Mathe 2

npikall

12.03.2025

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Vektoren

Def. 1.1: Vektoroperationen
Vektoraddition:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation:

$$r \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot x_1 \\ \vdots \\ r \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt (inneres Produkt):

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Def. 1.2: Vektorraum
Reeler Vektorraum ist jene Menge V, deren Elemente Vektoren heißen. Es gilt:

$$\begin{aligned} u, v \in V &\longrightarrow u + v = \vec{x} \qquad \text{(Summe aus Vektoren)} \\ a \in V &\longrightarrow a \cdot v \qquad \text{(Skalares Produkt)} \end{aligned}$$

Dabei sind folgende Grundeigenschaften erfüllt: Kommutativ, Assoziativ...

Def. 1.3: Lineare Abhängigkeit
Es seien $v_1, ..., v_k \in V$ und $a_1, ..., a_k \in R$. v_i sind linear abhängig, wenn:

$$a_1 v_1 + ... + a_k v_k = 0 \qquad \text{(Linearkombination)}$$

Sprich wenn es eine Summe aus Vektoren gibt die den Nullvektor bilden. Allerdings sind Vektoren linear unabhängig wenn nur folgende Linearkombination den Nullvektor ergibt:

$$0 v_1 + ... + 0 v_k = \vec{0} \qquad \text{(linear unabhängig)}$$

Def. 1.4: Lineare Hülle und erzeugendensystem
Die lineare Hülle ist jener Raum der durch Linearkombination aus Vektoren aufgespannt wird. Es seien M eine Teilmenge von V und die lineare Hülle von M ein Unterraum. Wenn gilt

$$\mathrm{LH}(M) = V$$

dann ist M ein Erzeugendensystem.

Def. 1.5: Dimension
Die Dimension ist die maximale Anzahl (n) an linear unabhängigen Vektoren. Somit können n Vektoren linear unabhängig sein und n+1 Vektoren sind zwangsweise linear abhängig.

Def. 1.6: Basis
Jedes System von n linear unabhängigen Vektoren bildet eine Basis von V. Es seien $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, ..., b_n \in B$

$$\vec{v} = v_1 \cdot b_1 + ... + v_n \cdot b_n \qquad \text{(linear Kombination aus Basisvektoren)}$$

Kriterium für Basen:
Die Vektoren $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n} \in \mathbb{R}^n$ sind Basen, wenn gilt:

$$\det(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}) \neq 0$$

Sprich wenn das aufgespannte Volumen der Vektoren nicht 0 ist.

Def. 1.7: Euklidischer Vektorraum
Wenn Vektoren nicht nur addiert und mit einem Skalar multipliziert werden können, sondern es das "innere Produkt" gibt, dann liegt ein euklidischer VR vor.

$$\begin{aligned}
\text{(i) Positiv Definit} \quad & \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\
\text{(ii) Kommutivität} \quad & \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\
\text{(iii) Distributivität} \quad & \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\
\text{(iv)} \quad & \vec{a} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

Def. 1.8: Euklidische Norm/Länge

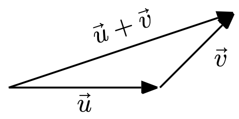
$$\begin{aligned}
& \parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2 \\
& \parallel \vec{v} \parallel^2 = v_1^2 + v_2^2 \\
& \parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}
\end{aligned}$$

Def. 1.9: Wichtige Ungleichungen
Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$$

Dreiecksungleichung:

$$\| \vec{u} + \vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$$



Def. 1.10: Orthogonal, Winkel
Es seien zwei Vektoren $u, v \in V$, dann sind diese orthogonal, wenn:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Wenn nicht 0 dann ist der Winkel zwischen den Vektoren gegeben durch:

