5.1 Sea Z una variable aleatoria N(0,1). Calcular:

(a) p(-0.85 < Z < 2).

$$P(-0.85 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -0.85) = 0.97725 - 0.19766 = 0.77959$$

(b) p(-1.5 <Z < 0).

$$P(-1.5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -1.5) = 0.5 - 0.06681 = 0.43319$$

(c) p(Z < 1.23).

$$P(Z < 1.23) = 0.89065$$

(d) p(Z > -1.75).

$$P(Z > -1.75) = 1 - P(Z < -1.75) = 1 - 0.04006 = 0.95994$$

(e) p(Z >2.25).

$$P(Z > 2.25) = 1 - P(Z < 2.25) = 1 - 0.98778 = 0.01222$$

5.2 Sea Z una variable aleatoria N(0,1). Calcular z en los siguientes casos:

(a) p(Z < z) = 0.9357.

$$P(Z < z) = 0.9357 => z = 1.52$$

(b) p(Z > z) = 0.0222.

$$P(Z > z) = 0.0222 => P(Z < z) = 1 - 0.0222 = 0.9778 => z = 2.01$$

(c) p(Z < z) = 0.0668.

$$P(Z < z) = 0.0668 => z = -1.5$$

(d) p(Z > z) = 0.9940.

$$P(Z > z) = 0.994 => P(Z < z) = 1 - 0.994 = 0.006 => z = -2.51$$

5.3 Sea X una variable aleatoria N(2,2). Calcular:

(a) p(x ≤ 3).

$$X \sim N(2,2)$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{2}$$
$$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-2}{2}\right) = P(Z < 0.5) = 0.69146$$

(b) a si p(x < a) = 0.9332.

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-2}{2}\right) = 0.9332$$
$$\frac{a-2}{2} = 1.5 \;\; => \;\; a = 1.5 * 2 + 2 = 5$$

c) a si p(x > a) = 0.9332.

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-2}{2}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-2}{2}\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$
$$\frac{a-2}{2} = -1.5 => \;\; a = -1.5 * 2 + 2 = -1$$

5.4 La resistencia a la ruptura de una cuerda de diámetro especificado se considera una variable aleatoria distribuida normalmente con μ = 100 y σ = 4 (en libras). Calcular la probabilidad de que:

(a) la resistencia difiera de 100 libras a lo sumo en 3/2 σ

$$X: "Resistencia\ a\ la\ ruptura" \qquad\qquad X \sim N(100,4)$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-100}{4}$$
$$P(94 < X < 106) = P\left(\frac{94-100}{4} < Z < \frac{106-100}{4}\right) = P(-1.5 < Z < 1.5)$$
$$P(-1.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) = 0.93319 - 0.06681 = 0.86638$$

(b) la resistencia sea superior a 110 libras.

$$P(X > 110) = 1 - P(X < 110) = 1 - P\left(Z < \frac{110-100}{4}\right) = 1 - P(Z < 2.5) =$$
$$= 1 - 0.99379 = 0.00621$$

5.5 Una empresa vinculada a la industria automotriz realiza un estudio del cual se concluye que la cantidad de km. recorridos por los autos de una ciudad tiene una distribución normal con media 35000 km. y desvío estándar 10000 km. Si en esa ciudad se elige al azar un auto determinar:

(a) la probabilidad de que haya recorrido más de 47800 km.

X: "*Cantidad de kilómetros recorridos*" $\qquad X \sim N(35000, 10000)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-35000}{10000}$$

$$P(X > 47800) = P\left(Z > \frac{47800-35000}{10000}\right) = 1 - P(Z < 1.28) = 1 - 0.89973 = 0.10027$$

(b) la probabilidad de que haya recorrido entre 30000 km. y 42500 km.

$$P(30000 < X < 425000) = P\left(\frac{30000-35000}{10000} < Z < \frac{42500-35000}{10000}\right) =$$

$$= P(-0.5 < Z < 0.75) = P(Z < 0.75) - P(Z < -0.5) = 0.77337 - 0.30854 = 0.46483$$

(c) la cantidad de km. recorridos que es superada por el 1% de los autos.

