Gerichtete Graphen

Nico Pistel

Diskrete Mathematik und Stochastik, 2019

Fachbereich Wirtschaft und Informationstechnik Westfälische Hochschule Bocholt



Outline

First Main Section

First Subsection

Second Subsection

Topologisches Sortieren

Beispiel: Topologisches Sortieren

Kahn's Algorithmus

Wege in Digraphen

Wege als transitiver Abschluss der Kantenrelation

Warshall's Algorithmus

Kürzeste Wege

Dijkstra's Algorithmus



First Main Section

First Slide Title

- My first point.
- My second point.



• First item.



- First item.
- Second item.



- First item.
- Second item.
- Third item.



- First item.
- Second item.
- Third item.
- Fourth item.



- First item.
- Second item.
- Third item.
- Fourth item.
- Fifth item.

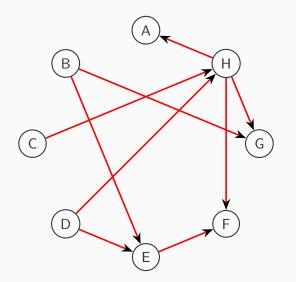


- First item.
- Second item.
- Third item.
- Fourth item.
- Fifth item. Extra text in the fifth item.



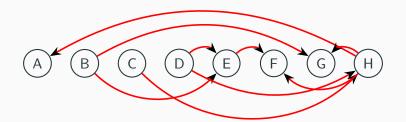
Topologisches Sortieren

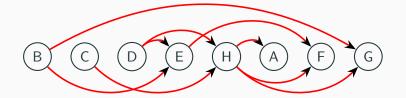
Beispiel: Topologisches Sortieren





Beispiel: Topologisches Sortieren



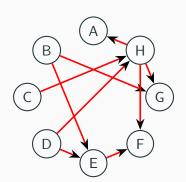




Kahn's Algorithmus

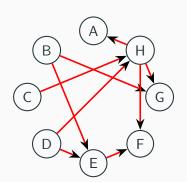
jo





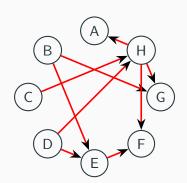
i	v	A(v)
	Α	
	B C	
	D	
	Ε	
	F	
	G	
	Н	





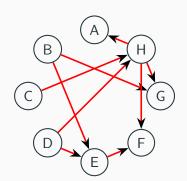
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	
	B C	
	D	
	Ε	
	F	
	F G	
	Н	





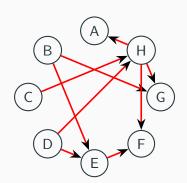
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	B C	
	D	
	Ε	
	F	
	G	
	Н	





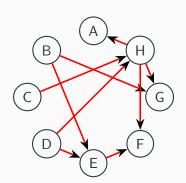
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	B C	Ø
	D	
	Ε	
	F	
	F G	
	Н	





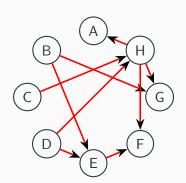
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	B C	Ø
	D	Ø
	Ε	
	F	
	G	
	Н	





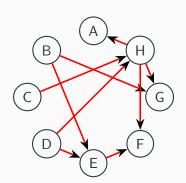
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	С	Ø
	D	Ø
	Ε	{B, D}
	F	
	G	
	Н	





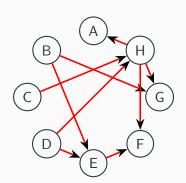
i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	C	Ø
	D	Ø
	Ε	{B, D}
	F	{E, H}
	G	
	Н	





i	v	A(v)	
	Α	{H}	
	В	Ø	
	C	Ø	
	D	Ø	
	Ε	$\{B,D\}$	
	F	$\{E,H\}$	
	G	$\{B,H\}$	
	Н		





i	v	A(v)	
	Α	{H}	
	В	Ø	
	C	Ø	
	D	Ø	
	Ε	$\{B,D\}$	
	F	$\{E,H\}$	
	G	$\{B,H\}$	
	Н	$\{C,D\}$	



i	v	A(v)
	Α	{H}
	В	Ø
	C	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{B,D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{B,H\}$
	Н	$\{C,D\}$



