RDS-project, 2022, pp. 1–11

Project links: https://nprm1243.github.io/RDS-project-web
Access Publication Date: 06/03/2022
Weekly academic article | 01

WEEKLY ACADEMIC ARTICLE | 01

Đại số tuyến tính

Nguyễn Lê Ngọc Duy, Võ Thị Khánh Linh, Quách Đại Tài
và Nguyễn Trung Đức

Góp ý, hỗ trợ dự án: rdsproject2021@gmail.com
Cộng tác viên hỗ trợ: Đoàn Ánh Dương, Nguyễn Kiều Phương Nhi, Lê Hồ Hoàng Anh, Mã Thùy Anh, Trần Đức Trung, Phạm Duy Sơn, Nguyễn Nhật Minh Thư, Huỳnh Thị Thu Thoảng, Lê Huy Bảo, Trần Hoàng Quân

Tóm tắt

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu đến các bạn những định nghĩa cơ bản của ma trận như ma trận bậc thang, ma trận khả nghịch... Đây là những khái niệm quan trọng và nền tảng trong Đại số tuyến tính.

Từ khóa: matrix, row echelon form, Gauss - Jordan, inverse matrix

Trong chương này, ký hiệu K dùng để chỉ trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức $\mathbb{C}$.

1. Cơ bản về ma trận

Định nghĩa: Một ma trận loại $m \times n$ trên K là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong K có dạng:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Viết tắt :

$A = a_{(ij)_{m\times n}}$ hay $A = a_{(ij)}$, trong đó $a_{ij} \in K$

a_{ij} : hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A (hệ số này còn được ký hiệu bởi $[A_{ij}]$)

$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$: dòng thứ i của ma trận A

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$: cột thứ j của ma trận A

Ký hiệu: $M_{m\times n}(K)$ là tập hợp tất cả những ma trận loại $m \times n$ trên K.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 3-i & 4 \\ 5 & 6+2i \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$.

2. Các loại ma trận

2.1. Ma trận bằng nhau

Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$.
Ta nói A bằng B, ký hiệu $A = B$, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Ví dụ: Hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ bằng nhau.

2.2. Ma trận không

Ma trận không loại $m \times n$, ký hiệu $0_{m\times n}$ hay 0, là ma trận loại $m \times n$ mà tất cả các hệ số đều bằng 0

Ví dụ: $A = 0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = 0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = 0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3. Ma trận vuông

Ma trận vuông cấp n là một ma trận loại $n \times n$ (nghĩa là số dòng = số cột = n). Trong mỗi ma trận vuông cấp có một *đường chéo chính* (gọi tắt là đường chéo) gồm các hệ số a_{ii}, $1 \le i \le n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Tập các ma trận vuông cấp n trên K được ký hiệu là $M_n(K)$.

Ví dụ: $A = M_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = M_3(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

2.4. Ma trận chéo

Ma trận chéo cấp n là một ma trận vuông cấp n mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2.5. Ma trận đơn vị

Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu $\mathbf{I}_n$ hay $\mathbf{I}$, là ma trận chéo cấp n mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nghĩa là $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ với δ_{ij} là ký hiệu Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$

Ví dụ: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.6. Ma trận tam giác trên và ma trận tam giác dưới

Ma trận tam giác trên (tương ứng ma trận tam giác dưới) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương ứng phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. Như vậy:

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận tam giác trên $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 13 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác trên.

$B = (b_{ij})_{n\times n}$ là ma trận tam giác dưới $\Leftrightarrow b_{ij} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác dưới.

3. Các phép toán với ma trận

3.1. Phép lấy chuyển vị

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận loại $m\times n$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^{T} (T ở đây nghĩa là Transpose), là ma trận loại $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Như vậy, $[A^{\mathsf{T}}]_{ij} = [A]_{ji}$.

Ví dụ: Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, Ta có $A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.2. Phép nhân vô hướng với ma trận

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $\alpha \in K$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A cho α, nghĩa là

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

Như vậy, $[\alpha A]_{ij} = \alpha[A]_{ij}$.

Ví dụ: $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ký hiệu: $-A := (-1)A = (-a_{ij})_{m\times n}$
Từ định nghĩa, ta dễ dàng kiểm tra được các tính chất sau:
Tính chất: Với $A = (a_{ij})$ và $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ ta có:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
2. $(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}$.
3. $0.A = 0$ và $1.A = A$.

3.3. Phép cộng ma trận

Cho hai ma trận cùng loại $m \times n$: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Ta định nghĩa tổng hai ma trận A và B, ký hiệu $A + B$, là ma trận loại $m \times n$ mà các hệ số có được bằng cách lấy tổng của các hệ số tương ứng của A và B, nghĩa là $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$. Như vậy, $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$.

