§12.3　静电场高斯定理的应用

例 假设有一球面，均匀带电，总电量Q，半径R 。

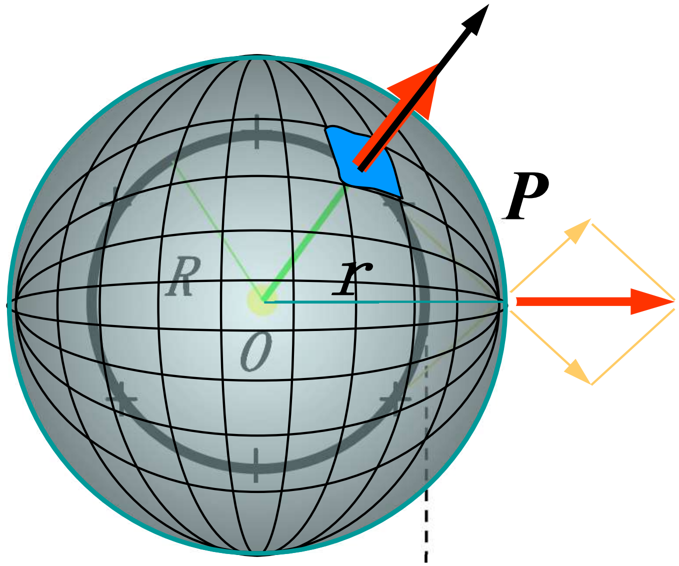
求 电场强度分布

解 $\vec{E}$ 沿球面法线方向。

取过P点的同心球面为高斯面，

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint E\mathrm{d}S = E4\pi r^2$$

由高斯定理 $E4\pi r^2 = \dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$

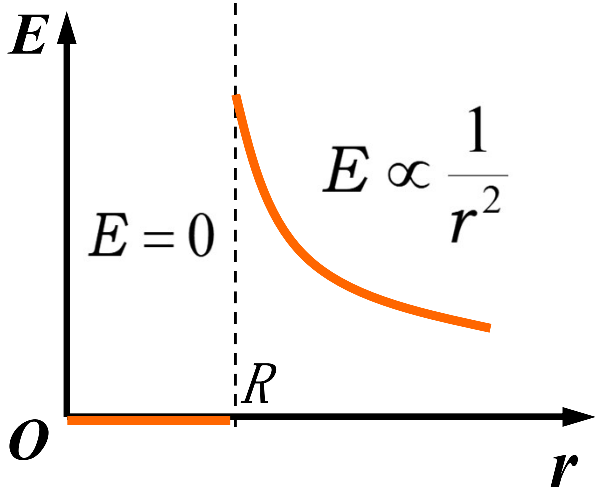


- 球外 （$r > R$）

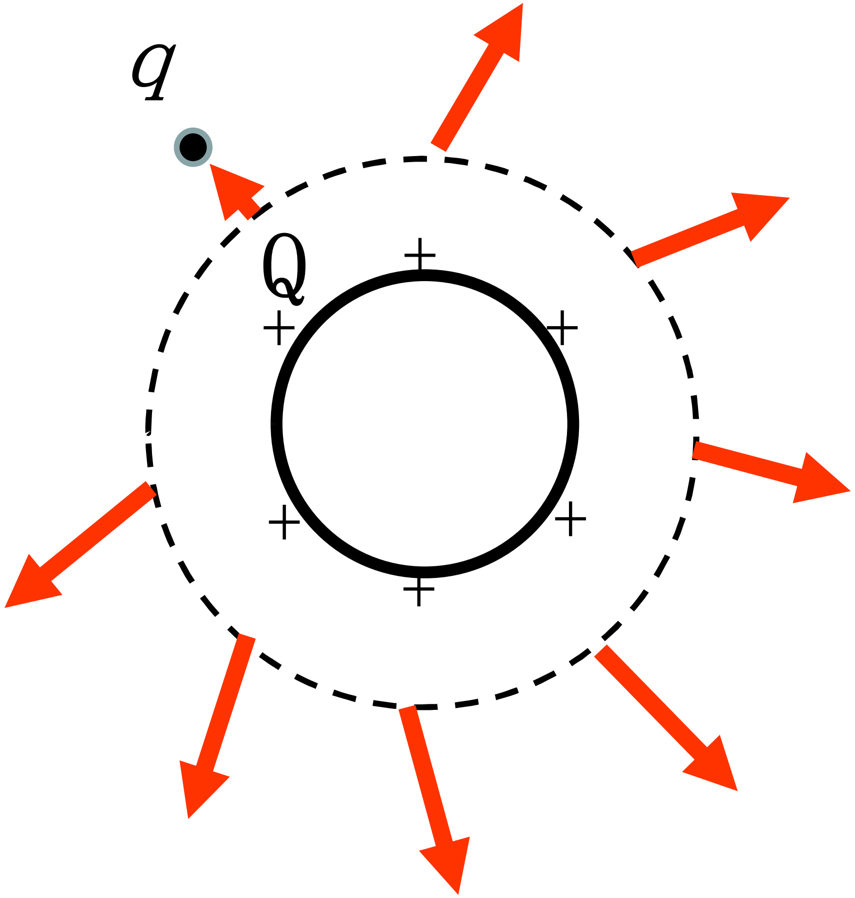
$$\sum q_{内} = Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

