# Ejercicios de *Classical Mechanics*

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

A continuación encontrará la solución a una selección de ejercicios del libro Classical Mechanics de Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko; tercera edición publicada por Addison Wesley ISBN: 9780201657029.

## Capítulo 1

### Ejercicio 1.6

Supongamos que en algún instante $t$ la partícula tiene coordenadas $(x', y')$ y que la tangente del ángulo que forma su velocidad con el eje $x$ está dada por $\frac{dy(t)}{dx(t)}$. La recta tangente a la curva estará dada por:

$$(y - y') = \frac{dy(t)}{dx(t)}(x - x'). \tag{1}$$

Por otro lado, según el problema la velocidad siempre debe apuntar a un punto en el eje $x$, al que llamaremos $f(t)$. Pero este punto no es más que el intercepto con el eje $x$ de la recta anteriormente definida. Así entonces debemos tener lo siguiente:

$$-y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}(f(t) - x'), \tag{2}$$

$$(f(t) - x)dy + y\,dx = 0. \tag{3}$$

Que es la ecuación de una ligadura no holónoma. Para mostrar que la ligadura es no holónoma se trata de buscar un factor integrante para obtener una diferencial total:

$$dF = f_i(f(t) - x)\,dy + f_i y\,dx + f_i \times 0\,dt. \tag{4}$$

De aquí se lee que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f_i(f(t) - x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_i y, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Haciendo derivadas cruzadas entre $x$ y $t$ (y teniendo en cuenta que $x$ y $y$ dependen de $t$ sólo implícitamente):

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)}{\partial t} = y\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Tomando derivadas cruzadas de $t$ y $y$ nos queda que:

$$0 = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial t} = f_i\frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Así, o bien $f_i = 0$ o $f(t) = \text{cte}$, pero lo anterior va en contra de las hipótesis ya que $f(t)$ es arbitrario.

## Ejercicio 1.9

Tenemos que el Lagrangiano para una partícula en presencia de un campo eléctrico $\vec{E} = \nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ y un campo magnético $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ está dado por:

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}. \tag{10}$$

Se pregunta qué efecto tiene sobre el Lagrangiano el cambiar el potencial escalar $\phi$ y el potencial vectorial $\vec{A}$:

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A} + \nabla\psi, \tag{11}$$

$$\phi \longmapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{12}$$

sobre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de la partícula sobre la que actúan $\vec{E}$ y $\vec{B}$, siendo $\psi(x, y, z, t)$ una función arbitraria pero diferenciable. Si sustituimos en el Lagrangiano y reorganizamos términos se obtiene lo siguiente:

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\left(\vec{A} + \nabla\psi\right), \tag{13}$$

$$L' = \left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right) + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\psi\right). \tag{14}$$

El término dentro del paréntesis es el Lagrangiano original $L$ y el segundo es la diferencial total de $\psi$ con respecto a $t$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla\psi\cdot\vec{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{15}$$

Así entonces $L'$ se reescribe como $L$ más la derivada total con respecto a $t$ de una función arbitraria $\psi$:

$$L' = L + \frac{d\psi}{dt}. \tag{16}$$

Pero según la demostración 8, las ecuaciones de Lagrange se siguen satisfaciendo si a un Lagrangiano $L$ se le adiciona la derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria $\psi$, es decir, las ecuaciones de movimiento de la partícula no cambian.

## Ejercicio 1.19

Usando coordenadas esféricas y teniendo en cuenta que el péndulo es inextensible, tenemos que la velocidad se puede escribir así:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}. \tag{17}$$

Y que el potencial gravitacional se puede escribir como (con $z$ positivo hacia abajo):

$$V = -mgz = -mgr\cos\theta. \tag{18}$$

Así el Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}mr^2\left(\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + mgr\cos(\theta), \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - mgr\sin\theta, \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = 0. \tag{23}$$

Luego las ecuaciones de movimiento son:

$$mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - mgr\sin\theta - mr^2\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0. \tag{25}$$

# Capítulo 2

## Ejercicio 2.1

En el problema de la braquístocrona, se llega a que se debe minimizar el funcional:

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g\,y(x)}}\,dx, \tag{26}$$

$$f = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g\,y(x)}}. \tag{27}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el problema se obtiene fácilmente haciendo los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial f}{\partial y'(x)} = \frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right) - \frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}}\right) - \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}} \\ &= -\frac{y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 1}{2\sqrt{2}g^2 y(x)^3 \left(\frac{y'(x)^2+1}{gy(x)}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es entonces:

$$y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 1 = 0. \tag{31}$$

Podemos notar que $f$ no depende explícitamente de $x$, entonces la cantidad $h = \frac{\partial f}{\partial y'(x)} y'(x) - f$ es una cantidad conservada. Para este caso $h$ tiene la siguiente forma:

$$h = -\frac{1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} = \text{cte}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{h^2} = 2gy(x)(1+y'(x)^2). \tag{33}$$

