

MAE101

INSTRUCTOR: LÊ VĂN MẠNH

Date : 2022

Question 1: Find $\int x^3 e^{x^2} dx$

- (i) $e^{x^2} - x^2 + C$
- (ii) $e^{x^2}(x^2 - 1)/2 + C$
- (iii) $e^{x^2}(x^2 - 1) + C$
- (iv) $e^x - x^3 + C$
- (v) $e^{x^3} - x^3 + C$

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng
- B. (i)
- C. (iii)
- D. (ii)**
- E. (iv)
- F. (v)

Giải:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t \cdot dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int t \cdot e^t \cdot dt = \frac{1}{2} [t \cdot e^t - \int e^t dt] = \frac{1}{2} [t \cdot e^t - e^t] + C$$

$$= \frac{1}{2} [e^t(t - 1)] + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$$

Question 2: Let $T: R^2 \rightarrow R^2$ be a linear transformation such that $T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, T(v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ for given $u, v \in R^2$. Find $T(2u - 3v)$.

(Cho $T: R^2 \rightarrow R^2$ là phép biến đổi tuyến tính sao cho $T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, T(v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T, T(v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ với $u, v \in R^2$. Tìm $T(2u - 3v)$.)

- (i) $\begin{bmatrix} -2 & 8 \end{bmatrix}^T$
- (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}^T$
- (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
- (iv) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}^T$

Chọn 1 đáp án:

- A. (i)
- B. (ii)
- C. (iv)**
- D. (iii)
- E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$T(2u - 3v) = 2T(u) - 3T(v) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Question 3: Which of the following statements are true for every 4×4 matrix A:

(Mệnh đề nào sau đây đúng với mọi ma trận $A 4 \times 4$)

- (i) $\det(-A) = -\det(A)$

(ii) $\det(2A) = 16\det(A)$

Chọn 1 đáp án:

- A. Cả (i) và (ii) đều đúng
- B. Chỉ có (i) đúng
- C. Cả (i) và (ii) đều sai
- D. Chỉ có (ii) đúng

Giải:

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A) \Rightarrow (i) \text{ sai}$$

$$\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16\det(A) \Rightarrow (ii) \text{ đúng}$$

Question 4: Given $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = [1 \ -1]^T$, $v = [4 \ 1]^T$.

(Cho $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = [1 \ -1]^T$, $v = [4 \ 1]^T$.)

Chọn 1 đáp án:

- A. u là giá trị riêng của A
- B. v là giá trị riêng của A
- C. Không có đáp án nào đúng
- D. Cả u và v đều là giá trị riêng của A

Giải:

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I) \cdot v = 0$$

Phương trình có nghiệm khác 0 khi và chỉ khi:

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Với $\lambda = 1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \text{Tập nghiệm: } \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Cho } x_1 = 1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Với $\lambda = 4$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4x_2$$

$$\Rightarrow \text{Tập nghiệm: } \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Cho } x_2 = 1 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Question 5: Which of the matrices below is the reduces row-echelon form of the matrix

(Ma trận nào dưới đây là dạng cấp bậc hàng rút gọn của ma trận)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -22 & 30 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Chọn 1 đáp án:

- A. (ii)
- B. (i)
- C. Không có đáp án nào đúng
- D. (iii)

Giải:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(-2)r_1+r_2=r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(-2)r_2+r_1=r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(-2)r_2+r_1=r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -22 & 30 \\ 0 & 1 & 10 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Question 6: Find the points at which the function f is discontinuous

(Tìm điểm mà tại đó hàm số không liên tục)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & \text{if } x \leq -2 \\ (x+4)^3 & \text{if } x > -2 \end{cases}$$

Chọn 1 đáp án:

- A. -2
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. 4
- D. 0
- E. 2

F. -4

Giải:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x - 2)^3 = -64$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 4)^3 = 8$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow \text{Hàm số không liên tục tại } x = -2$$

Question 7: Find the minimum of the product of two numbers with the property that the first minus 7 times the second is 28.

(Tìm tích nhỏ nhất của hai số có tính chất rằng số thứ nhất trừ đi 7 lần số thứ hai là 28.)

