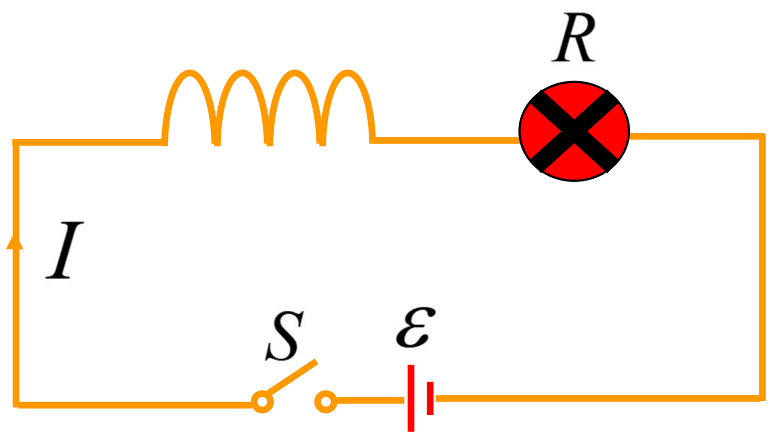
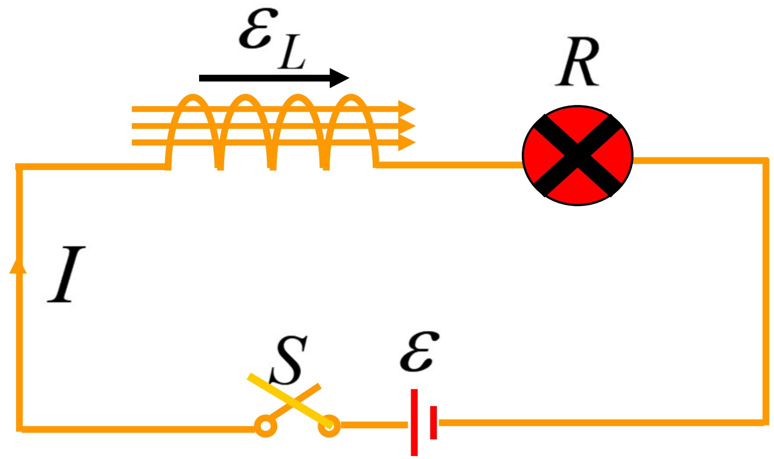
§15.6　磁场能量