Si se deriva la última de las ecuaciones con respecto a $x$ se llega a:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h^2}\right) = gy'(x)\left(y'(x)^2+1\right) + 2gy(x)y'(x)y''(x), \tag{34}$$

que es la misma ecuación (31) multiplicada por $gy'(x)$. Es decir, la ecuación (31) es equivalente a:

$$y(x)(1+y'(x)^2) = 2c. \tag{35}$$

De esta ecuación se puede despejar $y'(x)$, separar variables e integrar para obtener:

$$y'(x)^2 = \frac{2c}{y} - 1, \tag{36}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2c}{y} - 1}} = dx, \tag{37}$$

$$2c\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{y}-1}}\right) - \sqrt{(2c-y)y} = x. \tag{38}$$

Pero $\tan^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, entonces:

$$2c\cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{y}{2c}}\right) - \sqrt{(2c-y)y} = x, \tag{39}$$

$$1-\frac{y}{2c} = \cos^2\left(\frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{2c}\right). \tag{40}$$

Llamando $\alpha = \frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{c}$ y despejando:

$$\frac{y}{2c} = 1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}, \tag{41}$$

$$\frac{y}{c} = 1-\cos\left(\frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{c}\right). \tag{42}$$

La última igualdad se obtiene de las identidades de ángulo mitad para el coseno. De esta igualdad también se ve que $y$ sólo puede tomar valores en el intervalo $[0, 2a]$ (ya que la cantidad dentro del radical del coseno sólo es mayor que 0 en este intervalo) y que uno de sus mínimos está en $(0, 0)$ (que fue de donde se lanzó la partícula), es decir, allí hay una cúspide.
Por otro lado, para mostrar que si la partícula se proyecta con una energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ entonces también se mueve sobre un cicloide, basta notar que la integral (26) se reescribe de esta forma (conservación de energía: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$):

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)+v_0^2}}\,dx. \tag{43}$$

Esta puede ser devuelta a su forma original haciendo el cambio de variable $\hat{y} = y + \frac{v_0^2}{2g}$, esto equivale a mover el sistema de coordenadas $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades, por lo tanto la cúspide que estaba en $y = 0$ quedará $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades más arriba.

## Ejercicio 2.3

La solución a este problema consiste en minimizar el funcional:

$$J = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2}\,dx, \tag{44}$$

para esto resolvemos:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right), \tag{45}$$

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \tag{46}$$

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dx}. \tag{47}$$

Con $f$ así definida obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}}. \tag{49}$$

Así llegamos a que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}}\right) = 0, \tag{50}$$

$$\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}} = c_i. \tag{51}$$

La última ecuación se puede solucionar para las $y_i$:

$$\dot{y}_i^2 = \frac{c_i^2}{1 - \sum_i c_i^2}, \tag{52}$$

y finalmente:

$$y_i = a_i x + b_i. \tag{53}$$

Las anteriores son las ecuaciones de una recta parametrizadas por la primera de sus coordenadas.

## Ejercicio 2.4

Con un procedimiento análogo al anterior pero usando coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$ (con $r$ fijo) llegamos a que $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$, llegamos al siguiente funcional:

$$F = \int_1^2 \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{54}$$

Haciendo uso de (45) pero con $f = \sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}$, $y_i = \phi$, $x = \theta$ y $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sin^2\theta\,\dot{\phi}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2}}, \tag{56}$$

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\,\dot{\phi}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2}}\right). \tag{57}$$

De la última ecuación deducimos que:

$$\frac{\sin^2\theta\,\dot{\phi}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2}} = C_1. \tag{58}$$

De esta y la anterior podemos despejar $\dot{\phi}$ e integrar para obtener:

$$\dot{\phi} = \pm\frac{C_1\csc(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta)-C_1^2}}, \tag{59}$$

$$\phi(\theta) = C_2 \pm \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}C_1\cos(\theta)}{\sqrt{-2C_1^2-\cos(2\theta)+1}}\right) = C_2 \pm \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{C_1^2}-1}}\right). \tag{60}$$

Ahora nos falta mostrar que la anterior ecuación define un círculo máximo. Para esto es suficiente con mostrar que el plano en el que está la curva que hemos encontrado anteriormente pasa por el origen. Para lo anterior, note que $\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ y por lo tanto la ecuación (60) se puede reescribir así:

$$\phi - C_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{1}{C_1^2}-\csc^2\theta}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-\csc^2\theta}}}{\sqrt{1+\frac{\cot^2\theta}{1/C_1^2-\csc^2\theta}}}\right), \tag{61}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2+\cot^2\theta-\csc^2\theta}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}\right). \tag{62}$$

O:

$$\sin(\phi - C_2) = \frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}, \tag{63}$$

$$\sin\phi\cos C_2 - \sin C_2\cos\phi = \frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}, \tag{64}$$

$$\sin\theta\sin\phi\cos C_2 - \sin\theta\sin C_2\cos\phi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}. \tag{65}$$

Pero $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ y la última ecuación queda:

$$y\cos C_2 - x\sin C_2 = \frac{z}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}}, \tag{66}$$

que define un plano que pasa por $(0,0,0)$. Note que en la ecuación anterior $x, y$ y $z$ son funciones de $\theta$, por lo que describen una curva y no un plano.