Chọn 1 đáp án:

- A. -2
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. -28**
- D. -9
- E. -14
- F. -82

Giải:

Đặt số thứ nhất là x

số thứ hai là y

$$x - 7y = 28 \Rightarrow y = \frac{x - 28}{7}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$$xy = \frac{x^2 - 28x}{7}$$

$$f_{\min} = \left(\frac{x^2 - 28x}{7} \right)_{\min}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 28}{7}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 14$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 14 \Rightarrow f_{\min} = -28$

Question 8: Find the relative extrema (if they exist) of the function

(Tìm cực trị tương đối (nếu chúng tồn tại) của hàm)

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$$

Chọn 1 đáp án:

- A. Điểm cực đại tại $(-1, -4)$; điểm cực tiểu tại $(1, 4)$
- B. Điểm cực tiểu tại $(-1, -4)$; điểm cực đại tại $(1, 4)$
- C. điểm cực đại tại $(0, 0)$. Không có điểm cực tiểu
- D. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0

$$f(-1) = -4 \quad f(1) = 4$$

⇒ Điểm cực tiểu tại $(-1, -4)$; điểm cực đại tại $(1, 4)$

Question 9: Find the derivative of the function

(Tìm đạo hàm của hàm số)

$$g(x) = \int_x^{x^3} \sin t dt$$

- (i) $3x^2 \sin x^3 - \sin x$
- (ii) $3x^2 \sin x^3 + \sin x$
- (iii) $\sin x^3 - \sin x$
- (iv) $3x^2 \cos x^3 - \cos x$

Chọn 1 đáp án:

- A. (ii)
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. (iii)
- D. (iv)
- E. (i)

Giải:

$$g'(x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int_x^{x^3} \sin t dt = \frac{d}{dx} \int_x^{x^3} \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int_x^{x^3} \sin t dt = \frac{d}{dx} g(x^3) - \frac{d}{dx} g(x) = g'(x^3) \cdot \frac{d}{dx} (x^3) - g'(x) \frac{d}{dx} (x)$$

$$= 3x^2 \sin(x^3) - \sin x$$

Question 10: Find condition on a, b, c such that the following system has no solution

(Tìm điều kiện của a, b, c sao cho hệ phương trình sau vô nghiệm)

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3x + y - z = b \\ 5x + 3y - 4z = c \end{cases}$$

Chọn 1 đáp án:

- A. $b - 2c + a = 0$
- B. $a - 2b + c = 0$
- C. $b - 2c + a$ khác 0
- D. $a - 2b + c$ khác 0

Giải:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 & b \\ 5 & 3 & -4 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 4 & -7 & b - 3a \\ 0 & 8 & -14 & c - 5a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 4 & -7 & b - 3a \\ 0 & 0 & 0 & c + a - 2b \end{array} \right]$$

Để vô nghiệm $\Leftrightarrow c + a - 2b \neq 0$

Question 11: Find the function $f \circ g(x)$ for

(Tìm công thức của $f \circ g(x)$ với)

$$f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = x^2 + 4x + 5$$

- (i) $\sqrt{x^2 + 4x + 7}$
- (ii) $\sqrt{x^2 + 4x + 5}$
- (iii) $\sqrt{x^2 + 4x + 2}$
- (iv) $\sqrt{x^2 + 4x + 10}$

Chọn 1 đáp án:

- A. (i)

- B. (iii)
- C. (ii)
- D. None of them
- E. (iv)

Giải:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4x + 5) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$$

Question 12: The function represent the position of the particle $s(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ traveling along a horizontal line. When is the particle at rest ?

(Hàm biểu diễn vị trí của hạt $s(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ truyền theo phương ngang. Khi nào thì hạt ở trạng thái nghỉ?)

Chọn 1 đáp án:

- A. $t = 4$
- B. $t = 1, t = 3$
- C. $t = 3, t = 5$
- D. Không có đáp án nào đúng

Giải:

Khi hạt dừng $\Leftrightarrow s'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 24t + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$$

Question 13: Evaluate $\int \frac{19}{2+5y} dy$

(Tính $\int \frac{19}{2+5y} dy$)

- (i) $\left(\frac{19}{5}\right)(2 + 5y)^{-2} + C$
- (ii) $\left(\frac{9}{5}\right)\ln|2 + 5y| + C$
- (iii) $\left(\frac{1}{5}\right)\ln|2 + 5y| + C$
- (iv) $\left(\frac{19}{5}\right)\ln|2 + 5y| + C$

Chọn 1 đáp án:

- A. (i)
- B. (iv)**
- C. (iii)
- D. Không có đáp án nào đúng
- E. (ii)