本讲基本要求

掌握磁场能量的计算

15.6.1 自感储能





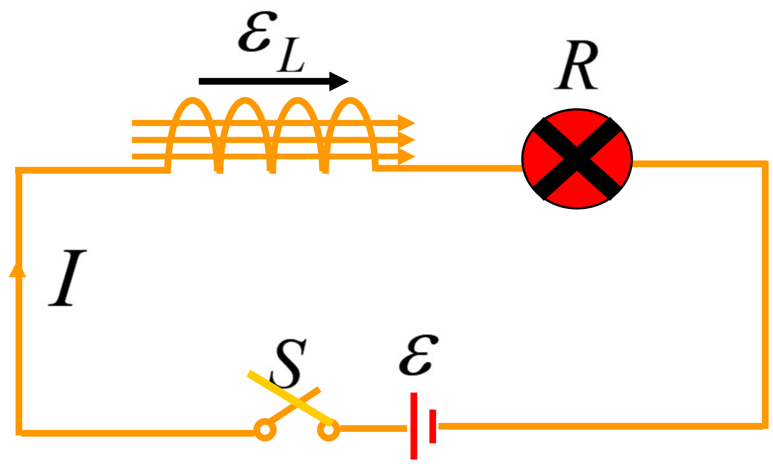
在通有电流的线圈中存在能量（磁能）

克服自感电动势作功后，将磁场能量存储在线圈中

15.6.1 自感储能

全电路欧姆定律 $\varepsilon + \varepsilon_L = IR$

自感电动势 $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$



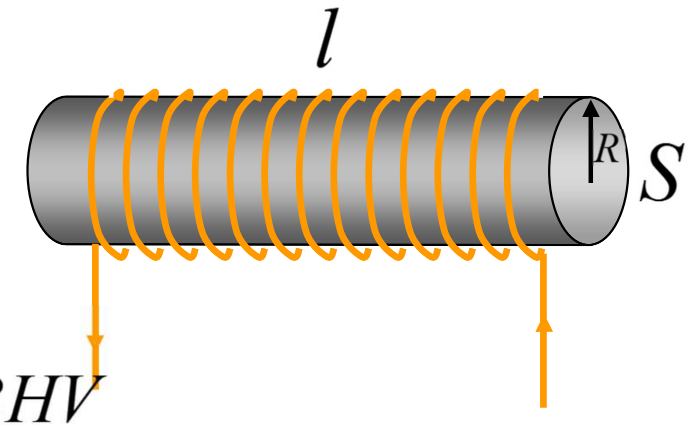
$$\underbrace{\varepsilon I \mathrm{d}t}_{\text{电源作的功}} = \underbrace{LI\mathrm{d}I}_{\text{自感电动势反抗电流所作的功}} + I^2 R\mathrm{d}t$$

$$W_{\mathrm{m}} = \int_0^I LI\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI^2$$

自感线圈中电流为I时,储藏在自感线圈中的磁场能量

15.6.2 磁场的能量密度

以通电螺线管为例：



$$L = \mu n^2 lS = \mu n^2 V \qquad B = \mu nI$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V\frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V = \frac{1}{2}BHV$$

能量密度 $$\boxed{\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}BH}$$ **(适用于任意磁场)**

非匀强磁场能量 $$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V$$

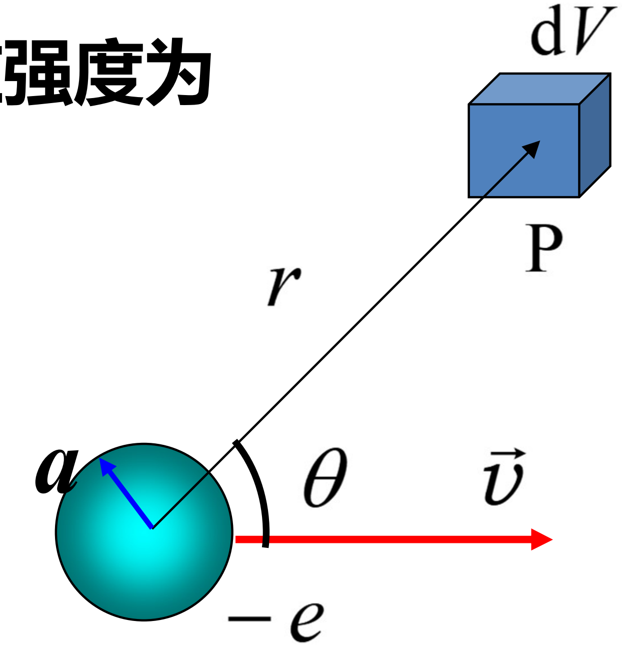
15.6.2 磁场的能量密度

➢ **讨论**

	磁场	电场
能量密度	$w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH$	$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$
非匀强场的能量	$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V$	$W_e = \int_V w_e\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}ED\mathrm{d}V$

例 **计算低速运动的电子的磁场能量，设其半径为a**

解 **低速运动的电子在空间产生的磁感应强度为**



$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev\sin\theta}{r^2} \Rightarrow H = -\frac{ev\sin\theta}{4\pi r^2}$$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 e^2 v^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^4}$$

