Introduction

Dijkstra算法简介

概述

- Dijkstra算法是一种图搜索算法，旨在寻找图中节点之间的最短路径，也是一种求解单源最短路径问题的贪心算法[1]。它解决具有非负边路径成本的图的单源最短路径问题，生成最短路径树。由Edsger Dijkstra构想。

算法条件

- 有向图和无向图
- 所有边都必须具有非负权重
- 图必须连接

算法思想

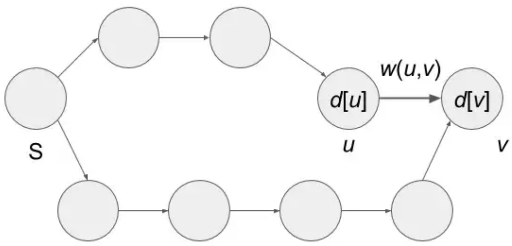
- Dijkstra算法基于松弛(Relaxation)的概念：边缘松弛(Edge Relaxation)和顶点松弛(Vertex Relaxation)。边缘松弛实际上是顶点松弛的一部分。松弛一词来源于在连接两个顶点（源点和目标点）的路径上绷紧的橡皮筋的想法。如果我们得到一条比当前连接两个顶点（源点和目标点）的路径更短的路径，橡皮筋上的张力就会放松。
- **边缘松弛**：例如，一条有向边连接顶点u和顶点v并且从u到v，这意味着这是顶点v的入站边。边缘松弛是为了找出当前考虑的入站边是否有助于从源到顶点v的距离比现在更短。*这个距离是怎么计算的呢？* 一般来说，如果有一条路径从源顶点(起始顶点)到顶点v，经过顶点u，那么从源到v的距离=从源到顶点u的距离+从u到v的距离。
  - 对于顶点u到顶点v的边，如果满足$\mathrm{d[u] + w(u,v) < d[v]}$，更新$\mathrm{d[v]}$为$\mathrm{d[u] + w(u,v)}$
    - 顶点u和v代表图中的邻居，$\mathrm{d[u]}$和$\mathrm{d[v]}$分别代表到顶点u和v的到达成本。
    - $\mathrm{w(u,v)}$表示从顶点u到顶点v的边的权重。
  - 

图1
    - 当前已知可以从起始顶点S通过两个顶点到达顶点u并且该路径花费$\mathrm{d[u]}$。此外，我们可以从起始顶点S通过四个顶点到达顶点v并且该路径花费$\mathrm{d[v]}$。
    - 当$\mathrm{d[u] + w(u,v) < d[v]}$ 时，边缘松弛将$\mathrm{d[v]}$更新为$\mathrm{d[u] + w(u,v)}$。换句话说，它将当前到达顶点$\mathrm{v(d[v])}$的到达成本更新为较低的到达成本($\mathrm{d[u] + w(u,v)}$)。它更新成本的原因是通过顶点的路径u可以更短，因为通过顶点u的路径的到达成本将低于当前路径的成本。
    - **实际上，最短路径问题的算法通过反复使用边缘松弛来解决问题。**
- **顶点松弛**：一般而言最短路径算法会涉及下列内容：
  - 对于一个或多个顶点u，我们需要检查它所有的出站有向边$\mathrm{u \to v}$，从源到v通过u的路由是否会比已经存在的从源到v的路由更短。所以基本上对于一些顶点u，我们必须松弛它所有的出站边。通过松弛顶点u的所有出站有向边来松弛顶点u。
  - 对于假设我们有一个有向图它有n个顶点。顶点被标记为从0到(n-1)邻接表． `adjacencyList[i]` 将给出顶点i的所有出站有向边。我们还有 `weight[][]` 数组。 `weight[i][j]` 表示有向边$\mathrm{i \to j}$的权值。

