Distribuciones discretas de probabilidad

El comportamiento de una v.a queda descrito por su distribución de probabilidad.

1) Distribución Bernoulli

El experimento más sencillo es aquel que puede resultar en uno de dos resultados posibles.

Ejemplo

a) aprobar o reprobar una asignatura
b) obtener cara o sello al lanzar una moneda
c) sexo de un niño al nacer

El experimento con dos resultados posibles se denomina ensayo Bernoulli

Cualquier experimento puede usarse para definir un ensayo Bernoulli, simplemente denotando algún evento A como éxito y su complemento A^c como fracaso.

La distribución de probabilidad para un ensayo Bernoulli depende sólo de un parámetro p, probabilidad de éxito, y entonces $1-p$ es la probabilidad de fracaso $(1-p=q)$, donde $0<p<1$

Concepto: Sea Ω el espacio muestral de un experimento, sea $A \subseteq \Omega$ cualquier evento con $P(A)=p$, $0<p<1$ y sea X la v.a definida por

$$X(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in A^c\end{cases}$$

Entonces X se llama v.a Bernoulli con parámetro p.

La distribución de probabilidad de una v.a Bernoulli es de la siguiente forma

$P(x=1)=P(A)=p$
$P(x=0)=P(A^c)=1-p=q$

x	1	0
$f(x)$	p	q

la cual se puede resumir de la siguiente forma

$\boxed{\boldsymbol{f(x)=p^x\cdot q^{1-x} \quad x=0,1}}$ y se denota $X\sim$ Bernoulli (p)

El símbolo $\sim$ denota distribución

El proceso Bernoulli debe tener las siguientes propiedades:

a) El experimento consiste en n intentos repetidos.

b) Los resultados de cada uno de los intentos pueden clasificarse como un éxito o un fracaso.

c) La probabilidad de éxito, p, permanece constante para todos los intentos.

d) Los intentos repetidos son independientes .

e) $E(X) = p$, $Var(X) = p \cdot q$

2) Distribución Binomial

Concepto: un experimento que consiste de n ensayos Bernoulli independientes, cada uno con probabilidad de éxito p , se llama experimento binomial con n ensayos y parámetro p .

Ensayos independientes indica que los ensayos son eventos independientes, esto es, lo que ocurre en un ensayo no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.

El espacio muestral para un experimento binomial es el producto cartesiano de los espacios muestrales de los ensayos Bernoulli consigo mismo n veces

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times ... \times \Omega_n$ donde $\Omega_i = \{\text{éxito}(E), \text{fracaso(F)}\} \forall\, i = 1, 2, ..., n$

Cada elemento de Ω es una $n -$ upla, $w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_n)$ donde $w_i =$ E o F
Luego $\mathrm{P}_i(\mathrm{E}) = p$, $\mathrm{P}_i(\mathrm{F}) = 1 - p = q$ $\quad \forall\, i = 1, 2, ..., n$

Concepto: Sea X el número total de éxitos en un experimento binomial con n ensayos y parámetro p .Entonces X se llama v.a binomial con parámetro n y p .Luego $X \sim b(n, p)$ y su distribución de probabilidades es:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \qquad x = 0, 1, ..., n}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \qquad x = 0, 1, ..., n}}$$

$E(X) = n \cdot p$, $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

Ejemplos

1) Cinco dados son lanzados una vez
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un tres?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos tres?

$n = 5$
X es la v.a que denota el número de tres al lanzar cinco dados
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(\text{obtener un número tres}) = \dfrac{1}{6}$
$\mathrm{P(F)} = \mathrm{P}(\text{no obtener un número tres}) = \dfrac{5}{6}$

$$X \sim b\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$a)\ \mathrm{P}(x \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(x = 0)$

$$\mathrm{P}(x = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{5}$$

$$\mathrm{P}(x \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = 0,5981$$

La probabilidad de obtener al menos un tres es de 0,5981 .

$b)\ \mathrm{P}(x \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(x < 2) = 1 - \mathrm{P}(x = 0) - \mathrm{P}(x = 1)$

$$\mathrm{P}(x = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 0,4018$$

$$\mathrm{P}(x \geq 2) = 0,5981 - 0,4018 = 0,19$$

La probabilidad de obtener al menos dos tres es de 0,19 .

2) La probabilidad de que una cierta clase de componente pase con éxito una determinada prueba de impacto es $3/4$. Encuentre la probabilidad de que exactamente dos de los siguientes cuatro componentes que se prueben pasen la prueba.

$n = 4$
$X =$ pasar con éxito la prueba de impacto
$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p = \frac{3}{4} \qquad q = \frac{1}{4}$$

$$X \sim b\left(4, \frac{3}{4}\right)$$

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\mathrm{P}(x = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{27}{128} = 0,2109$$

La probabilidad de que exactamente dos de las siguientes piezas cuatro componentes que se prueben pasen la prueba es de 0,2109 .

