



ROAD TO DATA SCIENCE

-Early Version-

FROM HCMUS with LOVE



Mục lục

I	DISCRETE MATHEMATICS	
1	Propositional Logic	7
1.1	Mệnh đề - các phép toán với mệnh đề	8
1.1.1	Mệnh đề	8
1.1.2	Phép phủ định	8
1.1.3	Phép nối liền	9
1.1.4	Phép nối rời	9
1.1.5	Phép kéo theo	10
1.1.6	Phép kéo theo hai chiều	12
1.1.7	Dạng mệnh đề	13
1.1.8	Phép toán bit	13
1.2	Mệnh đề tương đương	14
1.2.1	Tương đương logic	14
1.2.2	Ứng dụng quy tắc De Morgan	16
1.2.3	Các quy tắc thể	16
1.3	Vị từ và lượng từ	17
1.3.1	Vị từ	17
1.3.2	Lượng từ	17
1.3.3	Tương đương logic liên quan đến lượng từ	19
1.3.4	Phủ định lượng từ	19
2	Basic Structure	23

Bibliography	25
Books	25
Articles	25



DISCRETE MATHEMATICS

1	Propositional Logic	7
1.1	Mệnh đề - các phép toán với mệnh đề	
1.2	Mệnh đề tương đương	
1.3	Vị từ và lượng từ	
2	Basic Structure	23
	Bibliography	25
	Books	
	Articles	

1. Propositional Logic



Logic là cơ sở của tất cả các suy luận toán học, nó được ứng dụng thực tiễn trong việc thiết kế hệ thống máy tính, máy học, trí tuệ nhân tạo, và nhiều lĩnh vực khác của khoa học máy tính cũng như nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác.

1.1 Mệnh đề - các phép toán với mệnh đề

1.1.1 Mệnh đề

Định nghĩa 1.1.1 *Mệnh đề* là một khẳng định có chân trị xác định, có thể đúng hoặc sai nhưng không thể vừa đúng vừa sai.

■ **Ví dụ 1.1** Những ví dụ sau đều là mệnh đề.

1. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
2. Thành phố Hồ Chí Minh là vùng trồng lúa lớn nhất Đông Nam Á.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $5 - 5 = 10$.

Trong đó mệnh đề 1 và 3 là mệnh đề đúng, mệnh đề 2 và 4 là mệnh đề sai.

■ **Ví dụ 1.2** Xét những ví dụ sau.

1. Hôm nay là thứ mấy?
2. Hãy chăm chỉ học hành.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

Hai ví dụ đầu tiên không phải là mệnh đề vì không phải là câu khẳng định. Hai ví dụ 3 và 4 không phải là một mệnh đề vì không có chân trị xác định, có thể đúng hoặc sai. Lưu ý rằng ví dụ 3 và 4 có thể trở thành một mệnh đề khi ta xác định giá trị của các biến thành phần.

Chúng ta sử dụng các chữ cái để biểu thị các *biến mệnh đề*, nghĩa là biến đại diện cho các mệnh đề, cũng giống như các chữ cái được dùng để đại diện cho các biến số. Các chữ cái thường được dùng để quy ước cho các biến mệnh đề là p, q, r, s, \dots . Chân trị của một mệnh đề đúng, được kí hiệu là T , nếu đó là một mệnh đề đúng và chân trị của một mệnh đề sai, được kí hiệu là F , nếu đó là một mệnh đề sai.

Định nghĩa 1.1.2 Có 2 loại mệnh đề:

1. *Mệnh đề phức hợp* là những mệnh đề được xây dựng bằng cách kết hợp một hoặc nhiều mệnh đề với các toán tử logic, hay nói cách khác là liên kết bằng các liên từ: và, hay, nếu, thì ... hoặc trạng từ không.
2. *Mệnh đề nguyên thủy (sơ cấp)* là mệnh đề không thể xây dựng bằng cách kết hợp một hoặc nhiều mệnh đề với các toán tử logic.

■ **Ví dụ 1.3** Xét những ví dụ sau.

1. 2 là số nguyên tố. (*mệnh đề nguyên thủy*)
2. Việt Nam có lãnh thổ hình chữ S. (*mệnh đề nguyên thủy*)
3. Nếu $1 + 1 = 2$ thì 1 là số nguyên tố. (*mệnh đề phức hợp*)

1.1.2 Phép phủ định

Định nghĩa 1.1.3 Cho mệnh đề p , mệnh đề phủ định của p được ký hiệu là $\neg p$ (hoặc cũng có thể ký hiệu là \bar{p}) được đọc là "không p " hay "phủ định của p ". Chân trị của $\neg p$ có giá trị ngược lại so với chân trị của p .

p	$\neg p$
1	0
0	1

Bảng 1.1: Bảng chân trị $\neg p$

■ Ví dụ 1.4

p = "PC của Hào chạy hệ điều hành Linux".

$\neg p$ = "PC của Hào không chạy hệ điều hành Linux". ■

1.1.3 Phép nối liền

Định nghĩa 1.1.4 Cho hai mệnh đề p và q . Phép nối liền p và q được ký hiệu là $p \wedge q$ được đọc là " p và q " (hoặc " p hội q "). $p \wedge q$ có chân trị đúng khi cả p và q đều đúng.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bảng 1.2: Bảng chân trị $p \wedge q$

Lưu ý rằng trong toán logic, đôi khi từ "nhưng" được sử dụng thay thế cho từ "và". Ví dụ như câu nói "Mặt trời đang sáng, nhưng trời đang mưa" là một cách nói khác của câu "Mặt trời đang sáng và trời đang mưa". Trong ngôn ngữ tự nhiên "và" và "nhưng" có thể mang ý nghĩa khác nhau nhưng chúng ta sẽ không quan tâm đến vấn đề đó ở đây.