算法过程

- 将开始的节点称为初始节点。令节点Y的距离为初始节点到Y的距离。Dijkstra算法会分配一些初始距离值，并会尝试逐步改进它们。
  - 1）为每个节点分配一个暂定距离值：对于我们的初始节点将其设置为零，对于所有其他节点将其设置为无穷大。
  - 2）标记所有未访问的节点。将初始节点设置为当前节点。创建一组未访问的节点，称为由所有节点组成的未访问集。
  - 3）对于当前节点，考虑其所有未访问的邻居并计算它们的暂定距离。例如，如果当前节点A的标记距离为6，并且连接它与邻居B的边的长度为2，则到B（通过A）的距离将为6+2=8。
  - 4）当我们完成对当前节点的所有邻居的考虑后，将当前节点标记为已访问并将其从未访问集中删除。永远不会再次检查已访问的节点。
  - 5）如果目的节点已被标记为已访问（规划两个特定节点之间的路径时）或未访问集中节点之间的最小暂定距离为无穷大（规划完整遍历时；发生在初始节点之间没有连接时）和剩余未访问的节点），然后停止。算法已经完成。
  - 6）选择标记为最小暂定距离的未访问节点，并将其设置为新的“当前节点”，然后返回步骤3。
- 下列图显示了使用Dijkstras算法从节点“a”或“1”到节点“b”或“5”的最短路径。访问过的节点将显示为红色。将会看到最短路径是以最小成本20遍历节点1、3、6、5。
  - **目标定义**：给定一个有向图$\mathrm{G = \{N,E\}}$，其中N是G的节点集合，E是有向边的集合，每条边都有一个非负长度，也可以定义为权重或成本，这些节点中有一个节点被视为源节点。
  - **问题定义**：确定从原点到每个节点的最小路径长度。Dijkstra算法使用两组节点S和C，集合S包含选定节点的集合以及给定时间每个节点到原始节点的距离。

- 集合P包含所有尚未被选中且距离未知的候选节点。因此节点集合等于选中节点集和未选中节点集的并集，由此推导出不变属性 $\mathrm{N}=\mathrm{S}\cup\mathrm{C}$
- 在算法的第一步中，集合S只有节点原点，当算法完成时，它包含所有图节点以及每条边的成本。
- 如果从原点到它的路径中涉及的所有节点都在选定节点集合S 内，则考虑一个特殊节点。Dijkstra算法维护一个矩阵D，该矩阵在每一步都使用最短特殊路径的长度或权重进行更新集合S 的每个节点。
- 当一个新的v节点试图被添加到S时，到v的最短特殊路径也是到所有其他节点的最短路径。算法完成后，所有节点都在S中，矩阵D包含从原点到图中任何其他节点的所有特殊路径，从而解决了最小路径问题。