Ta cũng định nghĩa phép trừ như sau: $A - B := A + (-B)$ và gọi là *hiệu* của A và B.

Ví dụ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng có được các tính chất sau:

Với $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ và $\alpha\beta \in K$ ta có:

1. $A + B = B + A$ (tính giao hoán);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (tính kết hợp);
3. $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;
5. $(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$;
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
8. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

3.4. Phép nhân ma trận

Cho hai ma trận A và B có tính chất: **Số cột** của ma trận $\boldsymbol{A}$ bằng **số dòng** của ma trận $\boldsymbol{B}$. Cụ thể, $A = (a_{ij})$ loại $m \times n$ và $B = (b_{ij})$ loại $n \times p$. Ta định nghĩa tích của hai ma trận A và B, ký hiệu AB, là ma trận C loại $m \times p$ định bởi:

1. Về loại: C có loại $m \times p$.
2. C có hệ số dòng i, cột j được tính bởi công thức: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Nói cách khác, hệ số ở dòng i, cột j của AB có được bằng cách nhân các hệ số ở dòng i của ma trận A với các hệ số tương ứng ở cột j của ma trận B rồi lấy tổng của chúng:

Chú ý: Tích của hai ma trận chỉ tồn tại khi **số cột của ma trận trước bằng số dòng của ma trận sau**. Ta ghi nhớ kết quả về loại của ma trận tích thông qua ký hiệu hình thức: $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$

Ví dụ: $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ta có :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

nhưng AC và CB không xác định.

Tính chất: Cho $A \in M_{m\times n}(K)$, $\quad B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(K)$, $\quad C \in M_{p\times q}(K)$, $\quad D_1, D_2 \in M_{q\times n}(K)$.

1. $\mathbf{I}_m A = A$ và $A\mathbf{I}_n = A$. Đặc biệt, với $A \in M_n(K)$, ta có

$$\mathbf{I}_n A = A\mathbf{I}_n = A$$

.

2. $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ và $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. Đặc biệt, với $A \in M_n(K)$, ta có

$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$

3. $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.
4. Phép nhân ma trận có tính kết hợp:

$$(AB)C = A(BC).$$

5. Phép nhân ma trận có tính phân phối đối với phép cộng:

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2,$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2B.$$

Chú ý:

1. Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường ta có $AB \neq BA$ (Xem ví dụ trên).
2. Nhiều tính chất quen thuộc của phép nhân giữa các số thực không còn đúng đối với phép nhân ma trận, chẳng hạn với: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $A^2 = 0; AB = 0; AB = AC$, nhưng $A, B \neq 0_2$ và $B \neq C$.

3.5. Luỹ thừa của ma trận vuông

Cho A là một ma trận vuông. Khi đó *lũy thừa* bậc k của A, kí hiệu A^k, được xác định như sau:

$$A^0 := I_n; A^1 = A; A^2 = AA; ...A^k = A^{k-1}A$$

Như vậy từ định nghĩa trên ta có $A^k := \underbrace{A...A}_{k}$

Chú ý: Vì phép nhân ma trận không giao hoán nên nói chung đối với ma trận ta không có các hằng đẳng thức tương tự như các hằng đẳng thức về số.

4. Phép biến đổi sơ cấp - Hạng của ma trận

4.1. Phép biến đổi sơ cấp

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi **phép biến đổi sơ cấp trên dòng** (tương ứng **phép biến đổi sơ cấp trên cột**), viết tắt là BĐSCTD (tương ứng với BĐSCTC) trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

1. *Loại 1:* Hoán vị hai dòng i và j (tương ứng cho cột). Ký hiệu: $d_i \leftrightarrow d_j$ (hoặc $c_i \leftrightarrow c_j$)
2. *Loại 2:* Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$ (tương ứng cho cột). Ký hiệu: αd_i (hoặc αc_i).
3. *Loại 3:* Cộng vào dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$ (tương ứng cho cột). Ký hiệu $d_i + \beta d_j$ (hoặc $c_i + \beta c_j$).

Lưu ý: Khi ta ghi $d_3 - 3d_1$ thì ta lấy d_3 trừ 3 lần d_1 và kết quả ghi ở d_3.

Ví dụ 1: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ví dụ 2: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2c_2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 16 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

4.2. Ma trận tương đương dòng

Nhận xét: Cho A là ma trận và $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

1. Nếu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_j \leftrightarrow d_i} A$
2. Nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $A' \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} d_i} A$
3. Nếu $A \xrightarrow{d_i + \beta d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i - \beta d_j} A$

Định nghĩa: Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A *tương đương dòng* với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A thông qua hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó, hay nói cách khác, tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ sao cho $A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} ... \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B$

Nhận xét: Quan hệ tương đương dòng của ma trận là một quan hệ tương đương, nghĩa là $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, ta có:

1. $A \sim A$ (*tính phản xạ*).
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (*tính đối xứng*).
3. $A \sim B$ và $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (*tính bắc cầu*).