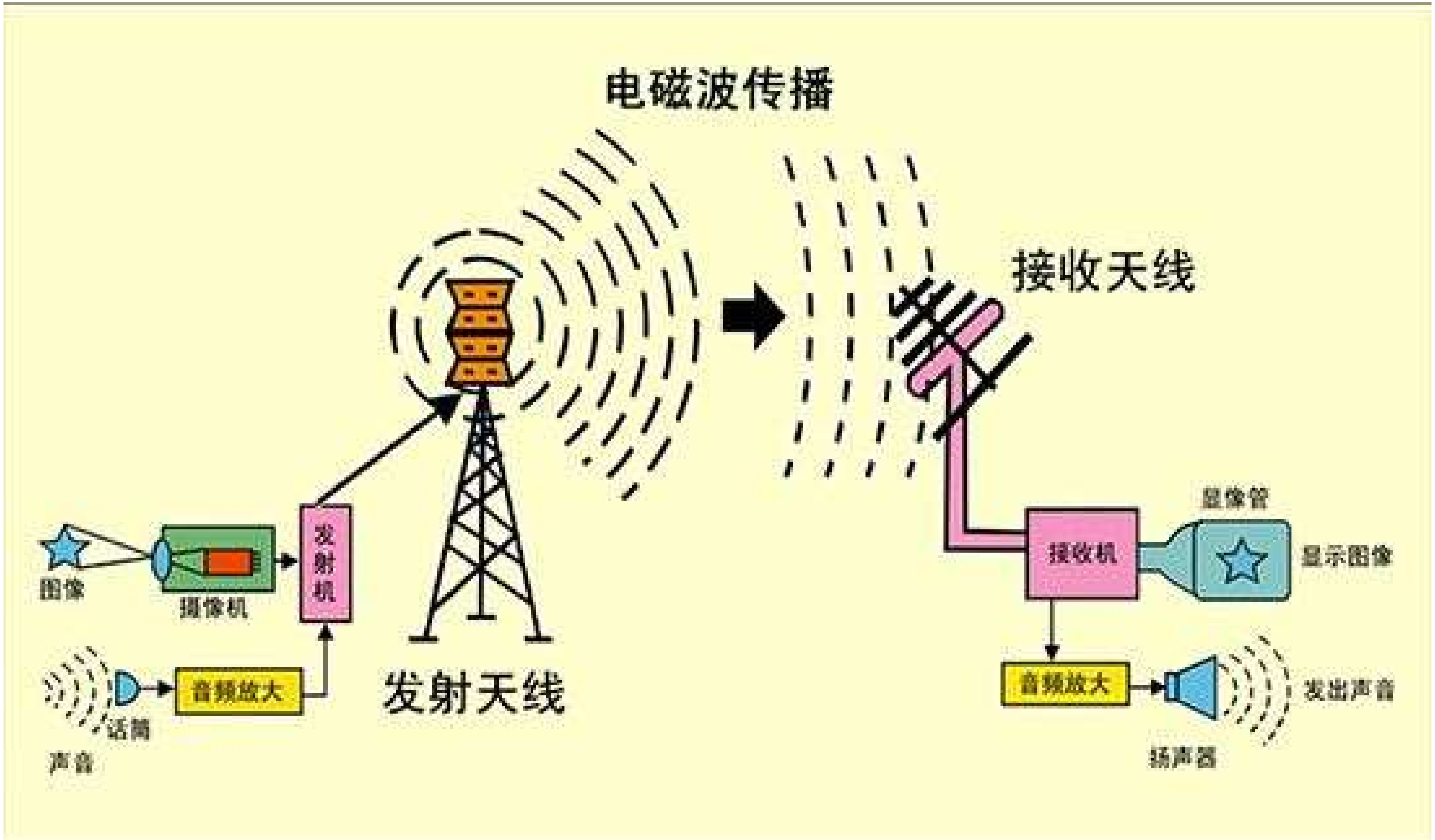
取体积元 $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$

$$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V$$

$$= \int_{R_0}^{\infty} r^2 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{e^2 v^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^4}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi a}$$

