

Unidad N°2: Probabilidades

Elementos de Probabilidades

Los primeros estudios de probabilidad fueron motivados por la posibilidad de acierto o fracaso en los juegos de azar. La probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse sucesos aleatorios, es decir, operaciones cuyo resultado no puede ser predicho de antemano con seguridad. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda.

Enfoques de probabilidad

1) **Experimento aleatorio o experimento**: cualquiera operación cuyo resultado no puede ser predicho de anterioridad con seguridad.

Ejemplo:

- a) lanzamiento de una moneda
- b) lanzamiento de un dado
- c) extracción de una carta de una baraja de 52 cartas

2) **Espacio muestral**: es el conjunto de todos los posibles resultados asociados a un experimento. Su símbolo es Ω . Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos o infinito numerable, entonces se dice que éste es *discreto* y si el espacio muestral tiene como elementos todos los puntos de algún intervalo real, entonces se dice que éste es *continuo*.

Ejemplo:

- a) experimento: lanzamiento de un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- b) experimento: tiempo de duración de un tubo fluorescente

$$\Omega = \{t, t \geq 0\}$$

3) **Evento o suceso**: es cualquier subconjunto de un espacio muestral. Todo subconjunto es un evento, en particular Ω mismo es un evento, llamado **suceso seguro** y el conjunto vacío, \emptyset , también es un evento, llamado **suceso imposible**.

Ejemplo:

$$A = \{\text{obtener un número impar al lanzar un dado}\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{\text{obtener al menos una cara al lanzar una moneda dos veces}\}$$

$$B = \{cs, sc, cc\}$$

Como los eventos son subconjuntos de Ω , entonces es posible aplicar la teoría de conjuntos para obtener nuevos eventos.

Si A y B son eventos, entonces también lo son $A \cup B$, $A \cap B$, A^c

$A \cup B$ ocurre si, y sólo si sólo ocurre A o sólo ocurre B u ocurren A y B a la vez.

$A \cap B$ ocurre si, y sólo si ocurre A y ocurre B a la vez.

A^c ocurre si, y sólo si no ocurre A.

En todo experimento aleatorio Ω se considera el conjunto universal, por lo tanto, todos los complementos son tomados respecto a Ω .

Ejemplo

Considere el experimento lanzamiento de dos dados.

a) Determine el espacio muestral

b) Obtenga los siguientes eventos:

$A = \{\text{la suma de los dos números es un múltiplo de dos}\}$

$B = \{\text{ambos dados muestran la misma cara}\}$

$C = \{\text{los dos números son primos}\}$

$D = \{\text{la resta de los dos números es divisible por tres}\}$

c) Encuentre, si es posible, $A \cup B$, $C \cap D$, B^c , $B^c \cap C^c$

$$a) \quad \Omega = \left\langle \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$b) \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) & (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ (3,1) & (3,3) & (3,5) & (4,2) & (4,4) & (4,6) \\ (5,1) & (5,3) & (5,5) & (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \{ (1,1) \quad (2,2) \quad (3,3) \quad (4,4) \quad (5,5) \quad (6,6) \}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} (2,2) & (2,3) & (2,5) \\ (3,2) & (3,3) & (3,5) \\ (5,2) & (5,3) & (5,5) \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \{ (1,4) \quad (2,5) \quad (3,6) \quad (4,1) \quad (5,2) \quad (6,3) \}$$

c)

$$A \cup B = A$$

$$C \cap D = \{ (2,5) \quad (5,2) \}$$

$$B^c = \{(x,y)/x \neq y\}$$

$$B^c \cap C^c = \left(\begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (2,1) \\ (2,4) & (2,6) & (3,1) & (3,4) & (3,6) & (4,1) \\ (4,2) & (4,3) & (4,5) & (4,6) & (5,1) & (5,4) \\ (5,6) & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) \end{pmatrix} \right)$$