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ là hai ma trận tương đương dòng do:

$A \xrightarrow{2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 - d_2} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} d_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$

4.3. Ma trận dạng bậc thang và ma trận dạng bậc thang rút gọn

PHẦN TỬ CƠ SỞ: Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác 0 đầu tiên của một dòng kể từ bên trái qua được gọi là *phần tử cơ sở* của dòng đó.

Ví dụ: Cho ma trận $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó ta có nhận xét sau:

1. Dòng 1 có phần tử cơ sở là 1.
2. Dòng 2 có phần tư cơ sở là 2.
3. Dòng 3 có phần tử cơ sở là 9.
4. Dòng 4 không có phần tử cơ sở nào cả.

MA TRẬN BẬC THANG: Một ma trận được gọi là *ma trận bậc thang* nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

1. Các dòng bằng không (nếu có) luôn nằm dưới.
2. Phần tử cơ sở của dòng dưới luôn nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Ví dụ 1: Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang vì các phần tử cơ sở (1, 2, 7) của dòng ở bên dưới luôn luôn nằm bên phải so với phần từ cơ sở của dòng ở bên trên.

Ví dụ 2: Ma trận $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ không phải ma trận bậc thang vì phần tử cơ sở ở dòng 3 là 1 nằm ở bên trái phần tử cơ sở ở dòng 2 là 9.

MA TRẬN BẬC THANG RÚT GỌN: Một ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu nó thỏa 3 tính chất sau:

1. A là ma trận bậc thang.
2. Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
3. Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các phần tử không phải phần tử cơ sở đều bằng 0.

Ví dụ 1: Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang rút gọn.

Ví dụ 2: Ma trận $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ không phải là ma trận bậc thang rút gọn vì ở cột 2 phần tử 3 không phải là phần tử cơ sở ở dòng 1 nhưng lại có giá trị khác 0.

4.4. Hạng của ma trận

DẠNG BẬC THANG. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một dạng bậc thang của A.

Ví dụ. Xét hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Khi đó B là một dang bậc thang của A do: $A \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} B$

Nhận xét. Một ma trận A có thể có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên điểm chung của các dạng bậc thang này là chúng đều có số dòng khác 0 bằng nhau. Ta gọi số dòng khác 0 này là hạng của A, ký hiệu $r(A)$.

Ví dụ. Ma trận $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có số dòng khác 0 là 3, do đó $r(A) = 3$

Mệnh đề. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó:

1. $0 \le r(A) \le \min\{m, n\}$
2. $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$
3. $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$
4. $r(A^T) = r(A)$

DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là dạng bậc thang rút gọn của A. Dạng bậc thang rút gọn của ma trận A là duy nhất và được ký hiệu là R_A.

Ví dụ. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Ta có:

$$A \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1-2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Như vậy ta có ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rõ ràng B là một ma trận bậc thang rút gọn, suy ra B là một dạng bậc thang rút gọn của A, hay $R_A = B$.

CÁCH TÌM MỘT DẠNG BẬC THANG CỦA MA TRẬN.

Để tìm được một dạng bậc thang của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta sử dụng thuật toán Gauss sau:

Bước 1 Cho $i := 1, j := 1$

Bước 2 Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.

Bước 3
- Nếu $a_{ij} \neq 0$, thực hiện các phép biến đổi: $d_k - \dfrac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i$ với $k > i$
- Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về **bước 2**
- Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang **bước 4**

Bước 4
- Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép biến đổi $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về **bước 3**
- Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về **bước 2**

Ví dụ 1. Tìm một dạng bậc thang của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$. Xác định hạng của A.

Lời giải.

$$A \xrightarrow[d_4 - 6d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đặt $R = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó R là một dạng bậc thang với 3 dòng nên hạng của A là $r(A) = 3$.

Lưu ý.

1. Trong quá trình đưa về dạng bậc thang, ta nên sử dụng các phép biến đổi phù hợp để hạn chế việc tính toán các số không đẹp.
2. Vì $r(A) = r(A^T)$ nên trong quá trình tính toán hạng của A ta có thể sử dụng các *phép biến đổi sơ cấp trên cột*.

Ví dụ 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Tìm tất cả các giá trị m để $r(A) = 3$

Lời giải.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$

Để $r(A) = 3$ thì dòng $(0 \quad 0 \quad m-1)$ hay $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ví dụ 3. Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(B) = 2$.

Lời giải.