■ Ví dụ 1.5

p = "Toán rời rạc là một môn không khó".

q = "Giáo viên dạy môn toán rời rạc rất dễ thương:3". ■

$p \wedge q$ = "Toán rời rạc mà một môn không khó và giáo viên dạy rất dễ thương:3".

■ Ví dụ 1.6 Xét những ví dụ sau.

1. 2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố. (mệnh đề đúng)

2. $1 + 1 = 3$ nhưng $2 + 2 = 4$. (mệnh đề sai) ¹ ■

1.1.4 Phép nối rời

Định nghĩa 1.1.5 Cho hai mệnh đề p và q . Phép nối rời p và q được ký hiệu là $p \vee q$ được đọc là " p hay q " (hoặc " p tuyển q "). $p \vee q$ có chân trị đúng khi một trong hai hoặc cả hai đều có chân trị đúng.

■ Ví dụ 1.7 Nhân dịp 20/10

p = "Bạn sẽ mua quà cho Linh".

q = "Bạn sẽ mua quà cho Lan". ■

$p \vee q$ = "Bạn sẽ mua quà cho Linh hay Lan (hoặc cả hai)".

Đưa ví dụ trên vào ngữ cảnh thực tế, bạn có thể lựa chọn mua quà cho Linh hay cho Lan hay sẽ mua cho cả hai. Trong trường hợp này sử dụng từ "hay" sẽ hợp lý hơn "hoặc", "hay" mang ý nghĩa

¹ $1 + 1 = 3$ là một mệnh đề sai còn $2 + 2 = 4$ là một mệnh đề đúng, do đó đây là một mệnh đề sai.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bảng 1.3: Bảng chân trị $p \vee q$

một trong hai hay cả hai trong khi từ "hoặc" sẽ mang thiên hướng một trong hai nhưng không phải cả hai².

Định nghĩa 1.1.6 Cho hai mệnh đề p và q . Phép tuyển loại p hoặc q được ký hiệu là $p \oplus q$ được đọc là " p hoặc q ". $p \oplus q$ có chân trị đúng khi chỉ có chính xác một trong p hoặc q có chân trị đúng.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Bảng 1.4: Bảng chân trị $p \oplus q$

■ Ví dụ 1.8

p = "Bạn sẽ thi tổ hợp KHTN".

q = "Bạn sẽ thi tổ hợp KHXH".

$p \vee q$ = "Bạn sẽ thi tổ hợp KHTN hoặc KHXH".

Ví dụ trên dựa trên kỳ thi TPHTQG năm 2021, do cả hai bài thi tổ hợp đều thi trong cùng một buổi nên thí sinh chỉ có thể chọn một trong hai chứ không thể chọn cả hai được. Tương tự với câu "Miễn phí cơm thêm hoặc dưa chua", bạn sẽ chỉ có thể lựa chọn cơm thêm hoặc dưa chua kèm với món ăn chính hoặc phải trả thêm tiền để có thể mua cả hai.

1.1.5 Phép kéo theo

Định nghĩa 1.1.7 Cho hai mệnh đề p và q . Phép kéo theo $p \rightarrow q$ là mệnh đề "nếu p thì q ". $p \rightarrow q$ có chân trị sai khi q đúng và p sai. p được gọi là điều kiện đủ của q còn q được gọi là điều kiện cần của p .

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bảng 1.5: Bảng chân trị $p \rightarrow q$

Một cách hữu ích để hiểu chân trị của mệnh đề trên là nghĩ về một hợp đồng hoặc cam kết. Ví dụ khi một chính trị gia ra tranh cử, ông cam kết rằng:

²Trong tiếng anh có hai cách từ "or" được sử dụng: **inclusive or** nghĩa là một trong hai hay cả hai và **exclusive or** nghĩa là chỉ một trong hai.

Bảng 1.6: Một số cách diễn đạt khác nhau của $p \rightarrow q$

Nếu p , thì q	p suy ra q
Nếu p, q	p chỉ khi q
p là điều kiện đủ của q	Điều kiện đủ cho q là p
q nếu p	q bất cứ khi nào p
q khi p	q là điều kiện cần của p
Điều kiện cần của p là q	q theo sau p
q trừ khi $\neg p$	

"Nếu tôi được bầu, tôi sẽ giảm thuế."

Nếu chính trị gia trên đắc cử, cử tri sẽ mong đợi được giảm thuế. Tuy nhiên nếu chính trị gia trên thất cử, cử tri sẽ không thể kỳ vọng được giảm thuế dù có thể với tầm ảnh hưởng của chính trị gia đó và sự ủng hộ người dân có thể yêu cầu chính quyền đương nhiệm giảm thuế. Chỉ khi chính trị gia đó đắc cử nhưng không giảm thuế thì cử tri mới có thể nói rằng vị chính trị gia đó đã phá vỡ cam kết khi tranh cử. Kịch bản cuối cùng này tương ứng với trường hợp q đúng nhưng p sai trong mệnh đề $p \rightarrow q$.