B			

i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
	C	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{B,D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{B,H\}$
	Н	$\{C,D\}$



			A
		1	E
			(
В			
\bigcirc			E (
			(

i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
	C	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,\mathsf D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{C,D\}$



(B Ì	
	ン	

i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
	С	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{C,D\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{C,D\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	C	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathcal{L},D\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,\mathsf D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathcal{L},D\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
3	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,\mathsf D\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathcal{L},D\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
	Ε	$\{\not\! B,\not\!\! D'\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{ \not\! B, \mathsf H \}$
	Н	$\{ \not \! \mathcal{C}, \not \! \mathcal{D}' \}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
3	D	Ø
	Е	$\{ \not \! B, \not \! D \}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{ \not\! B, H \}$
	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}'\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Е	$\{\mathcal{B},\mathcal{D}'\}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D \}$
	F	$\{\cancel{E}, H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathscr{C}, \mathscr{D}'\}$





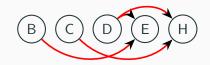
i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	С	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D \}$
	F	$\{\cancel{E},H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
	Н	$\{\mathcal{C},\mathcal{D}\}$





i	v	A(v)
	Α	{H}
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D \}$
	F	$\{\cancel{E}, H\}$
	G	$\{\not\! B,H\}$
5	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}\}$





i	v	A(v)
	Α	{ M }
1	В	Ø
2	С	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D' \}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\mathbb{B},\mathbb{H}\}$
5	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}'\}$





i	v	A(v)
	Α	{ M }
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{\cancel{\mathbb{B}},\cancel{\mathbb{D}}'\}$
	F	$\{ \cancel{E}, \cancel{H} \}$
	G	$\{ \mathcal{B}, \mathcal{H} \}$
5	Н	$\{\mathcal{C},\mathcal{D}\}$





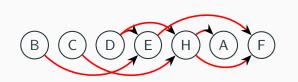
i	v	A(v)
6	Α	{ M }
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not \! B, \not \! D \}$
	F	$\{E,H\}$
	G	$\{\mathbb{B},\mathbb{H}\}$
5	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}'\}$





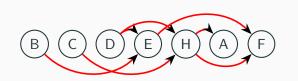
i	v	A(v)
6	Α	$\{H\}$
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Е	$\{\not\! B,\not\! D'\}$
	F	$\{E, H\}$
	G	$\{\mathbb{B},\mathbb{H}\}$
5	Н	$\{\mathscr{C}, \mathscr{D}\}$





		Ì
i	v	A(v)
6	Α	{ M }
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{\cancel{\mathbb{B}},\cancel{\mathbb{D}}'\}$
7	F	$\{ \cancel{E}, \cancel{H} \}$
	G	$\{ \cancel{\mathbb{B}}, \cancel{\mathbb{H}} \}$
5	Н	$\{\mathscr{C}, \mathscr{D}\}$





		1
i	v	A(v)
6	Α	$\{H\}$
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D \}$
7	F	$\{\cancel{E},\cancel{H}\}$
	G	$\{\mathbb{B},\mathbb{H}\}$
5	Н	$\{\mathscr{C}, \not\!\!\!D'\}$





i	v	A(v)
6	Α	$\{\mathbb{M}\}$
1	В	Ø
2	C	Ø
3	D	Ø
4	Ε	$\{ \not\! B, \not\!\! D' \}$
7	F	$\{ \cancel{E}, \cancel{H} \}$
8	G	$\{\mathcal{B},\mathcal{H}\}$
5	Н	$\{\mathcal{L},\mathcal{D}\}$



Wege in Digraphen

Wege in Digraphen

- Existenz von Wegen zwischen beliebigen Knoten
- ullet Adjazenzmatrix $\mathbf{M} \longrightarrow \mathsf{Erreichbarkeitsmatrix} \ \mathbf{M}^*$
- Kantenrelation $E \longrightarrow \text{transitiver Abschluss } E^*$