  - **算法目标**：计算从集合S中的节点"1"到节点“5”的最短路径；
    - **步骤一**：从图N中节点“1”开始；

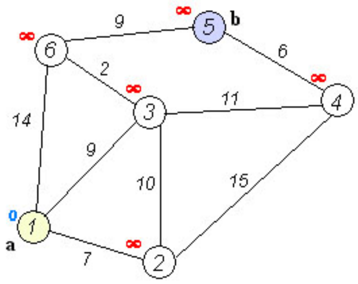


图2

    - **步骤二**：采用广度优先策略从节点“1”的邻接节点E中遍历最短路径；

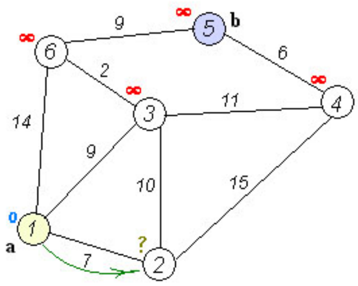


图3

    - **步骤三**：获取到节点“2”的最短路径7，更新集合S中到节点“2”最短路径长度为7；

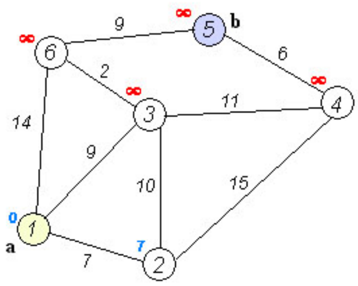


图4

    - **步骤四**：采用广度优先策略从节点“1”的邻接节点E中遍历最短路径；

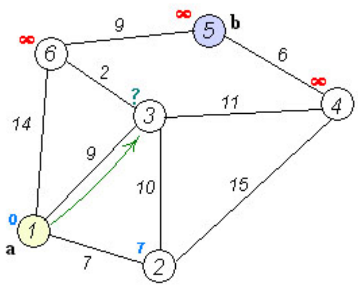


图5

    - **步骤五**：获取到节点“3”的最短路径9，更新集合S中到节点“3”最短路径长度为9；

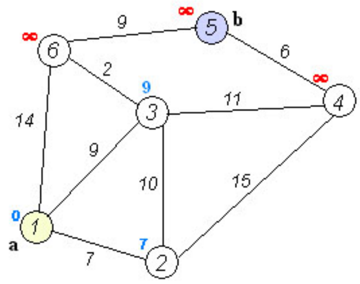


图6

- **步骤六**：采用广度优先策略从节点“1”的邻接节点E中遍历最短路径；

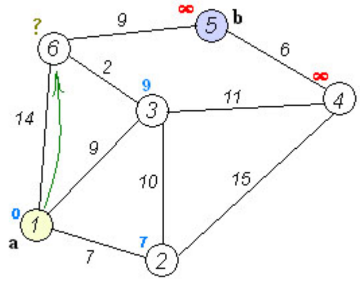


图7

- **步骤七**：获取到节点“6”的最短路径14，更新集合S中到节点“6”最短路径长度为14；

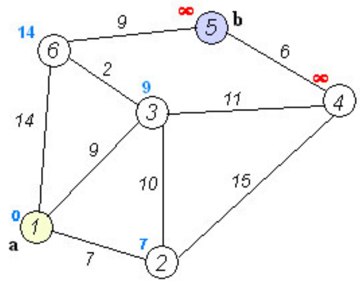


图8

- **步骤八**：更新节点集合S，向量值表示到该节点的距离，并把节点一移出集合P；

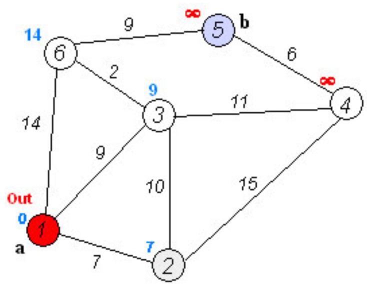


图9

- **步骤九**：结束节点”1“的遍历，接下来从集合P中选择节点“2”开始遍历；

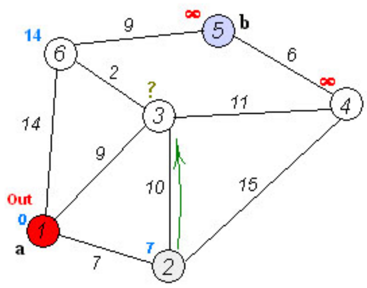


图10

- **步骤十**：从节点“2”的邻接节点中E遍历到节点“3”，发现到节点“3“的距离7+10=17大于向量S中节点”3“的最短距离9；

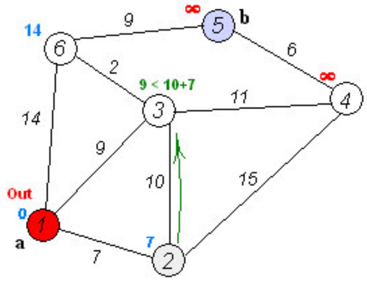


图11

- **步骤十一**：因此在向量S中不更新节点”3 “的最短距离；

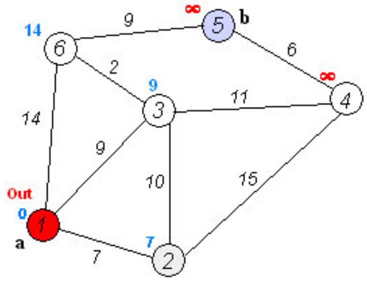


图12

- **步骤十二**：接着从节点”2 “的E集合进行遍历，遍历到节点”4 “；

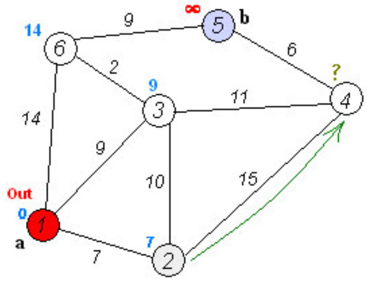


图13