Tương tự hãy xem xét một lời hứa của một giáo sư:

"Nếu em làm hết bài tập, thầy sẽ cho em 10 điểm".

Nếu bạn làm được hết bài tập, bạn sẽ được 10 điểm. Nếu không thể hoàn thành tất cả bài tập nhưng dựa trên sự chăm chỉ và năng nổ phát biểu xây dựng bài, vị giáo sư đó có thể vẫn sẽ cho bạn 10 điểm. Tuy nhiên nếu bạn làm được hết bài tập mà bạn vẫn không được 10 điểm, bạn sẽ cảm thấy bị lừa và vị giáo sư kia đã thất hứa.

Trong số các cách khác nhau để diễn đạt $p \rightarrow q$, hai cách dễ bị nhầm lẫn nhất là " p chỉ khi q " và " q trừ khi $\neg p$ ".

Để nhớ rằng " p chỉ khi q " diễn đạt ý nghĩa tương tự với "Nếu q thì p ", cần nhớ rằng " p chỉ khi q " nói rằng p không thể đúng khi q không đúng. Tức là mệnh đề $p \rightarrow q$ không thể đúng nếu p đúng nhưng q lại sai. Khi p sai, p có thể đúng hoặc sai do mệnh đề trên không nói lên điều gì về giá trị chân lý của q . Chúng ta không sử dụng " q khi chỉ p " để diễn đạt $p \rightarrow q$ vì điều này không đúng. Để thấy được điều này, để ý rằng chân trị của " p chỉ khi p " và $p \rightarrow q$ khác nhau khi p và q có chân trị khác nhau.

Để nhớ rằng " q trừ khi $\neg p$ " diễn đạt ý nghĩa tương tự "Nếu p , thì q ", cần nhớ rằng " q trừ khi $\neg p$ " có nghĩa là nếu $\neg p$ sai thì q phải đúng. Đó là mệnh đề " q trừ khi $\neg p$ " sai khi p đúng nhưng q sai, nhưng ngược lại thì đúng. Hệ quả là " q trừ khi p " và $p \rightarrow q$ luôn có cùng chân trị.

■ Ví dụ 1.9

p = "Sơn đẹp trai".

q = "Sơn có người yêu".

$p \rightarrow q$ = "Nếu Sơn đẹp trai thì Sơn có người yêu".

= "Điều kiện cần để Sơn có người yêu là phải đẹp trai".

...

Cấu trúc "nếu- thì" (if a then b) được sử dụng rất nhiều trong các ngôn ngữ lập trình có sự khác biệt so với trong toán logic. Trong đó sau câu lệnh if là một điều kiện a, nếu thỏa điều kiện đó thì chương trình sẽ thực thi đoạn chương trình b³, nhưng sẽ không làm gì cả nếu không thỏa điều kiện a.

Chúng ta có thể tạo một số mệnh đề mới xuất phát từ mệnh đề $p \rightarrow q$. Có 3 mệnh đề được sử dụng phổ biến đến mức có tên riêng cho nó:

³Có thể gồm 1 hoặc nhiều câu lệnh khác nhau

Mệnh đề	tên gọi
$q \rightarrow p$	phép đảo của $p \rightarrow q$
$\neg p \rightarrow \neg q$	phép nghịch đảo của $p \rightarrow q$
$\neg q \rightarrow \neg p$	phép đồng quy của $p \rightarrow q$

1.1.6 Phép kéo theo hai chiều

Định nghĩa 1.1.8 Cho hai mệnh đề p và q . Phép kéo theo hai chiều $p \leftrightarrow q$ là mệnh đề " p nếu và chỉ nếu q ". $p \leftrightarrow q$ có chân trị đúng khi p và q có cùng chân trị, nghĩa là p và q cùng đúng hoặc p và q cùng sai.

Chú ý rằng $p \leftrightarrow q$ có cùng chân trị với $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

"Trong tiếng anh có thể viết tắt thành " p iff q ".

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bảng 1.7: Bảng chân trị $p \leftrightarrow q$

Bảng 1.8: Một số cách diễn đạt khác nhau của $p \leftrightarrow q$	
p nếu và chỉ nếu q	p khi và chỉ khi q
p là điều kiện cần và đủ của q	q là điều kiện cần và đủ để có p
p và q là hai mệnh đề tương đương	

■ Ví dụ 1.10

p = "Bạn đạt được điểm cao".

q = "Bạn chăm chỉ học bài".

$p \leftrightarrow q$ = "Bạn được điểm cao nếu và chỉ nếu bạn chăm chỉ học bài".

Mệnh đề trên đúng nếu p và q cùng đúng hoặc cùng sai. Nghĩa là nếu bạn chăm chỉ thì bạn sẽ đạt được điểm cao và nếu bạn lười biếng bạn sẽ không thể đạt điểm cao. Mệnh đề trên sai khi p và q có chân trị trái ngược nhau, nghĩa là bạn chăm chỉ nhưng không thể đạt được điểm cao (có thể là do bạn chưa nắm vững kiến thức, cách học tập chưa khoa học...) hoặc bạn lười biếng nhưng lại giành điểm cao (do may mắn, gian lận...).