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-35000}{10000}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-35000}{10000}\right) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$\frac{a-35000}{10000} = 2.33 \Rightarrow a = 2.33 * 10000 + 35000 = 58300$$

5.6 La cantidad de petróleo consumida diariamente por una empresa industrial presenta una distribución sensiblemente normal con media de 420 litros y desvío 40 litros. Hallar la probabilidad de que en un día elegido al azar el consumo supere los 500 litros.

X: "*Cantidad de petroleo consumida*" $\qquad X \sim N(420, 40)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-420}{40}$$

$$P(X > 500) = 1 - P(X < 500) = 1 - P\left(Z < \frac{500-420}{40}\right) = 1 - P(Z < 2) =$$

$$= 1 - 0.97725 = 0.02275$$

5.7 Se sabe que la cantidad de lluvia anual que cae en cierta región es una variable aleatoria distribuida normalmente con media 295 mm y desvío 25 mm.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de lluvia anual supere los 310mm?

X: "$Cantidad\ mm\ de\ lluvia$" $\quad X \sim N(295, 25)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-295}{25}$$

$$P(X > 310) = 1 - P(X < 310) = 1 - P\left(Z < \frac{310-295}{25}\right) = 1 - P(Z < 0.6) =$$
$$= 1 - 0.72575 = 0.27425$$

(b) ¿Cuál es la cantidad de lluvia que es superada el 5 % de las veces?

$$P(X > a) = 0.05 => P(X < a) = 1 - P(X > a) = 1 - 0.05 = 0.95$$
$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-295}{25}\right) = 0.95$$
$$\frac{a-295}{25} = 1.65 => a = 1.65 * 25 + 295 = 336.25$$

(c) De todos los años computados se toman 5 al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en 3 de ellos la cantidad de lluvia sea inferior a 280 mm?

$$P(X < 280) = P\left(Z < \frac{280-295}{25}\right) = P(Z < -0.6) = 0.27425$$

W: "N° de años que llueve menos de 280 mm" $\quad W \sim Bi(5, 0.27425)$

$$P(W = 3) = C_{5,3} * 0.27425^3 * 0.72575^2 \cong 10 * 0.021 * 0.53 = 0.1113$$

5.8 La longitud de cierta variedad de plantas es una variable aleatoria distribuida aproximadamente normal con varianza 81 cm^2. Sabiendo que el 58.71% de la población tiene una longitud inferior a los 32.09 cm.

(a) Calcular μ.

$$\sigma = \sqrt{Varianza} = \sqrt{81} = 9$$

X: "$Longitud\ de\ la\ planta$" $\quad X \sim N(\mu, 9)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$P(X < 32.09) = P\left(Z < \frac{32.09-\mu}{9}\right) = 0.5871$$
$$\frac{32.09-\mu}{9} = 0.22 => \mu = -0.22 * 9 + 32.09 = -1.98 + 32.09 = 30.11$$

(b) ¿Qué porcentaje tiene una longitud mayor que 42.8 cm?

$$P(X > 42.8) = 1 - P(X < 42.8) = 1 - P\left(Z < \frac{42.8 - 30.11}{9}\right) = 1 - P(Z < 1.41) =$$
$$1 - 0.92073 = 0.07927$$

5.9 Una empresa tiene 3 sucursales: A, B y C. Desea cerrar una de ellas. Para ello tendrá en cuenta el volumen de ventas diarias considerando aceptable un volumen de ventas no inferior a U$ 4500. La variable volumen de ventas diarias sigue una distribución aproximadamente normal con los siguientes datos:

	A	B	C
Promedio de ventas	U$7200	U$8200	U$6800
Desvío estándar	U$1080	U$2500	U$980

¿Cuál conviene cerrar?