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Def. 1.11: Orthonormalbasis
Es sei $\vec{x_1}, ..., \vec{x}_n$ Basis von V und es ist $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$ ONB von V gesucht. Dabei soll die lineare Hülle der Basis und der ONB gleich sein.
Gram - Schmidt Verfahren:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \vec{b}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \cdot \vec{x}_1 \quad \longrightarrow \quad \|\vec{b}_1\| = 1 \\
&\text{(ii)} && \vec{b}_2' = \vec{x}_2 - \left(\vec{x}_2 \cdot \vec{b}_1\right) \cdot \vec{b}_1 \quad \longrightarrow \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{b}_2'}{\|\vec{b}_2'\|} \\
&\text{(iii)} && \vec{b}_3' = \vec{x}_3 - \left(\vec{x}_3 \cdot \vec{b}_1\right) \cdot \vec{b}_1 - \vec{x}_3 - \left(\vec{x}_3 \cdot \vec{b}_2\right) \cdot \vec{b}_2 \\
& && \vec{b}_3 = \frac{\vec{b}_3'}{\|\vec{b}_3'\|}
\end{aligned}$$

1.2 Matrizen

Def. 1.12: Basis
Rechteckschema mit reelen Zahlen, mit m Zeilen und n Spalten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ist m=n dann liegt eine quadratische Matirx vor.

Def. 1.13: Operationen mit Matrizen
Addition (elementeweise):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation (mit Skalar):

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & \cdots & a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{21} & \cdots & a \cdot a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{m1} & \cdots & a \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation (Zeile mal Spalte):

$$A_{m_A, n_A} \cdot B_{m_B, n_B} = C_{m_A, n_B} \rightarrow n_A = m_B$$
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Def. 1.14: Potenzen von Matrizen

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$$
$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$
$$(AB)^k = A^k B^k$$

Def. 1.15: Transponierte Matrix

$$\text{(i)} \quad \left(A^T\right)^T = A$$
$$\text{(ii)} \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$
$$\text{(iii)} \quad (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

Bei einer symmetrischen Matrix gilt: $A^T = A$

1.3 Determinante

Def. 1.16: Determinante
Es sei A eine $n \times n$ Matrix. Daher ist $\det(A) \to \mathbb{R}$. Die Determinante entspricht dem Volumen, des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Raumes. (2D = Paralellogram, 3D = Parallelepiped).

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Def. 1.17: Eigenschaften von Determinanten
Folgende Eigenschaften gelten für Determinanten:

1. Vertauscht man 2 Spalten oder Zeilen so gilt: $|A| \to -|A|$
2. Multipliziert man eine Zeile oder Spalte, dann: $|A| \to a \cdot |A|$
3. addiert man ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte, dann: $|A| = |A|$
4. $|A| = \left|A^T\right|$
5. $|AB| = |A| \cdot |B|$

Def. 1.18: Funktionaldeterminante
Die Funktionaldeterminante gibt die lokale Flächenvergrößerung bei folgender Abbildung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$$

Dabei ist die Funktionaldeterminante wie folgt definiert:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$$

Def. 1.19: Inverse Matrix
Eine $n \times n$ Matrix A ist singulär, falls $|A| = 0$. Sonst heißt sie regulär oder nicht singulär. A sei nun regulär, dann gilt:

$$A^{-1}: \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\| A \|} \cdot \left(A_{ij}^T\right)$$

Weiters gilt für die Inverse Matrix:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \\ &\text{(ii)} && (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ &\text{(iii)} && \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T \end{aligned}$$

1.4 Lineartransformation

Def. 1.20: Lineartransformation
Eine Abbildung $A : U \to V$ (U,V sind Vektorräume) heißt linear, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i) Additivität:} &\quad A(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v}) \\ \text{(ii) Homogenität:} &\quad A(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot A(\vec{u}) \end{aligned}$$

1.5 Lineare Gleichungsysteme

Def. 1.21: Lineare Gleichungsysteme
Gleichungen der Form $A\vec{x} = \vec{a}$ sind lineare Gleichungsysteme. A ist eine $m \times n$ Matrix und $\vec{a}$ ist der Störvektor. Es wird $\vec{x}$ gesucht, welcher der *Least Squares* Approximation entspricht.

Def. 1.22: Rang einer Matrix
Der Rang ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spaltenvektoren in einem System. Der Rang ändert sich nicht, wenn:

1. 2 Zeilen oder Spalten vertauscht werden.
2. Zeilen oder Spalten multipliziert werden.
3. Vielfache von Zeilen oder Spalten zu anderen addiert werden.
4. Zeilen und Spalten vertauscht sind (rg $(A) =$ rg $\left(A^T\right)$).