## Ejercicio 2.6

Del problema que estamos considerando se nota fácilmente que la fuerza que atrae a la partícula es proporcional a la distancia y está en la dirección radial, por lo tanto el potencial asociado a dicha fuerza es de la forma $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Escogeremos nuestro sistema de referencia con el origen en el centro de la esfera y con el eje $z$ perpendicular al plano donde se hará el túnel. Así entonces llegamos a que la energía de la partícula que estamos considerando viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}ka^2. \tag{67}$$

Donde $a$ es el radio de la esfera en la que se moverá la partícula, $\dot{w}$ denota derivada total con respecto a $t$ mientras $w'$ denota derivada con respecto a $\theta$ y $k = \frac{GMm}{a^3}$. De la anterior ecuación se puede despejar fácilmente "$dt$" para obtener:

$$\int dt = \int f\, d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \sqrt{\frac{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}{a^2 - r(\theta)^2}}\, d\theta. \tag{68}$$

Al escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para minimizar $\int dt$ se obtiene:

$$\frac{r(\theta)\sqrt{\frac{m(r(\theta)^2+r'(\theta)^2)}{k(a^2-r(\theta)^2)}}\left(r''(\theta)r(\theta)^3 + \left(a^2 - r'(\theta)^2\right)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2\right)}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = 0. \tag{69}$$

De la anterior igualdad la ecuación relevante es:

$$r''(\theta)r(\theta)^3 + \left(a^2 - r'(\theta)^2\right)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2 = 0. \tag{70}$$

Aunque la anterior ecuación se ve algo complicada, esta se puede integrar una vez al notar que $f$ no depende de $\theta$ y por lo tanto:

$$\sqrt{I} = \frac{\partial f}{\partial r'(\theta)}r'(\theta) - f = \frac{r(\theta)^2\sqrt{\frac{m(r(\theta)^2+r'(\theta)^2)}{k(a^2-r(\theta)^2)}}}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}. \tag{71}$$

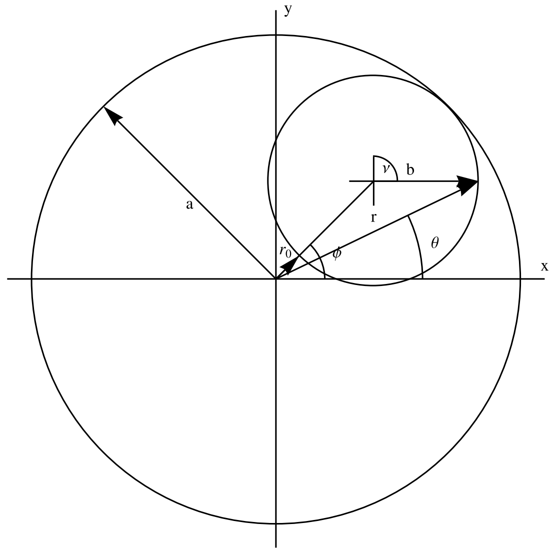


Figura 1: Construcción de una hipocicloide: Sea $a$ el radio del círculo mayor y $b$ el radio del círculo menor. Sea $\theta$ el ángulo que forma el vector de posición del punto sobre el círculo menor con el eje $x$, sea $\phi$ el ángulo que forma el centro del círculo menor y el eje $x$, finalmente sea $\nu$ el ángulo que rota el círculo menor sobre un eje fijo. De la condición de no deslizamiento se obtiene que $\nu = \frac{a-b}{b}\phi$. Podemos escribir la posición del punto en términos de $\phi$ y $\nu$ así (definimos a $r_0 = a - 2b$, la distancia más cercana al centro):
$x = (a-b)\cos\phi - b\cos\nu = \frac{1}{2}\left((a+r_0)\cos(\phi) + (r_0 - a)\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)$,
$y = (a-b)\sin\phi + b\sin\nu = \frac{1}{2}\left((a+r_0)\sin(\phi) + (a - r_0)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)$.