Wege als transitiver Abschluss der Kantenrelation

- Kantenrelation E: Menge von Wegen der Länge 1 zwischen Knoten
- Menge von Wegen der Länge 2 als Komposition von E mit sich selber:

$$E \circ E = \{ (v_1, v_2) \in V^2 | \exists u \in V : (v_1, u) \in E \land (u, v_2) \in E \}$$

- Menge von Wegen einer Länge k: $\underbrace{E \circ \cdots \circ E}_{k \text{ mal}}$
- Transitiver Abschluss als Vereinigung dieser Mengen:

$$E^* = E \cup E \circ E \cup \cdots \cup \underbrace{E \circ \cdots \circ E}_{n \text{ mal}}$$



Potenzieren der Adjazenzmatrix

- ullet Komposition von E als logisches Matrixprodukt der Adjazenzmatrix ${f M}$
- Weitere Komposition durch das Potenzieren von M
- Vereinigen der Mengen durch das logische oder der Matrizen
- Logisches oder zweier Matrizen wird komponentenweise gebildet
 - $\bullet \ (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \vee \mathbf{B}_{ij}$

Berechnung der Erreichbarkeitsmatrix \mathbf{M}^*

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^2 \vee \dots \vee \mathbf{M}^n$$



Beispiel: Potenzieren der Adjazenzmatrix

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} & A & \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & c & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & D & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^4 = \begin{bmatrix} & A & \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & D & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 1 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Warshall's Algorithmus

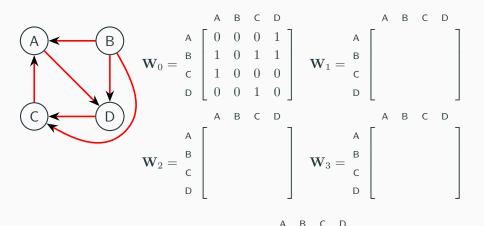
- Matrixmultiplikation ist aufwändig
 - Berechnen der Potenzen bei Graphen mit vielen Knoten ist problematisch
- ullet Warshall ermittelt ${f M}^*$ in Worst-Case $\Theta(n^3)$ Zeit
- Warshall's Algorithmus arbeitet In-Place
 - M wird iterativ in M* überführt
- ullet Warshall erzeugt Matrizen $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n$
 - Wobei $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}$ und $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}^*$
- $\mathbf{W}_k[i,j]=1 \Longleftrightarrow$ Es existiert ein Weg von v_i nach v_j , wobei alle Zwischenknoten $\in \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ sind



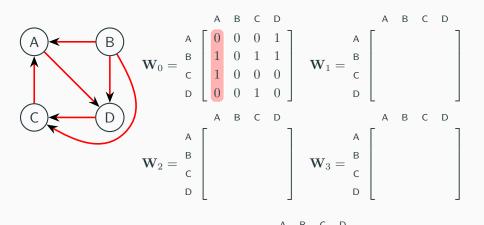
Pseudocode: Warshall's Algorithmus

Algorithm 1 Warshall's Algorithmus

```
1: function Warshall(M)
 2:
       W \leftarrow M
   for k=1 to n do
 3.
           for i = 1 to n do
 4:
              if W[i,k] then
 5:
                  for j = 1 to n do
 6:
                      W[i,j] \leftarrow W[i,j] \lor W[k,j]
 7:
                  end for
 8:
               end if
 9:
           end for
10:
       end for
11:
       return W
12:
13: end function
```