整个空间的磁场能量

第16章 麦克斯韦电磁场理论简介



§16.1　位移电流

主要内容：

1. 位移电流
2. 位移电流的磁场

§16.1　位移电流

静止电荷 ⟶ 静电场

稳恒电流 ⟶ 稳恒磁场

无相互作用
可独立研究

变化的磁场产生电场

?变化的电场产生磁场

统一的电磁场

16.1.1 位移电流

1. 问题的提出

稳恒电流 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

非稳恒电流

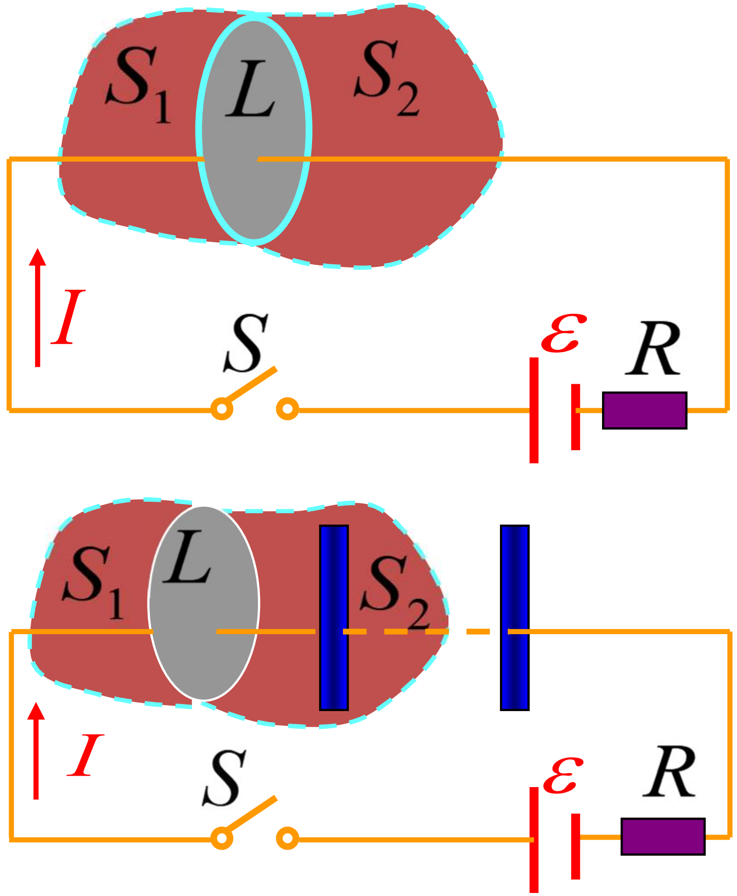
对S_1面 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

对S_2面 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

矛盾

稳恒磁场的安培环路定理

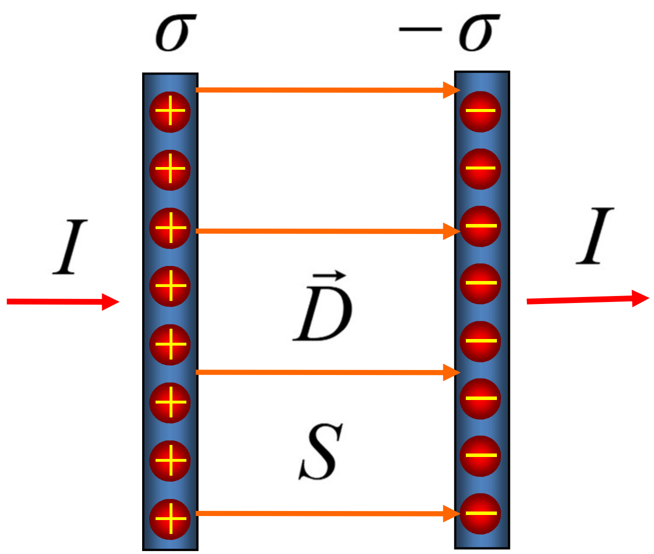
已不适用于非稳恒电流电路



16. 1. 1 位移电流

2. 位移电流

非稳恒电路中，电容器极板间存在着不断变化的电场



$$D = \sigma \Rightarrow \Phi_D = DS$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma S) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_{传}$$