$A: \text{"}Ganancia\ sucursal\ A\text{"} \qquad A \sim N(7200, 1080)$
$$Z = \frac{A - \mu}{\sigma} = \frac{A - 7200}{1080}$$
$$P(A < 4500) = P\left(Z < \frac{4500 - 7200}{1080}\right) = P(Z < -2.5) = 0.00621$$
$B: \text{"}Ganancia\ sucursal\ B\text{"} \qquad B \sim N(8200, 2500)$
$$Z = \frac{B - \mu}{\sigma} = \frac{B - 8200}{2500}$$
$$P(B < 4500) = P\left(Z < \frac{4500 - 8200}{2500}\right) = P(Z < -1.48) = 0.06944$$
$C: \text{"}Ganancia\ sucursal\ C\text{"} \qquad C \sim N(6800, 980)$
$$Z = \frac{C - \mu}{\sigma} = \frac{C - 6800}{980}$$
$$P(C < 4500) = P\left(Z < \frac{4500 - 6800}{980}\right) = P(Z < -2.35) = 0.00964$$

Le conviene cerrar la sucursal B ya que tiene mayor probabilidad de ganar menos de U$4500.

5.10 El desvío estándar tóxico de las unidades de jarabe producidas por un laboratorio se distribuye normalmente con media 0.18 gr. y varianza 0.0009gr. Determinar en una unidad de jarabe:

(a) la probabilidad de que el contenido tóxico supere los 0.1425 gr.

$$\sigma = \sqrt{0.0009} = 0.03$$
$X: \text{"}Gramos\ de\ tóxico\text{"} \qquad X \sim N(0.18, 0.03)$
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 0.18}{0.03}$$
$$P(X > 0.1425) = 1 - P(X < 0.1425) = 1 - P\left(Z < \frac{0.1425 - 0.18}{0.03}\right) = 1 - P(Z < -1.25)$$
$$P(X > 0.1425) = 1 - 0.10565 = 0.89435$$

(b) el contenido tóxico se encuentre entre 0.15 gr. y 0.195 gr.

$$P(0.15 < X < 0.195) = P(X < 0.195) - P(X < 0.15) =$$
$$= P\left(Z < \frac{0.195 - 0.18}{0.03}\right) - P\left(Z < \frac{0.15 - 0.18}{0.03}\right) = P(Z < 0.5) - P(Z < -1) =$$
$$= 0.69146 - 0.15866 = 0.5328$$

(c) la cantidad de contenido tóxico que es superada por el 90 % de las unidades producidas.

$$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - P\left(Z < \frac{a - 0.18}{0.03}\right) = 1 - 0.9 = 0.1$$
$$\frac{a - 0.18}{0.03} = -1.28 => a = -1.28 * 0.03 + 0.18 = 0.1416$$

5.11 Sea X una variable aleatoria distribuida normalmente. Si se sabe que P (X < 140) = 0.8413 y P(X > 80) = 0.9773. Calcular:

(a) la media y el desvío.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$P(X < 140) = P\left(Z < \frac{140 - \mu}{\sigma}\right) = 0.8413 => \frac{140 - \mu}{\sigma} = 1 => \mu = 140 - \sigma$$
$$P(X > 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - P\left(Z < \frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.9773 = 0.0227$$
$$\frac{80 - \mu}{\sigma} = -2 => \mu = 80 + 2\sigma => 80 + 2\sigma = 140 - \sigma => 2\sigma + \sigma = 140 - 80$$
$$3\sigma = 60 => \sigma = \frac{60}{3} = 20 \quad => \quad \mu = 140 - 20 = 120$$

(b) P (90 < X < 130).

$$P(90 < X < 130) = P(X < 130) - P(X < 90) =$$
$$= P\left(Z < \frac{130 - 120}{20}\right) - P\left(Z < \frac{90 - 120}{20}\right) = P(Z < 0.5) - P(Z < -1.5) =$$
$$= 0.69146 - 0.06681 = 0.62465$$

5.12 El contenido de ciertos envases tiene distribución normal, se sabe que el 12.30 % tiene un peso superior a 1370 gr. y que el 12.30 % tiene un peso inferior a 1270 gr.