Bạn nên biết rằng các mệnh đề kéo theo hai chiều thường không được biểu diễn rõ ràng bằng ngôn ngữ tự nhiên. Ta gần như chả bao giờ dùng cụm từ "khi và chỉ khi" hay "nếu và chỉ nếu" trong giao tiếp hằng ngày mà thông thường nó sẽ được sử dụng dưới dạng ẩn ý. Ví dụ mệnh đề "Bạn có thể ăn tráng miệng khi và chỉ khi bạn ăn xong bữa ăn chính" về mặt logic tương đương với hai câu "Nếu bạn đã ăn xong bữa ăn chính, bạn có thể ăn món tráng miệng" và "Bạn chỉ có thể ăn món tráng miệng nếu đã hoàn thành bữa ăn chính". Vì sự không rõ ràng này trong ngôn ngữ tự nhiên, chúng ta cần đưa ra nhận định liệu câu nói đó có bao hàm một mệnh đề logic không. Trong toán học và logic, độ chính xác là điều cần thiết cho nên chúng ta phải phân biệt được giữa câu ngụ ý mệnh đề $p \rightarrow q$ và mệnh đề $p \leftrightarrow q$.

1.1.7 Dạng mệnh đề

Bây giờ chúng ta đã biết các toán tử logic quan trọng. Chúng ta sẽ sử dụng các toán tử này để xây dựng các mệnh đề phức tạp hơn với nhiều biến mệnh đề khác nhau và nhiều phép toán logic khác nhau.

Định nghĩa 1.1.9 Dạng mệnh đề là một biểu thức được xây dựng từ:

1. Các mệnh đề (có thể là các hằng mệnh đề 0, 1)^a
2. Các biến mệnh đề p, q, r, s, \dots có thể nhận giá trị là các mệnh đề nào đó.
3. Các phép nối ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots$) trên các hằng mệnh đề, biến mệnh đề và các dấu ngoặc $()$, $[\]$, $\{ \}$, \dots

^aHằng mệnh đề 1 là mệnh đề luôn luôn có chân trị đúng (hằng đúng) và 0 là mệnh đề luôn có chân trị sai (hằng sai).

Cho đến nay, chúng ta đã có thể xây dựng các mệnh đề phức hợp bằng cách sử dụng toán tử phủ định, các toán tử logic và chỉ thị thứ tự ưu tiên các phép toán bằng dấu ngoặc đơn. Để giảm số lượng dấu ngoặc đơn trong các dạng mệnh đề, chúng ta cần chỉ ra sự ưu tiên khác nhau giữa toán tử logic. Toán tử phủ định \neg sẽ được thực hiện đầu tiên sau đó là đến các toán tử nối \wedge, \vee và cuối cùng mới đến các toán tử điều kiện $\rightarrow, \leftrightarrow$. Một quy tắc ưu tiên khác là các toán tử kết hợp \wedge sẽ có được ưu tiên hơn các toán tử nối rồi \vee , do đó $p \wedge q \vee r$ tương đương với $(p \wedge q) \vee r$ chứ không phải $p \wedge (q \vee r)$. Vì quy tắc này khá khó nhớ nên người ta thường dùng các dấu ngoặc đơn để biểu diễn rõ ràng hơn.

Toán tử	Mức độ ưu tiên
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

Bảng 1.9: Các mức độ ưu tiên của các toán tử logic.

■ **Ví dụ 1.11** Lập bảng chân trị của $E(p, q, r) = (p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$. ■

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Bảng 1.10: Bảng chân trị của dạng mệnh đề $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

1.1.8 Phép toán bit

Máy tính xử lý thông tin dưới dạng các bit. Một bit có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1, điều này có nghĩa là bit xuất phát từ chữ số nhị phân. Một bit có thể biểu diễn một giá trị chân lý đúng hoặc sai tương ứng với hai giá trị 1 và 0. Một biến được gọi là biến boolean nếu nó chỉ có thể có một trong hai giá trị đúng hoặc sai, do đó một biến boolean có thể được biểu diễn chỉ bằng 1 bit.

Máy tính xử lý các phép tính bằng cách sử dụng các phép toán logic với bit. Bằng cách thay thế giá true bằng 1 và false bằng 0 rồi áp dụng các toán tử logic AND (\wedge), OR (\vee), XOR (\oplus), \dots

để thu được các kết quả chúng ta mong muốn.

x	y	$x \text{ OR } y$	$x \text{ AND } y$	$x \text{ XOR } y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Bảng 1.11: Bảng chân trị của các phép toán bit

Định nghĩa 1.1.10 Một chuỗi bit là một dãy gồm các ký tự 0 và 1. Độ dài của chuỗi bit là số bit có trong chuỗi.

Chúng ta có thể áp dụng các phép toán bit vào chuỗi bit. Chúng ta xác định các phép toán AND, OR và XOR của hai chuỗi có cùng độ dài bằng cách phép toán AND, OR và XOR của các bit trong hai chuỗi tương ứng. Chúng ta có thể sử dụng các ký hiệu \wedge , \vee và \oplus để đại diện cho các phép toán tương ứng.

■ **Ví dụ 1.12**⁴

$A = 01\ 1011\ 0110$
 $B = 11\ 0001\ 1101$
 $A \vee B = 11\ 1011\ 1111$
 $A \wedge B = 01\ 0001\ 0100$
 $A \oplus B = 10\ 1010\ 1011$

■

1.2 Mệnh đề tương đương

1.2.1 Tương đương logic

Định nghĩa 1.2.1 Một mệnh đề phức hợp luôn đúng với mọi giá trị của các biến mệnh đề được gọi là một hằng đúng. Một mệnh đề phức hợp luôn luôn sai với mọi giá trị của các biến mệnh đề được gọi là một hằng sai. Một mệnh đề phức hợp không phải hằng đúng cũng không phải hằng sai được gọi là một tiếp liên.

