3.1 De un lote de 1000 neumáticos se ha registrado el número de fallas que presenta cada uno con los siguientes resultados:

N° defectos	0	1	2	3	4
Frecuencia	650	260	70	17	3

Determinar la media (valor esperado) y el desvío típico del número de defectos.

N° defectos	0	1	2	3	4
P(X=Xi)	0.65	0.26	0.07	0.017	0.003

$$E(X) = X_0 * P(X_0) + X_1 * P(X_1) + X_2 * P(X_2) + X_3 * P(X_3) + X_4 * P(X_4)$$
$$E(X) = 0 * 0.65 + 1 * 0.26 + 2 * 0.07 + 3 * 0.017 + 4 * 0.003 = 0.463$$
$$E(X) = 0.463$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} =$$
$$= \sqrt{0^2 * 0.65 + 1^2 * 0.26 + 2^2 * 0.07 + 3^2 * 0.017 + 4^2 * 0.003 - 0.463^2} =$$
$$= \sqrt{0.741 - 0.214369} = \sqrt{0.526631} \cong 0.7267$$
$$\sigma \cong 0.7267$$

3.2 Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente distribución de probabilidad:

X	-1	1	2	3	4
PROBAB.	5*k	0.12	0.23	0.17	0.23

a) Hallar k y la P (X< 3).

$$P(X_0) + P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = 1$$
$$5 * k + 0.12 + 0.23 + 0.17 + 0.23 = 1 \quad => \quad 5 * k = 1 - 0.75 \quad => \quad k = \frac{0.25}{5} = 0.05$$
$$P(X < 3) = P(-1) + P(1) + P(2) = 0.25 + 0.12 + 0.23 = 0.6$$
$$P(X < 3) = 0.6$$

b) E(X) y V(X).

$$E(X) = -1 * 0.25 + 1 * 0.12 + 2 * 0.23 + 3 * 0.17 + 4 * 0.23 = 1.76$$
$$E(X) = 1.76$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$
$$V(X) = (-1)^2 * 0.25 + 1^2 * 0.12 + 2^2 * 0.23 + 3^2 * 0.17 + 4^2 * 0.23 - 1.76^2$$
$$V(X) = 0.25 + 0.12 + 0.92 + 1.53 + 3.68 - 3.0976 = 3.4024$$
$$V(X) = 3.4024$$

3.3 De los postulantes para un trabajo administrativo, se comprobó que el 20% no sabían ingles ni computación, el 70% cumplían uno de los dos requisitos, y el 10% ambos. Si se toma como variable aleatoria la cantidad de requisitos que cumplimenta el postulante, (a). Definir el cuadro de distribución de probabilidades para la variable aleatoria.

N° requisitos	0	1	2
P(X=Xi)	0.2	0.7	0.1

(b).Halle la Esperanza y la Varianza.

$$E(X) = 0 * 0.2 + 1 * 0.7 + 2 * 0.1 = 0.9$$

$$V(X) = 0^2 * 0.2 + 1^2 * 0.7 + 2^2 * 0.1 - 0.9^2 = 1.1 - 0.81 = 0.29$$

3.4 Un dado tiene en sus caras los números del 1 al 6, y otro los números del 7 al 12. Ambos son equilibrados. Se llaman X e Y a las respectivas variables aleatorias. Calcular:

a) $E(X)$ y $E(Y)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i * P(X = X_i) =$$
$$= 1 * P(X = 1) + 2 * P(X = 2) + 3 * P(X = 3) + 4 * P(X = 4) + 5 * P(X = 5) +$$
$$+ 6 * P(X = 6) =$$
$$= 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{6} Y_i * P(Y = Y_i) =$$
$$= 7 * P(Y = 7) + 8 * P(Y = 8) + 3 * P(Y = 9) + 10 * P(Y = 10) + 11 * P(Y = 11) +$$
$$+ 12 * P(Y = 12) =$$
$$= 7 * \frac{1}{6} + 8 * \frac{1}{6} + 9 * \frac{1}{6} + 10 * \frac{1}{6} + 11 * \frac{1}{6} + 12 * \frac{1}{6} = \frac{7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12}{6} = \frac{57}{6} =$$
$$= \frac{19}{2} = 9.5$$

b) Verificar que E(Z)= E(X)+ E(Y), siendo Z=X+Y

3.5 Un gerente elabora un plan para el año entrante. El beneficio, B, es función del costo fijo, Y, y de las ventas, X, y viene dado por la siguiente relación: B = $ 20.X – Y. Las ventas y los costos son variables aleatorias independientes, con los siguientes valores esperados, y desvíos:

	COSTOS	VENTAS
VALOR ESPERADO	150000	10000
DESVIO	50000	2000

¿Cuál es el valor esperado y el desvío de la variable aleatoria "Beneficio"?