(a) Determine el promedio y el desvío estándar del contenido de los envases.

X: "*Gramos en el envase*"

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$P(X < 1270) = P\left(Z < \frac{1270-\mu}{\sigma}\right) = 0.123 => \frac{1270-\mu}{\sigma} = -1.16$$

$$\mu = 1270 + 1.16\sigma$$

$$P(X > 1370) = 1 - P(X < 1370) = 1 - P\left(Z < \frac{1370-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.123 = 0.877$$

$$\frac{1370-\mu}{\sigma} = 1.16 => \mu = 1370 - 1.16\sigma => 1370 - 1.16\sigma = 1270 + 1.16\sigma$$

$$1.16\sigma + 1.16\sigma = 1370 - 1270 => 2.32\sigma = 100 => \sigma = \frac{100}{2.32} \cong 43.1$$

$$\mu = 1370 - 1.16\sigma = 1370 - 1.16 * 43.1 \cong 1370 - 50 => \mu = 1320$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un envase pese más de 1400 gr?

$$P(X > 1400) = 1 - P(X < 1400) = 1 - P\left(Z < \frac{1400-1320}{43.1}\right) = 1 - P(Z < 1.86)$$

$$P(X > 1400) = 1 - 0.96856 = 0.03144$$

5.13 El diámetro de un eje sigue una distribución normal con media μ y desvío σ. Se sabe que el 30 % de los ejes tienen un diámetro inferior a 105,6 mm; mientras que el 10% tienen un diámetro superior a 106,7 mm. Encuentre la media y el desvío estándar.

Encuentre la probabilidad de hallar un eje con un diámetro inferior a 106 mm.

5.14 Sean X, Y dos variables aleatorias independientes, tales que X:N(12; 3) Y:N(10; 2). Se pide que encuentre la distribución de las siguientes variables aleatorias: W = X + Y ; R = X - Y y G = 4 X - 3 Y.

$$W = X + Y => W \sim N\left(\mu_x + \mu_y, \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}\right) => W \sim N\left(12 + 10, \sqrt{3^2 + 2^2}\right)$$

$$W \sim N(22, 3.6)$$

$$R = X - Y => R \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}\right) => R \sim N\left(12 - 10, \sqrt{3^2 + 2^2}\right)$$

$$R \sim N(2, 3.6)$$

$$G = 4X - 3Y => G \sim N\left(4\mu_x - 3\mu_y, \sqrt{4^2(\sigma_x)^2 + 3^2(\sigma_y)^2}\right)$$

$$G \sim N\left(4 * 12 - 3 * 10, \sqrt{4^2 * 3^2 + 3^2 * 2^2}\right) => G \sim N\left(48 - 30, \sqrt{144 + 36}\right)$$

$$G \sim N(18, 13.42)$$

5.15 Se tienen 10 variables aleatorias normales con media 45.6 y desvío estándar 2.9 para cada una de ellas. Encuentre la distribución del promedio de las 10 variables aleatorias.

$$X \sim N(45.6, 2.9)$$
$$\mu = E(X)$$
$$E(\bar{X}) = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 + \mathrm{X}_4 + \mathrm{X}_5 + \mathrm{X}_6 + \mathrm{X}_7 + \mathrm{X}_8 + \mathrm{X}_9 + \mathrm{X}_{10}}{10}\right) =$$
$$= \frac{10 * E(X)}{10} \; \big(ya\ que\ E(\mathrm{X}_1) = E(\mathrm{X}_2) = \cdots = E(\mathrm{X}_{10})\big) => E(\bar{X}) = 45.6 = \mu_{\bar{X}}$$
$$V(\bar{X}) = \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 + \mathrm{X}_4 + \mathrm{X}_5 + \mathrm{X}_6 + \mathrm{X}_7 + \mathrm{X}_8 + \mathrm{X}_9 + \mathrm{X}_{10}}{10}\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_2) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_3) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_4) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_5) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_6) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_7) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_8) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_9) + \mathrm{V}(\mathrm{X}_{10})}{10^2}$$
$$Como\ \mathrm{V}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_2) = \cdots = \mathrm{V}(\mathrm{X}_{10}) => \; V(\bar{X}) = \frac{10 * \mathrm{V}(\mathrm{X})}{100} = \frac{2.9^2}{10}$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{2.9^2}{10}} = \frac{2.9}{\sqrt{10}}$$
$$\bar{X} \sim N\left(45.6, \frac{2.9}{\sqrt{10}}\right)$$