- **步骤十三**：更新到节点”4 “的最短距离7+15=22，更新向量S；

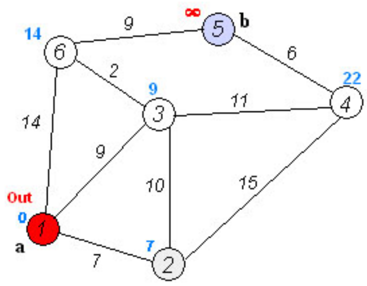


图14

- **步骤十四**：结束从节点”2 “开始的遍历，将节点”2 “移出集合P；

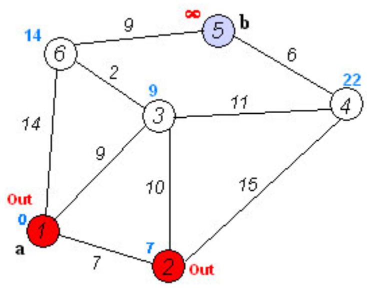


图15

- **步骤十五**：递归，从节点”1 “的E开始广度遍历，从节点”3 “开始遍历；

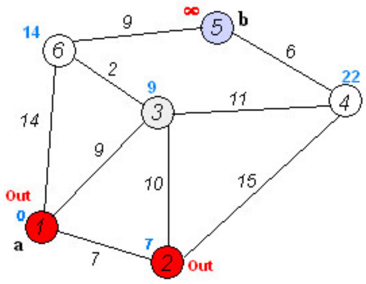


图16

- **步骤十六**：从节点”3“开始遍历，遍历到节点”4“

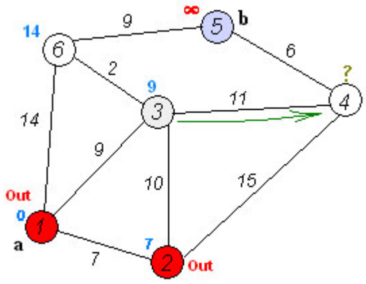


图17

- **步骤十七**：获得到节点”4“的最短距离9+11=20，小于之前的最短距离22，所以更新到节点”4“的最短距离为20；

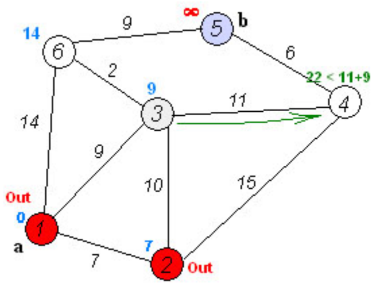


图18

- **步骤十八**：遍历到节点”6“；

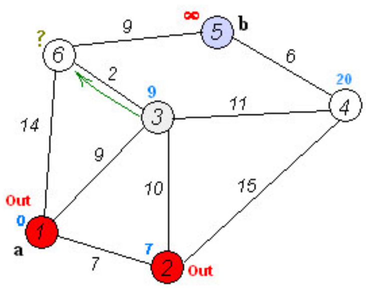


图19

- **步骤十九**：获得到节点”6“的最短距离9+2=11，小于之前的最短距离14，所以更新到节点”6“的最短距离为11；

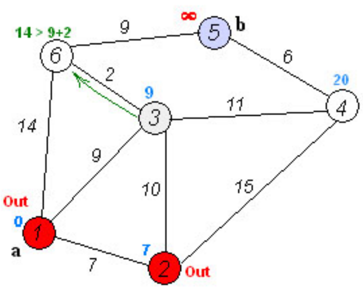


图20

- **步骤二十**：结束从节点”3“开始的遍历，将节点”3“移出集合P；

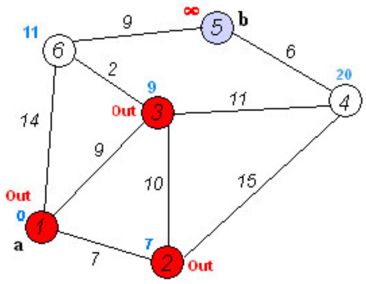


图21

- **步骤二十一**：从节点”6“开始遍历，获得到节点”5“的最短路径

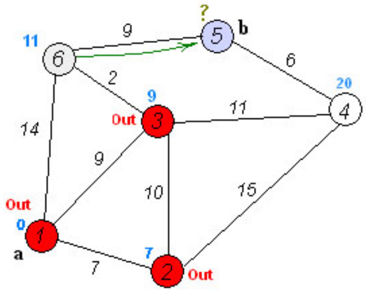


图22

- **步骤二十二**：到节点”5“的最短路径11+9=20，更新向量S中的到节点”5“的最短距离

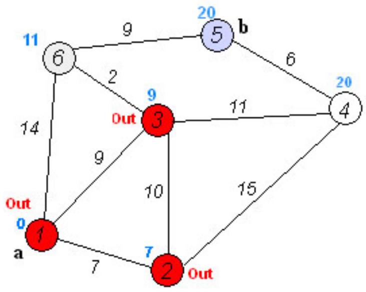


图23

- **步骤二十三**：结束从节点"6"开始的遍历，将节点"6"移出集合P；

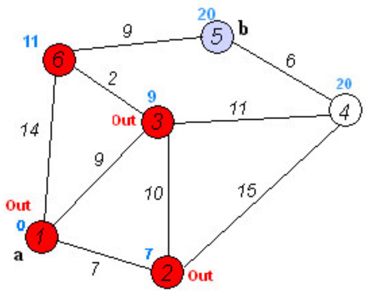


图24

- **步骤二十四**：从节点"4"开始的遍历，到节点"5"的最短路径为20+6=26，故有20(4)>=20(5)，无需更新向量S。

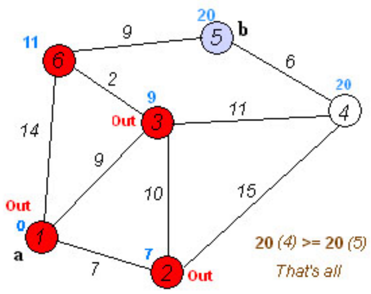


图25

- **算法思路**：
  - 广度优先；
  - 松弛；

伪代码

- Dijkstra算法的Python伪代码为[2]：