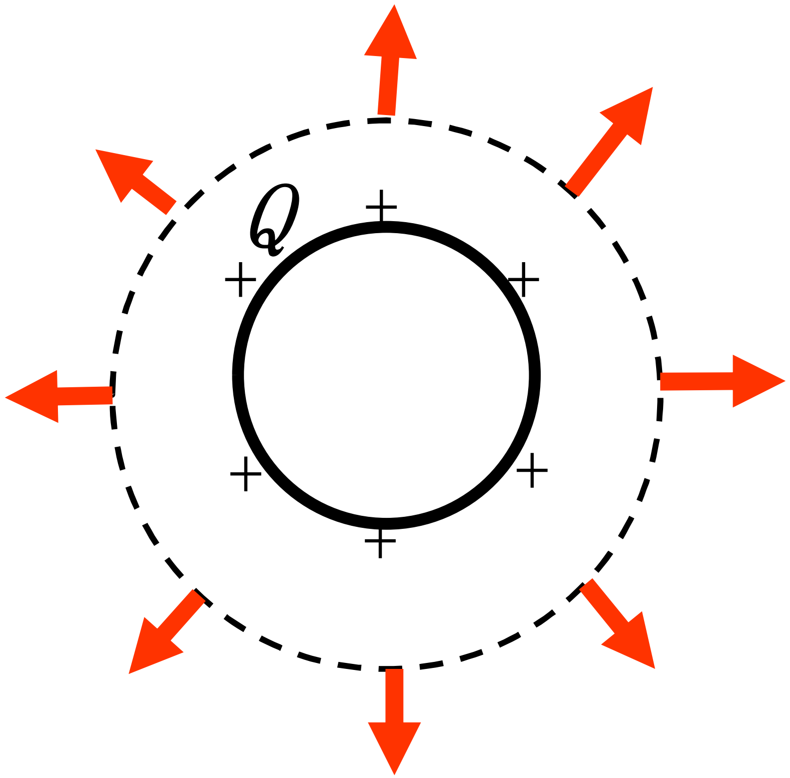
- 球内 （$r < R$）

$$\sum q_{内} = 0 \Longrightarrow E = 0$$



讨论：

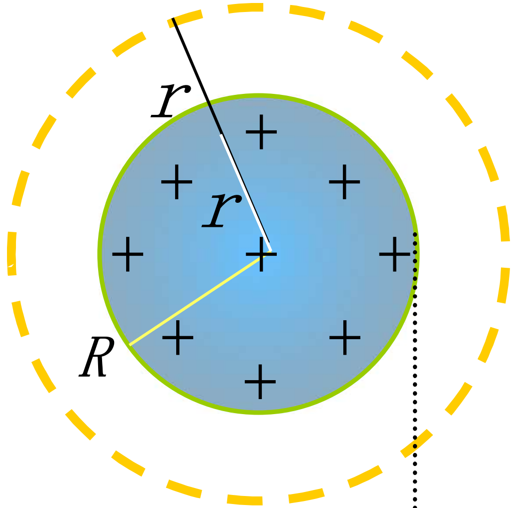




例 假设有一球体，均匀带电，半径为R，电荷体密度为ρ

求 电场强度分布

解 $\vec{E}$沿球面法线方向。



取同心球面为高斯面，电通量为

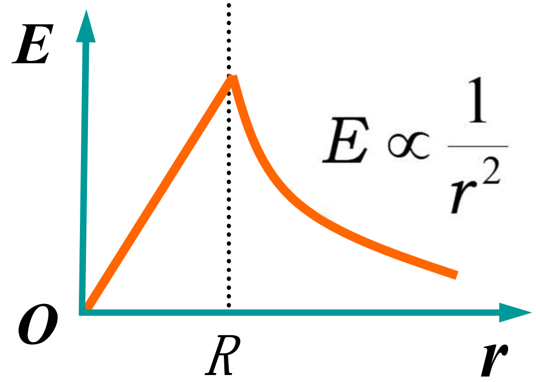
$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

- 球外($r > R$)