Es una cantidad conservada. La última igualdad se puede escribir de manera más conveniente como:

$$\frac{a^2r^2}{a^2-r^2}\left(\frac{r^2}{Ia^2} - 1 + \frac{r^2}{a^2}\right) = r'(\theta)^2. \tag{72}$$

Si redefinimos a $\frac{1}{I} = \left(-1 + \frac{a^2}{r_0^2}\right)$ entonces la ecuación anterior queda así:

$$\frac{a^2r^2}{a^2-r^2}\frac{r^2-r_0^2}{r_0^2} = r'(\theta)^2. \tag{73}$$

Note que la ecuación anterior restringe los posibles valores $r$ a $r_0 \leq r \leq a$ ya que la derivada de $r$ debe ser real. De la anterior ecuación basta mostrar que es satisfecha por una hipocicloide.

Las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide son:

$$x(\phi) = \frac{1}{2}\left((a + r_0)\cos(\phi) + (r_0 - a)\cos\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0}\right)\right), \tag{74}$$

$$y(\phi) = \frac{1}{2}\left((a + r_0)\sin(\phi) + (a - r_0)\sin\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0}\right)\right). \tag{75}$$

De estas se puede obtener $r(\phi)^2$ así:

$$\begin{aligned} r(\phi)^2 = x(\phi)^2 + y(\phi)^2 = &\frac{1}{4}\left((a + r_0)\cos(\phi) + (r_0 - a)\cos\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0}\right)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left((a + r_0)\sin(\phi) + (a - r_0)\sin\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0}\right)\right)^2. \end{aligned} \tag{76}$$

Que al simplificar, teniendo en cuenta que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ y que $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, queda:

$$r(\phi)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + r_0^2 + \left(r_0^2 - a^2\right)\cos\left(\frac{2a\phi}{a - r_0}\right)\right). \tag{77}$$

Por otro lado, también podemos calcular $\theta(\phi)$:

$$\tan(\theta(\phi)) = \frac{y(\phi)}{x(\phi)} = \frac{(a + r_0)\sin(\phi) + (a - r_0)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)}{(a + r_0)\cos(\phi) + (r_0 - a)\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)}. \tag{78}$$

Aplicando identidades trigonométricas de suma a producto, se obtiene:

$$\tan(\theta(\phi)) = \frac{a\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + a\sin\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}. \tag{79}$$

Si dividimos numerador y denominador por $\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)$, obtenemos:

$$\tan\theta(\phi) = \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}. \tag{80}$$

Note que la última ecuación tiene un notable parecido con la identidad de suma de la tangente.
Con lo anterior calculado, es directo calcular la siguiente cantidad:

$$\tan\left(\theta + \frac{r_0\phi}{a - r_0}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{1 - \tan\theta\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)} \tag{81}$$

$$= \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)}{r_0\left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)}. \tag{82}$$

Finalmente:

$$\tan\left(\theta + \frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) = \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0}. \tag{83}$$

Así, $\theta(\phi)$ es:

$$\theta(\phi) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{r_0}\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\right) - \frac{r_0\phi}{a-r_0}. \tag{84}$$

Ahora que conocemos $r(\phi)$ y $\theta(\phi)$ podemos calcular $r'(\theta)^2$ así:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{\frac{dr}{d\phi}}{\frac{d\theta}{d\phi}}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{a(r_0^2-a^2)\sin\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}{\sqrt{2}(a-r_0)\sqrt{a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}}}{\frac{a^2\sec^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{(a-r_0)r_0\left(\frac{a^2\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0^2}+1\right)} - \frac{r_0}{a-r_0}}\right)^2 \tag{85}$$

$$= -\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a^2-r_0^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2}. \tag{86}$$

Por otro lado, si calculamos el lado izquierdo de la ecuación diferencial:

$$\frac{a^2r^2}{a^2-r^2}\frac{r^2-r_0^2}{r_0^2} = \frac{a^2\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)-r_0^2\right)}{2r_0^2\left(a^2+\frac{1}{2}\left(-a^2-r_0^2-(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\right)}. \tag{87}$$

Que al simplificar se convierte en:

$$-\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a-r_0)(a+r_0)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2}. \tag{88}$$

Lo que muestra que efectivamente la hipocicloide es la solución del problema.

Por último queremos calcular el tiempo de viaje y la profundidad máxima alcanzada en función de la separación angular de los puntos sobre la Tierra. Para encontrar las anteriores cantidades, primero notemos que $r_0 \leq r \leq a$ y que $r_0 = r \rightarrow \phi = 0 \rightarrow \theta = 0$, es decir, por la forma como construimos la solución, $r$ es mínimo en $\theta = 0$. Ahora podemos buscar $\theta$ tal que $r = a$, para ello primero encontremos a $\phi$ que cumpla esa condición:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+\left(r_0^2-a^2\right)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right) \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}\frac{a-r_0}{a}. \tag{89}$$

Si reemplazamos lo anterior en la ecuación para $\theta$ se obtiene que:

$$\theta(r=a)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{r_0}{a}\right).$$

Así entonces, el anterior es el ángulo que se barre entre ir de la superficie al punto de máximo acercamiento; por razones de simetría, este debe ser igual al ángulo que se barre en ir desde el punto de máximo acercamiento al centro hasta la superficie de nuevo. De lo anterior se deduce entonces que si en el trayecto de viaje el vehículo se acerca hasta el centro $r_0$, entonces los puntos están separados angularmente una distancia:

$$\alpha=\pi\left(1-\frac{r_0}{a}\right).$$

Como es de esperarse, si los dos puntos son diametralmente opuestos entonces $r_0=0$ y la trayectoria pasa por el centro; además, como se comprueba fácilmente, es una línea recta en la que se presenta movimiento armónico simple.

