Probabilidad Condicional

Cuando se está calculando la probabilidad de un evento A en particular, y se tiene información sobre la ocurrencia de otro evento B, esta probabilidad se conoce como ***probabilidad condicional***, la cual se denota por $P(A/B)$, se lee "probabilidad de A dado B" y se define como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{con } P(B) \neq 0$$

Las probabilidades condicionales satisfacen los axionas de probabilidad

1) $P(\Omega/B) = 1$

$$\begin{aligned} P(\Omega/B) &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) $P[(A \cup C)/B] = P(A/B) + P(C/B)$ $\qquad A \cap C = \emptyset$

$$\begin{aligned} P[(A \cup C)/B] &= \frac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} \\ &= \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A/B) + P(C/B) \end{aligned}$$

Ejemplos

1) La probabilidad de que un vuelo de programación regular despegue a tiempo es $P(D) = 0,83$; la que llegue a tiempo es $P(A) = 0,82$ y la que despegue y llegue a tiempo es $P(D \cap A) = 0,78$. Encuentre la probabilidad de que el avión:

a) llegue a tiempo dado que despegó a tiempo.

b) despegue a tiempo dado que llegó a tiempo

Solución

$D = \{$ despegar a tiempo$\}$

$A = \{$ llegar a tiempo$\}$

a) $$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{0,78}{0,83} = 0,94 \end{aligned}$$

La probabilidad de que el avión llegue a tiempo dado que despegó a tiempo es de $0,94$.

b) $P(D/A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)}$
$= \dfrac{0,78}{0,82}$
$= 0,95$

La probabilidad de que el avión despegue a tiempo dado que llegó a tiempo es de 0,95 .

2) En una oficina hay 100 máquinas calculadoras, algunas de ellas son eléctricas (E) mientras que otras son manuales (M). De ellas unas son nuevas (N) y otras usadas (U). El número de máquinas por categoría está dada en la siguiente tabla:

	E	M	Total
N	40	30	70
U	20	10	30

Una persona entra a la oficina y escoge una máquina al azar, descubre que es nueva. ¿Cuál es la probabilidad que sea eléctrica?

$$P(E/N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{4}{7}$$

La probabilidad es de 0,57 .

3) Un grupo de 500 ejecutivos es clasificado de acuerdo a las características del peso y a la insidencia del peso en la hipertensión. Se da la siguiente tabla:

	Sobre peso(SP)	Peso normal(PN)	Bajo peso(BP)	Total
Hipertenso(H)	50	40	10	100
No hipertenso(H^c)	75	225	100	400
Total	125	265	110	500

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hipertensa?

b) Una persona elegida al azar tiene sobrepeso. ¿Cuál es la probabilidad que también sea hipertensa?

c) Una persona elegida al azar no es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga peso normal?

a) $P(H) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

La probabilidad de que una persona sea hipertensa es de $0{,}20$.

b) $$\begin{aligned} P(H/SP) &= \frac{P(H \cap SP)}{P(SP)} \\ &= \frac{\frac{50}{500}}{\frac{125}{500}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona con sobrepeso sea también hipertensa es de $0{,}40$.

c) $$\begin{aligned} P(N/H^c) &= \frac{P(N \cap H^c)}{P(H^c)} \\ &= \frac{\frac{225}{500}}{\frac{400}{500}} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona no hipertensa tenga también peso normal es de $0{,}5625$.

Uno de los usos más frecuentes de la probabilidad condicional es dar un procedimiento fácil para asignar probabilidades a intersecciones de eventos. Del concepto de probabilidad condicional es posible encontrar una expresión útil, llamada regla del producto, para la probabilidad de intersección de eventos, esta es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{\mathbf{P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)}}$$

Así,

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A/B \cap C) \cdot P(B \cap C) \\ &= P(A/B \cap C) \cdot P(B/C) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(A/B \cap C \cap D) \cdot P(B \cap C \cap D) \\ &= P(A/B \cap C \cap D) \cdot P(B/C \cap D) \cdot P(C \cap D) \\ &= P(A/B \cap C \cap D) \cdot P(B/C \cap D) \cdot P(C/D) \cdot P(D) \end{aligned}$$

Ejemplos:

1) Se seleccionan 2 fichas al azar, sin reemplazo, de una urna que contiene 4 blancas y 8 negras. Calcular la probabilidad de que:

a) ambas sean blancas.

b) la segunda sea blanca.

a) $\mathrm{B} = \{\text{fichas blancas}\}$

$\mathrm{N} = \{\text{fichas negras}\}$

$\mathrm{P(B)} = \frac{4}{12}$ $\qquad$ $\mathrm{P(N)} = \frac{8}{12}$

$$\mathrm{P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1)}$$

$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$$

$$= \frac{1}{11}$$

La probabilidad de ambas fichas sean blancas es de 0,09 .

b) $$\mathrm{P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2)} = \frac{1}{11} + \mathrm{P(N_1) \cdot P(B_2/N_1)}$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11}$$

$$= \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que la segunda ficha sea blanca es de 0,33 .

2) Una caja de fusibles contiene 20 unidades, de las cuales 5 son defectuosas. Si tres de estos fusibles son tomados al azar, en sucesión y sin reemplazo.

a) ¿Cuál es la probabilidad que los tres sean defectuosos?

b) Si en cada una de las dos primeras se extrajo un defectuoso.¿Cuál es la probabilidad que el tercero extraido sea bueno?

c) Si los dos primeros estaban buenos. ¿Cuál es la probabilidad que el tercero extraído sea defectuoso?

d) ¿Cuál es la probabilidad que los dos primeros sean buenos y el tercero defectuoso?

$\mathrm{D} = \{\text{fusible defectuoso}\}$

$\mathrm{D^c} = \{\text{fusible no defectuoso}\}$

$\mathrm{P(D)} = \frac{5}{20}$ $\qquad$ $\mathrm{P(D^c)} = \frac{15}{20}$

a) $$\mathrm{P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1) \cdot P(D_2/D_1) \cdot P(D_3/D_1 \cap D_2)}$$

$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \quad = \frac{1}{144}$$

La probabilidad es de $\frac{1}{144}$

b) $P(D_3^c/D_1 \cap D_2) = \frac{15}{18}$

La probabilidad es de un $0,83$.

c) $P(D_3/D_1^c \cap D_2^c) = \frac{5}{18}$

La probabilidad es de un $0,27$.

d)
$$\begin{aligned} P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3) &= P(D_1^c) \cdot P(D_2^c/D_1^c) \cdot P(D_3/D_1^c \cap D_2^c) \\ &= \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} \\ &= \frac{35}{228} \end{aligned}$$

La probabilidad es de un $0,1535$.