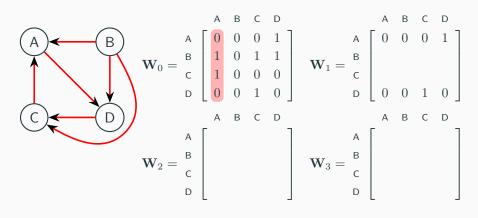


 $\mathbf{W}_4 =$



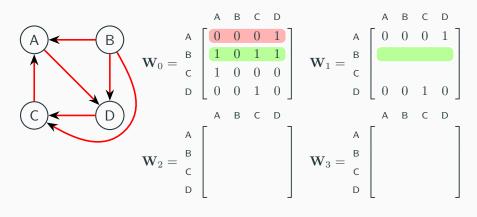
 $\mathbf{W}_4 =$





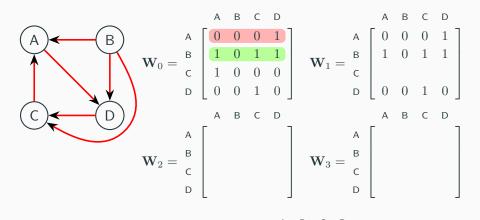
$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{c} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{D} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array} \right]$$





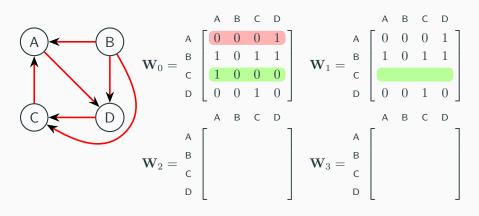
$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{c} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{D} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array} \right]$$





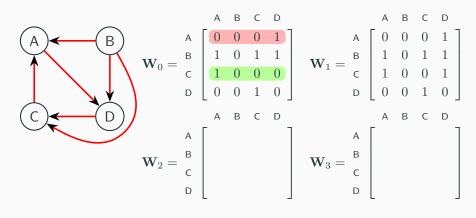
$$\mathbf{W}_4 = egin{array}{c} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{B} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array}$$





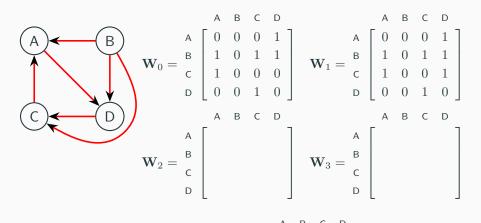
$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{c} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{D} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array} \right]$$





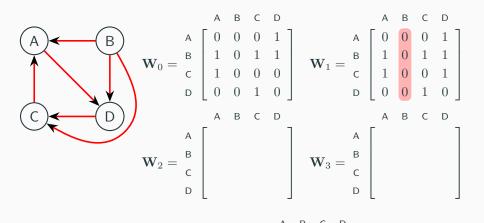
$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D \\ C & D & D \end{bmatrix}$$





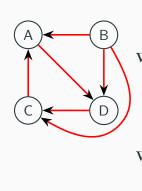
$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{C}$$







 $\mathbf{W}_4 = egin{array}{c} \mathsf{A} \ \mathsf{B} \ \mathsf{C} \ \mathsf{D} \end{array}$



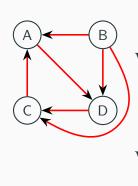
$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\ \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \\ \mathsf{D} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{D} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{D} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

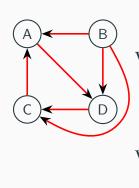




$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{c} \mathsf{A} \ \mathsf{B} \ \mathsf{C} \ \mathsf{D} \end{array}
ight]$$

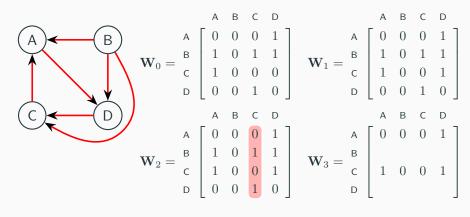




$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

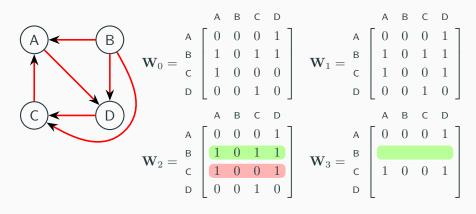
$$\mathbf{W}_4 = egin{array}{c} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{B} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array}$$