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

- 球内 ($r < R$)

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

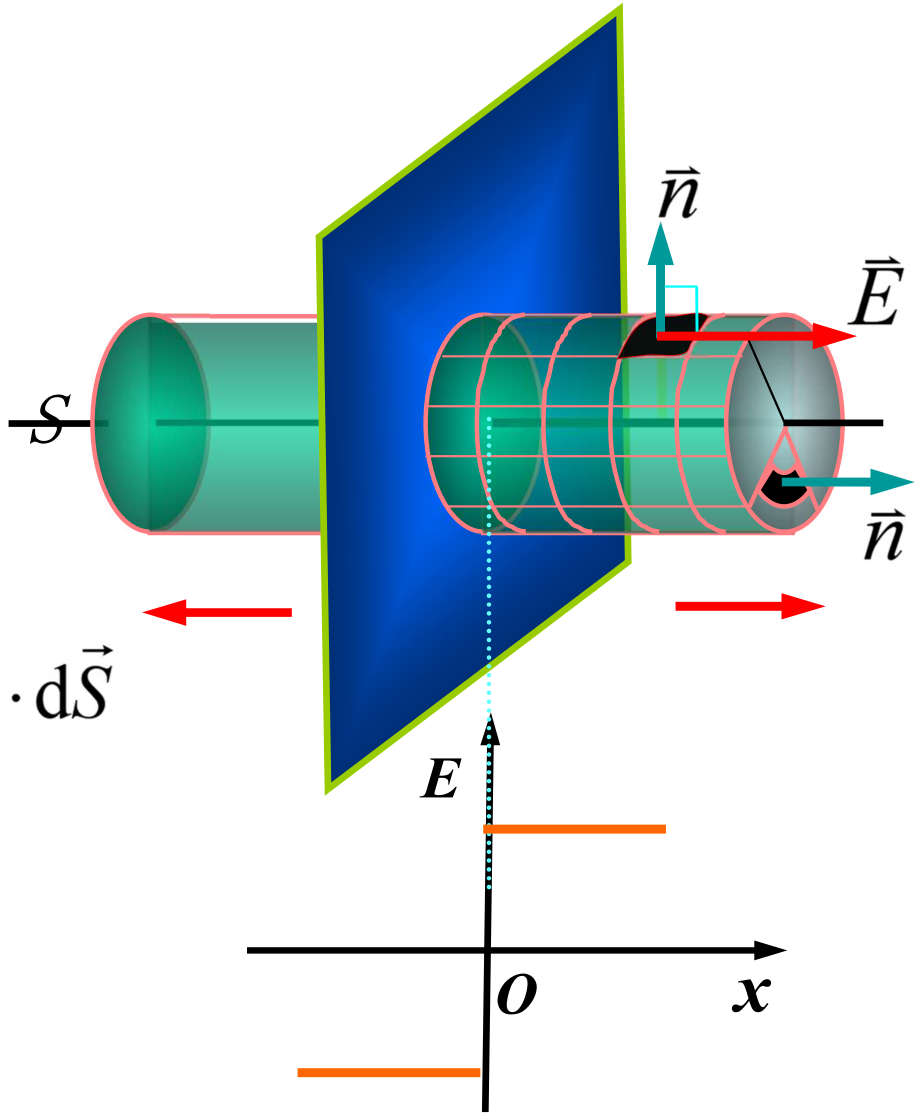


例 假设存在一“无限大”均匀带电平面，电荷面密度为σ

求 电场强度分布

解 电场强度垂直带电平面,

垂直带电面的圆柱形为高斯面



$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 0 + \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 2ES$$