Hằng đúng và hằng sai thường đóng vai trò quan trọng trong các lập luận toán học.

Định nghĩa 1.2.2 Hai mệnh đề phức hợp p và q được gọi là tương đương logic khi $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng, có thể được ký hiệu là $p \equiv q$ (hoặc $p \Leftrightarrow q$).

Một cách đơn giản để xác định xem hai mệnh đề có tương đương logic không là dùng bảng chân trị. Hai mệnh đề phức hợp p và q tương đương logic khi và chỉ khi cột thể hiện chân trị của cả hai giống nhau.

⁴Ở đây các chuỗi bit sẽ được chia thành các nhóm nhỏ gồm 4 chữ số để dễ đọc hơn.

■ **Ví dụ 1.13** Chứng minh $\neg(p \vee q)$ và $\neg p \wedge \neg q$ tương đương logic với nhau. ■

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Bảng 1.12: Bảng chân trị của $\neg(p \vee q)$ và $\neg p \wedge \neg q$

Ví dụ trên cũng chính là quy tắc **De Morgan**. Với p, q, r là các biến mệnh đề và hai hằng mệnh đề 0, 1 ta có bảng các tương đương logic quan trọng sau:

Sự tương đương	Tên gọi
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Phủ định của phủ định
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	Quy tắc De Morgan
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Luật giao hoán
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Luật kết hợp
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Luật phân bố (phân phối)
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Luật lũy đẳng
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Luật trung hòa
$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$	Luật về phần tử bù
$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Luật thống trị
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Luật hấp thụ
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Luật kéo theo

Bảng 1.13: Sự tương đương logic.

Tương đương logic trong mệnh đề kéo theo	Tương đương logic trong mệnh đề kéo theo hai chiều
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q$
$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$	
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$	
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$	
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$	
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$	

Bảng 1.14: Sự tương đương logic trong các mệnh đề có điều kiện.

Luật kết hợp cho ta thấy biểu thức $p \vee q \vee r$ có thể được thực hiện với bất kỳ thứ tự nào, và cũng tương tự với $p \wedge q \wedge r$. Theo đó, $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ và $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ cũng luôn được xác định với bất kỳ mệnh đề p_1, p_2, \dots, p_n nào.

Ngoài ra, quy tắc De Morgan cũng có thể được mở rộng như sau:

$$\begin{aligned}\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) &\Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n) \\ \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) &\Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n)\end{aligned}$$

Chúng ta đôi khi có thể sử dụng $\bigvee_{j=1}^n$ thay cho $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ và $\bigwedge_{j=1}^n$ thay cho $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$. Sử dụng cách viết này, quy tắc De Morgan có thể được viết lại thành:

$$\begin{aligned}\neg(\bigvee_{j=1}^n p_j) &\Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n \neg p_j \\ \neg(\bigwedge_{j=1}^n p_j) &\Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n \neg p_j\end{aligned}$$

1.2.2 Ứng dụng quy tắc De Morgan

Quy tắc De Morgan đặc biệt quan trọng trong cuộc sống. Nó cho ta biết làm thế nào để phủ định liên từ và làm thế nào để phủ định các liên từ. Đặc biệt, sự tương đương $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ cho chúng ta biết phủ định của một phép nối rời bằng phủ định của các thành phần trong phép nối liền. Tương tự, sự tương đương $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ cho chúng ta biết phủ định của một phép nối liền bằng phủ định của các thành phần trong phép nối rời.

■ **Ví dụ 1.14** Sử dụng định luật De Morgan để phủ định "Hào có iphone và macbook" và "Hào sẽ đi học hay đi chơi". ■

Gọi p là "Hào có iphone" và q là "Hào có macbook", "Hào có iphone và macbook" có thể được viết lại thành $p \wedge q$. Theo quy luật De Morgan $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, chúng ta có thể phủ định mệnh đề ban đầu bằng "Hào không có iphone hay macbook".

Gọi p là "Hào sẽ đi học" và q là "Hào sẽ đi chơi", "Hào sẽ đi học hay đi chơi" có thể được viết lại thành $p \vee q$. Theo quy luật De Morgan $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, chúng ta có thể phủ định mệnh đề ban đầu bằng "Hào sẽ không đi học và không đi chơi".

1.2.3 Các quy tắc thế

Định lý 1.2.1 Quy tắc thế thứ nhất: trong dạng mệnh đề E , nếu ta thay thế biểu thức con F bằng một dạng mệnh đề tương đương logic với F thì ta được dạng mệnh đề tương đương logic với E

■ **Ví dụ 1.15** $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$. ■

Định lý 1.2.2 Quy tắc thể thứ hai: Giả sử dạng mệnh đề E là một hằng đúng. Nếu ta thay thế một biến mệnh đề bằng một dạng mệnh đề thì dạng mệnh đề thu được cũng là một hằng đúng.

■ **Ví dụ 1.16** Ta có $p \rightarrow (p \vee s)$ là hằng đúng nên $(r \rightarrow t) \rightarrow ((r \rightarrow t) \vee s)$ là một hằng đúng. ■

1.3 Vị từ và lượng từ

1.3.1 Vị từ

Cho các phát biểu có chứa các biến như:

" $x > 3$ ", " $x = y + 3$ ", " $x + y = z$ ".