```
function Dijkstra(L[1..n, 1..n]): matrix [2..n]
matrix D[2..n]
{initialization}
C <- {2, 3, …, n} {S = N \ C exists only implicitly}
for i ← 2 to n do D[i] ← L[1, i]
{greedy loop}
repeat n - 2 times
    v ← some element of C that minimizes D[v]
          C ← C \ {v} {and implicitly S ←  S U {v}}
          for each w ∈ C do
                  D[w] ← min(D[w], D[v] + L[v, w])
Return D
```

算法时间复杂度

- 初始化需要一个矩阵$L[1..n,1..n]$，因此需要一个$\mathrm{O(n)}$的时间。
- `repeat` 循环需要遍历C的所有元素，所以总时间为$\mathrm{O(n^2)}$
- `each` 的循环需要遍历C的所有元素，因此总时间约为$\mathrm{n^2}$，因此，Dijkstra算法的简单实现需要一个运行时是$\mathrm{O(n^2)}$
- 取决于算法的实现，只要边数远小于$\mathrm{n^2}$，如果图是连通的并且在$\mathrm{O(alogn)}$中，我们可以将复杂度提高到$\mathrm{O((a+n)logn)}$，如果图是稠密图的话，则复杂度最高为$\mathrm{O(log\frac{n^2}{logn})}$
- **从边缘松弛的角度来看待Dijkstra算法时间复杂度**
  - Dijkstra算法最多放松每条边一次，因此总的时间复杂度为$\mathrm{O(ElogV)}$。
  - 在平均情况下，我们从最小堆头提取最小值$\mathrm{O(V)}$次，在最坏情况下(稠密图)提取$\mathrm{O(V^2)}$次。注意，在这种情况下$\mathrm{E=V^2}$，这意味着它是$\mathrm{O(E)}$。总的来说，平均情况下是$\mathrm{O(VlogV)}$，最差情况下是$\mathrm{O(ElogV)}$。
  - 结合(1)和(2)，整体时间复杂度为

$$\mathrm{O(VlogV)+O(ElogV)=O((E+V)logV)<=O((E+E)logV)=O(2\times E\times logV)=O(ElogV)}$$

其他

为什么Dijkstra算法对于负权重会失效?