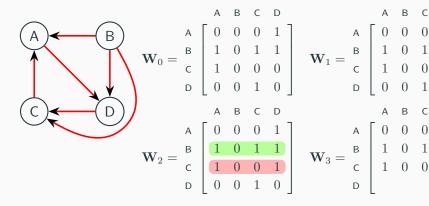
$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$





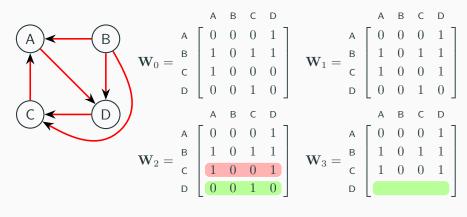
$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{cccccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array}
ight]$$





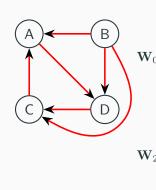
$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$





$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$



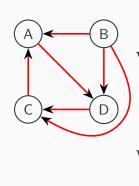


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$



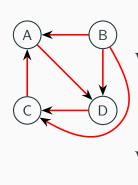


$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{B} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

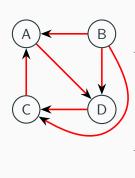




$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \left[egin{array}{ccccccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{D} \end{array}
ight]$$





$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

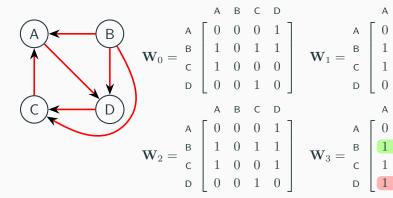
$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D \end{bmatrix}$$



$$W_2 = egin{array}{c|cccc} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{B} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{array}$$

$$\mathbf{W}_4 = egin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{B} & & & & \\ \mathsf{C} & & & & & \\ \mathsf{D} & & & & & \end{bmatrix}$$

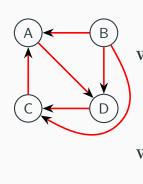




$$\mathbf{W}_4 = egin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{A} & & & \mathsf{I} & \mathsf{0} & \mathsf{1} & \mathsf{1} \\ \mathsf{C} & & & & & \\ \mathsf{D} & & & & & \end{bmatrix}$$



15



$$V_2 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

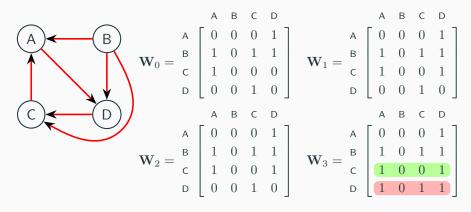
$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{4} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & D & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

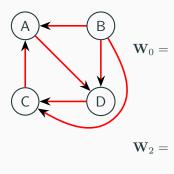


15



$$\mathbf{W}_{4} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ C & D & \end{bmatrix}$$



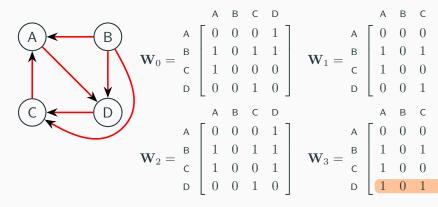


$$W_2 = egin{array}{c|cccc} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{array}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$$

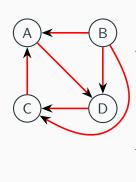
$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & D & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$





$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & D & \end{bmatrix}$$





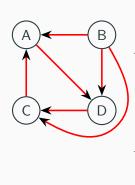
$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathsf{D} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{0} & \mathsf{0} & \mathsf{0} & \mathsf{1} \\ \mathsf{C} & \mathsf{1} & \mathsf{0} & \mathsf{1} & \mathsf{1} \\ \mathsf{1} & \mathsf{0} & \mathsf{0} & \mathsf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathsf{C} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Kürzeste Wege