通过计算我们发现：

电位移通量的变化率等于传导电流强度

16.1.1 位移电流

理论上：**麦克斯韦假设**

变化的电场 $\xrightarrow{\text{等效于}}$ **位移电流** $\xrightarrow{\text{产生}}$ **磁场**

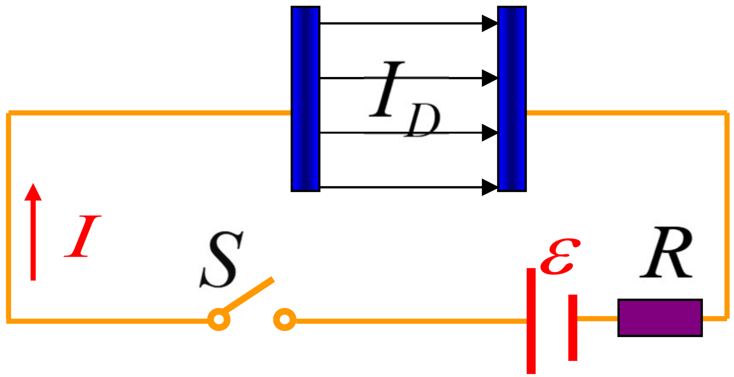
定义位移电流(变化电场)

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_s \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{位移电流密度}} \cdot d\vec{S}$$

位移电流假设：麦克斯韦电磁理论中的第二条假设

16. 1. 1 位移电流

全电流 $I_{全} = I_{传导} + I_{位移}$



电流在空间永远是连续不中断的，并且构成闭合回路

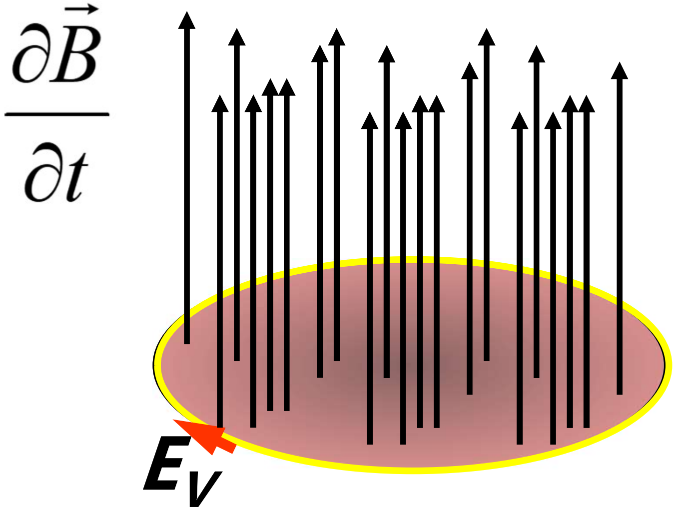
$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{传导} + I_{位移} = I_{传导} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

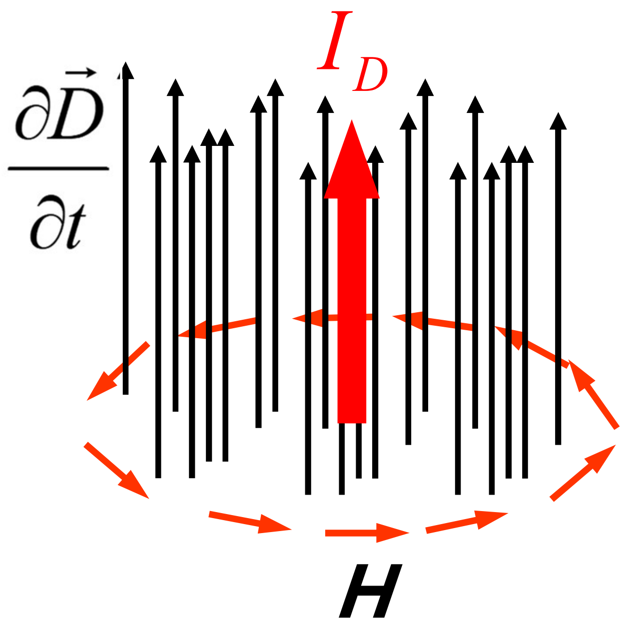
(全电流安培环路定理)

若传导电流为零 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

16.1.2 位移电流的磁场

$$\oint_L \vec{E}_{\mathrm{V}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$