5.16 Se sabe que el promedio de 25 piezas metálicas es N(1008; 28) encuentre la distribución de cada de esas piezas metálicas. Asuma que todas ellas tienen la misma distribución.

$$X \sim N(1008, 28)$$
$$E(\bar{X}) = \frac{25 * E(X)}{25} = 1008 = \mu_{\bar{X}}$$
$$V(\bar{X}) = \frac{25 * \mathrm{V}(\mathrm{X})}{25^2} = \frac{28^2}{25}$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{28^2}{25}} = \frac{28}{\sqrt{25}}$$
$$\bar{X} \sim N\left(1008, \frac{28}{\sqrt{25}}\right)$$

5.17 Una máquina produce cerrojos con 10 % de defectuosos. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 400 cerrojos sean defectuosos:

(a) menos de 30.

X:N° de cerrojos defectuosos
$X \sim Bi(400, 0.1)$
$P(X < 30) = P(X \leq 29) = P(-0.5 < W < 29.5) = P(W < 29.5) - P(W < -0.5)$
$\mu = n * p = 400 * 0.1 = 40 \quad \sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{400 * 0.1 * 0.9} = \sqrt{36} = 6$
$W \sim N(40, 6)$
$$P(W < 29.5) - P(W < -0.5) = P\left(Z < \frac{29.5 - 40}{6}\right) - P\left(Z < \frac{-0.5 - 40}{6}\right) =$$
$$= P(Z < -1.75) - P(Z < -6.75) = 0.04006 - 0 = 0.04006$$

(b) entre 30 y 50.

$$P(30 < X < 50) = P(31 \leq X \leq 49) = P(30.5 < W < 49.5) =$$
$$= P(W < 49.5) - P(W < 30.5) = P\left(Z < \frac{49.5 - 40}{6}\right) - P\left(Z < \frac{30.5 - 40}{6}\right) =$$
$$= P(Z < 1.58) - P(Z < -1.58) = 0.94295 - 0.05705 = 0.8859$$

(c) 55 o más.

$$P(X \geq 55) = 1 - P(X \leq 54) = 1 - P(W < 54.5) = 1 - P\left(Z < \frac{54.5 - 40}{6}\right) =$$
$$= 1 - P(Z < 2.42) = 1 - 0.99224 = 0.00776$$

5.18 Aproxime los datos del ejercicio 3.7 por una distribución normal y compare con los resultados hallados en dicho ejercicio.

$X: N° \ de \ tornillos \ defectuosos$
$X \sim Bi(15, 0.05)$
$P(X \leq 4) = P(-0.5 < W < 4.5) = P(W < 4.5) - P(W < -0.5)$
$\mu = n * p = 15 * 0.05 = 0.75 \quad \sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{15 * 0.05 * 0.95} = \sqrt{0.7125} \cong 0.844$
$W \sim N(0.75, 0.844)$
$$P(W < 4.5) - P(W < -0.5) = P\left(Z < \frac{4.5 - 0.75}{0.844}\right) - P\left(Z < \frac{-0.5 - 0.75}{0.844}\right) =$$
$$= P(Z < 4.44) - P(Z < -1.48) = 1 - 0.06944 = 0.93056$$