3) La probabilidad de que un paciente se recupere de una cierta enfermedad a la sangre es 0,4 . Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 sobrevivan?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan entre 3 y 8 personas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan 5 personas?

$X =$ persona que sobreviva a la enfermedad

$X = \{0, 1, 2, 3, .., 15\}$

$p = 0,4 \qquad\qquad q = 0,6$

$X \sim b(15;\ 0,4)$

$$f(x) = \binom{15}{x}(0,4)^{x}(0,6)^{15-x}$$

$a)$ $\mathrm{P}(x \geq 10) = \mathrm{P}(x = 10) + \mathrm{P}(x = 11) + \mathrm{P}(x = 12) + \mathrm{P}(x = 13) + \mathrm{P}(x = 14) + \mathrm{P}(x = 15)$
$= 0,0338$

La probabilidad de que al menos 10 sobrevivan es de 0,0338 .

$b)$ $\mathrm{P}(3 \leq x \leq 8) = \mathrm{P}(x = 3) + \mathrm{P}(x = 4) + \mathrm{P}(x = 5) + \mathrm{P}(x = 6) + \mathrm{P}(x = 7) + \mathrm{P}(x = 8)$
$= 0,8779$

La probabilidad de que sobrevivan tres y ocho personas es de 0,8779 .

$$c)\ \mathrm{P}(x = 5) = \binom{15}{5}(0,4)^{5}(0,6)^{10} = 0,1859$$

La probabilidad de que sobrevivan cinco personas es de 0,1859

4) Se sabe que el 30 % de las piezas defectuosas de un proceso de manufactura pueden quedar bien mediante un trabajo de reprocesado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis piezas defectuosas se puedan reprocesar por lo menos tres de ellas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas se puedan reprocesar?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas se puedan reprocesar?

$X =$ piezas reprocesadas

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p = 0,3 \qquad\qquad q = 0,7$

$X \sim b(6;\ 0,3)$

$$f(x) = \binom{6}{x}(0,3)^{x}(0,7)^{6-x}$$

$a)$ $\mathrm{P}(x \geq 3) = \mathrm{P}(x = 3) + \mathrm{P}(x = 4) + \mathrm{P}(x = 5) + \mathrm{P}(x = 6) = 0,2557$

La probabilidad de que se puedan reprocesar al menos tres piezas es de 0,2557 .

$b)\, \mathrm{P}(x=0) = \binom{6}{0}(0,3)^0(0,7)^6 = 0,1176$

La probabilidad de que ninguna de las piezas se pueda reprocesar es de 0,1176 .

$c)\, \mathrm{P}(x \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(x=0) = 1 - 0,1176 = 0,8823$

La probabilidad de que todas las piezas se pueda reprocesar es de 0,8823 .

Ejercicios

1) Al probar una cierta clase de neumático para camión en un terreno escabroso se encontró que el 25 % de los camiones terminaban la prueba con los neumáticos dañados. De los siguientes 6 camiones probados, encuentre la probabilidad de que :

a) de 3 a 6 tengan los neumáticos dañados.
b) Menos de 2 tengan los neumáticos dañados.
c) más de cinco tengan los neumáticos dañados.

2) La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es 0,9 . ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de los próximos 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?.

3) Un ingeniero de control de tráfico reporta que el 75 % de los vehículos que pasan por un punto de verificación tienen matrículas del estado. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 4 de los siguientes 9 vehículos no sean del estado?.

4) Una investigación demostró que el 20 % de los habitantes de una ciudad prefieren un teléfono blanco que cualquier otro. ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los siguientes 8 teléfonos que se instalen en esta cuidad sean de color blanco?.

5) Se sabe que el 40 % de los ratones inyectados con un suero quedan protegidos contra una cierta enfermedad. Si 5 ratones son inyectados, encuentre la probabilidad de que :

a) Ninguno contraiga la enfermedad
b) menos de 2 la contraigan.
c) más de tres la contraigan.

Solución

1)

$a)$ $\mathrm{P}(3 \leq x \leq 6) = 0,166$

$b)$ $\mathrm{P}(x < 2) = 0,54$

$c)$ $\mathrm{P}(x > 5) = 0,002$

2) $\mathrm{P}(x = 5) = 0,12$

3) $\mathrm{P}(x > 4) = 0,063$

4) $\mathrm{P}(x \geq 4) = 0,06$

5)

$a)$ $\mathrm{P}(x = 0) = 0,08$

$b)$ $\mathrm{P}(x < 2) = 0,34$

$c)$ $\mathrm{P}(x > 3) = 0,09$