$X: Ventas \quad Y: Costos$
$E(B) = E(20 * X - Y) =$
Aplicando las propiedades de la esperanza:
$E(B) = 20 * E(X) - E(Y) = 20 * 10000 - 150000 = 50000$

$V(B) = V(20 * X - Y)$
$Aplicando\ las\ propiedades\ de\ la\ varianza:$
$V(B) = 20^2 * V(X) + V(Y) = 400 * 2000^2 + 50000^2 = 4100000000$
$\sigma = \sqrt{V(B)} = \sqrt{4100000000} = 64031$

3.6 Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% son defectuosos y el 90% no lo son. Si se produce un artículo defectuoso el fabricante pierde $10, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de $50. ¿Cuánto esperará ganar por artículo a la larga?

Utilidad	-10	50
P(X=Xi)	0.1	0.9

$E(X) = -10 * 0.1 + 50 * 0.9 = 44$

3.7 Un torno automático produce en promedio un 5% de piezas defectuosas. De una gran producción se toman al azar 10 piezas. Calcular la probabilidad de encontrar:

(a) dos defectuosas.

$X \sim Bi(10, 0.05)$
$P(X = k) = C_{n,k} * p^n * q^{n-k}$
$P(X = 2) = C_{10,2} * 0.05^2 * 0.95^8 \cong 45 * 0.0025 * 0.663 \cong 0.0746$

(b) más de dos defectuosas.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\big)$
$P(X > 2) = 1 - (C_{10,0} * 0.05^0 * 0.95^{10} + C_{10,1} * 0.05^1 * 0.95^9 + C_{10,2} * 0.05^2 * 0.95^8)$
$P(X > 2) \cong 1 - (0.599 + 0.315 + 0.0746) = 1 - 0.9886 = 0.0114$

(c) dos o menos defectuosas.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$P(X \leq 2) = C_{10,0} * 0.05^0 * 0.95^{10} + C_{10,1} * 0.05^1 * 0.95^9 + C_{10,2} * 0.05^2 * 0.95^8$
$P(X \leq 2) \cong 0.9886$

3.8 Se tira una moneda 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras exactamente?

$X: N° \; de \; caras$
$X \sim Bi(10, 0.5)$
$P(X = 3) = C_{10,3} * 0.5^3 * 0.5^7 = 120 * 0.125 * 0.0078125 = 0.1171875$

Hallar el valor esperado del número de caras.

$E(X) = n * p = 10 * 0.5 = 5$

3.9 El 5% de los tornillos producidos por día por una máquina tienen defectos. Se eligen 15 al azar. Hallar la probabilidad de que a lo sumo 4 sean defectuosos.

$X: N° \; de \; tornillos \; defectuosos$
$X \sim Bi(15, 0.05)$
$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
$P(X \leq 4) = C_{15,0} * 0.05^0 * 0.95^{15} + C_{15,1} * 0.05^1 * 0.95^{14} + C_{15,2} * 0.05^2 * 0.95^{13} +$
$+ C_{15,3} * 0.05^3 * 0.95^{12} + C_{15,4} * 0.05^4 * 0.95^{11} \cong$
$\cong 0.4633 + 0.3658 + 0.1348 + 0.0307 + 0.0049$
$P(X \leq 4) \cong 0.9995$

3.10 Al probar neumáticos para camión se encontró que el 25 % no superaban la prueba.

(a). ¿Cuál es la probabilidad de que, en los próximos 5 neumáticos, al menos tres no pasen la prueba?

$X: N° \; de \; neumaticos \; fallados$
$X \sim Bi(5, 0.25)$
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
$P(X \geq 3) = C_{5,3} * 0.25^3 * 0.75^2 + C_{5,4} * 0.25^4 * 0.75^1 + C_{5,5} * 0.25^5 * 0.75^0$
$P(X \geq 3) \cong 0.0.879 + 0.0146 + 0.001$
$P(X \geq 3) \cong 0.1035$

(b).¿Cuál es la probabilidad de que, en los próximos 5 neumáticos, más de 2 pasen la prueba?

$Y: N° \; de \; neumaticos \; no \; fallados$
$Y \sim Bi(5, 0.75)$
$P(Y > 2) = P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)$
$P(Y > 2) = C_{5,3} * 0.75^3 * 0.25^2 + C_{5,4} * 0.75^4 * 0.25^1 + C_{5,5} * 0.75^5 * 0.25^0$
$P(Y > 2) \cong 0.2637 + 0.3955 + 0.2373$
$P(Y > 2) \cong 0.8965$

3.11 Un alumno decide resolver un examen de estadística con 15 preguntas del tipo verdadero – falso adivinando, tirando una moneda. El examen se aprueba contestando correctamente por lo menos nueve preguntas.