Concepto de probabilidad en espacio finito equiprobable

Si Ω es un espacio muestral con n elementos, entonces la probabilidad de un evento A es el cociente $\frac{m}{n}$, donde m es el número de elementos de A

$$\text{Esto se denota: } P(A) = \frac{m}{n}$$

Ejemplo :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\text{lanzamiento de un dado}\} & \Rightarrow \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{\text{aparece un múltiplo de tres}\} & \Rightarrow A &= \{3, 6\}\end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son *mutuamente excluyentes o disjuntos* si no pueden ocurrir juntos, es decir $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned}\text{Por ejemplo, } \Omega &= \{\text{lanzamiento de un dado}\} & \Rightarrow \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{\text{aparece un múltiplo de tres}\} & \Rightarrow A &= \{3, 6\} \\ B &= \{\text{aparece un múltiplo de cuatro}\} & \Rightarrow B &= \{4\}\end{aligned}$$

Luego, A y B son eventos disjuntos, porque $A \cap B = \emptyset$

Axiomas de probabilidad

Sea Ω un espacio muestral y sean A y B dos eventos cualesquiera de este:

$$\textbf{Axioma1} : P(\Omega) = 1$$

$$\textbf{Axioma2} : P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$$

$$\textbf{Axioma3} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

$$\text{En general, } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_i) \text{ con}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

De estos tres axiomas fundamentales es posible determinar algunas propiedades y consecuencias:

Teorema1 :

$$\text{a) } P(\emptyset) = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega \cup \emptyset \\ P(\Omega) &= P(\Omega \cup \emptyset) \\ P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) & \text{pues } \Omega \cap \emptyset = \emptyset \\ 1 &= 1 + 0 \\ 0 &= P(\emptyset)\end{aligned}$$

b) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Demostración

$$\Omega = A \cup A^c$$

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c)$$

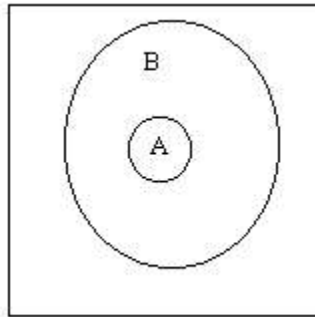
$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$1 - P(A) = P(A^c)$$

pues $A \cap A^c = \emptyset$

c) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$



Demostración

$$B = A \cup (B - A)$$

$$P(B) = P[A \cup (B - A)]$$

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

$$\text{Luego, } P(A) \leq P(B)$$

pues $A \cap (B - A) = \emptyset$

Corolario

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Demostración

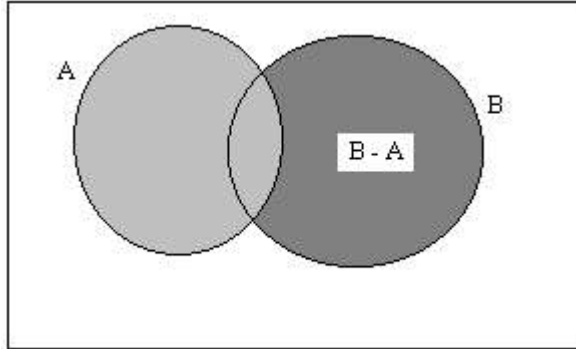
$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Teorema 2 :

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Demostración

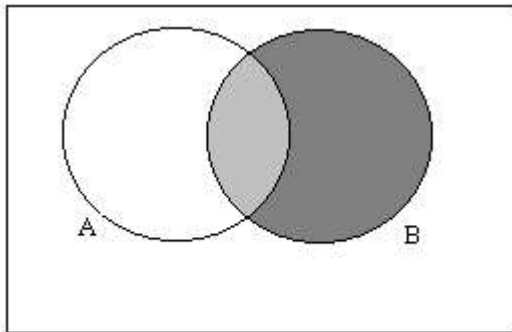
$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$P(A \cup B) = P[A \cup (B - A)]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad \text{pues } A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B - A) \quad (1)$$

Por otro lado



$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad \text{pues } (A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$$