- Dijkstra算法不适用于具有负距离的图。负距离会导致算法无限循环，必须由专门的算法处理，例如Bellman-Ford算法或 Johnson 算法[3]，其可以在遇到负循环时停止循环。
- **示例**：考虑具有节点A、B和C的循环有向图，这些节点由具有表示使用该边的成本的权重的边连接[4]。以下是图25中提到的权重：
  - A–>B=5，A–>C=6，C–>B=-3。这里一个权重C->B是负数。

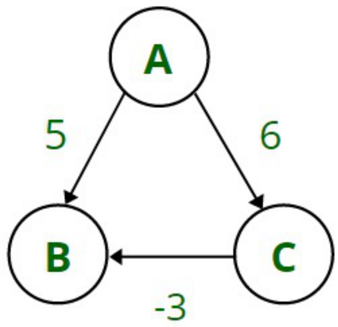


图25

  - **任务**：将节点A视为源节点，任务是找到从源节点A到图中存在的所有其他节点（即节点B和C ）的最短距离。
  - 因此，首先在节点A处将距离标记为0（因为从A到A的距离为0），然后将此节点标记为已访问，这意味着它已包含在最短路径中。

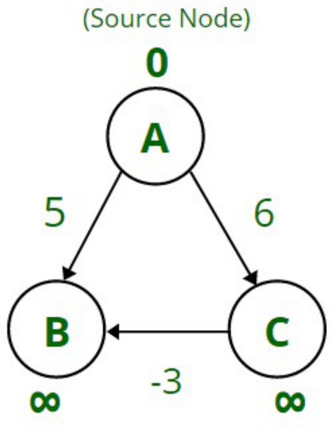


图26

  - 由于开始时，源节点到所有其他节点的距离未知，因此将其初始化为infinity。如果发现任何短于无穷大的距离（这基本上是贪婪的方法），则更新此距离。

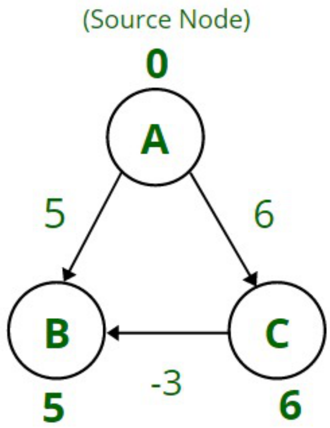


图27

  - 然后，使用连接它与A的边的权重更新从源节点A到B的距离，该权重为5（因为5<无穷大）。以类似的方式，也将之前无穷大的A到C的距离更新为6（因为6<无穷大）。
  - 现在检查距源节点A的最短距离，因为5是A到B的最短距离，因此将节点B标记为“已访问”。
  - 类似地，下一个最短的是6，因此也将节点C标记为已访问。此时，图的所有三个节点都被访问了。
  - 现在最重要的一步出现在这里，因为可以看出，按照这个算法，从A –>B的最短距离是5，但是如果通过节点C的距离是路径A –>C–>B的距离将是3（因为 A–>C=6和C–>B=-3），所以6+(-3)=3。因为3小于5，但是Dijkstra的算法给出的错误答案是5，这不是最短距离。因此，Dijkstra的算法对于否定案例是失败的。
- 由于Dijkstra遵循贪婪方法，一旦节点被标记为已访问，即使存在成本或距离更小的另一条路径，也不能重新考虑该节点。仅当图中存在负权重或边时才会出现此问题[5]。

为什么Dijkstra算法的时间复杂度会存在不同的区别?

