问题：如何判断一棵树T上有完美匹配

- 树T具有完美匹配当且仅当对于每个顶点v，$\mathrm{T} \backslash \{\mathrm{v}\}$只有一个奇分量；亦等价于树T有完美匹配的充要条件为对于每个顶点v，$\mathrm{o}(\mathrm{G}-\mathrm{v})=1$
- 根据Tutte完美匹配条件，如果我们有一个完美匹配，我们必须有偶数个顶点。
- 对树中的顶点数量进行归纳证明。$\mathrm{n}=1$不满足条件，所以我们从$\mathrm{n}=2$开始，结果为$\mathrm{Trivial}$。
- 对于归纳步骤，我们考虑一个叶子ℓ和它唯一的邻居ℓ'。因为去掉ℓ'应该只剩下一个奇数分量，所以这个分量必须是由ℓ'组成的。因此，从树中删除ℓ'必须留下一些偶数部件，它们是较小的偶数大小的树。对于这些组件，我们在下面验证从组件中删除一个顶点只会留下一个奇数组件。通过归纳假设，我们就可以完成了，因为我们可以把这些小分量中的所有完美匹配和边$\ell\ell'$放在一起得到原始树中的完美匹配。
- 现在考虑$\mathrm{T} \backslash \{\ell'\}$中的偶分量$\mathrm{C}$。如果从$\mathrm{C}$中去除$\mathrm{v}^*$，则$\mathrm{C}$中至少会留下一个奇分量。假设从$\mathrm{C}$中去除$\mathrm{v}^*$，则$\mathrm{C}$中至少会留下两个奇分量。需要注意的是，在$\mathrm{T} \backslash \{\mathrm{v}^*\}$中，这些分量都是$\mathrm{C}$的分量，只有一个连接到$\ell'$，而且这个分量的大小不会改变奇偶性，因为$\mathrm{V}(\mathrm{T}) \backslash \mathrm{V}(\mathrm{C})$的大小是偶数。因此，$\mathrm{T} \backslash \{\mathrm{v}^*\}$也至少有两个奇分量，这与关于$\mathrm{T}$的假设是矛盾的。因此，从$\mathrm{C}$中移除一个顶点只留下一个奇数分量。