Teorema: (Probabilidad total) Suponga que los eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ forman una partición de Ω, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = \Omega$, $A_i \neq \emptyset$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Entonces para cualquier evento $E \subset \Omega$ se tiene:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(E/A_i)$$

Teorema de Bayes:

Si $A_1, A_2, ..., A_k$ es una partición de Ω, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = \Omega$, $A_i \neq \emptyset$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Entonces para cualquier evento $B \subset \Omega$ se tiene:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_k)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Ejemplos:

1) La probabilidad de que Alicia estudie para su examen final de Estadística es 0,2 . Si estudia la probabilidad de que apruebe el examen es 0,8, en tanto que si no estudia la probabilidad es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad que Alicia apruebe estadística?.

b) Dado que Alicia aprobó su examen. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado?.

$E = \{\text{Alicia estudia}\}$
$E^c = \{\text{Alicia no estudia}\}$
$A = \{\text{Alicia aprueba estadística}\}$

$P(E) = 0,2 \qquad P(E^c) = 0,8 \qquad P(A/E) = 0,8 \qquad\qquad P(A/E^c) = 0,5$

a) $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap E^c)$
$P(A) = P(A/E) \cdot P(E) + P(A/E^c) \cdot P(E^c)$
$P(A) = (0,8)(0,2) + (0,5)(0,8)$
$P(A) = 0,56$

La probabilidad de que Alicia apruebe estadística es de 0,56 .

b) $P(E/A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A/E) \cdot P(E)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0,8)(0,2)}{0,56}$$

$$= 0,29$$

La probabilidad de que Alicia haya estudiado dado que aprobó estadística es de 0,29 .

2) Componentes complejas son ensambladas en una planta que usa dos líneas de ensamblado A y B. La línea A usa equipos más viejos que la línea B de manera que es algo más lenta y menos confiable. Suponga que en un día dado, la línea A ha ensamblado 8 componentes de los cuales 2 son defectuosos y 6 son no defectuosos, mientras que la línea B ha producido 1 componente defectuoso y 9 componentes no defectuosos. El encargado de ventas selecciona al azar una de estas 18 componentes para una demostración y encuentra que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad que esta componente haya sido ensamblada por la línea A?.

$A = \{\text{línea A}\}$
$B = \{\text{línea B}\}$
$D = \{\text{artículo defectuoso}\}$

$P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P(D/A) = \dfrac{2}{8}$ $\qquad P(D/B) = \dfrac{1}{10}$

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(D \cap A)}{P(D \cap A) + P(D \cap B)}$$

$$= \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5}{7}$$

La probabilidad de que la componente defectuosa la haya producido la línea A es de 0,71 .

3) De un grupo gande de habitantes de una ciudad que tiene igual número de personas en administración, comercio, servicio de salud y servicio municipal se encontró que el 35 % de los administrativos, el 25 % de los comerciantes, el 20 % del servicio de salud y el 15 % del servicio municipal eran mujeres.

a) ¿Cuál es la probabilidad que una mujer escogida al azar del grupo sea administrativa?

b) ¿Cuál es la probabilidad que un individuo del grupo elegido al azar sea hombre?

$\mathrm{A} = \{\text{administrativo}\}$ $\mathrm{B} = \{\text{comerciante}\}$

$\mathrm{C} = \{\text{servicio salud}\}$ $\mathrm{D} = \{\text{servicio municipal}\}$

$\mathrm{M} = \{\text{mujer}\}$ $\mathrm{M^c} = \{\text{hombre}\}$

$$\mathrm{P(A) = P(B) = P(C) = P(D)} = \frac{1}{4}$$

$\mathrm{P(M/A)} = 0,35$ $\mathrm{P(M/B)} = 0,25$

$\mathrm{P(M/C)} = 0,20$ $\mathrm{P(M/D)} = 0,15$

a) $\mathrm{P(A/M)} = \dfrac{\mathrm{P(A \cap M)}}{\mathrm{P(M)}}$

$$= \frac{\mathrm{P(M \cap A)}}{\mathrm{P(M \cap A) + P(M \cap B) + P(M \cap C) + P(M \cap D)}}$$

$$= \frac{\mathrm{P(M/A) \cdot P(A)}}{\mathrm{P(M/A) \cdot P(A) + P(M/B) \cdot P(B) + P(M/C) \cdot P(C) + P(M/D) \cdot P(D)}}$$

$$= \frac{(0,35)(0,25)}{(0,35)(0,25) + (0,25)(0,25) + (0,20)(0,25) + (0,15)(0,25)}$$

$$= 0,37$$

La probabilidad de que la mujer sea administrativa es de 0,37 .

b) $\mathrm{P(M^c)} = 1 - \mathrm{P(M)}$
$= 1 - 0,2375$
$= 0,7625$

La probabilidad de que el individuo sea un hombre es de 0,7625 .