- 在有向简单图中，最多有$\mathrm{V(V-1)}$条边（每个顶点都与其他所有顶点相邻，因此V个顶点中的每一个都有$\mathrm{V-1}$）。在无向简单图中最多有$\frac{\mathrm{V(V-1)}}{2}$，在Dijkstra算法中如果使用最小堆作为优先队列结构的时候，复杂度为$\mathrm{O(V+ElogV)}$或$\mathrm{O((V+E)logV)}$。如果，改为使用斐波那契堆，Dijkstra算法的复杂度为$\mathrm{O(E+VlogV)}$
- 例如，在稠密图$\mathrm{E\sim V^2}$中，最小堆实现为$\mathrm{O(V^2logV)}$，但斐波那契堆实现的复杂度仅为$\mathrm{O(V^2)}$。
- 采用最小堆作为优先队列结构时，其更新堆中的值而不是向堆中添加新边， `insert()` 和 `pop()` 操作都是对数运算。若采用斐波那契堆作为优先队列结构， `insert()` 和 `pop()` 操作为常量运算。

Dijkstra算法优缺点是什么？ [6]

- 优点：
  - 具有线性时间复杂度，因此可以轻松用于大型问题。
  - 其在寻找最短距离时很有用，因此它也用于谷歌地图和计算流量。
  - 其在电话网络和地理地图等领域都有其用途。
- 缺点：
  - 进行盲目扫描，这需要大量的处理时间。
  - 算法无法管理锋利的边缘，会产生无环图，最理想的最短路径常常无法找到。

参考

- [1] Dijkstra, E W. “A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.” Numerische Mathematik 1, no. 1 (December 1959): 269–71. doi:10.1007/BF01386390.
- [2] quantra-go-algo/Pseudo code.py
- [3] Why does Dijkstra’s Algorithm fail on negative weights?
- [4] Why doesn’t Dijkstra work with negative weights?
- [5] Why doesn't Dijkstra work with negative weight graphs?
- [6] Introduction To Algorithms

问题：如何判断一棵树T上有完美匹配

- 树T具有完美匹配当且仅当对于每个顶点v，$\mathrm{T}\backslash\{\mathrm{v}\}$只有一个奇分量；亦等价于树T有完美匹配的充要条件为对于每个顶点v，$\mathrm{o}(\mathrm{G}-\mathrm{v})=1$
- 根据Tutte完美匹配条件，如果我们有一个完美匹配，我们必须有偶数个顶点。
- 对树中的顶点数量进行归纳证明。$\mathrm{n}=1$不满足条件，所以我们从$\mathrm{n}=2$开始，结果为$\mathrm{Trivial}$。
- 对于归纳步骤，我们考虑一个叶子ℓ和它唯一的邻居ℓ'。因为去掉ℓ'应该只剩下一个奇数分量，所以这个分量必须是由ℓ'组成的。因此，从树中删除ℓ'必须留下一些偶数部件，它们是较小的偶数大小的树。对于这些组件，我们在下面验证从组件中删除一个顶点只会留下一个奇数组件。通过归纳假设，我们就可以完成了，因为我们可以把这些小分量中的所有完美匹配和边$\ell\ell'$放在一起得到原始树中的完美匹配。
- 现在考虑$\mathrm{T}\backslash\{\ell'\}$中的偶分量$\mathrm{C}$。如果从$\mathrm{C}$中去除$\mathrm{v}^*$，则$\mathrm{C}$中至少会留下一个奇分量。假设从$\mathrm{C}$中去除$\mathrm{v}^*$，则$\mathrm{C}$中至少会留下两个奇分量。需要注意的是，在$\mathrm{T}\backslash\{\mathrm{v}^*\}$中，这些分量都是$\mathrm{C}$的分量，只有一个连接到$\ell'$，而且这个分量的大小不会改变奇偶性，因为$\mathrm{V}(\mathrm{T})\backslash\mathrm{V}(\mathrm{C})$的大小是偶数。因此，$\mathrm{T}\backslash\{\mathrm{v}^*\}$也至少有两个奇分量，这与关于$\mathrm{T}$的假设是矛盾的。因此，从$\mathrm{C}$中移除一个顶点只留下一个奇数分量。