"Máy tính x đang bị tấn công bởi một hacker".

"Máy tính x đang hoạt động bình thường".

thường được tìm thấy trong các khẳng định toán học, trong các chương trình máy tính và trong các thông số kỹ thuật của hệ thống. Các phát biểu này không đúng cũng không sai khi giá trị của các biến không được xác định. Trong phần này ta sẽ thảo luận cách xây dựng mệnh đề từ các phát biểu như vậy.

Định nghĩa 1.3.1 Vị từ là một khẳng định $P(x, y, \dots)$ trong đó chứa các biến x, y, \dots lấy giá trị trong tập cho trước sao cho:

1. $P(x, y, \dots)$ không phải mệnh đề (không có chân trị xác định).
2. thay x, y, \dots bằng những giá trị cố định tùy ý $a \in A, b \in B, \dots$ ta sẽ được mệnh đề $P(a, b, \dots)$ (có chân trị xác định).

Các biến x, y, \dots được nói là biến tự do của vị từ.

Phát biểu " x lớn hơn 3" có hai phần. Phần đầu tiên, biến tự do x , là đối tượng của phát biểu. Phần thứ 2, vị từ "lớn hơn 3" là thuộc tính của đối tượng trong phát biểu. Chúng ta có thể biểu diễn câu " x lớn hơn 3" bằng $P(x)$, trong đó P đại diện cho vị từ "lớn hơn 3" và x là biến. Sau khi gán một giá trị cho biến x , $P(x)$ sẽ trở thành một mệnh đề có chân trị rõ ràng.

■ **Ví dụ 1.17** Cho $P(x)$ biểu diễn phát biểu " x lớn hơn 3". Xác định chân trị của $P(4)$ và $P(2)$. ■

Chúng ta có thể thu được mệnh đề $P(4)$ bằng cách thay x trong phát biểu " x lớn hơn 3" thành "4 lớn hơn 3" và đây là một mệnh đề có chân trị đúng. Tương tự chúng ta có thể thu được mệnh đề $P(2)$ bằng cách thay x trong phát biểu " x lớn hơn 3" thành "2 lớn hơn 3" và đây là một mệnh đề có chân trị sai.

■ **Ví dụ 1.18** Gọi $A(x)$ biểu diễn phát biểu "Máy tính x đang bị tấn công bởi hacker". Giả sử trong trường chỉ có máy tính MT1 và MT3 đang bị tấn công. Xác định chân trị của $A(\text{MT1})$, $A(\text{MT2})$ và $A(\text{MT3})$. ■

Chúng ta thu được mệnh đề $A(\text{MT1})$ là "Máy tính MT1 đang bị tấn công bởi hacker" bằng cách thay x thành MT1, bởi vì MT1 là một trong hai máy bị hacker tấn công nên $A(\text{MT1})$ có chân trị đúng. Tương tự, vì MT2 không có trong danh sách máy tính bị tấn công nên $A(\text{MT2})$ có chân trị sai và MT3 có trong danh sách bị tấn công nên $A(\text{MT3})$ có chân trị đúng.

1.3.2 Lượng từ

Khi các biến tự do trong một hàm mệnh đề được gán một giá trị nào đó, kết quả sẽ thu được một mệnh đề với chân trị xác định. Tuy nhiên có một cách quan trọng khác để xây dựng mệnh đề từ hàm mệnh đề. Lượng từ thể hiện mức độ mà một vị ngữ đúng trong một miền phần tử nào đó. Trong tiếng anh, các từ *all*, *some*, *many*, *none* và *few* được sử dụng trong lượng từ. Chúng ta sẽ tập trung vào 2 loại lượng từ: lượng từ phổ quát cho chúng ta biết vị từ sẽ luôn tạo thành mệnh đề có chân trị

đúng với mọi giá trị phần tử mà chúng ta xem xét và lượng từ tồn tại cho chúng ta biết với 1 hoặc một số giá trị phần tử, vị từ sẽ tạo thành một mệnh đề có chân trị đúng.

Định nghĩa 1.3.2 Lượng từ phổ dụng của một phát biểu $P(x)$ là:

" $P(x)$ với mọi giá trị x trong một miền giá trị"

Lượng từ phổ dụng của $P(x)$ được ký hiệu là $\forall xP(x)$. $\forall xP(x)$ được đọc là "với mọi x , $P(x)$ ". Một giá trị làm cho mệnh đề $P(x)$ có chân trị sai được gọi là một phản chứng của $\forall xP(x)$.

■ **Ví dụ 1.19** Gọi $P(x)$ là phát biểu " $x + 1 > x$ ", chân trị của $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là đúng do $P(x)$ đúng với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$ ■

Khi tất cả giá trị trong miền giá trị có thể được liệt kê, ví dụ x_1, x_2, \dots, x_n , lượng từ phổ dụng $\forall xP(x)$ giống như phép nối liền:

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

bởi vì phép nối liền chỉ đúng khi và chỉ khi $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ đều đúng.

■ **Ví dụ 1.20** Tìm chân trị của mệnh đề $\forall xP(x)$ với $P(x)$ là phát biểu " $x^2 < 10$ " và $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Phát biểu $P(x)$ tương tự phép nối liền:

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4).$$

Ta có $P(4)$ là mệnh đề " $4^2 < 10$ " có chân trị sai, do đó mệnh đề $\forall xP(x)$ có chân trị sai.

