# Maßzahlen

## Erwartungswert und Varianz

Nico Pistel

Diskrete Mathematik und Stochastik, 2019

Fachbereich Wirtschaft und Informationstechnik
Westfälische Hochschule Bocholt

# Maßzahlen

- Charakterisieren die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
- Erwartungswert (Mittelwert) $\mu$
- Varianz $\sigma^2$
    - Standardabweichung $\sigma$
- Schiefe $\gamma$
    - Vgl. Lehrbuch

# Erwartungswert

# Erwartungswert

- Erwartungswert einer Zufallsvariablen entspricht dem arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung (deskriptive Statistik)
- Ausprägungen der Zufallsvariablen werden mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet und aufsummiert
  - Beim arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung geschieht dies mit den relativen Häufigkeiten

**Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen $X$**

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathrm{P}(X = x)$$

**Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen $X$**

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

# Erwartungswert

- Der Erwartungswert ist der Wert, den die Zufallsvariable $X$ im Durchschnitt annehmen wird
  - Bei häufiger Wiederholung des Zufallsexperiments
- Der Erwartungswert kann bei diskreten Zufallsvariablen Werte annehmen, die nicht im Wertebereich von $X$ enthalten sind
  - Er kann zwischen den Realisationen liegen
  - Vgl. fairer Würfel

**Erwartungswert einer (um $c$) symmetrischen Verteilung**

$$\forall a : f(c+a) = f(c-a) \Longrightarrow \mathbf{E}(X) = c$$

# Mathematische Erwartung

# Mathematische Erwartung

- Durch Komposition von $X$ mit einer reellen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich eine neue Zufallsvariable $Y := g(X)$ definieren
  - $\Omega \ni \omega \xmapsto{X(\cdot)} x \xmapsto{g(\cdot)} y = g(X(\omega))$
- $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X))$ wird dann als *mathematische Erwartung* bezeichnet

**Mathematische Erwartung für diskrete Zufallsvariablen $X$**

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\,\mathrm{P}(X = x)$$

**Mathematische Erwartung für stetige Zufallsvariablen $X$**

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

# Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für Zufallsvariable $X$, Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und reelle Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln
- $\mathbf{E}(c) = c$
- $$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(bX) &= b\mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(a + X) &= a + \mathbf{E}(X) \end{aligned}\right\} \mathbf{E}(a + bX) = a + b\mathbf{E}(X)$$
- $\mathbf{E}\Big(g(X) + h(X)\Big) = \mathbf{E}\Big(g(X)\Big) + \mathbf{E}\Big(h(X)\Big)$

## Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für (nicht notwendigermaßen stochastisch unabhängige) Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)\, \mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \Big( X(\omega) + Y(\omega) \Big)\, \mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathrm{P}(\{\omega\}) + Y(\omega)\, \mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathrm{P}(\{\omega\})}_{\mathbf{E}(X)} + \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\, \mathrm{P}(\{\omega\})}_{\mathbf{E}(Y)} \\
&= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}$$

# Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für **stochastisch unabhängige** Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X \cdot Y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathrm{P}(X = x \cap Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathrm{P}(X = x) \, \mathrm{P}(Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \Bigl( x \, \mathrm{P}(X = x) \underbrace{\sum_{y \in Y(\Omega)} y \, \mathrm{P}(Y = y)}_{const. \text{ bzgl. } x} \Bigr) \\
&= \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} y \, \mathrm{P}(Y = y) \right) \cdot \left( \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathrm{P}(X = x) \right) \\
&= \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}
$$

# Varianz

# Varianz

- Varianz einer Zufallsvariablen ist Maß für die Streuung um den Erwartungswert
- Quadratische Abweichungen der Ausprägungen der Zufallsvariablen zum Erwartungswert werden mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet und aufsummiert

**Varianz einer diskreten Zufallsvariable $X$**

$$\mathbf{Var}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 \mathrm{P}(X = x)$$

**Varianz einer stetigen Zufallsvariable $X$**

$$\mathbf{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 f(x)dx$$

# Varianz

- Varianz einer Zufallsvariable $X$ entspricht dem Erwartungswert der Zufallsvariable $Z = (\mu - X)^2$ mit $\mu = \mathbf{E}(X)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \mathbf{E}\Big((\mu - X)^2\Big) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (\mu - x)^2 \, \mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 \, \mathrm{P}(X = x) \\
&=: \mathbf{Var}(X)
\end{aligned}
$$

# Varianz

- Die Varianz wird auch mit $\sigma^2$ bezeichnet
- Die Quadratwurzel der Varianz $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ heißt Standardabweichung
- Die Varianz ist nicht-negativ $\sigma^2 \geq 0$
    - Ist der Wert der Zufallsvariablen $X$ nicht konstant, so ist die Varianz sogar stets positiv $\sigma^2 > 0$

# Rechenregeln für die Varianz

- Mit der Definition der Varianz bezüglich des Erwartungswertes der quadrierten Abweichungen folgt der **Verschiebungssatz**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}\Big((X-\mu)^2\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big(X^2 - 2\mu X + \mu^2\Big) \\
&= \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(-2\mu X) + \mathbf{E}(\mu^2) \\
&= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu \underbrace{\mathbf{E}(X)}_{=\mu} + \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2
\end{aligned}
$$

# Rechenregeln für die Varianz

- Die Varianz ist invariant gegenüber Nullpunktverschiebungen
- Eine lineare Transformation der Zufallsvariable wirkt sich folgendermaßen auf die Varianz aus:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(a+bX) &= \mathbf{E}\Big((a+bX)^2\Big) - \Big(\mathbf{E}(a+bX)\Big)^2 \\
&= \mathbf{E}\Big(a^2 + 2abX + b^2X^2\Big) - \Big(a+b\mu\Big)^2 \\
&= a^2 + 2ab\mu + b^2\mathbf{E}(X^2) - \Big(a^2 + 2ab\mu + b^2\mu^2\Big) \\
&= a^2 + 2ab\mu + b^2\mathbf{E}(X^2) - a^2 - 2ab\mu - b^2\mu^2 \\
&= b^2\mathbf{E}(X^2) - b^2\mu^2 \\
&= b^2 \underbrace{\Big(\mathbf{E}(X^2) - \mu^2\Big)}_{=\mathbf{Var}(X)} \\
&= b^2\mathbf{Var}(X)
\end{aligned}$$

# Lineare Transformation einer Zufallsvariablen

- Die lineare Transformation $a + bX$ bewirkt
  - Eine Skalierung der Verteilung von $|b|$
    - Streckung für $|b| > 1$
    - Stauchung für $|b| < 1$
    - Außerdem Spiegelung an der y-Achse für $b < 0$
  - Eine Verschiebung der Verteilung von $a$
    - Nach rechts für $a > 0$
    - Nach links für $a < 0$

# Standardisierung einer Zufallsvariablen

- Eine standardisierte Zufallsvariable $Z$ ergibt sich aus einer linearen Transformation von $X$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mit $\mu = \mathbf{E}(X)$ und $\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$
- Entspricht einer Translation von $-\mu$ (der Erwartungswert wird in den Ursprung geschoben) und einer anschließenden Skalierung von $\frac{1}{\sigma}$
- $Z$ hat den Erwartungswert $0$ und die Varianz $1$
- $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathbf{E}(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\Big(\mathbf{E}(X) - \mu\Big) = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$
- $\mathbf{Var}(Z) = \mathbf{Var}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \mathbf{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$