Eventos Independientes

Concepto: Los eventos A y B se dicen independientes si, y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teorema: Suponga que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, entonces A y B independientes implica que ellos no son excluyentes y A , B mutuamente excluyentes implica que ellos no son independientes.

Ejemplos

1) Si dos dados son lanzados una vez y sean los siguientes eventos
$A = \{\text{la suma es } 7\}$
$B = \{\text{los dos dados muestran el mismo número}\}$
$C = \{\text{el primer dado es par}\}$

¿Son A y B , A y C independientes?

$$A = \{(1,6)\,;(2,5)\,;(3,4)\,;(4,3)\,;(5,2)\,;(6,1)\} \qquad P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,1)\,;(2,2)\,;(3,3)\,;(4,4)\,;(5,5)\,;(6,6)\} \qquad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{cccccc} (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\} \qquad P(C) = \frac{1}{2}$$

$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ A y B no son independientes

$A \cap C = \{(2,5)\,;(4,3)\,;(6,1)\} \qquad \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{12}$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ A y C son independientes

2) Dada la siguiente tabla

	con cáncer(C)	sin cáncer(C^c)
fumador(F)	0,5	0,2
no fumador(F^c)	0,1	0,2

¿Son F y C eventos independientes?

$P(F \cap C) = 0,5 \qquad P(F) = 0,7 \qquad P(C) = 0,6$

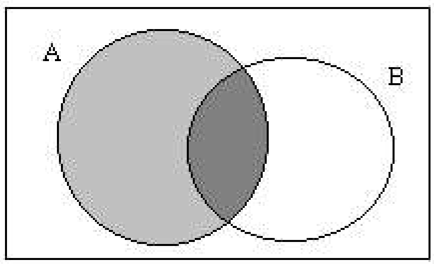
$P(F) \cdot P(C) = (0,7) \cdot (0,6) = 0,42$

$P(F \cap C) \neq P(F) \cdot P(C)$ F y C no son independientes

3) Sabiendo que A y B son eventos independientes, demuestre que:

a) A y B^c son independientes
b) A^c y B son independientes

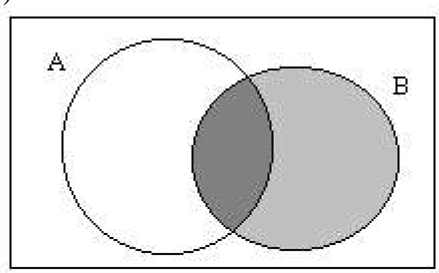
a) A y B independientes si, y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



$A = (A \cap B) \cup (A - B)$
$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A - B)]$
$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$
$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^c)$
$P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B^c)$
$P(A)[1 - P(B)] = P(A \cap B^c)$
$P(A) \cdot P(B^c) = P(A \cap B^c)$

Por lo tanto, si A y B son independientes, entonces A y B^c también lo son.

b)



$B = (A \cap B) \cup (B - A)$
$P(B) = P[(A \cap B) \cup (B - A)]$
$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$
$P(B) = P(A) \cdot P(B) + P(B \cap A^c)$
$P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B \cap A^c)$
$P(B)[1 - P(A)] = P(B \cap A^c)$
$P(B) \cdot P(A^c) = P(B \cap A^c)$

Por lo tanto, si A y B son independientes, entonces B y A^c también lo son.