Finalmente, la integral que da el tiempo de viaje se puede reparametrizar en términos de $\phi$ para obtener:

$$t_{\text{mín}}=\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)}\sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+r^2(\phi)\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2}{a^2-r^2(\phi)}}\,d\phi, \tag{90}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{a}\sqrt{a^2-r_0^2}=\sqrt{\frac{m}{k}}\pi\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{a}\right)^2}. \tag{91}$$

Pero $\frac{r_0}{a}=1-\frac{\alpha}{\pi}$, así que el tiempo mínimo en términos de la separación angular es:

$$t_{\text{mín}}=\sqrt{\frac{m}{k}}\pi\sqrt{1-\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)^2}.$$

Finalmente, se pide hallar el tiempo de viaje entre Los Ángeles y Nueva York. Estas ciudades están separadas por una distancia de 4800 km. Además se sabe que el diámetro de la Tierra es de aproximadamente $a=6400$ km, luego su separación angular es:

$$\alpha=\frac{4800}{6400}=0{,}75,$$

además la masa de la Tierra es $M=6{,}0\cdot10^{24}$ kg y la constante de Cavendish tiene un valor de $G=6{,}7\cdot10^{-11}$ m$^3$ kg$^{-1}$ s$^{-2}$, entonces:

$$\frac{k}{m}=1{,}5\cdot10^{-6}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

El tiempo de viaje de Nueva York a Los Ángeles es:

$$t_{\text{NY-LA}}=1{,}64\cdot10^3\,\mathrm{s}=27',$$

y el radio mínimo es:

$$r_0=a\left(1-\frac{0{,}75}{\pi}\right)=4{,}9\cdot10^3\,\mathrm{km}.$$

## Ejercicio 2.16

Para el presente problema el Lagrangiano está dado por:

$$L = e^{t\gamma}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2\right). \tag{92}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el anterior Lagrangiano es:

$$e^{t\gamma}\left(kq(t) + m\left(\gamma\dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\right)\right) = 0, \tag{93}$$

que es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Si se hace la transformación de coordenadas $q = e^{-\frac{t\gamma}{2}}s$, el Lagrangiano toma la forma siguiente:

$$L' = \frac{1}{8}\left(\left(m\gamma^2 - 4k\right)s(t)^2 - 4m\gamma\dot{s}(t)s(t) + 4m\dot{s}(t)^2\right). \tag{94}$$

La ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\left(m\gamma^2 - 4k\right)s(t) = 4m\ddot{s}(t), \tag{95}$$

esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico. Finalmente, la función $h$ de Jacobi para el anterior Lagrangiano es constante de movimiento; si se expresa en términos de $q(t)$ queda (con $\omega^2 = k/m$):

$$h = \frac{1}{2}e^{t\gamma}\left(\omega^2 q(t)^2 + \gamma\dot{q}(t)q(t) + \dot{q}(t)^2\right), \tag{96}$$

que es la constante de movimiento para el oscilador armónico amortiguado.

## Ejercicio 2.18

Para este caso, usando coordenadas esféricas, tenemos lo siguiente:

$$T = \frac{1}{2}a^2 m\left(\theta'^2 + \sin^2(\theta)\phi'^2\right), \tag{97}$$
$$V = mgz = mga\cos(\theta). \tag{98}$$

Pero $\phi = \omega t$. Así el Lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}a^2 m\left(\theta'^2 + \sin^2(\theta)\omega^2\right) - mga\cos(\theta). \tag{99}$$

La ecuación de Euler-Lagrange que satisface $\theta$ es:

$$am\left(\left(a\cos(\theta)\omega^2 + g\right)\sin(\theta) - a\theta''\right) = 0. \tag{100}$$

Como se ve del Lagrangiano, la cantidad $h$ (la función de energía) es conservada ya que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. Como además contiene $\theta$, el momento generalizado $p_\theta = a^2 m\theta'$ no se conserva. Para hallar condiciones de equilibrio hagamos $\theta' = 0 \implies \theta'' = 0$. Esto implica en (100) que:

$$\big(a\cos(\theta)\omega^2 + g\big)\sin(\theta) = 0. \tag{101}$$

La anterior ecuación implica o bien que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ o que $\omega = \sqrt{\frac{-g}{a\cos(\theta)}}$. El mínimo valor que toma $\omega$ es $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. Para valores de $\omega$ menores que $\omega_0$, la ecuación (101) no tiene soluciones reales excepto las triviales ($0$ y $\pi$), es decir, no hay más puntos de equilibrio.