Ta có $B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 - md_1]{d_3 - md_2} \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1 - m^2 & m - m^2 \\ 0 & m - m^2 & 1 - m^2 \end{pmatrix}$ $(*)$. Xét các trường hợp:

- Nếu $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$
  - Với $m = 1$ ta có $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $r(A) = 1$

– Với $m=-1$, ta có:
$$A\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{-1}{2}d_3]{\frac{-1}{2}d_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1+d_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1+d_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
Suy ra $r(A)=3$

- Nếu $-m^2+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm1$. Khi đó:
$$(*)\xrightarrow{d_3-\dfrac{-m^2+m}{-m^2+1}d_2}\begin{pmatrix}1&m&m\\0&1-m^2&m-m^2\\0&0&\dfrac{-2m^2+m+1}{m+1}\end{pmatrix}$$. Ma trận A có $r(A)=2$ thì
$\dfrac{-2m^2+m+1}{m+1}=0\Leftrightarrow -2m^2+m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2},m=1(l)$. Kết luận: $m=-\dfrac{1}{2}$

CÁCH TÌM DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN CỦA MA TRẬN.
Để tìm được dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta sử dụng thuật toán Gauss - Jordan. Về cơ bản, thuật toán Gauss - Jordan tương tự như thuật toán Gauss, chỉ khác ở bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- $\dfrac{1}{a_{ij}}d_i$.
- $d_k-a_{kj}d_i,\forall k\neq i$

Ví dụ 1. Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận: $A=\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\1&7&-1&-2&-2\\2&14&2&7&0\\6&42&3&13&-3\end{pmatrix}$

Lời giải.

Ta có $A\xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1\\d_3-2d_1}}\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\0&0&-2&-5&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&-3&-5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4+3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2\\d_1-d_2}}\begin{pmatrix}1&7&0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1&\frac{5}{2}&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1-\frac{1}{2}d_3\\d_2-\frac{5}{2}d_3}}\begin{pmatrix}1&7&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
Ma trận trên chính là dạng bậc thang rút gọn của ma trận A.

Ví dụ 2. Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận: $B=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}$

Lời giải.

Ta có $B\xrightarrow{\frac{1}{3}d_3}\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[d_2-d_3]{d_1-2d_3}\begin{pmatrix}4&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}d_2}\begin{pmatrix}4&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1-3d_2}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow{\frac{1}{4}d_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$. Ma trận thu được chính là dạng bậc thang rút gọn của ma trận B.

5. Ma trận khả nghịch

5.1. Định nghĩa.

Định nghĩa. Cho $A\in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB=BA=I_n$. Khi đó ma trận B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A.
Mệnh đề 1. Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là **duy nhất**. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của

ma trận A là A^{-1}.
Định lý. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = I_n$ hay $BA = I_n$. Khi đó $A^{-1} = B$.
Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Nhận xét.

1. Ma trận đơn vị I_n khả nghịch và $I_n^{-1} = I_n$.
2. Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ có một dòng hoặc một cột bằng không thì ma trận A không khả nghịch.

Mệnh đề 2. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó:

1. A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. A^T khả nghịch và $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ta có αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề 3. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A và B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Ví dụ 2. Ta xét lại ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ có ma trận $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Khi đó:

1. Ma trận A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Ma trận $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Ma trận $2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(2A)^{-1} = \dfrac{1}{2} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-5}{2} \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$.

5.2. Nhận biết và cách tìm ma trận khả nghịch

Định lý. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

1. A khả nghịch.
2. $r(A) = n$.
3. $A \sim I_n$
4. Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:
$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \to \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$$
Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ sẽ biến ma trận đơn vị I_n thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:
$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \to \cdots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.
Lập ma trận $(A \mid I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:
$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 \mid B_1) \to \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p \mid B_p) \to \cdots$$
Trong quá trình biến đổi nếu xuất hiện ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng không thì A không khả nghịch. Ngược lại ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n \mid B)$. Khi đó A khả nghịch và $A^{-1} = B$.
Lưu ý. Nếu như ta chỉ muốn kiểm tra xem ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận A đó (bằng cách sử dụng thuật toán Gauss).
Ví dụ 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Lời giải.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-5d_1]{\substack{d_1-3d_2 \\ d_2-2d_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -5 & 15 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2-5d_3]{d_1+2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Suy ra A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2. Xét tính khả nghịch của ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và tìm B^{-1} (nếu có).

Lời giải.

$$(B \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4-4d_1]{\substack{d_2-2d_1 \\ d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-3d_2]{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Lúc này $r(B) < 4$, do đó ma trận B không khả nghịch.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị m để ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ khả nghịch.

Lời giải.

Ta có $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & 0 & -m-1 \end{pmatrix}$.

Ma trận C khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3$. Khi đó $-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Tài liệu