Giải:

$$\int \frac{19}{2 + 5y} dy = \left(\frac{19}{5}\right)\ln|2 + 5y| + C$$

Question 14: Find the absolute maximum and absolute minimum values of

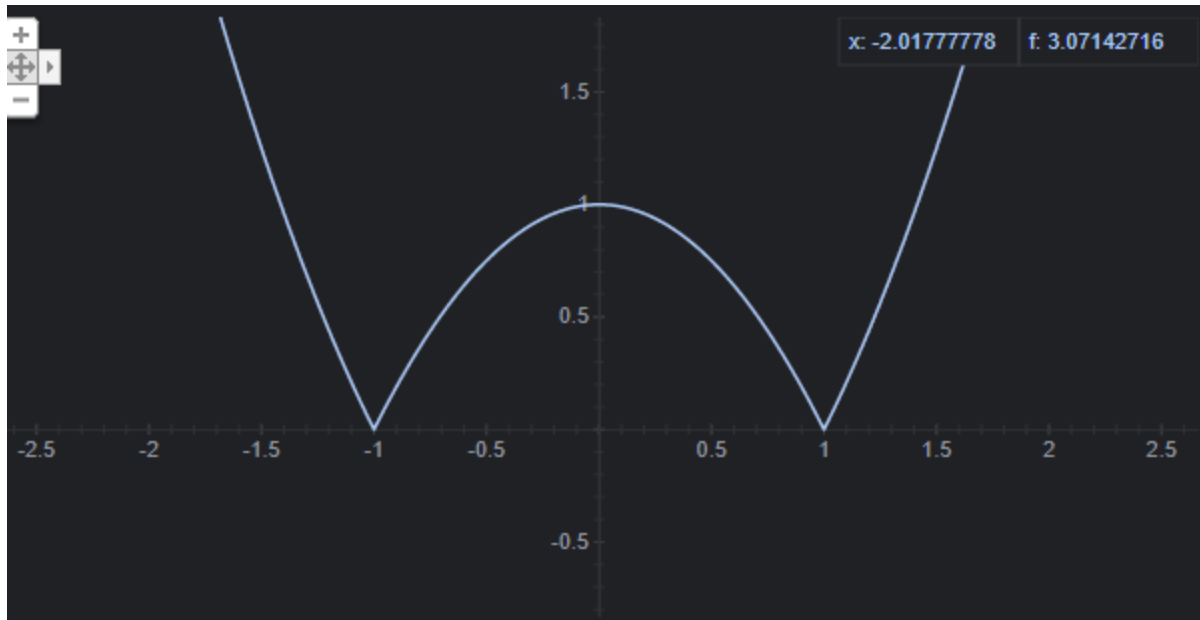
$$f(x) = |x^2 - 1| \text{ on } [-2, 1]$$

(Tìm giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của $f(x) = |x^2 - 1|$ trên đoạn $[-2, 1]$)

Chọn 1 đáp án:

- A. Giá trị cực đại là 1 và giá trị cực tiểu là 0**
- B. Giá trị cực đại là 3 và giá trị cực tiểu là 0
- C. Giá trị cực đại là 0 và giá trị cực tiểu là -1
- D. Không có đáp án nào đúng

Giải:



Theo đồ thị, ta thấy trên đoạn $[-2,1]$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại $= 1$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$ và có giá trị cực tiểu $= 0$

Question 15: Simplify the quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for $f(x) = 2x^2 + x$

(Đơn giản hóa thương số $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ với $f(x) = 2x^2 + x$)

Chọn 1 đáp án:

- A. $4x + 2h + 1$
- B. $4x - 2h - 1$
- C. $4x - 2h + 1$
- D. Không có đáp án nào đúng
- E. $2x + 2h + 1$

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} = \frac{4xh + 2h^2 + h}{h} \\ &= 4x + 2h + 1 \end{aligned}$$

Question 16: Let $\vec{u} = [2 \ 1 \ 3]^T, \vec{v} = [-4 \ 0 \ 3]^T$. Let $\vec{x} = [a \ b \ c]^T$ such that $4\vec{u} - \|\vec{v}\|\vec{v} = 2\vec{x} + \vec{v}$. Find b

(Cho $\vec{u} = [2 \ 1 \ 3]^T, \vec{v} = [-4 \ 0 \ 3]^T$. Cho $\vec{x} = [a \ b \ c]^T$ với $4\vec{u} - \|\vec{v}\|\vec{v} = 2\vec{x} + \vec{v}$. Tìm b.)