■ **Ví dụ 1.21** Với T là tập hợp tất cả máy tính trong trường, $P(x)$ là phát biểu "Máy tính x đang bị hacker tấn công". $\forall x \in T, P(x)$ là mệnh đề "Tất cả máy tính trong trường đang bị hacker tấn công". ■

Định nghĩa 1.3.3 Lượng từ tồn tại của một phát biểu $P(x)$ là:

"Tồn tại một phần tử x thuộc miền giá trị sao cho $P(x)$ "

Chúng ta sử dụng ký hiệu $\exists xP(x)$ để biểu diễn lượng từ tồn tại của $P(x)$. $\exists xP(x)$ được đọc là "Tồn tại x sao cho $P(x)$ ".

Một miền giá trị phải được chỉ định khi sử dụng mệnh đề $\exists xP(x)$. Hơn nữa, ý nghĩa của mệnh đề $\exists xP(x)$ sẽ bị thay đổi khi miền giá trị thay đổi và mệnh đề $\exists xP(x)$ sẽ không có nghĩa khi không đi kèm một miền giá trị được chỉ định.

Ngoài cụm từ "tồn tại", chúng ta có một số cách gọi khác như "có một số", "có ít nhất một" hoặc "có". Lượng từ tồn tại $\exists xP(x)$ có thể được đọc là:

"Có một số (giá trị) x sao cho $P(x)$ ".

"Có ít nhất một (giá trị) x sao cho $P(x)$ ".

"Có (giá trị) x sao cho $P(x)$ "

■ **Ví dụ 1.22** Cho $P(x)$ là phát biểu " $x > 3$ ". Tìm chân trị của mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$. ■

Ta có, với $x = 4$ phát biểu trên trở thành " $4 > 3$ " là một mệnh đề có chân trị đúng. Do đó mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là một mệnh đề đúng.

Lưu ý rằng mệnh đề " $\exists x, P(x)$ " chỉ sai khi và chỉ khi không có giá trị nào của x trong miền giá trị được chỉ định mà $P(x)$ có chân trị đúng. nghĩa là $\exists xP(x)$ sai nếu và chỉ nếu $P(x)$ sai với mọi phần tử thuộc miền được chỉ định.

Khi tất cả giá trị trong miền giá trị có thể được liệt kê, ví dụ x_1, x_2, \dots, x_n lượng từ tồn tại giống như phép nối rời:

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

Bởi vì phép nối rời đúng khi ít nhất một trong $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ có chân trị đúng.

■ **Ví dụ 1.23** Tìm chân trị của mệnh đề $\exists xP(x)$ với $P(x)$ là phát biểu " $x^2 < 10$ " và $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Phát biểu tương tự phép nối liên:

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

Ta có $P(1)$ là mệnh đề " $1^2 < 10$ " có chân trị đúng, do đó mệnh đề $\exists xP(x)$ có chân trị đúng.

■ **Ví dụ 1.24** Với T là tập hợp tất cả máy tính trong trường, $P(x)$ là phát biểu "Máy tính x đang bị hacker tấn công". $\exists x \in T, P(x)$ là mệnh đề "Có máy tính trong trường đang bị hacker tấn công". ■

Chúng ta đã nói về lượng từ phổ dụng và tồn tại là hai loại lượng từ quan trọng nhất trong toán học và khoa học máy tính. Tuy vậy, thực tế là số lượng lượng từ khác nhau là không có giới hạn, chúng ta có thể có các phát biểu: "không nhiều hơn hai", "chính xác là năm", "không ít hơn mười" ... Trong đó có phát biểu "Tồn tại một giá trị x duy nhất sao cho $P(x)$ " có thể được viết lại thành $\exists! xP(x)$ [hoặc $\exists_1 xP(x)$].

Các lượng từ \forall và \exists có mức độ ưu tiên cao hơn tất cả các toán tử logic trong mệnh đề. Ví dụ $\forall xP(x) \vee Q(x)$ là hội của $\forall xP(x)$ và $Q(x)$. Nó mang nghĩa $(\forall xP(x)) \vee Q(x)$ hơn là $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Mệnh đề	Chân trị đúng	Chân trị sai
$\forall xP(x)$	$P(x)$ có chân trị đúng với mọi x	Có 1 x khiến $P(x)$ sai
$\exists xP(x)$	Có 1 x khiến $P(x)$ đúng	$P(x)$ có chân trị sai với mọi x

Bảng 1.15: Lượng từ

1.3.3 Tương đương logic liên quan đến lượng từ

Định nghĩa 1.3.4 Các phát biểu liên quan đến vị từ và lượng từ được gọi là tương đương logic khi và chỉ khi chúng có cùng chân trị với bất kì vị ngữ nào được thay thế vào hàm mệnh đề và miền giá trị được sử dụng trong các biến mệnh đề. Chúng ta sử dụng $S \equiv T$ để chỉ ra rằng S và T là các vị từ hoặc lượng từ tương đương logic.

■ **Ví dụ 1.25** Chứng minh rằng: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$. ■

Giả sử mệnh đề $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ có chân trị đúng. Điều này có nghĩa là nếu a nằm trong miền giá trị thì $P(a) \wedge Q(a)$ có chân trị đúng. Vì $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng với mọi giá trị x trong miền giá trị nên ta có thể kết luận rằng $\forall xP(x)$ và $\forall xQ(x)$ đều đúng có nghĩa là $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ đúng.