Kürzeste Wege

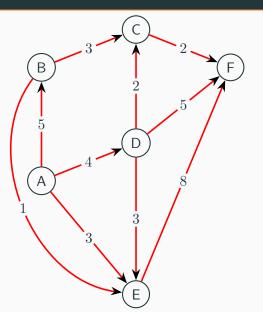
yo



Dijkstra's Algorithmus

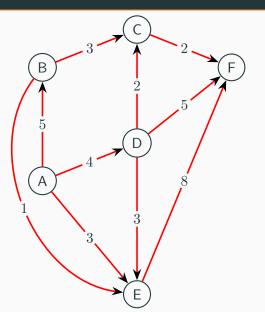
jawohl





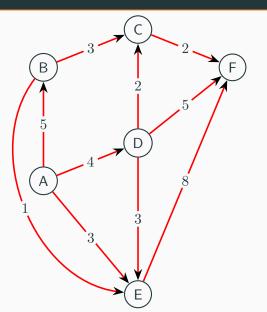
v	d(v)	p(v)
Α		
В		
C		
D		
Ε		
F		
	ı	





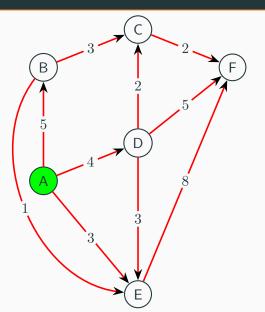
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В		
C		
D		
Ε		
F		





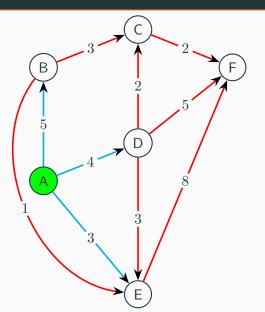
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	∞	Ø
C	∞	Ø
D	∞	Ø
Е	∞	Ø
F	∞	Ø





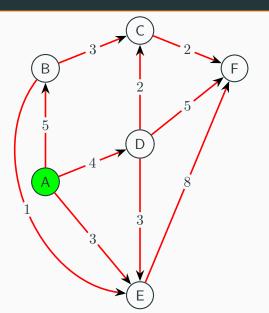
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	∞	Ø
C	∞	Ø
D	∞	Ø
Е	∞	Ø
F	∞	Ø





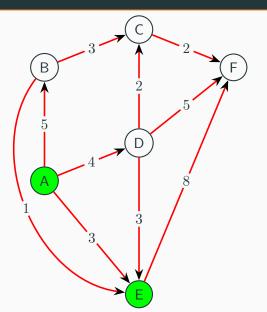
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	∞	Ø
C	∞	Ø
D	∞	Ø
Е	∞	Ø
F	∞	Ø





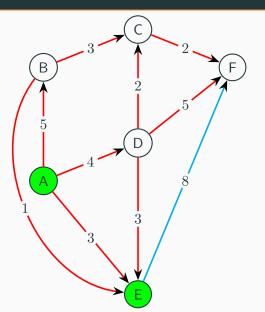
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	∞	Ø





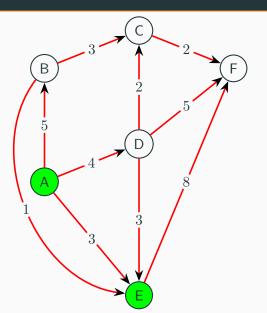
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	∞	Ø





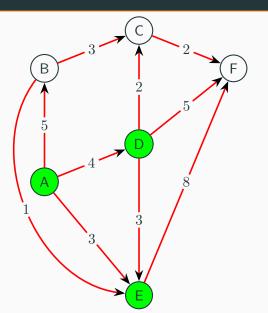
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	∞	Ø





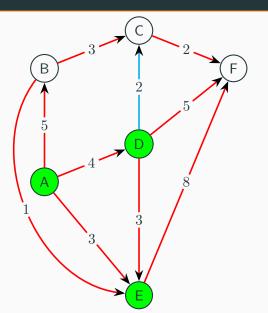
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	11	E