Chọn 1 đáp án:

- A. 16
- B. -3
- C. 0
- D. 2**
- E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$4\vec{u} - \|\vec{v}\|\vec{v} = 2\vec{x} + \vec{v} \Leftrightarrow [8 \ 4 \ 12]^T - [-20 \ 0 \ 15]^T = [2a - 4 \ 2b \ 2c + 3]^T \\ \Rightarrow b = 2$$

Question 17: Let $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,-1)$. Which of the following vectors belong to $\text{span}(u,v)$: $x = (1,3,-1)$, $y = (0,2,3)$

(Cho $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,-1)$. Vecto nào sau đây thuộc tập sinh (u,v) : $x = (1,3,-1)$, $y = (0,2,3)$)

Chọn 1 đáp án:

- A. Cả x và y
- B. Chỉ có x
- C. Không có đáp án nào đúng**
- D. Chỉ có y

Giải:

$x = (1, 3, -1)$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

$\Rightarrow x = (1, 3, -1)$ không thuộc tập sinh (u, v)

$y = (0, 2, 3)$:

$$y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vô nghiệm}$$

$\Rightarrow y = (0, 2, 3)$ không thuộc tập sinh (u, v)

Question 18: Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(Tìm ma trận đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$)

- (i) $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
- (ii) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
- (iii) $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
- (iv) $\begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Chọn 1 đáp án:

- A. (i)
- B. (iv)
- C. Không có đáp án nào đúng
- D. (ii)
- E. (iii)

Giải:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Question 19: Express the limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^6 + 2^6 + \dots + n^6}{n^7}$ as a definite integral.

(Biểu diễn giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^6 + 2^6 + \dots + n^6}{n^7}$ dưới dạng một tích phân)

- (i) $\int_0^1 x^6 dx$
- (ii) $\int_0^1 x^7 dx$
- (iii) $\int_0^\infty x^6 dx$
- (iv) $\int_0^\infty x^7 dx$

Chọn 1 đáp án:

- A. (ii)
- B. (iv)
- C. (i)
- D. (iii)

Giải:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + n^6}{n^7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (i^6) * \frac{1}{n^7}$$

Xét đáp án

$$(i) \int_0^1 x^6 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{i}{n}\right) * \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^6 * \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (i^6) * \frac{1}{n^7}$$

=> Đáp án C

Question 20: Find the dimension of the subspace $U = \{[a, a - b, a + 2b, a]^T \mid a, b \text{ are real numbers}\}$ in R^4

(Tìm số chiều của không gian con $U = \{[a, a - b, a + 2b, a]^T \mid a, b \text{ là những số thực}\}$ trong R^4)

Chọn 1 đáp án:

- A. 1
- B. 4
- C. 3
- D. 2

Giải:

$$U = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a+2b \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 2$$

$$\Rightarrow \dim U = 2$$

Question 21: Let U be a subspace of R^4 and $\{F_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T, F_2 = [-2 \ 1 \ 2 \ 0]^T\}$ an orthogonal of U . Let $X = [19 \ -7 \ -9 \ 5]^T$ in U . Write $X = aF_1 + bF_2$. Find $a + b$.

(Cho U là không gian con của R^4 và $\{F_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T, F_2 = [-2 \ 1 \ 2 \ 0]^T\}$ là một trực giao của U . Cho Let $X = [19 \ -7 \ -9 \ 5]^T$ trong U . $X = aF_1 + bF_2$. Tìm $a + b$)

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

Giải:

$$X = aF_1 + bF_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 19 \\ -7 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b \\ b \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2$$

Question 22: Estimate the area under the graph of $f(x) = x^2 - 9$, from $x = 3$ to $x = 5$. Using four approximating rectangles and right end points.

(Ước lượng diện tích bên dưới đồ thị của $f(x) = x^2 - 9$, từ $x = 3$ đến $x = 5$. Sử dụng bốn hình chữ nhật gần đúng và các điểm cuối bên phải.)

Chọn 1 đáp án:

- A. 19.45
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. 18.75**
- D. 19.75
- E. 18.45

Giải:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times [f(3, 5) + f(4) + f(4, 5) + f(5)] = 18.75$$

Question 23: Let $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear transformation defined by the

matrix $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Find $T \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(Cho $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ là phép biến đổi tuyến tính được xác định bởi ma trận

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm $T \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.)