## Ejercicio 2.24

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t), \tag{102}$$

$$\dot{x} = -\sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega j \sin(j\omega t), \tag{103}$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \tag{104}$$

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L\,dt. \tag{105}$$

Si sustituimos $x$ y $\dot{x}$ en $L$ obtenemos:

$$L = \frac{m\left(-\sum_{j=0}^{\infty} a_j\omega j\sin(j\omega t)\right)^2}{2} - \frac{k\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\cos(j\omega t)\right)^2}{2}, \tag{106}$$

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2\omega^2 j^2\sin^2(j\omega t) - 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i\omega^2 ij\sin(j\omega t)\sin(i\omega t)\right)}{2} \\ & - \frac{k\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2\cos^2(j\omega t) + 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i\cos(j\omega t)\sin(i\omega t)\right)}{2}. \end{aligned} \tag{107}$$

Al hacer la integral, los términos cruzados con diferente índice se anulan, i.e., si $i \neq j$:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(i\omega t)\sin(j\omega t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(i\omega t)\cos(j\omega t)\,dt = 0. \tag{108}$$

Por otro lado, las integrales con términos no cruzados son fácilmente calculadas así:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(0)\, dt = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{109}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(0)\, dt = 0, \tag{110}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(j\omega t)\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(j\omega t)\, dt = \frac{\pi}{\omega}. \tag{111}$$

La acción $S$ toma la siguiente forma:

$$S = \frac{m\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\omega^2 j^2 \frac{\pi}{\omega}}{2} - \frac{k\left(\frac{2\pi}{\omega}a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \frac{\pi}{\omega}\right)}{2}, \tag{112}$$

$$S = -\frac{k\pi}{\omega}a_0^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\left(m\omega j^2 - \frac{k}{\omega}\right). \tag{113}$$

La acción es ahora una función de las $a_j$, por lo tanto, para que sea extremo el gradiente $\nabla_a$ de la acción con respecto a las $a_j$ debe ser 0, es decir, el vector infinito con entradas:

$$\left(\frac{-2k\pi a_0}{\omega}, \ldots, \pi a_j\left(mj^2\omega - \frac{k}{\omega}\right), \ldots\right) \tag{114}$$

debe ser el vector nulo. Claramente lo anterior implica que $a_0 = 0$ y que:

$$a_j \text{ o } \omega = \sqrt{\frac{k}{j^2 m}}. \tag{115}$$

Supongamos que $a_l \neq 0$. Esto implica que $\omega = \sqrt{\frac{k}{l^2 m}}$ y que $a_{j\neq l} = 0$. Reescribiendo la solución tenemos:

$$x = a_l \cos\left(\frac{l}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = a_l\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \tag{116}$$

# Capítulo 8

## Ejercicio 8.2

Supongamos que tenemos un Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, con su respectivo Hamiltoniano $H$, y momentos conjugados $p_i$. Se desea averiguar cómo queda el nuevo Hamiltoniano $H'$ y los nuevos momentos conjugados $p_i'$ si se usa un nuevo Lagrangiano $L' = L + \frac{dF}{dt}$, donde $F$ es una función arbitraria pero diferenciable. Los nuevos momentos generalizados vienen dados por:

$$p_i' = \frac{\partial L'(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i}. \tag{117}$$

Pero el último término puede transformarse así (suma sobre índices repetidos):

$$\frac{\partial \left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{118}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$, tenemos que:

$$p_i' = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{119}$$

El nuevo Hamiltoniano está dado por:

$$H' = \dot{q}_i p_i' - L' = \dot{q}_i \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - L - \frac{dF}{dt} = \dot{q}_i \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - L - \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right), \tag{120}$$

$$H' = \dot{q}_i p_i - L - \frac{\partial F}{\partial t} = H - \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{121}$$

Para mostrar que las ecuaciones que se obtienen con este nuevo Hamiltoniano para $p_i'$ y $q_i$ tienen la misma forma que las que se obtienen para $p_i$ y $q_i$ a través del Hamiltoniano original, escribamos el principio de Hamilton para el antiguo Hamiltoniano $H$ teniendo en cuenta la adición de $\frac{dF}{dt}$:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L + \frac{dF}{dt}\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H + \frac{dF}{dt}\right) dt, \tag{122}$$
$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right) dt.$$

Los términos dentro de la integral se pueden reorganizar para obtener:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \left(H - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right) dt. \tag{123}$$

Pero el primer paréntesis resulta ser $p_i'$ y el segundo $H'$, así:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i' \dot{q}_i - H'\right) dt. \tag{124}$$

En este punto podemos asumir que $H'$ está escrito en términos de las $q_i$ y las nuevas $p_i'$, y así podemos usar las ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = \dot{p}_i' + \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0, \tag{125}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i'} = \dot{q}_i - \frac{\partial H'}{\partial p_i'} = 0. \tag{126}$$

Que son las ecuaciones de Hamilton para las variables $(q_i, p_i')$.

