Maßzahlen

Erwartungswert und Varianz

Nico Pistel

Diskrete Mathematik und Stochastik, 2019

Fachbereich Wirtschaft und Informationstechnik
Westfälische Hochschule Bocholt

Maßzahlen

- Charakterisieren die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
- Erwartungswert (Mittelwert) μ
- Varianz σ^2
  - Standardabweichung σ
- Schiefe γ
  - Vgl. Lehrbuch

Erwartungswert

Erwartungswert

- Erwartungswert einer Zufallsvariablen entspricht dem arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung (deskriptive Statistik)
- Ausprägungen der Zufallsvariablen werden mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet und aufsummiert
  - Beim arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung geschieht dies mit den relativen Häufigkeiten

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathrm{P}(X = x)$$

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen X

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert

- Der Erwartungswert ist der Wert, den die Zufallsvariable X im Durchschnitt annehmen wird
  - Bei häufiger Wiederholung des Zufallsexperiments
- Der Erwartungswert kann bei diskreten Zufallsvariablen Werte annehmen, die nicht im Wertebereich von X enthalten sind
  - Er kann zwischen den Realisationen liegen
  - Vgl. fairer Würfel

Erwartungswert einer (um c) symmetrischen Verteilung

$$\forall a : f(c+a) = f(c-a) \Longrightarrow \mathbf{E}(X) = c$$

Mathematische Erwartung

Mathematische Erwartung

- Durch Komposition von X mit einer reellen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich eine neue Zufallsvariable $Y := g(X)$ definieren
  - $\Omega \ni \omega \xmapsto{X(\cdot)} x \xmapsto{g(\cdot)} y = g(X(\omega))$
- $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X))$ wird dann als *mathematische Erwartung* bezeichnet

Mathematische Erwartung für diskrete Zufallsvariablen X

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\,\mathrm{P}(X = x)$$

Mathematische Erwartung für stetige Zufallsvariablen X

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für Zufallsvariable X, Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und reelle Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln
- $\mathbf{E}(c) = c$
- $$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(bX) &= b\mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(a + X) &= a + \mathbf{E}(X) \end{aligned}\right\} \mathbf{E}(a + bX) = a + b\mathbf{E}(X)$$
- $\mathbf{E}\Big(g(X) + h(X)\Big) = \mathbf{E}\Big(g(X)\Big) + \mathbf{E}\Big(h(X)\Big)$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für (nicht notwendigermaßen stochastisch unabhängige) Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \Big(X(\omega)+Y(\omega)\Big)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) + Y(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) \\
&= \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\})}_{\mathbf{E}(X)} + \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\})}_{\mathbf{E}(Y)} \\
&= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Für **stochastisch unabhängige** Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X \cdot Y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathrm{P}(X = x \cap Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathrm{P}(X = x) \, \mathrm{P}(Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x \, \mathrm{P}(X = x) \underbrace{\sum_{y \in Y(\Omega)} y \, \mathrm{P}(Y = y)}_{const. \text{ bzgl. } x} \right) \\
&= \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \, \mathrm{P}(Y = y) \right) \cdot \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathrm{P}(X = x) \right) \\
&= \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}
$$

Varianz

Varianz

- Varianz einer Zufallsvariablen ist Maß für die Streuung um den Erwartungswert
- Quadratische Abweichungen der Ausprägungen der Zufallsvariablen zum Erwartungswert werden mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet und aufsummiert

Varianz einer diskreten Zufallsvariable X

$$\mathbf{Var}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 \mathrm{P}(X = x)$$

Varianz einer stetigen Zufallsvariable X

$$\mathbf{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 f(x) dx$$

Varianz

- Varianz einer Zufallsvariable X entspricht dem Erwartungswert der Zufallsvariable $Z = (\mu - X)^2$ mit $\mu = \mathbf{E}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \mathbf{E}\Big((\mu - X)^2\Big) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (\mu - x)^2 \, \mathrm{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\mathbf{E}(X) - x\Big)^2 \, \mathrm{P}(X = x) \\
&=: \mathbf{Var}(X)
\end{aligned}$$

Varianz

- Die Varianz wird auch mit σ^2 bezeichnet
- Die Quadratwurzel der Varianz $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ heißt Standardabweichung
- Die Varianz ist nicht-negativ $\sigma^2 \geq 0$
  - Ist der Wert der Zufallsvariablen X nicht konstant, so ist die Varianz sogar stets positiv $\sigma^2 > 0$

Rechenregeln für die Varianz

- Mit der Definition der Varianz bezüglich des Erwartungswertes der quadrierten Abweichungen folgt der **Verschiebungssatz**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}\Big((X-\mu)^2\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big(X^2 - 2\mu X + \mu^2\Big) \\
&= \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(-2\mu X) + \mathbf{E}(\mu^2) \\
&= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu \underbrace{\mathbf{E}(X)}_{=\mu} + \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2
\end{aligned}
$$

Rechenregeln für die Varianz

- Die Varianz ist invariant gegenüber Nullpunktverschiebungen
- Eine lineare Transformation der Zufallsvariable wirkt sich folgendermaßen auf die Varianz aus:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}(a+bX) &= \mathbf{E}\Big((a+bX)^2\Big) - \Big(\mathbf{E}(a+bX)\Big)^2 \\
&= \mathbf{E}\Big(a^2+2abX+b^2X^2\Big) - \Big(a+b\mu\Big)^2 \\
&= a^2+2ab\mu+b^2\mathbf{E}(X^2) - \Big(a^2+2ab\mu+b^2\mu^2\Big) \\
&= a^2+2ab\mu+b^2\mathbf{E}(X^2) - a^2 - 2ab\mu - b^2\mu^2 \\
&= b^2\mathbf{E}(X^2) - b^2\mu^2 \\
&= b^2\underbrace{\Big(\mathbf{E}(X^2)-\mu^2\Big)}_{=\mathbf{Var}(X)} \\
&= b^2\mathbf{Var}(X)
\end{aligned}
$$