(a). ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen adivinando?

$X: N°\ de\ respuestas\ correctas$
$X \sim Bi(15, 0.5)$
$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) +$
$+ P(X = 14) + P(X = 15)$
$P(X = 9) = C_{15,9} * 0.5^9 * 0.5^6$
$P(X = 10) = C_{15,10} * 0.5^{10} * 0.5^5 \cong 0.15274$
$P(X = 11) = C_{15,11} * 0.5^{11} * 0.5^4 \cong 0.09164$
$P(X = 12) = C_{15,12} * 0.5^{12} * 0.5^3 \cong 0.04166$
$P(X = 13) = C_{15,13} * 0.5^{13} * 0.5^2 \cong 0.01389$
$P(X = 14) = C_{15,14} * 0.5^{14} * 0.5^1 \cong 0.00046$
$P(X = 15) = C_{15,15} * 0.5^{15} * 0.5^0 \cong 0.00003$
$P(X \geq 9) \cong 0.15274 + 0.09164 + 0.04166 + 0.01389 + 0.00046 + 0.00003$
$P(X \geq 9) \cong 0.30362$

(b).¿Cuántas preguntas se espera se contesten en forma correcta?

$E(X) = 15 * 0.5 = 7.5$

3.12 En una caja hay 12 piezas de las cuales 7 están marcadas. Un montador toma al azar 4 piezas con reposición. Hallar la probabilidad de obtener:

(a) por lo menos una marcada

$X: N°\ de\ piezas\ marcadas$
$X \sim Bi(4, 0.58\hat{3}) \quad (p = \frac{7}{12} = 0.58\hat{3})$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{4,0} * 0.58\hat{3}^0 * 0.41\hat{6}^4$
$P(X \geq 1) \cong 1 - 0.03014$
$P(X \geq 1) \cong 0.96986$

(b) a lo sumo dos marcadas

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$P(X \leq 2) \cong 0.03014 + 0.16879 + 0.35446$
$P(X \leq 2) \cong 0.55339$

(c) exactamente dos marcadas.

$P(X = 2) \cong 0.35446$

3.13 Se sabe que un experimento cumple las condiciones de una distribución binomial. Se desea un valor esperado de 2000 y un desvío estándar de 20. Calcular n y p.

$E(X) = n * p = 2000 \qquad (1)$

$\sigma = \sqrt{n * p * q} = 20 => n * p * q = 20^2 = 400 => n * p * q = 400 \qquad (2)$

$p + q = 1 \qquad (3)$

$Despejando\ p\ en\ (1): p = \frac{2000}{n}$

$Reemplazando\ en\ (2):\ n * \frac{2000}{n} * q = 400 => 2000 * q = 400 => q = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5} = 0.2$

$Reemplazando\ en\ (3):\ p + 0.2 = 1 => p = 1 - 0.2 = 0.8 => p = 0.8$

$Reemplazando\ en\ (1):\ n * 0.8 = 2000 => n = \frac{2000}{0.8} => n = 2500$

3.14 La probabilidad de que un individuo sufra una reacción por una vacuna es 0,001. Hallar la probabilidad de que de 2000 personas inyectadas:

(a) tres tengan reacción.

$X: N°\ de\ personas\ con\ reaccion$

$X \sim Bi(2000, 0.001)$

$P(X = 3) = C_{2000,3} * 0.001^3 * 0.999^{1997} \cong 0.1805$

Alternativa aproximación por Poisson:

$\lambda = n * p = 2000 * 0.001 = 2$

$P(X = k) \cong \frac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!}$

$P(X = 3) \cong \frac{2^3 * e^{-2}}{3!} \cong 0.1804$

(b) a los sumo dos tengan reacción.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X \leq 2) \cong \frac{2^0 * e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 * e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 * e^{-2}}{2!} \cong 0.6767$

(c) Por lo menos dos tengan reacción.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)$

$P(X \geq 2) \cong 1 - \frac{2^0 * e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 * e^{-2}}{1!} \cong 1 - 0.406$

$P(X \geq 2) \cong 0.594$

3.15 En la fabricación de tornillos bajo control se sabe que el 99% de los tornillos son precisos. Si los tornillos se venden en cajas de 250. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya 5 defectuosos?