Para el resto de ejercicios, $a'$ denota la derivada total de la variable $a$ con respecto al tiempo $t$.

## Ejercicio 8.9

Para este problema se hace un procedimiento análogo al que se hace en la formulación lagrangiana. Así entonces:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} q_i' p_i - H\left(q_j, p_j, t\right) - \lambda_i \psi_i\left(q_j, p_j, t\right)\, dt. \tag{127}$$

La variación se puede hacer ahora con $n$ $\delta q_i$, $n$ $\delta p_i$ y $m$ $\lambda_i$. Para este problema las $2n$ ecuaciones de Euler-Lagrange de interés son (siendo $f$ el integrando de la ecuación anterior y $k = 1, \ldots, n$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0, \tag{128}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k'}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0. \tag{129}$$

Sustituyendo para las primeras $n$ ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(q_i' p_i - H\left(q_j, p_j, t\right) - \lambda_i \psi_i\left(q_j, p_j, t\right)\right)}{\partial q_k'}\right) \\ &\qquad - \frac{\partial\left(q_i' p_i - H\left(q_j, p_j, t\right) - \lambda_i \psi_i\left(q_j, p_j, t\right)\right)}{\partial q_k} = 0, \end{aligned} \tag{130}$$

$$\frac{dp_k}{dt} - \left(\frac{\partial\left(-H\left(q_j, p_j, t\right) - \lambda_i \psi_i\left(q_j, p_j, t\right)\right)}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{131}$$

Reorganizando términos y teniendo en cuenta que hay suma sobre el índice repetido $i$, nos queda:

$$-p_k' = \frac{\partial H}{\partial q_k} + \lambda_i \frac{\partial \psi_i\left(q_j, p_j, t\right)}{\partial q_k}. \tag{132}$$

Para las restantes $n$ ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial p_k'}\right)\\&-\frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial p_k} = 0.\end{aligned} \tag{133}$$

Reorganizando los términos tenemos (de nuevo suma sobre $i$):

$$0 - \left(q_k' - \frac{\partial H}{\partial p_k} - \lambda_i\frac{\partial\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)}{\partial p_k}\right) = 0, \tag{134}$$

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \lambda_i\frac{\partial\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)}{\partial p_k}. \tag{135}$$

## Ejercicio 8.12

Usando la convención usada en el capítulo 2, el lagrangiano del sistema se puede escribir como:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\mathbf{r'}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{R'}^2 - U\left(R\right). \tag{136}$$

Usando coordenadas esféricas $R,\theta,\phi$ para $\mathbf{R}$ y coordenadas rectangulares $x,y,z$ para $\mathbf{r}$, y llamando $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ y $M = m_1+m_2$, tenemos:

$$L = \frac{\mu}{2}\left(R'^2 + R^2\theta'^2 + R^2\sin^2\left(\theta\right)\phi'^2\right) + \frac{M}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right) - U\left(R\right). \tag{137}$$

De lo anterior se ve fácilmente que el Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2\left(\theta\right)}\right) + \frac{1}{2M}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right) + U\left(R\right). \tag{138}$$

Ahora obtengamos las ecuaciones de Hamilton para $p_x,p_y,p_z,x,y,z$, que son:

$$p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = c_1, \tag{139}$$

$$p_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = c_2, \tag{140}$$

$$p_z' = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = c_3, \tag{141}$$

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/M \Rightarrow x = x_0 + \left(p_x/M\right)t, \tag{142}$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y/M \Rightarrow y = y_0 + \left(p_y/M\right)t, \tag{143}$$

$$z' = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z/M \Rightarrow z = z_0 + \left(p_z/M\right)t. \tag{144}$$

Con lo anterior nos hemos librado de la mitad de las variables y podemos escribir el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2 \sin^2(\theta)}\right) + U(R) + c, \tag{145}$$

donde $c = \frac{1}{2M}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$. De ahora en adelante dicha constante se omitirá ya que no afecta las ecuaciones de movimiento de las demás variables. En el anterior Hamiltoniano la variable $\phi$ es cíclica, por lo que $p_\phi = l_z$ es constante de movimiento y así:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{l_z^2}{R^2 \sin^2(\theta)}\right) + U(R), & (146)\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{1}{R^2}\left(p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)}\right)\right) + U(R), & (147)\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{f(\theta, p_\theta)}{R^2}\right) + U(R). & (148) \end{aligned}$$