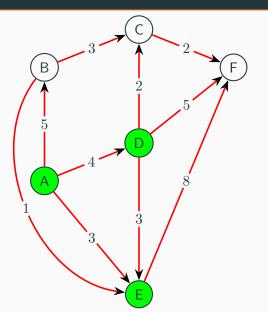
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	11	Е





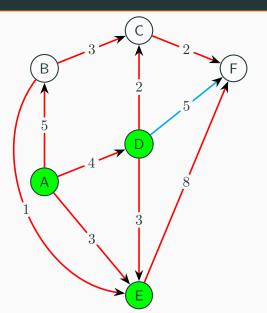
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	∞	Ø
D	4	Α
E	3	Α
F	11	Е





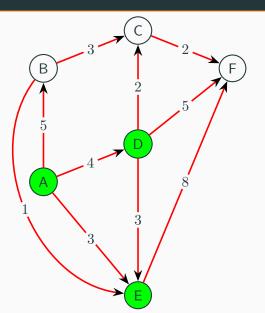
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	11	Е





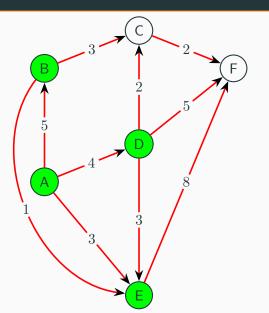
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	11	Е





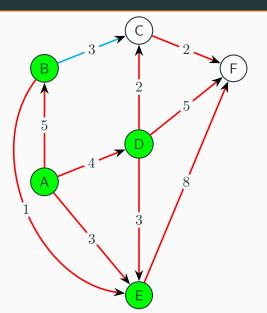
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





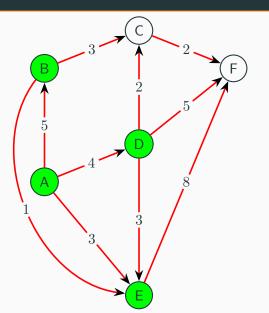
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





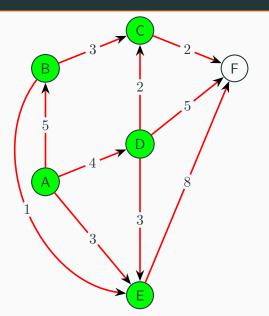
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





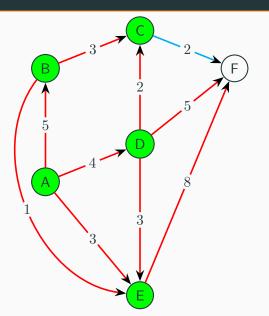
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





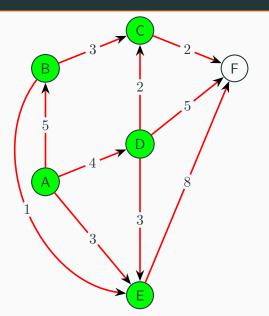
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





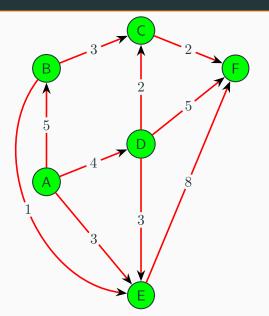
v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	9	D





v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	8	C





v	d(v)	p(v)
Α	0	Ø
В	5	Α
C	6	D
D	4	Α
E	3	Α
F	8	C



Blocks

Block Title

You can also highlight sections of your presentation in a block, with it's own title

Theorem

There are separate environments for theorems, examples, definitions, lemmas and proofs.

Lemma

$$\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = |E|$$

Proof.

Left as an exercise to the reader.

Example

Here is an example of an example block.



Summary

Summary

- The first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.
- Outlook
 - Something you haven't solved.
 - Something else you haven't solved.



Appendix

For Further Reading i



A. Author.

Handbook of Everything.

Some Press, 1990.



S. Someone.

On this and that.

Journal of This and That, 2(1):50-100, 2000.