Rangkriterium:

- Ein lineares Gleichungsystem ist genau dann lösbar, wenn rg $(A) =$ rg $(A \mid \vec{a})$
- Ist das lin. Gleichungsystem lösbar, dann erfüllen die Lösungen d. GLS eine Ebene der Dimension n - Rang(A)

Ausgleichsrechnung:
Wenn ein GLS überbestimmt ist gibt es keine Lösung. Nun sei:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} \neq \vec{a} \Longleftrightarrow A \cdot \vec{x} - \vec{a} \neq 0 &\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|A \cdot \vec{x} - \vec{a}\| > 0 &\quad \text{(Fehlerquadrat)} \\ \longrightarrow A^T \cdot A \cdot \vec{x}^* = A^T \cdot \vec{a} \setminus &\quad \left(\vec{x}^* \text{ minimierter Fehler}\right) \end{aligned}$$

1.6 Eigenwert Problem

Def. 1.23: Orthogonale Matrix
Eine Matrix heißt orthogonal, wenn $A \cdot A^T = I$. Sie sind also nicht singulär ($A^{-1} = A^T$). Die Zeilen und Spaltenvektoren bilden eine orthonormal Basis. Sind A, B orthogonal, dann auch I, AB, A^{-1}, A^T. Geometrisch ist eine orthogonale Matrix eine Drehung oder Spiegelung.

Def. 1.24: Eigenwertproblem
A sei eine $n \times n$ Matrix. Gesucht ist $A \cdot x = \lambda \cdot x$. $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ist hier der Eigenwerte und dazugehörige Vektoren sind Eigenvektoren (ein Vektor der auf sich selbst abbildet).

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot I \cdot \vec{x}$$
$$A \cdot \vec{x} - \lambda I \vec{x} = \vec{0}$$
$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$$

Eigenwerte sind jene λ für die gilt (charakteristisches Polynom):

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Def. 1.25: Transformation auf Diagonalgestalt
A sei eine $n \times n$ Matrix. A ist genau dann äquivalent zu einer Diagonalmatrix, wenn sie n linear unabhängige EV besitzt.

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 \\ &\vdots \\ A \cdot \vec{x}_n &= \lambda_n \cdot \vec{x}_n \end{aligned}$$

$\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ sind dabei lin. unabhängige EV. Es sei nun $S = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$, somit gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bei symmetrischen Matrizen hat man immer Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte sind immer reel.

Def. 1.26: Hauptachsentransformation
Man betrachte Quadriken der Form

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = a \quad (A = A^T)$$
$$A = S^{-1}DS \rightarrow D = S^{-1}AS$$
$$q(\vec{x}') = \vec{x}'^T \cdot D \cdot \vec{x}'$$

1.7 Lineare Differentialgleichung

1.7.1 Lin. DG erster Ordnung

Def. 1.27: Homogener Fall

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)y(x) \\ \vec{y}'(t) &= A \cdot \vec{y}(t) \\ &\to y(x) = c \cdot e^{\int f(x)\,dx} \\ &\to y(x) = e^{At} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Def. 1.28: Inhomogener fall

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \cdot y(x) + g(x) \\ &\to y = y_h + y_p \\ &\to y_h = c \cdot e^{\int f(x)\,dx} \\ &\to y_p = y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h}\,dx \end{aligned}$$

2 Differentialrechnung in zwei oder mehr Variablen

2.1 Partielle Ableitung

Def. 2.1: Partielle Ableitung
Eine Funktion ist partiell differenzierbar, falls die Ableitung an der Stelle nach einer Variablen differenzierbar ist. Sie heißt total oder absolut differenzierbar, falls beide partiellen Ableitungen vorhanden sind.
Kettenregel:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \Rightarrow g'(t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \\ &= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ g'(t) &= f_x(x, y) \cdot x' + f_y(x, y) \cdot y' \end{aligned}$$

Schwarzscher Vertauschbarkeitssatz:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Def. 2.2: Richtungsableitung
Gerade durch Punkt $A = (a, b)$ mit $A + te \quad t \in \mathbb{R}, e = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$

$$\frac{d}{dt} f(A + te) \mid_{t=0} = f_x(a, b) \cdot \cos\varphi + f_y(a, b) \cdot \sin\varphi = \frac{\partial f}{\partial e}$$

$$\text{grad } f(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} A = \text{grad } f(A) \cdot e$$

