Variables aleatorias

Experimento: Se lanza dos veces una moneda ideal

$$E = \{ \underset{2}{(C,C)}, \overset{0{,}25}{\underset{1}{(C,X)}}, \overset{0{,}25}{\underset{1}{(X,C)}}, \underset{0}{(X,X)} \}$$

X: "N° DE CARAS"

X
0 CARAS
1 CARA
2 CARAS

$$P(X_2/X_1) = P(X_2)$$

$$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

X_i	0	1	2	
$P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25	= 1

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$$

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

$$0{,}25 + P(X=1) + 0{,}25 = 1 \Rightarrow \boxed{P(X=1) = 1 - (0{,}25 + 0{,}25) = 0{,}5}$$

Esperanza (o valor medio, o valor esperado, o promedio):
Es el valor de mi variable que espero obtener si repito mi experimento muuuuchas veces.

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \cdot P(X=x_i) \right)}$$

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 = 0 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1 \Rightarrow E(X) = 1 \text{ CARAS}$$

Se realiza el mismo experimento, pero con una moneda cargada, donde la probabilidad de cara es el triple que la de cruz. Plantear la tabla de las probabilidades para la variable Y = "N° de cruces"

$$\begin{cases} P(C) = 3 \cdot P(X) \\ P(C) + P(X) = 1 \end{cases}$$

$$\overbrace{3 \cdot P(X)}^{P(C)} + P(X) = 1 \Rightarrow 4 \cdot P(X) = 1 \Rightarrow P(X) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(C) = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625$$

$$P(C_1 \cap X_2) + P(X_1 \cap C_2) =$$

$$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$$

$P(C) = 0{,}75$

$P(X) = 0{,}25$

Y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	0,5625	0,375	0,0625

0,99999910
7627109
1 − 0,2372891 = 0,7627109
1

$$P(Y=1) = 1 - (P(Y=0) + P(Y=2)) = 1 - (0{,}5625 + 0{,}0625) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}5625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}0625 = 0 + 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5 \Rightarrow E(Y) = 0{,}5$$

$V(X) = \sigma_x^2$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot P(X = x_i)) = 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}25 = 0 + 0{,}5 + 1 = 1{,}5$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

X: "Nº DE CARAS"

$V(X) = 0{,}5$ CARAS^2

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071$ CARAS

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,5625	0,375	0,0625

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 0{,}625 - 0{,}5^2 = 0{,}625 - 0{,}25 = 0{,}375 \Rightarrow V(Y) = 0{,}375$

$E(Y^2) = 0^2 \cdot 0{,}5625 + 1^2 \cdot 0{,}375 + 2^2 \cdot 0{,}0625 = 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}0625 = 0{,}375 + 0{,}25 = 0{,}625$

$\sigma_y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0{,}375} = 0{,}61237\ldots \cong 0{,}6124$

Propiedades de la esperanza:

Tengo dos variables aletorias X e Y que son independientes y dos valores constantes a y b.

$Z_1 = X + Y \qquad E(Z_1) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$Z_2 = a \cdot X \pm bY \qquad E(Z_2) = E(a \cdot X \pm bY) = E(a \cdot X) \pm E(b \cdot Y) = a \cdot E(X) \pm b \cdot E(Y)$

$E(a) = a$

Propiedades de la varianza:

$V(Z_1) = V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$V(Z_2) = V(a \cdot X \pm bY) = V(a \cdot X) + V(b \cdot Y) = a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y)$

$V(a) = 0$

$Z_3 = 5 \cdot X - 3$

$E(Z_3) = E(5 \cdot X - 3) = E(5 \cdot X) - E(3) = 5 \cdot E(X) - 3$

$V(Z_3) = V(5 \cdot X - 3) = V(5 \cdot X) + V(3) = 5^2 \cdot V(X) + 0 = 5^2 \cdot V(X)$