Modelle für stochastische Prozesse

Markov-Ketten

Nico Pistel

Diskrete Mathematik und Stochastik, 2019

Fachbereich Wirtschaft und Informationstechnik
Westfälische Hochschule Bocholt

Stochastische Prozesse

- Stochastischer Prozess beschreibt **Zustände** eines Systems über die Zeit
  - Zeitliche Abfolge von Zufallsvariablen $X_0, X_1, X_2, \ldots$
- Zustandsmenge $I \subseteq \mathbb{R}$, Zeitbereich $T \subseteq \mathbb{R}$
- In unserem Fall beide diskret (und manchmal auch endlich)
  - Im Weiteren: $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Jeder Zeitpunkt $t \in T$ wird durch eine Zufallsvariable $X_t : \Omega \to I$ beschrieben

- Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess, welcher die *Markov-Eigenschaft* besitzt

Markov-Eigenschaft

$$\mathrm{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} \ldots) = \mathrm{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

Homogene Markov-Kette

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) =: p_{ij} = const. \ (\forall n \geq 1)$$

- Matrix $\mathbf{P} = (p_{ij})$ heißt Übergangsmatrix
- Zeilensumme ist stets 1 (stochastische Matrix)
- Darstellung als Übergangsgraph mit allen möglichen Zuständen als Knoten des Graphen und den **positiven** Übergangswahrscheinlichkeiten als gerichtete und gewichtete Kanten
    - Kante (i, j) bekommt Gewicht p_{ij}

Markov-Ketten

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen X_n werden als Zeilenvektoren $\mathbf{p}_n$ notiert
- $\mathbf{p}_n = \left[\mathrm{P}(X_n = i), i \in I\right]$
- Die Startverteilung $\mathbf{p}_0$ beschreibt die Verteilung des Systems am Anfang oder gibt einen festen Startpunkt des Systems an
  - Im Falle eines festen Startpunktes sind alle Wahrscheinlichkeiten von $\mathbf{p}_0$ gleich 0 außer die des Startzustandes, welche gleich 1 ist
- Da es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt sind alle Komponenten des Vektors stets nicht-negativ und summieren zu 1

Markov-Ketten

- Die Wahrscheinlichkeit einer endlichen Zustandsfolge lässt sich mit dem Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten berechnen und durch die Markov-Eigenschaft vereinfachen
- $\mathrm{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathrm{P}(X_0 = i_0) \cdot p_{i_0 i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$
- Ein Verlauf einer Markov-Kette für ein Ergebnis $\omega \in \Omega$ heißt Pfad der Markov-Kette: $(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots)$

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X_n ergibt sich aus der Verteilung der Zufallsvariable X_{n-1} mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Rechenregel für Markov-Ketten

$$\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(X_{n-1} = i) \cdot \mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

- Zusammengefasst als Matrixprodukt: $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{P}$
- Damit folgt, dass $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-m}\mathbf{P}^m$
- Die Matrix $\mathbf{P}^m$ ist die m-Schritt-Übergangsmatrix und enthält Einträge der Form $\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-m} = i)$ (wieder unabhängig von n)

Markov-Ketten

- Die Zustandsmenge lässt sich in Äquivalenzklassen zerlegen
  - Disjunkt und füllen die Zustandsmenge komplett aus (Partition)
- Zwei Zustände gehören genau dann zur selben Klasse, wenn diese miteinander Verbunden sind ($i \leftrightsquigarrow j$)
  - Also $i = j$ oder im Falle von $i \neq j$ der Zustand j in endlich vielen Schritten mit positiver Wahrscheinlichkeit von Zustand i aus erreichbar ist und umgekehrt
- Eine Markov-Kette heißt *irreduzibel* sofern alle Zustände zur selben Klasse gehören

- Ein Zustand heißt *periodisch* mit *Periode* d wenn dieser von sich selber aus nur in Vielfachen einer natürlichen Zahl $d \geq 2$ erreichbar ist
- Ein Zustand heißt *aperiodisch* wenn die Periode $d = 1$ ist
- Es lässt sich zeigen, dass $i \leftrightsquigarrow j \Longrightarrow d(i) = d(j)$
  - Die Begriffe lassen sich damit als Klassenattribute auffassen
  - Für irreduzible Markov-Ketten betreffen die Begriffe somit die ganze Kette
- Sind alle Klassen aperiodisch, so gilt die ganze Markov-Kette als aperiodisch

- Die Gleichgewichtsverteilung (stationäre Verteilung) π einer Markov-Kette erfüllt die Gleichung $\pi\mathbf{P} = \pi$
- Fragen bezüglich der Gleichgewichtsverteilung:
  - Existiert eine gültige Gleichgewichtsverteilung für eine gegebene Markov-Kette?
  - Ist diese eindeutig?
  - Konvergieren andere Startverteilungen einer Markov-Kette langfristig gegen diese Gleichgewichtsverteilung?

- Lösen des linearen Gleichungssystems $\pi\mathbf{P} = \pi$ mit den Nebenbedingungen $\forall j \in I : \pi_j \geq 0$ und $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$
- Daraus folgt das Schnittprinzip (für eine Teilmenge $K \subseteq I$ der Zustandsmenge)
  - Übergang von K nach $I \setminus K$ und von $I \setminus K$ nach K ist im Gleichgewicht gleich wahrscheinlich

Schnittprinzip

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in I \setminus K} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in K} \sum_{j \in I \setminus K} \pi_j p_{ji}$$

- Zerteilt ein Schnitt zwischen den Zuständen i und j die Markov-Kette in zwei (disjunkte) Teile, dann gilt die *lokale Gleichgewichtsbedingung*: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$
- Gilt dies für alle i, j, dann ist die Gleichgewichtsbedingung äquivalent zu der lokalen Gleichgewichtsbedingung (für alle i, j)

- Ist die Markov-Katte irreduzibel und aperiodisch (und endlich) dann konvergiert die Kette unabhängig von der Startverteilung gegen die (eindeutige) stationäre Verteilung π