > 0 \rightarrow$  lokales Minimum
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 > 0$  und  $f_{xx}(a) < 0 \rightarrow$  lokales Maximum
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 < 0 \rightarrow$  keine Extremstelle (Sattelpunkt)
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 = 0 \rightarrow$  alle Fälle möglich

### Def. 2.7: Extrema unter Nebenbedingungen

...

## 3 Multivariate Integralrechnung

### 3.1 Doppel- und Dreifach Integrale

#### Def. 3.1: Integrationsbereiche

Endlich viele Kurvenstücke der Form:

$$y = f(x) \quad x \in I$$

$$x = g(y) \quad y \in J$$

Grundeigenschaften ( $f, g$  sind integrierbar,  $a \in \mathbb{R}$ ):

1.  $a \cdot f$  ist integrierbar und

$$\iint_D a f \, dx \, dy = a \cdot \iint_D f \, dx \, dy$$

2.  $f + g$  ist integrierbar und

$$\iint_D (f + g) \, dx \, dy = \iint_D f \, dx \, dy + \iint_D g \, dx \, dy$$

3.  $|f|$  ist integrierbar und

$$\left| \iint_D f \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f| \, dx \, dy$$

4. Cauchy Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f, g \rangle = \iint_D f g \, dx \, dy \leq \left( \iint_D f^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \cdot \left( \iint_D g^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

5. Dreiecksungleichung

$$\sqrt{\iint_D (f + g)^2 \, dx \, dy} \leq \sqrt{\iint_D f^2 \, dx \, dy} + \sqrt{\iint_D g^2 \, dx \, dy}$$

**Def. 3.2: Methoden zur Berechnung****Rückführung auf Einfachintegrale:** (Variable im inneren Integral)

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad \gamma(x) \leq y \leq \delta(x)\}$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Wenn  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , dann:

$$\iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} g(x)h(y) \, dx \, dy = \int_a^b g(x) \, dx \cdot \int_c^d h(y) \, dy$$

**Transformation von Doppelintegralen**

...

**Differentiation von Parametern**

...

**Def. 3.3: Inhalt von Flächenstücken/Oberflächen**Es sei eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, \quad z = f(x, y) \right\}$  die Fläche in expliziter Darstellung.

$$I(F) = |F| \quad (\text{Flächeninhalt})$$

$$I(F) = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \, dx \, dy$$

F in Parameterform  $F = \left\{ X(u, v) : (u, v) \in D \right\}$  mit  $X = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ .

$$I(F) = \iint_D \| X_u(u, v) \times X_v(u, v) \| \, du \, dv$$

Dabei sind:

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \rightarrow \text{Flächennormalvektor}$$

$$X_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

### 3.2 Vektorfelder

**Def. 3.4: Potentialfelder**

Potentialfelder oder auch Gradientenfelder (konservative Vektorfelder)  $V : G(x\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ oder } 3$ , wenn es dazu ein Skalarfeld  $P : G(x\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit:

$$v = \text{grad } P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Dabei stellt  $P(X) = P(x, y, z) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  die Potentialfläche dar. Jeder Vektor  $v(a) = \text{grad } P(a)$  ist senkrecht auf die Potentialfläche.

**Kriterium für Potentialfelder:** ( $v : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ oder } 3$ )

1.  $G$  ist einfach zusammenhängend (keine Löcher)
2.  $v$  hat stetige partielle Ableitungen
3. Integrabilitäts Bedingung:  $v_x - u_y = 0$  im  $\mathbb{R}^2$ , bzw.  $w_y - v_z = u_z - w_x = v_x - u_y = 0$  im  $\mathbb{R}^3$

$$v(X) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(x) \\ P_y(x) \\ P_z(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_y - v_z &= P_{zy} - P_{yz} = 0 \\ \longrightarrow u_z - w_x &= P_{xz} - P_{zx} = 0 \\ v_x - u_y &= P_{yx} - P_{xy} = 0 \end{aligned}$$

### 3.3 Kurvenintegrale

**Def. 3.5: Kurvenintegrale**
**Existenzsatz:**

Es sei ein Vektorfeld  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^{2/3}$ .

$$\int_C v dx = \int_a^b v(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

**Satz: Kurvenintegrale auf Potentialfeldern**

$$\int_c v dx = P(x(b)) - P(x(a))$$

Kurvenintegrale sind wegunabhängig. Bei geschlossenen Kurven ist  $\oint v = 0$

**Satz: Bestimmung von Potentialen**

Weiß man, dass ein stetiges Vektorfeld  $v$  ein Potentialfeld ist, dann erhält man ein Potential  $P$  auf folgende Weise:

$$P(X) = \int_a^x v dy \quad \text{für } x \in G$$

**Def. 3.6: Exakte Differentialgleichung**

$f(x, y) + g(x, y) \cdot y' = 0$  heißt exakt, wenn  $\exists F : G \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F_x = f$ ,  $F_y = g$ . Sprich  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  und  $g$ . Lösung: es gilt  $F(x, y(x)) = \text{const}$

$$g(a, b) \neq 0 \rightarrow y(a) = b$$

$$\Rightarrow F(x, y) = F(a, b)$$

**3.4 Oberflächenintegrale**

## 4 Altfragen von 12.10.2023

### ? Frage 1

Definieren Sie einen Vektorraum (Rechenregeln).

### ? Frage 2

Flächen- und Oberflächenintegrale einer Kugel in Polarkoordinaten

### ? Frage 3

Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  und herleiten der Parallelogrammformel.

### ? Frage 4

Differentialgleichung

### ? Frage 5

Kreuzerlfragen zu Statistik

## 5 Altfragen 12.01.2024

### ? Frage 1

Es sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Finden sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -2$$

$$EV(-2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$EV(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$EV(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### ? Frage 2

Es sei  $y'' + 9y = \cos 3x$  gegeben. Finden Sie die allgemeine Lösung. Weiters finden sie die Lösung mit den Anfangswerten  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 3$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_2 \cos(3x) + \left(C_1 + \frac{x}{6}\right) \sin(3x)$$

Mit den Anfangswerten:  $y(0) = 0$   $y'(0) = 3$ :

$$y(x) = \left(\frac{x}{6} + 1\right) \sin(3x)$$

### ? Frage 3

Es sind folgende Integrale (Gauß'sches Fehlerintegral) gegeben:

$$I(a) = \iint_{\substack{-a \leq x \leq a \\ -a \leq y \leq a}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad J(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx, \quad K(a) = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Zeigen Sie, dass:  $J(a)^2 = I(a)$ ;  $K(a) \leq I(a) \leq K(\sqrt{2}a)$ ;  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} J(a)$

Es gilt der Satz:

$$\iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} g(x)h(y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$$

Deshalb wird aus ...



**? Frage 4** $Z = f(x, y) \dots???$