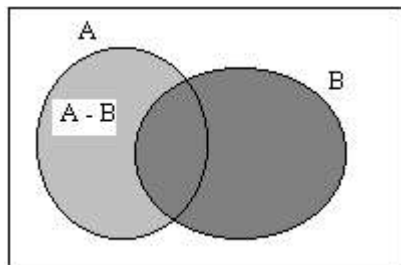
$$P(B) - P(A \cap B) = P(B - A) \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$b) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



Demostración

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

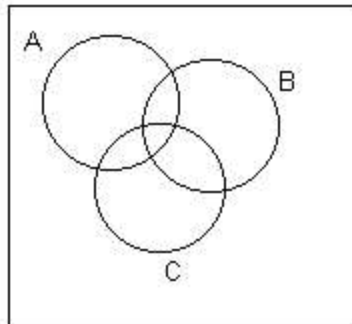
$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B) \quad \text{pues } (A - B) \cap B = \emptyset$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$$

Corolario

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Demostración

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C]$$

$$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Teorema3 :

Sea Ω un espacio muestral y A un evento de Ω , $A \subseteq \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_k) \\ &= \sum_{i=1}^k P(A_i) \end{aligned} \quad \text{Donde } A_i \text{ son eventos disjuntos cuya unión es } A$$

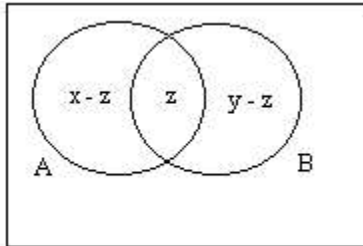
Demostración

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k \\ P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) \\ P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_k) \quad \text{pues } A_i \cap A_j = \emptyset \\ P(A) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) \end{aligned}$$

Ejemplos

1) Suponga que A y B son eventos para los cuales $P(A) = x$; $P(B) = y$ y $P(A \cap B) = z$.
Determine:

- a) $P(A^c \cup B^c)$
- b) $P(A^c \cup B)$
- c) $P(A^c \cap B)$
- d) $P(A^c \cap B^c)$



Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A^c \cup B^c) &= P[(A \cap B)^c] \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A^c \cup B) &= P[(A - B)^c] \\ &= 1 - P(A - B) \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - x + z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(A^c \cap B) &= P(B - A) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= y - z \end{aligned}$$

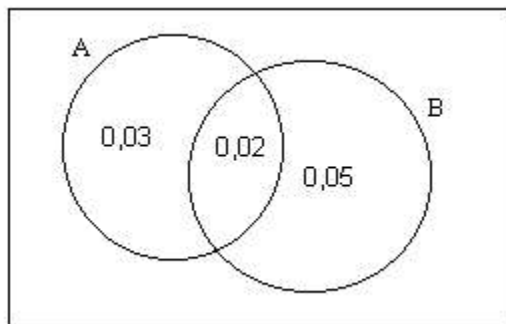
$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(A^c \cap B^c) &= P[(A \cup B)^c] \\
 &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
 &= 1 - x - y + z
 \end{aligned}$$

2) De la producción de tornillos de cierta magnitud resulta que el 5 % de ellos no tienen el largo especificado, el 7 % no tienen el diámetro especificado y el 2 % tiene ambos defectos. Se elige un tornillo al azar de la producción de estas magnitudes. ¿Cuál es la probabilidad que:

- a) tenga al menos uno de los dos defectos?.
- b) tenga sólo el defecto del largo?
- c) tenga sólo uno de los dos defectos?
- d) no tenga defectos?

Solución

$A = \{\text{tornillos con defecto del largo}\}$
 $B = \{\text{tornillos con defecto del diámetro}\}$



$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 &= 0,05 + 0,07 - 0,02 \\
 &= 0,10
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que tenga al menos uno de los dos defectos es de 0,10

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
 &= 0,05 - 0,02 \\
 &= 0,03
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que tenga sólo el defecto del largo es de 0,03

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(A - B) + P(B - A) &= (0,03) + [P(B) - P(A \cap B)] \\
 &= 0,03 + 0,07 - 0,02 \\
 &= 0,08
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que tenga sólo uno de los dos defectos es de 0,08

$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(A \cup B)^c &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - 0,10 \\
 &= 0,90
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que no tenga defectos es de 0,90