$X: N° \ de \ tornillos \ fallados$
$X \sim Bi(250, 0.01)$
$P(X = 5) = C_{250,5} * 0.01^5 * 0.99^{245} \cong 0.0666$

Alternativa aproximación por Poisson:

$\lambda = n * p = 250 * 0.01 = 2.5$
$$P(X = 5) \cong \frac{2.5^5 * e^{-2.5}}{5!} \cong 0.0668$$

3.16 Un líquido contiene ciertas bacterias a razón de 4 por cm^3 (valor esperado). Hallar la probabilidad de que una muestra de 1 cm^3, no contenga ninguna bacteria.

$Y: N° \ de \ bacterias \ por \ cm^3$
$Y \sim P_\lambda \qquad \lambda = 4$
$$P(Y = 0) = \frac{4^0 * e^{-4}}{0!} \cong 0.0183$$

3.17 El número de llamadas que ingresan a una central telefónica en un determinado horario sigue una distribución de Poisson con un valor medio de 4,6. Halle la probabilidad de que en ese horario ingresen:

(a) más de una llamada

$Y: N° \ de \ llamadas \ en \ horario$
$Y \sim P_\lambda \qquad \lambda = 4.6$
$P(Y > 1) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1)\right)$
$$P(Y > 1) = 1 - \left(\frac{4.6^0 * e^{-4.6}}{0!} + \frac{4.6^1 * e^{-4.6}}{1!}\right) \cong 1 - 0.0563$$
$P(Y > 1) \cong 0.9437$

(b) por lo menos 2 llamadas

$P(Y \geq 2) = P(Y > 1) \cong 0.9437$

(c) a lo sumo dos llamadas.

$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$
$$P(Y \leq 2) = \frac{4.6^0 * e^{-4.6}}{0!} + \frac{4.6^1 * e^{-4.6}}{1!} + \frac{4.6^2 * e^{-4.6}}{2!}$$
$P(Y \leq 2) \cong 0.1626$

3.18 A un banco llegan 120 clientes por hora.

(a). ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes?

$Y: N° \ de \ clientes \ en \ un \ minuto$

$Y \sim P_\lambda \qquad \lambda = 2 \qquad \left(\lambda = {}^{120 \ personas \ por \ hora}/_{60 \ minutos \ en \ una \ hora}\right)$

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)\right)$

$P(Y \geq 3) = 1 - \left(\frac{2^0 * e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 * e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 * e^{-2}}{2!}\right) \cong 1 - 0.6767$

$P(Y \geq 3) \cong 0.3223$

(b).¿Cuántos clientes se espera lleguen en ½ hora?

$X: N° \ de \ clientes \ en \ media \ hora$

$E(X) = \lambda = \frac{120}{2} = 60$

3.19 El número de defectos en una tela sigue una distribución de Poisson con valor medio de 2,3 por metro lineal de tela. Se pide que:

(a) encuentre en un metro lineal, la probabilidad de hallar a lo sumo un defecto.

$Y: N° \ de \ defectos \ por \ metro \ lineal$

$Y \sim P_\lambda \qquad \lambda = 2.3$

$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \frac{2.3^0 * e^{-2.3}}{0!} + \frac{2.3^1 * e^{-2.3}}{1!}$

$P(Y \leq 1) \cong 0.331$

(b) encuentre en dos metros lineales, la probabilidad de hallar a lo sumo un defecto.

$X: N° \ de \ defectos \ en \ dos \ metros \ lineales$

$X \sim P_\lambda \qquad \lambda = 4.6$

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4.6^0 * e^{-4.6}}{0!} + \frac{4.6^1 * e^{-4.6}}{1!}$

$P(X \leq 1) \cong 0.0563$

3.20 Una central de quejas telefónicas recibe 5 llamadas por día.

(a). ¿Cuál es la probabilidad de que en tres días no se reciban quejas?

$Y: N° \ de \ quejas \ por \ tres \ días$
$Y \sim P_\lambda \qquad \lambda = 15$
$P(Y = 0) = \dfrac{15^0 * e^{-15}}{0!} \cong 0.000000305$

(b).¿Cuál es la probabilidad de que en un día se reciban menos de tres quejas, si se sabe que hubo por lo menos una?

$X: N° \ de \ quejas \ por \ día$
$X \sim P_\lambda \qquad \lambda = 5$
$P(X \geq 1 \cap X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{5^1 * e^{-5}}{1!} + \dfrac{5^2 * e^{-5}}{2!}$
$P(X \geq 1 \cap x < 3) \cong 0.118$

(c). ¿Cuántas llamadas se esperan por semana?

$Z: N° \ de \ quejas \ por \ semana$
$E(Z) = \lambda = 5 * 7 = 35$
$E(Z) = 35$