Tiếp theo giả sử mệnh đề $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ có chân trị đúng thì $P(x)$ đúng và $Q(x)$ đúng. Nếu a thuộc miền giá trị x thì $P(a)$ và $Q(a)$ có chân trị đúng. Theo đó, với mọi a , $P(a) \wedge Q(a)$ đúng tương đương với $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ có chân trị đúng. Chúng ta có thể kết luận rằng:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x).$$

1.3.4 Phủ định lượng từ

Cho một phát biểu sau:

"Mọi học sinh trong lớp đều qua môn toán rời rạc".

Phát biểu này là một lượng từ phổ dụng:

$$\forall xP(x)$$

Trong đó $P(x)$ là phát biểu "học sinh x qua môn toán rời rạc" và miền giá trị là tất cả học sinh trong lớp. Phủ định của mệnh đề trên là: "Không phải tất cả học sinh trong lớp đều qua môn toán rời rạc" hay cũng có thể viết lại là "Có học sinh trong lớp không qua môn toán rời rạc". Và đây chính là phủ định của mệnh đề ban đầu có thể được viết lại thành:

$$\exists x \neg P(x)$$

Ví dụ trên minh họa cho sự tương đương logic sau:

$$\text{Định lý 1.3.1 } \neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x).$$

Để chỉ ra sự tương đương logic giữa $\neg \forall x P(x)$ và $\exists x \neg P(x)$, trước tiên ta biết rằng $\neg \forall x P(x)$ đúng khi và chỉ khi $\forall x P(x)$ có chân trị sai và $\forall x P(x)$ có chân trị sai nếu và chỉ nếu tồn tại ít nhất một phần tử trong tập giá trị x mà $P(x)$ có chân trị sai. Điều trên tương ứng với $\exists x \neg P(x)$, ta có thể kết luận $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.

Giả sử chúng ta có một phát biểu như sau:

" x đã tham gia học một buổi toán rời rạc".

Phát biểu này là một lượng từ tồn tại:

$$\exists x Q(x)$$

Trong đó $Q(x)$ là phát biểu " x đã tham gia một buổi toán rời rạc". Phủ định của phát biểu này là phát biểu "không có học sinh trong nào lớp tham gia bất kỳ buổi học toán rời rạc nào" hay có thể viết lại là "Cả lớp không tham gia buổi học toán rời rạc nào". Đây chính là phủ định của mệnh đề ban đầu và có thể được viết lại thành:

$$\forall x \neg Q(x)$$

Ví dụ trên minh họa cho sự tương đương logic sau:

$$\text{Định lý 1.3.2 } \neg \exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg Q(x)$$

Để chỉ ra sự tương đương logic giữa $\neg \exists x Q(x)$ và $\forall x \neg Q(x)$, trước tiên ta có $\neg \exists x Q(x)$ đúng khi và chỉ khi $\exists x Q(x)$ có chân trị sai và $\exists x Q(x)$ có chân trị sai nếu và chỉ nếu với mọi x trong tập giá trị của x , $Q(x)$ có chân trị sai. Điều trên tương ứng với $\forall x \neg Q(x)$, ta có thể kết luận $\neg \exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg Q(x)$.

Sự phủ định	Mệnh đề tương đương	Trường hợp đúng	Trường hợp sai
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	$P(x)$ có chân trị sai với mọi x	Tồn tại giá trị x mà $P(x)$ có chân trị đúng
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Tồn tại giá trị x mà $P(x)$ có chân trị đúng	$P(x)$ có chân trị sai với mọi x

Bảng 1.16: Quy luật **Morgan** cho lượng từ

Nhận xét: Khi miền giá trị của một vị từ $P(x)$ gồm n phần tử, trong đó n là một số nguyên dương lớn hơn 1, các quy tắc để phủ định các lượng từ hoàn toàn giống như quy luật Morgan, đây là lý do vì sao những quy tắc này được gọi là quy luật Morgan cho lượng từ. Khi miền giá trị có n phần tử x_1, x_2, \dots, x_n , $\neg \forall x P(x)$ tương đương với $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n))$ tương đương logic với $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \dots \vee \neg P(x_n)$ và điều này tương ứng với $\exists x \neg P(x)$. Tương tự ta có $\neg \exists x P(x)$ tương đương với $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n))$ tương đương logic với $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n)$ và điều này tương ứng với $\forall x \neg P(x)$.


■ **Ví dụ 1.26** Tìm phủ định của các phát biểu "Có học sinh đã làm bài tập" và "Cả lớp đều trên trung bình". ■

Gọi $H(x)$ đại diện cho phát biểu "Học sinh x đã làm bài tập", mệnh đề "Có học sinh đã làm bài tập" có thể được viết lại thành $\exists x H(x)$ trong đó miền giá trị của x là các bạn học sinh trong lớp. Phủ định của

2. Basic Structure



Hầu hết toán rời rạc dùng để nghiên cứu về các cấu trúc rời rạc được sử dụng để biểu diễn các đối tượng rời rạc. Ở chương này ta sẽ tìm hiểu các cấu trúc cơ bản như: tập hợp, hàm, dãy, phép tổng và ma trận.



Trích dẫn

Books

Articles