(i) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Chọn 1 đáp án:

A. (i)

B. (ii)

C. (iii)

D. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$T \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Question 24: Find a basis for the subspace $U = \{[x, y, z]^T \mid x + 2y + 3z = 0\}$ in \mathbb{R}^3

(Tìm cơ sở cho không gian con $U = \{[x, y, z]^T \mid x + 2y + 3z = 0\}$ trong \mathbb{R}^3)

(i) $[-2, -1, 0]^T$ và $[3, 0, 1]^T$

(ii) $[-2, 1, 0]^T$ và $[-3, 0, 1]^T$

(iii) $[2, 1, 0]^T$ và $[-3, 0, 1]^T$

(iv) $[-2, -1, 0]^T$ và $[-3, 0, -1]^T$

Chọn 1 đáp án:

A. (iii)

B. (ii)

C. (iv)

D. (i)

E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} y = a \\ z = b \end{cases} \Rightarrow x = -2a - 3b$$

$$U = \begin{pmatrix} -2a - 3b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$[-2, 1, 0]^T$ và $[-3, 0, 1]^T$ là cơ sở của không gian con U

Question 25: Use Newton's method with the specified initial approximation x_1 to find the third approximation x_3 to the root of the given equation.

(Sử dụng phương pháp của Newton với giá trị gần đúng ban đầu được chỉ định x_1 để tìm giá trị gần đúng thứ ba x_3 cho nghiệm nguyên của phương trình đã cho)

$$x^3 + x + 3 = 0, \quad x_1 = -1$$

(Given your answer to 4 decimal places)

Chọn 1 đáp án:

A. -1.2143

B. Không có đáp án nào đúng

C. -1.2741

D. 1.2100

E. 1.3140

Giải:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.25$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1.2143$$

Question 26: The average value of $f(x) = x^2 - x$ over the interval $[0, a]$ is $-1/6$

. Find the number a

(Giá trị trung bình của $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $[0, a]$ là $-1/6$. Tìm số a .)

Chọn 1 đáp án:

- A. 1
- B. 0.5
- C. Không có đáp án nào đúng
- D. 0.5 và 1

Giải:

ĐK $a \neq 0$

$$\frac{1}{a} \int_0^a (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 2a^2 - 3a = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 0.5 \end{cases}$$

Question 27: Find the limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{(3x - 1)(5x^3 + 2)}$

(Tìm giới hạn của $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{(3x - 1)(5x^3 + 2)}$)

Chọn 1 đáp án

A. 2/15

B. 0

C. Không có đáp án nào đúng

D. -5/2

E. -2.15

F. Vô cực

Giải:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{(3x-1)(5x^3+2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{15x^4 - 5x^3 + 6x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}}{15 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x^4}} \\ &= \frac{2 - 3\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 5\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{15 - 5\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 6\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - 2\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}\end{aligned}$$

Vì tử số của nó tiến dần đến một số thực trong khi mẫu số của nó không có biên, nên phân số $\frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}$ tiến dần đến 0

$$\Rightarrow \frac{2 - 3.0 + 5.0}{15 - 5.0 + 6.0 - 2.0} = \frac{2}{15}$$

Question 28: Given the relation $x^2 + xy^2 = 3$. Find dy/dx

(Cho tương quan $x^2 + xy^2 = 3$. Tìm dy/dx)

(i) $-\frac{y}{2x}$

(ii) $-\frac{2x}{y^2}$

(iii) $-\frac{1}{y}$

(iv) $-\frac{y^2 + 2x}{2xy}$

Chọn 1 đáp án:

- A. (iii)
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. (iv)
- D. (i)
- E. (ii)

Giải:

$$x^2 + xy^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2x}{2xy}$$

Question 29: Which of the following are subspaces of \mathbb{R}^3

(Không gian nào sau đây là không gian con của \mathbb{R}^3)

- (i) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 - z = 0\}$
- (ii) $U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{matrix} \right\}$

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng
- B. (ii)
- C. (i)
- D. (i) and (ii)

Giải:

$$ii) \begin{cases} 2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x \\ x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow y = \frac{5x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \left\{ \left(x, \frac{5x}{2}, 2x \right) \in R^3 \right\}$$

$$U = \begin{pmatrix} x \\ \frac{5x}{2} \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ 1, \frac{5}{2}, 2 \right\} \text{ là tập sinh của } U \quad (1)$$

Rank = 1 = variable (2)