根据高斯定理 $2ES = \sigma\, S / \varepsilon_0$ ⇨ $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

例 假设存在一“无限长” 均匀带电直线，电荷线密度为$+\lambda$

求 电场强度分布

解 电场分布具有轴对称性

以同轴圆柱面为高斯面

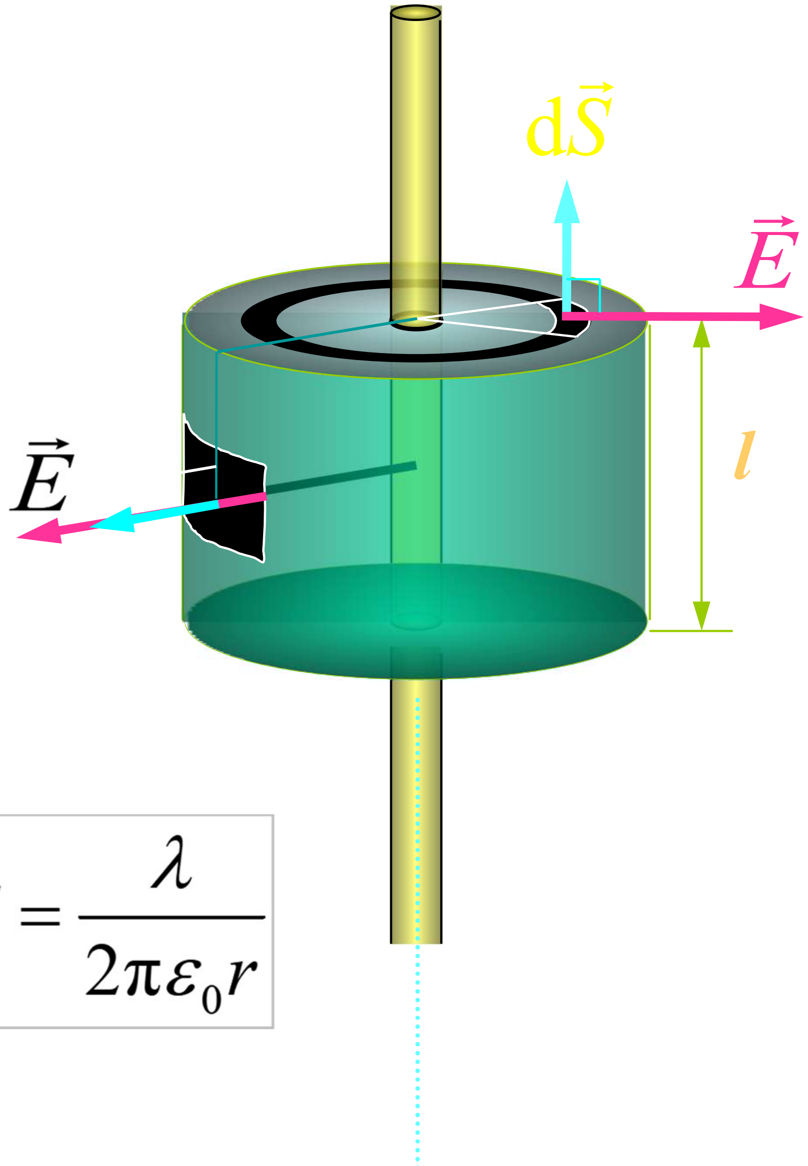
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\text{侧}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{上底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{下底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\text{侧}} E\mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r l$$

根据高斯定理 $E\cdot 2\pi r l = \lambda l / \varepsilon_0$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