2.2 Taylorformel

Def. 2.3: Taylorformel
Man schränkt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf eine Strecke $[A, C] \subset D$ ein $(A = (a, b)^T, C = (c, d)^T)$. Man erhält eine Funktion mit der Gestalt:

$$g(t) = f(A + t \cdot (C - A)), \quad t \in [0, 1]$$
$$\Rightarrow g'(t) = f_x(a + t(C - A)) \cdot (C - A) + f_y(a + t(C - A)) \cdot (d - b)$$

Def. 2.4: Lokale Gestalt eines Flächenstücks
Tangentialebene an $A \in D$ an der Stelle $(A, f(A))$:

$$z = f(A) + f_x(A) \cdot (x - a) + f_y(A) \cdot (y - b)$$

$$\text{Normalvektor:} \quad N = \begin{pmatrix} f_x(A) \\ f_y(A) \\ -1? \end{pmatrix}$$

Def. 2.5: Schmiegeparaboloid der Fläche
Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung hat, dann gibt es Schmiegeparaboloide.

...

- q ist positiv oder negativ definit $\left[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 > 0\right] \to$ elliptisch
- q ist indefinit $\left[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 < 0\right] \to$ hyperbolisch
- q ist positiv oder negativ semidefinit $\left[f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 = 0\right] \to$ parabolisch

2.3 Maxima und Minima

Def. 2.6: Innere Extremstellen
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und a sei Stelle eines lokalen Extremum, wenn gilt:

$$f_x(a) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(a) = 0$$
$$\text{grad } f(a) = 0$$

Leibnizsches Kriterium:
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 > 0$ und $f_{xx}(a) > 0 \to$ lokales Minimum
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 > 0$ und $f_{xx}(a) < 0 \to$ lokales Maximum
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 < 0 \to$ keine Extremstelle (Sattelpunkt)
- $f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - f_{xy}(a)^2 = 0 \to$ alle Fälle möglich

Def. 2.7: Extrema unter Nebenbedingungen
...

3 Multivariate Integralrechnung

3.1 Doppel- und Dreifach Integrale

Def. 3.1: Integrationsbereiche
Endlich viele Kurvenstücke der Form:

$$y = f(x) \quad x \in I$$
$$x = g(y) \quad y \in J$$

Grundeigenschaften (f,g sind integrierbar, $a \in \mathbb{R}$):

1. $a \cdot f$ ist integrierbar und
$$\iint_D af\,dx\,dy = a \cdot \iint_D f\,dx\,dy$$
2. $f + g$ ist integrierbar und
$$\iint_D (f+g)\,dx\,dy = \iint_D f\,dx\,dy + \iint_D g\,dx\,dy$$
3. $|f|$ ist integrierbar und
$$\left|\iint_D f\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f|\,dx\,dy$$
4. Cauchy Schwarzsche Ungleichung
$$\langle f, g\rangle = \iint_D fg\,dx\,dy \leq \left(\iint_D f^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \cdot \left(\iint_D g^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$$
$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$
5. Dreiecksungleichung
$$\sqrt{\iint_{\mathrm{D}} (f+g)^2\,dx\,dy} \leq \sqrt{\iint_{\mathrm{D}} f^2\,dx\,dy} + \sqrt{\iint_{\mathrm{D}} g^2\,dx\,dy}$$

Def. 3.2: Methoden zur Berechnung
Rückführung auf Einfachintegrale: (Variable im inneren Integral)

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad \gamma(x) \leq y \leq \delta(x)\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Wenn f(x,y) = g(x)h(y), dann:

$$\iint_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} g(x)h(y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

Transformation von Doppelintegralen

...

Differentiation von Parametern

...

Def. 3.3: Inhalt von Flächenstücken/Oberflächen
Es sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $F = \left\{ (x,y,z) : (x,y) \in D, \quad z = f(x,y) \right\}$ die Fläche in expliziter Darstellung.

$$I(F) = |F| \quad \text{(Flächeninhalt)}$$

$$I(F) = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\,dx\,dy$$

F in Parameterform $F = \left\{ X(u,v) : (u,v) \in D \right\}$ mit $X = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

$$I(F) = \iint_D \| \, X_u(u,v) \times X_v(u,v) \, \| \, du\,dv$$

Dabei sind:

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) \to \text{Flächennormalvektor}$$

$$X_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

3.2 Vektorfelder

Def. 3.4: Potentialfelder
Potentialfelder oder auch Gradientenfelder (konservative Vektorfelder) $V : G(x\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2 \text{ oder } 3}$, wenn es dazu ein Skalarfeld $P : G(x\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gibt mit:

$$v = \text{grad } P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Dabei stellt $P(X) = P(x, y, z) = c, \quad c \in \mathbb{R}$ die Potentialfläche dar. Jeder Vektor $v(a) = \text{grad } P(a)$ ist senkrecht auf die Potentialfläche.

