

# Modelle für stochastische Prozesse

## Markov-Ketten

---

Nico Pistel

Diskrete Mathematik und Stochastik, 2019

Fachbereich Wirtschaft und Informationstechnik

Westfälische Hochschule Bocholt

# Stochastische Prozesse

- Stochastischer Prozess beschreibt **Zustände** eines Systems über die Zeit
  - Zeitliche Abfolge von Zufallsvariablen  $X_0, X_1, X_2, \dots$
- Zustandsmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$ , Zeitbereich  $T \subseteq \mathbb{R}$
- In unserem Fall beide diskret (und manchmal auch endlich)
  - Im Weiteren:  $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Jeder Zeitpunkt  $t \in T$  wird durch eine Zufallsvariable  $X_t : \Omega \rightarrow I$  beschrieben

# Markov-Ketten

- Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess, welcher die *Markov-Eigenschaft* besitzt

## Markov-Eigenschaft

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2}, \dots) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

## Homogene Markov-Kette

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) =: p_{ij} = \text{const. } (\forall n \geq 1)$$

# Markov-Ketten

---

- Matrix  $\mathbf{P} = (p_{ij})$  heißt Übergangsmatrix
- Zeilensumme ist stets 1 (stochastische Matrix)
- Darstellung als Übergangsgraph mit allen möglichen Zuständen als Knoten des Graphen und den **positiven** Übergangswahrscheinlichkeiten als gerichtete und gewichtete Kanten
  - Kante  $(i, j)$  bekommt Gewicht  $p_{ij}$

# Markov-Ketten

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen  $X_n$  werden als Zeilenvektoren  $\mathbf{p}_n$  notiert
- $\mathbf{p}_n = [\Pr(X_n = i), i \in I]$
- Die Startverteilung  $\mathbf{p}_0$  beschreibt die Verteilung des Systems am Anfang oder gibt einen festen Startpunkt des Systems an
  - Im Falle eines festen Startpunktes sind alle Wahrscheinlichkeiten von  $\mathbf{p}_0$  gleich 0 außer die des Startzustandes, welche gleich 1 ist
- Da es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt sind alle Komponenten des Vektors stets nicht-negativ und summieren zu 1



# Markov-Ketten

---

- Die Wahrscheinlichkeit einer endlichen Zustandsfolge lässt sich mit dem Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten berechnen und durch die Markov-Eigenschaft vereinfachen
- $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \cdot p_{i_0 i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$
- Ein Verlauf einer Markov-Kette für ein Ergebnis  $\omega \in \Omega$  heißt Pfad der Markov-Kette:  $(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots)$

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable  $X_n$  ergibt sich aus der Verteilung der Zufallsvariable  $X_{n-1}$  mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

## Rechenregel für Markov-Ketten

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in I} P(X_{n-1} = i) \cdot P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

- Zusammengefasst als Matrixprodukt:  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{P}$
- Damit folgt, dass  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-m} \mathbf{P}^m$
- Die Matrix  $\mathbf{P}^m$  ist die  $m$ -Schritt-Übergangsmatrix und enthält Einträge der Form  $P(X_n = j | X_{n-m} = i)$  (wieder unabhängig von  $n$ )



# Markov-Ketten

---

- Die Zustandsmenge lässt sich in Äquivalenzklassen zerlegen
  - Disjunkt und füllen die Zustandsmenge komplett aus  
(Partition)
- Zwei Zustände gehören genau dann zur selben Klasse, wenn diese miteinander verbunden sind ( $i \leftrightarrow j$ )
  - Also  $i = j$  oder im Falle von  $i \neq j$  der Zustand  $j$  in endlich vielen Schritten mit positiver Wahrscheinlichkeit von Zustand  $i$  aus erreichbar ist und umgekehrt
- Eine Markov-Kette heißt *irreduzibel* sofern alle Zustände zur selben Klasse gehören

- Ein Zustand heißt *periodisch* mit *Periode*  $d$  wenn dieser von sich selber aus nur in Vielfachen einer natürlichen Zahl  $d \geq 2$  erreichbar ist
- Ein Zustand heißt *aperiodisch* wenn die Periode  $d = 1$  ist
- Es lässt sich zeigen, dass  $i \leftrightarrow j \implies d(i) = d(j)$ 
  - Die Begriffe lassen sich damit als Klassenattribute auffassen
  - Für irreduzible Markov-Ketten betreffen die Begriffe somit die ganze Kette
- Sind alle Klassen aperiodisch, so gilt die ganze Markov-Kette als aperiodisch

# Markov-Ketten

---

- Die Gleichgewichtsverteilung (stationäre Verteilung)  $\pi$  einer Markov-Kette erfüllt die Gleichung  $\pi \mathbf{P} = \pi$
- Fragen bezüglich der Gleichgewichtsverteilung:
  - Existiert eine gültige Gleichgewichtsverteilung für eine gegebene Markov-Kette?
  - Ist diese eindeutig?
  - Konvergieren andere Startverteilungen einer Markov-Kette langfristig gegen diese Gleichgewichtsverteilung?

- Lösen des linearen Gleichungssystems  $\pi \mathbf{P} = \pi$  mit den Nebenbedingungen  $\forall j \in I : \pi_j \geq 0$  und  $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$
- Daraus folgt das Schnittprinzip (für eine Teilmenge  $K \subseteq I$  der Zustandsmenge)
  - Übergang von  $K$  nach  $I \setminus K$  und von  $I \setminus K$  nach  $K$  ist im Gleichgewicht gleich wahrscheinlich

## Schnittprinzip

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in I \setminus K} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in K} \sum_{j \in I \setminus K} \pi_j p_{ji}$$



- Zerteilt ein Schnitt zwischen den Zuständen  $i$  und  $j$  die Markov-Kette in zwei (disjunkte) Teile, dann gilt die *lokale Gleichgewichtsbedingung*:  $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$
- Gilt dies für alle  $i, j$ , dann ist die Gleichgewichtsbedingung äquivalent zu der lokalen Gleichgewichtsbedingung

# Markov-Ketten

---

- Ist die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch (und endlich) dann konvergiert die Kette unabhängig von der Startverteilung gegen die (eindeutige) stationäre Verteilung  $\pi$