变化磁场 → 涡旋电场　　　位移电流 → 磁场

16.1.2 位移电流

位移电流、传导电流的比较

(1)位移电流与传导电流都具有磁效应

(2)不同之处

- **产生机理不同**
- **存在条件不同：位移电流可以存在于真空中。**

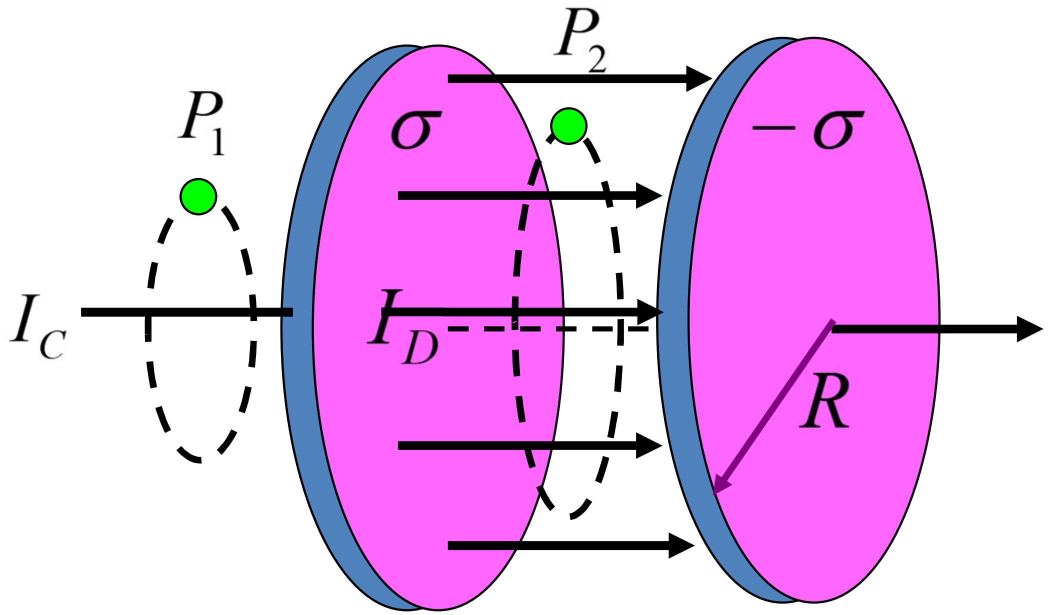
(3) 位移电流不产生焦耳热，传导电流产生焦耳热。

例 设平行板电容器极板为圆板，半径为R，两极板间距为d，用缓变电流I_C对电容器充电

求 P_1 ,P_2 点处的磁感应强度

解 任一时刻极板间的电场

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{D}{\varepsilon_0}$$



极板间的位移电流密度

$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}=\frac{I_C}{\pi R^2}$$

由全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_C+\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\quad \begin{cases} P_1: \quad H_1 2\pi r_1=I_C \Rightarrow B_1=\dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi r_1} \\ P_2: \quad H_2 2\pi r_2=\pi r_2^{\ 2} j_D \Rightarrow B_2=\dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi R^2} r_2 \end{cases}$$

16.2 麦克斯韦方程组的积分形式

麦克斯韦认为:

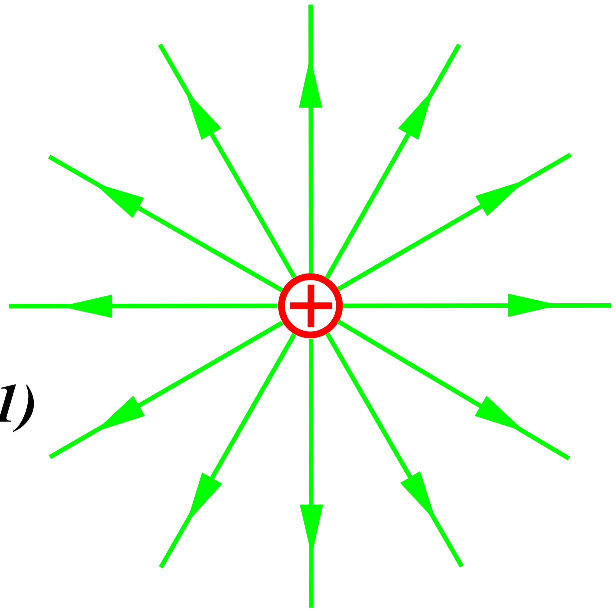
电场
- **静电场(自由电荷)** $\vec{D}^{(1)}$ $\vec{E}^{(1)}$
- **有旋电场(变化的磁场)** $\vec{D}^{(2)}$ $\vec{E}^{(2)}$