1), (2) \Rightarrow **Độc lập tuyến tính**

Question 30: Let A be the matrix that satisfies:

$$A^T - \begin{bmatrix} 0 & -11 & 7 \\ -1 & -7 & 18 \\ 1 & -6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the (2,3)-entry of A

(Cho A là ma trận thỏa mãn..... Tìm vị trí (2,3) của A)

Chọn 1 đáp án:

A. -1

B. 1

C. -4

D. None of the other choices is correct

E. 4

Giải:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 0 & -6 & 16 \\ 0 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & -4 \\ 6 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

Question 31: Using Simpson's Rule with $n=6$ to approximate

(Dùng định lý Simpson với $n=6$ để tính xấp xỉ)

$$\int_1^7 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

- A. 64.946
- B. 74.776
- C. 24.925**
- D. None of the other choices is correct
- E. 49.892

Solve:

$$\Delta x = \frac{7 - 1}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^7 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + 2f(3) + \dots + f(7)] \approx 24.925$$

Question 32: Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be rotation through $\pi/2$ followed by reflection in the line $y = x$. Then T is:

(Gọi $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ là phép quay qua góc $\pi/2$ tiếp theo là phản xạ theo đường thẳng $y = x$. Khi đó T là:)

- A. Rotation through 180 degrees
- B. Reflection in the y-axis
- C. Reflection in the x-axis**
- D. None of the other choices is correct
- E. Reflection about $y = -x$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F. Gọi A là T sau khi lấy đối xứng qua $y=x$

$$G. \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

H. Gọi B là T sau khi thực hiện phép quay $\frac{\pi}{2}$

$$I. \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J. \Rightarrow T = AB \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

K. \Rightarrow Đáp án C

Question 33: Write equation for the graphs that are obtained from stretch the graph of $y=f(x)$ vertically by a factor of 5 and then shift 1 unit upward.

(Viết phương trình cho các đồ thị thu được khi kéo giãn đồ thị của $y = f(x)$ theo phương thẳng đứng lên 5 lần rồi dịch lên trên 1 đơn vị)

Chọn 1 đáp án:

A. $Y=5f(x)+1$

B. $y=5f(x)-1$

C. $y= f(5x)+1$

D. $Y=f(5/x)+1$

E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

Đồ thị thu được khi kéo giãn đồ thị của $y = f(x)$ theo phương thẳng đứng theo hệ số 5 và sau đó dịch chuyển lên trên 1 đơn vị: $y = 5f(x) + 1$

Question 34: The area of the parallelogram determined by the vectors u and v is 100. Find the area of the parallelogram determined by the vectors u and $2u+3v$

(Diện tích hình bình hành xác định bởi vector u và v là 100. Tìm diện tích hình bình hành xác định bởi vector u và $2u + 3v$)

- A. 500
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. 0
- D. 300**
- E. 200

Giải:

$$\vec{u}(a, b)$$

$$\vec{v}(c, d)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ab - cd = 100$$

$$\vec{u}(a, b)$$

$$2u + 3v(2a + 3c, 2b + 3d)$$

$$= |\vec{u} \cdot 2u + 3v|$$

$$= 2ab + 3ab - 2ab - 3cb$$

$$= 3(ad - cb)$$

$$= 3 \cdot 100$$

$$= 300$$

Question 35: Let A be the point in the plane $2x-y-z=6$ that is closet to the point $(1,-2,3)$. Determine the second coordinate of A.

(Gọi A là điểm nằm trong mặt phẳng $2x - y - z = 6$ gần nhất với điểm $(1, -2, 3)$. Xác định tọa độ thứ hai của A)

Chọn 1 đáp án:

A. $-17/6$

B. $5/3$

C. Không có đáp án nào đúng

D. $4/6$

E. $-5/3$

Giải:

$$n = (2, -1, -1)$$

$$P = (1, -2, 3) + c(2, -1, -1) = (1+2c, -2-c, 3-c)$$

$$2(1+2c) - 1(-2-c) - 1(3-c) = 6$$

$$\Leftrightarrow 1 + 6c = 6$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{5}{6}$$

$$P = \left(\frac{8}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

Question 36: If $1 \leq f(x) \leq x^2 + 6x - 6$ for all x , find the $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(Nếu $1 \leq f(x) \leq x^2 + 6x - 6$ với mọi x , tìm $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$)

Chọn 1 đáp án:

A. **1**

B. **0**

C. **2**

D. **-2**

E. **-1**

F. Không có đáp án đúng

Giải:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 6x - 6 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 6x - 6 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Question 37: Find the parametric of the line through the point A (1,1,0) and perpendicular to the vectors $u=[1,1,1]$, $v=[2,1,3]$

(Tìm tham số của đường thẳng đi qua điểm A (1,1,0) và vuông góc với các vector $u = [1,1,1]$, $v = [2,1,3]$)

Chọn 1 đáp án:

A. $x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = -t$

B. $x = 1 + 2t, y = 1 - t, z = t$

C. $1 + 2t, y = 1 - t, z = -t$

D. $1 + 2t, y = 1 - t, z = -t$

E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$[\vec{u} \cdot \vec{v}] = [2, -1, -1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases}$$

Question 38: Let $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, where a is a real number.

Compute A^{100}

(Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, với a là một số thực. Tính A^{100})

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 100a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & a^{100} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Chọn 1 đáp án:

A. (i)

B. Không có đáp án nào đúng

C. (iii)

D. (ii)

Giải:

$$A^2 = A * A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 * A = A * A = A$$

$$\Rightarrow A^{100} = A$$

Question 39: A table of value for f, g, f', g' is given

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	2	-2
1	0	2	3	-1
2	4	-1	5	6

Find $h'(1)$ if $h(x) = g(f(x))$

(Bảng giá trị của f, g, f', g' được cho như sau. Tìm $h'(1)$ nếu $h(x) = g(f(x))$)

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng
- B. Không xác định được
- C. 0
- D. -6
- E. -2
- F. -5

Giải:

$$h(x) = g(f(x))$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

$$\Leftrightarrow h'(1) = f'(1) \cdot g'(f(1)) = (3) \cdot g'(0) = -6$$

Question 40: Two sides of a triangle are 3m and 4m in length and the angle between them is increasing at a rate of 0.02 rad/s. Find the rate at which the area of the triangle is increasing when the angle between the sides is $\frac{\pi}{3}$

(Hai cạnh của 1 tam giác có chiều dài lần lượt là 3m và 4m, góc giữa chúng đang tăng với tốc độ góc 0,02 rad/s. Tìm tốc độ tăng của diện tích tam giác khi góc giữa chúng là $\frac{\pi}{3}$)

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng
- B. 0.12
- C. 0.006
- D. 0.06**
- E. 0.002

Giải:

Gọi ABC là tam giác theo đề

Có $AB = 3$ m và $AC = 4$ m

Và θ là góc giữa cạnh AB và cạnh AC .

Ta có, tốc độ tăng của góc theo thời gian $d\theta/dt = 0.02$ rad/sec.\

Diện tích của hình tam giác được tính bằng $S = 1/2 \times \text{đáy} \times \text{cao}$

$$\Rightarrow S = 1/2 (AB)(AC)$$

$$= 1/2 \times 3 \times 4\sin\theta$$

$$\Rightarrow A = \text{area} = 6\sin\theta$$

Đạo hàm ta được:

$$dA/dt = 6 \sin\theta \, d\theta/dt$$

$$\Rightarrow dA/dt = 6 \cos\theta \, d\theta/dt$$

$$\text{Khi } \theta = \pi/3$$

$$dA/dt = 6 \cos \pi/3 (0.02)$$

$$\Rightarrow 6(1/2)(0.02)$$

$$\Rightarrow 0.06 \text{ m}^2/\text{sec}.$$

Question 41: The echelon form of the augment matrix of a system of linear equations has the following form:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right]$$

Where (*) denotes any real number. What can you say about the number of solutions of this system ?

Chọn 1 đáp án:

- A. Có nghiệm duy nhất
- B. Không có đủ dữ kiện
- C. Có vô số nghiệm
- D. Vô nghiệm

Question 42: Find the first row of the adjugate of the matrix

(Tìm hàng đầu tiên của ma trận liên hợp của ma trận)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Chọn 1 đáp án:

- A. [1,-2,2]
- B. [1,-3,-6]
- C. [-1,-2,2]
- D. Không có đáp án nào đúng
- E. [1,2,2]

Giải:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & -2/5 \\ 3/5 & -1/5 & 1/5 \\ 6/5 & -2/5 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -5$$

$$A^{-1} = (1/\det A) \cdot \text{adj}(A)$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Question 43: How many solutions must a homogeneous linear system of 6 equations in 7 unknowns have?

(Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm 6 phương trình với 7 ẩn số phải có bao nhiêu nghiệm?)

Chọn 1 đáp án:

- A. Vô số nghiệm
- B. Vô nghiệm
- C. Có đúng 7 nghiệm
- D. Không có đáp án nào đúng
- E. Có đúng 1 nghiệm

Do không xác định được hạng của ma trận nên có thể có nghiệm, vô số nghiệm.

Question 44: Let A,B be 3x3 invertible matrices, $\det(A) = 5$, $\det(B) = 2$

(Cho A,B là ma trận khả nghịch 3x3, $\det(A) = 5$, $\det(B) = 2$)

- (i) $\det(2B) = 4$
- (ii) $\det(A+B) = 7$
- (iii) $\det(5A^{-1}B^T) = 50$

Chọn 1 đáp án:

- A. Không có đáp án nào đúng

- B. (i)
- C. (i) and (ii)
- D. (iii)**
- E. (ii)

Giải:

$$\text{Det}(2B) = 2^3 \text{Det}(B) = 16$$

$$\text{Det}(5A^{-1}B^T) = \text{Det}(5A^{-1}) \cdot \text{Det}(B^T) = 5^3 \times \frac{1}{\text{Det}(A)} \times \det(B) = 50$$

\Rightarrow (iii)

Question 45: Find the value of the derivative of the function

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} \text{ at } x = 16$$

(Tìm giá trị của đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}$ tại $x = 16$)

Chọn 1 đáp án:

- A. 91/4
- B. Không có đáp án nào đúng
- C. 187/8**
- D. 197/8
- E. 101/4

Giải:

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(16) = \frac{187}{8}$$

Question 46: Let A be 5×7 matrix. Which of the following statements are true?

(Cho A là ma trận 5×7 . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng)

- (i) Ma trận A có thể độc lập tuyến tính theo cột
- (ii) Ma trận A có thể độc lập tuyến tính theo hàng
- (iii) Không gian con của A có thể có hạng 1

Chọn 1 đáp án:

- A. (ii)
- B. (i)
- C. Không có đáp án đúng
- D. (iii)

Giải:

$A_{5 \times 7} \Rightarrow r(A) \leq 5 \Rightarrow$ Ma trận A phụ thuộc tuyến tính

Null space = $n - r \leq 2 \Rightarrow$ có thể có dim = 1

Question 47: Find the projection of the vector $u = [1; -2; 3]$ on the vector $v = [1; -1; 0]$

(Tìm hình chiếu của vecto $u = [1; -2; 3]$ trên vecto $v = [1; -1; 0]$)

Chọn 1 đáp án:

- A. $[-3/2, -3/2, 0]$
- B. $[3/2, 3/2, 0]$
- C. $[-3/2, 3/2, 0]$
- D. $[3/2, -3/2, 0]$

E. Không có đáp án nào đúng

Giải:

$$\text{Proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|v\|} v = \frac{3}{2} [1, -1, 0] = [3/2, -3/2, 0]$$

Question 48: Evaluate the improper integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.2}}$

(*Tính tích phân suy rộng $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.2}}$*)

Chọn 1 đáp án:

A. Không có đáp án nào đúng

B. 1.25

C. 2.5

D. Không tồn tại

E. 0.2

Giải:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.2}} = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} \Big|_0^1 = 1.25$$

Question 49: Evaluate $\int_1^4 \frac{t^7 - t^3}{t^5}$

(*Tính $\int_1^4 \frac{t^7 - t^3}{t^5}$*)

Chọn 1 đáp án:

A. 259/12

B. 81/4

C. Không có đáp án nào đúng

D. 79/4

E. 275/12

Giải:

$$\int_1^4 \frac{t^7 - t^3}{t^5} = \int_1^4 t^2 - \int_1^4 t^{-2} = \frac{t^3}{3} \Big|_1^4 + \frac{1}{t} \Big|_1^4 = \frac{81}{4}$$

Question 50: Find the characteristic polynomial of the matrix

(Tìm đa thức đặc trưng của ma trận)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

(ii) $x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

(iii) $x^3 - 6x^2 - 9x - 4$

Chọn 1 đáp án :

A. (i)

B. Không có đáp án nào đúng

C. (iii)

D. (ii)

Giải:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (x - 1)((x - 3)(x - 2) - 2) + 2 * 2 * 2 = (x - 1)(x^2 - 5x + 4) + 8$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 4$$