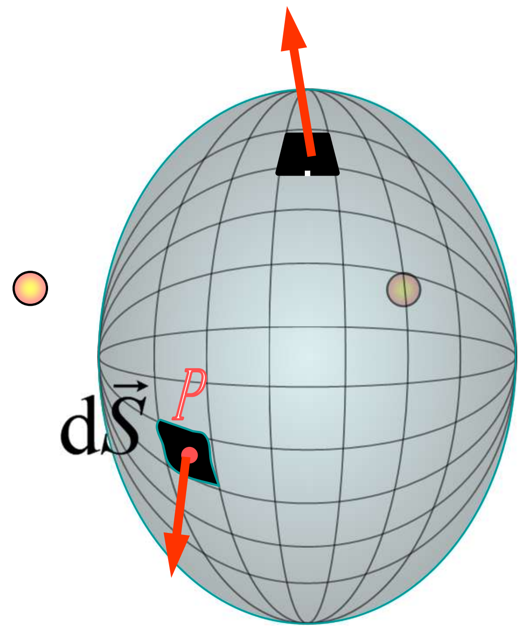


用高斯定理求电场强度须注意：

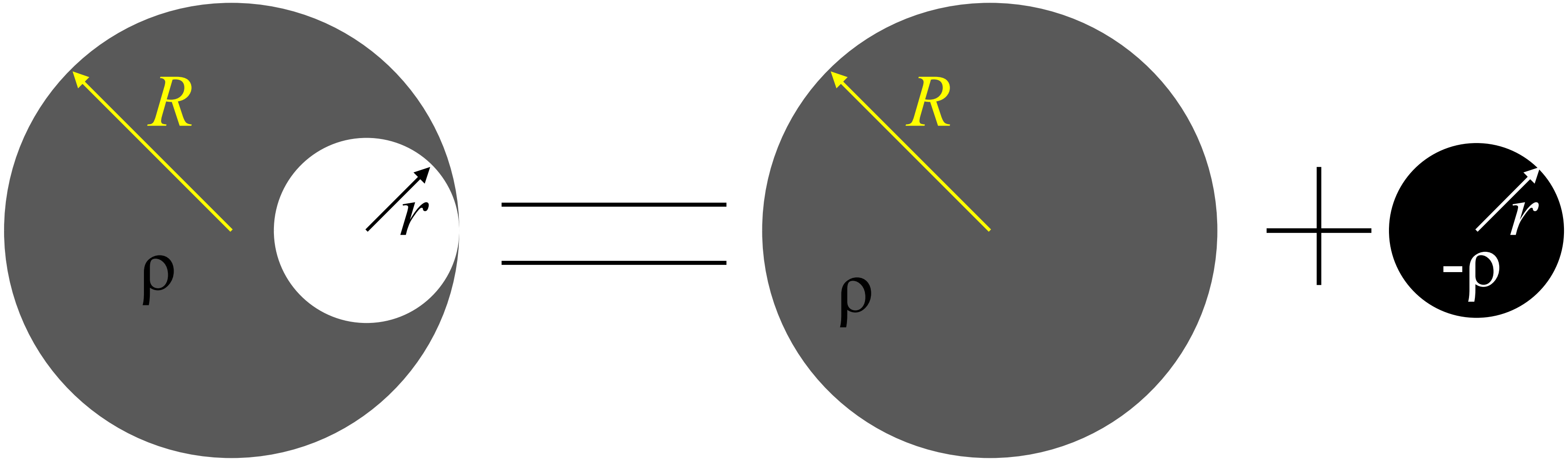
(1) 电荷分布的对称性决定电场强度分布的对称性。

(2) 高斯面的对称性与电荷分布的对称性相同。

(3) 若电荷分布无对称性，高斯定理依然成立但求解场强很困难。



补偿法



小结

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

§12.4 静电场的环路定理

为什么要讨论环路定理？

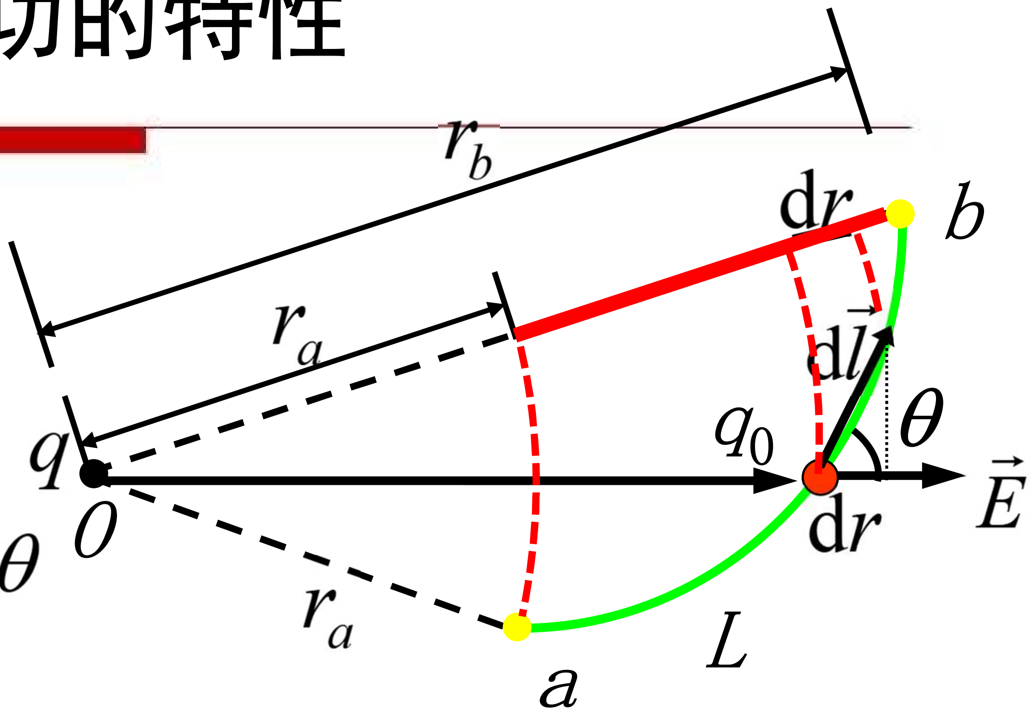
环路定理对静电场的“旋度”问题进行了说明，同时它也是麦氏方程组第二个方程的主体。

本讲基本要求

掌握静电场的环路定理的物理意义。

12.4.1 静电场力的作功的特性

静电场力的功



- 单个点电荷电场中

$$\mathrm{d}A = q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 E \, \mathrm{d}l \cos\theta$$

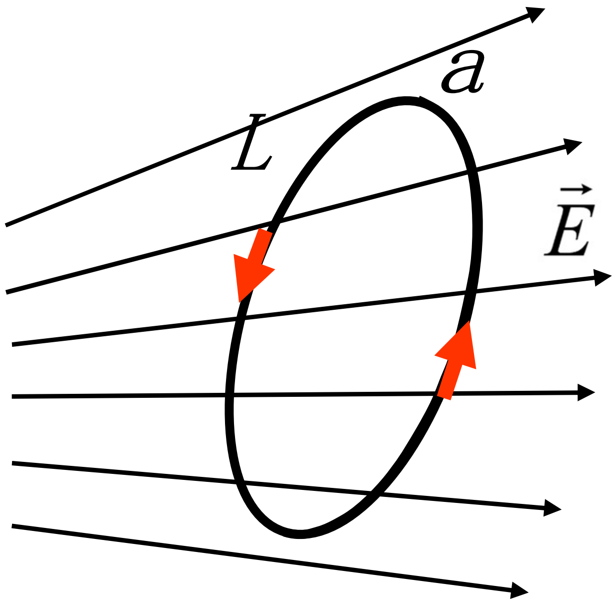
$$A = \int_{a(L)}^{b} \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

静电场力作功只与始末位置有关，与路径无关，所以静电力是保守力，静电场是保守力场。

12.4.2 静电场的环路定理

在静电场中，将q_0沿闭合路径L移动，电场力作功为：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



（静电场的环路定理）

在静电场中，电场强度的环流为零。

12.4.2 静电场的环路定理

- 讨论

(1) 可用环路定理检验一个电场是不是静电场。

(2) 电力线不能闭合。

(3) 静电场是有源、无旋场。

(4) 静电场保守场，可引进电势能。

12.4.3 电势能

由保守力作功与势能的关系：$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = W_a - W_b$

- 电荷在电场中某点处的电势能在量值上等于将电荷从该点移到电势能零点处电场力所作的功。

势能零点 $W_{“b”} = 0$

点$\boldsymbol{a}$的电势能：$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

讨论

（1） 系统共有

（2） 某点电势能与零点选取有关，而两点的差值与零点选取无关。

（3） 选势能零点的原则：

- 电荷分布有限，无穷远处。
- 电荷分布扩展到无限处，不能选在无穷远处。

（4） 外力反抗静电力做功，给系统输入能量，系统电势能增加；反之，系统能量减小。

小结

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$