磁场
- **磁场(传导电流)** $\vec{B}^{(1)}$ $\vec{H}^{(1)}$
- **磁场(位移电流)** $\vec{B}^{(2)}$ $\vec{H}^{(2)}$

麦克斯韦方程组的积分形式

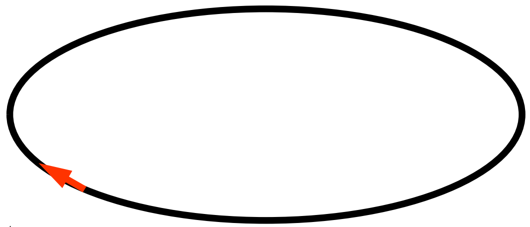
1. 电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D}^{(1)}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_S \vec{D}^{(2)}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_{0i}$$



$\boldsymbol{D}^{(1)}$

有源场



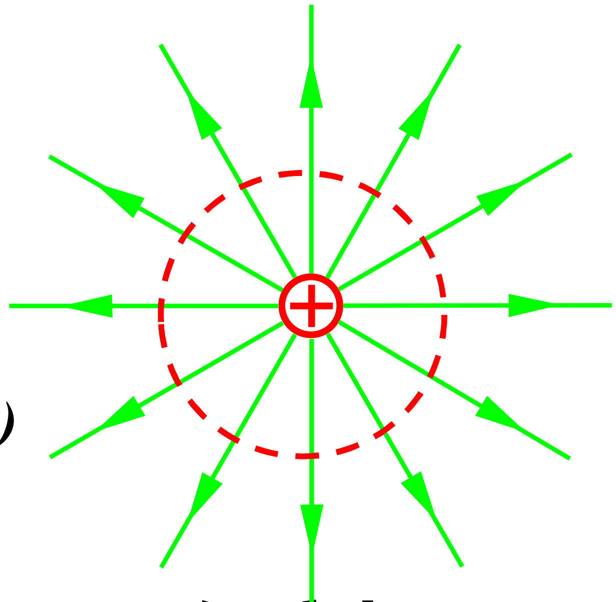
$\boldsymbol{D}^{(2)}$

无源场

2. 电场的环路定理 —— 法拉第电磁感应定律

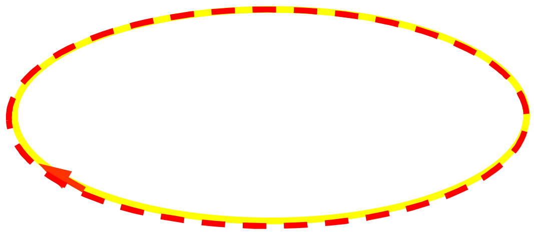
$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}^{(1)}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{E}^{(2)}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$E^{(1)}$