Kriterium für Potentialfelder: (v : $G \to \mathbb{R}^{2 \text{ oder } 3}$)

1. G ist einfach zusammenhängend (keine Löcher)
2. v hat stetige partielle Ableitungen
3. Integrabilitäts Bedingung: $v_x - u_y = 0$ im $\mathbb{R}^2$, bzw. $w_y - v_z = u_z - w_x = v_x - u_y = 0$ im $\mathbb{R}^3$

$$\text{v}(X) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(x) \\ P_y(x) \\ P_z(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_y - v_z &= P_{zy} - P_{yz} = 0 \\ \longrightarrow u_z - w_x &= P_{xz} - P_{zx} = 0 \\ v_x - u_y &= P_{yx} - P_{xy} = 0 \end{aligned}$$

3.3 Kurvenintegrale

Def. 3.5: Kurvenintegrale
Existenzsatz:
Es sei ein Vektorfeld $v : G \to \mathbb{R}^{2/3}$.

$$\int_C v\, dx = \int_a^b v(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt$$

Satz: Kurvenintegrale auf Potentialfeldern

$$\int_c v\, dx = P(x(b)) - P(x(a))$$

Kurvenintegrale sind wegunabhängig. Bei geschlossenen Kurven ist $\oint v = 0$

Satz: Bestimmung von Potentialen
Weiß man, dass ein stetiges Vektorfeld v ein Potentialfeld ist, dann erhält man ein Potential P auf folgende Weise:

$$P(X) = \int_a^x v\, dy \quad \text{für} \quad x \in G$$

Def. 3.6: Exakte Differentialgleichung
$f(x,y) + g(x,y) \cdot y' = 0$ heißt exakt, wenn $\exists F : G \to \mathbb{R}$ und $F_x = f, \quad F_y = g$. Sprich F ist eine Stammfunktion von f und g. Lösung: es gilt $F(x, y(x)) = const$

$$g(a,b) \neq 0 \to y(a) = b$$

$$\Rightarrow F(x,y) = F(a,b)$$

3.4 Oberflächenintegrale

4 Altfragen von 12.10.2023

? Frage 1

Definieren Sie einen Vektorraum (Rechenregeln).

? Frage 2

Flächen- und Oberflächenintegrale einer Kugel in Polarkoordinaten

? Frage 3

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und herleiten der Paralellogramformel.

? Frage 4

Differentialgleichung

? Frage 5

Kreuzerlfragen zu Statistik

5 Altfragen 12.01.2024

? Frage 1

Es sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Finden sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -2$

$$EV(-2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$EV(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$EV(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

? Frage 2

Es sei $y'' + 9y = \cos 3x$ gegeben. Finden Sie die allgemeine Lösung. Weiters finden sie die Lösung mit den Anfangswerten $y(0) = 0; \quad y'(0) = 3$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_2 \cos(3x) + \left(C_1 + \frac{x}{6}\right) \sin(3x)$$

Mit den Anfangswerten: $y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$:

$$y(x) = \left(\frac{x}{6} + 1\right) \sin(3x)$$

? Frage 3

Es sind folgende Integrale (Gauß'sches Fehlerintegral) gegeben:

$$I(a) = \iint\limits_{\substack{-a \le x \le a \\ -a \le y \le a}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy, \quad J(a) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx, \quad K(a) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Zeigen Sie, dass: $J(a)^2 = I(a)$; $\qquad K(a) \le I(a) \le K\left(\sqrt{2}a\right)$; $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty} J(a)$

Es gilt der Satz:

$$\iint\limits_{\substack{a \le x \le b \\ c \le y \le d}} g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

Deshalb wird aus ...

Frage 4

$Z = f(x, y)$ ...???