Variables Aleatorias(v.a)

Concepto: una variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Se usarán letras mayúsculas para denotar a una v.a y letras minúsculas para denotar los valores que ella adquiere.

Ejemplos:

1) Se sacan dos pelotas en sucesión, sin reemplazo, de una urna que contiene 4 pelotas rojas y 3 negras. Los resultados posibles y los valores x de la v.a X, donde X es el número de pelotas rojas son:

Espacio muestral	x
RR	2
RN	1
NR	1
NN	0

2) El encargado de un almacén le devuelve tres cascos de seguridad, seleccionados aleatoriamente, a tres obreros del taller, quienes ya se lo habían probado previamente. Suponiendo que el orden de los obreros Pérez, González y Muñoz es el correcto para recibir su casco original, señale los posibles órdenes en que los tres obreros reciben un casco y encuentre los valors m de la v.a M que representa el número de asociaciones correctas.

Espacio muestral	m
PGM	3
PMG	1
MPG	0
MGP	1
GPM	1
GMP	0

En los ejemplos anteriores, el espacio muestral tiene un número finito de elementos.

Conceptos:

1) Si en espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una secuencia interminable con tantos elementos como números naturales existen, entonces se llama ***espacio muestral discreto***.

Los dos ejemplos anteriores corresponden a espacio muestral discreto.

2) Si en espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos de un segmento de línea, entonces se llama ***espacio muestral continuo***.

Por ejemplo: tiempo necesario para ejecutar una reacción química.

Una v.a se llama ***v.a discreta*** si se puede contar su conjunto de resultados posibles.Una v.a se llama ***v.a continua*** si se puede tomar en una escala continua.

En la mayoría de los problemas prácticos, las v.a continuas representan ***datos medidos*** , tales como alturas, pesos, temperatursa, distancias o períodos de vida; mientras que las v.a discretas representan ***datos que se cuentan*** ,tales como el número de artículos defectuosos de una muestra de k artículos o el número de accidentes por año en una vía rápida en una determinada ciudad.

Distribuciones discretas de probabilidad

Una v.a discreta asume cada uno de sus valores con una cierta probabilidad.

Con mucha frecuencia es conveniente representar con una fórmula todas las probabilidades de una v.a X. Dicha fórmula, necesariamente, debe ser función de los valores numéricos x, y que se representa por $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.Por lo tanto, $f(x) = \mathrm{P}(X = x)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama ***función de probabilidad o distribución de probabilidad*** de la v.a discreta X.

Concepto : El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una ***función de probabilidad, función masa de probabilidad o distribución de probabilidad*** de la v.a discreta X si satisface las siguientes condiciones :

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $\sum\limits_{x} f(x) = 1$

3) $\mathrm{P}(X = x) = f(x)$

Ejemplos

1) Una moneda se lanza dos veces, entonces $\Omega = \{(c, c)\,; (c, s)\,; (s, c)\,; (s, s)\}$. Sea X la v.a que consiste en observar el número de caras.

Espacio muestral	x
$c\,c$	2
$c\,s$	1
$s\,c$	1
$s\,s$	0

$Rec\, X = \{0, 1, 2\}$

La función de probabilidad es:

$f(0) = \mathrm{P}(x = 0) = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $f(1) = \mathrm{P}(x = 1) = \dfrac{2}{4}$

$f(2) = \mathrm{P}(x = 2) = \dfrac{1}{4}$

x	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

2) De un lote de 25 artículos de los cuales 5 son defectuosos se eligen 4 al azar. Sea Y la v.a que representa el número de artículos defectuosos encontrados. Obtener la distribución de probabilidades de la v.a Y si los artículos se eligen sin sustitución.

$RecY = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Sea $D =$ artículo defectuoso, por lo tanto, $D^c =$ arículo no defectuoso

$\text{P}(D) = \frac{5}{25}$ $\qquad\qquad$ $\text{P}(D^c) = \frac{20}{25}$

$$f(0) = \text{P}(y = 0) = \text{P}(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{17}{22} = \frac{4845}{12650}$$

$$f(1) = \text{P}(y = 1) = 4\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c) = 4 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \cdot \frac{18}{22} = \frac{5700}{12650}$$

$$f(2) = \text{P}(y = 2) = 6\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3^c \cap D_4^c) = 6 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{23} \cdot \frac{19}{22} = \frac{1900}{12650}$$

$$f(3) = \text{P}(y = 3) = 4\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4^c) = 4 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{20}{22} = \frac{200}{12650}$$

$$f(4) = \text{P}(y = 4) = \text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{2}{22} = \frac{5}{12650}$$

y	0	1	2	3	4
$\text{P}(Y = y)$	$\frac{4845}{12650}$	$\frac{5700}{12650}$	$\frac{1900}{12650}$	$\frac{200}{12650}$	$\frac{5}{12650}$