保守场

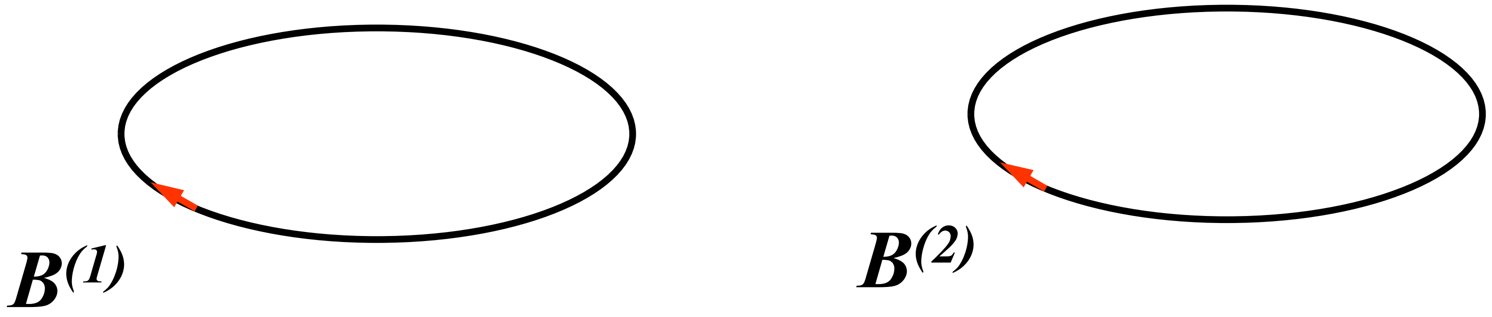
$E^{(2)}$



非保守场

3. 磁场的高斯定理

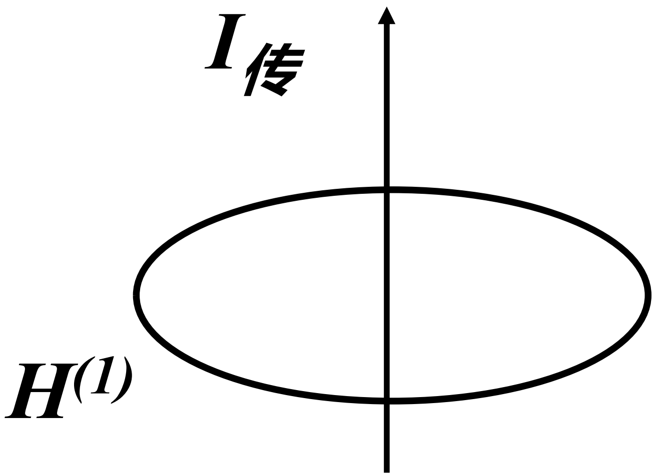
$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{B}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_S \vec{B}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \ = 0 + 0$$

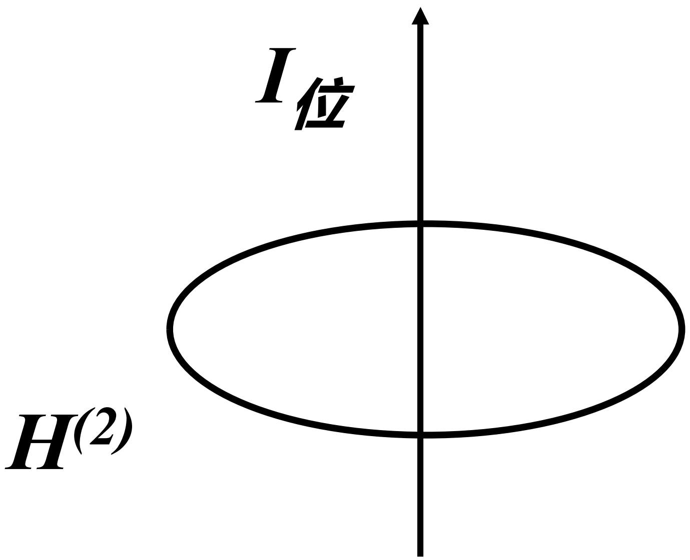


无源场　　　　无源场

4. 全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{\mathrm{L}} \vec{H}^{(1)}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{\mathrm{L}} \vec{H}^{(2)}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$





涡旋磁场　　　　涡旋磁场

$$\left\{\begin{aligned}
&\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_{0i} \\
&\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\
&\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
&\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}
\end{aligned}\right.$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

麦克斯韦方程组的意义

- 对宏观电磁规律的最高总结。
- 从理论上预言了电磁波的存在。
- 牛顿力学之后物理学史上最重要的理论研究成果。

小结

$$\omega_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} BH$$

$$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} BH \mathrm{d}V$$

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$