Ahora, como en vez de $\theta$ y $p_\theta$ por separado aparece una función $f(\theta, p_\theta)$ de las dos, esta debe ser una constante de movimiento, *i.e.*:

$$f(\theta, p_\theta) = L^2 = p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)} = k. \tag{149}$$

De la anterior ecuación podemos obtener $p_\theta$ en términos de $\theta$ así:

$$p_\theta = \pm\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)}}. \tag{150}$$

Y además podemos escribir el Hamiltoniano así:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{L^2}{R^2}\right) + U(R). \tag{151}$$

Finalmente podemos obtener $p_R$ en función de $R$ como ($H = E =$ constante de movimiento):

$$p_R = \pm\sqrt{2\mu\left(H - U(R) - \frac{L^2}{2R^2}\right)} = \pm\sqrt{2\mu\left(E - U(R) - \frac{L^2}{2R^2}\right)}. \tag{152}$$

Con lo anterior en mente podemos escribir las restantes ecuaciones de Hamilton:

$$p'_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R} \Rightarrow p_R - p_{R_0} = \int_0^t \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R}\, dt, \tag{153}$$

$$p'_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{l_z^2}{\mu R^2} \Rightarrow p_\theta - p_{\theta_0} = \int_0^t \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{l_z^2}{\mu R^2}\, dt, \tag{154}$$

$$p'_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = l_z, \tag{155}$$

$$R' = \frac{\partial H}{\partial p_R} = \frac{p_R}{\mu} \Rightarrow t = \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{L^2}{2R^2}\right)}}, \tag{156}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu R^2} \Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{\mu R^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{157}$$

$$\phi' = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{l_z}{\mu R^2 \sin^2(\theta)} \Rightarrow \phi - \phi_0 = l_z \int_0^t \frac{dt}{\mu R^2 \sin^2(\theta)}. \tag{158}$$

Note que una vez realizada la integral correspondiente a $R'$ y obtenido $R(t)$ en forma explícita, este se puede reemplazar en la integral correspondiente a $\theta'$ y así obtener $\theta$ como función explícita de $t$. Con estas dos variables conocidas se puede sustituir en las ecuaciones de las demás variables, realizar las respectivas integraciones e inversiones y resolver el problema completamente.

## Ejercicio 8.14

Sea $L = ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2}$. De este obtenemos los momentos conjugados:

$$p_x = fz'y^2 + 2ax' + cy', \tag{159}$$

$$p_y = \frac{b}{x} + g + cx', \tag{160}$$

$$p_z = fy^2x'. \tag{161}$$

Con estos podemos obtener el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = q'_i p_i - L = {} & \left(fx'z'y^2 + \left(\frac{b}{x} + g + cx'\right) y' + x'\left(fz'y^2 + 2ax' + cy'\right)\right) \\ & - \left(ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned} H = {} & \left(2fx'z'y^2 + 2ax'^2 + gy' + 2cx'y' + \frac{by'}{x}\right) \\ & - \left(ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{aligned} \tag{163}$$

$$H = ax'^2 + \left(fz'y^2 + cy'\right)x' + k\sqrt{x^2+y^2}. \tag{164}$$

Aunque la transformación (lineal) que manda a las velocidades en los momentos no tiene inversa, lo que sí se puede hacer es, de la ecuación de $p_x$, despejar $y'$ y de la de $p_z$ a $x'$ para obtener:

$$y' = \frac{-fz'y^2 + p_x - 2ax'}{c} = \frac{-fz'y^2 + p_x - 2a\frac{p_z}{fy^2}}{c}, \tag{165}$$

$$x' = \frac{p_z}{fy^2}. \tag{166}$$

Y sustituirlos en la ecuación del Hamiltoniano:

$$H = ax'^2 + \left(fz'y^2 + c\frac{-fz'y^2 + p_x - 2ax'}{c}\right)x' + k\sqrt{x^2+y^2}, \tag{167}$$

$$H = \frac{ap_z^2}{f^2y^4} + \frac{\left(p_x - \frac{2ap_z}{fy^2}\right)p_z}{fy^2} + k\sqrt{x^2+y^2}, \tag{168}$$

$$H = -\frac{ap_z^2}{f^2y^4} + \frac{p_xp_z}{fy^2} + k\sqrt{x^2+y^2}. \tag{169}$$

Este Hamiltoniano no depende ni de $p_y$ ni de $z$, por lo tanto $y = c$ y $p_z = k$ son constantes de movimiento. Además, $H$ no depende explícitamente de $t$, por lo tanto $H$ también es constante de movimiento.

## Ejercicio 8.19

Del dibujo se ve que la posición del cuerpo puede ser escrita así:

$$\tilde{x} = l\sin(\theta) + x, \tag{170}$$

$$\tilde{z} = -l\cos(\theta) + z = ax^2 - l\cos(\theta). \tag{171}$$

Donde $\theta$ es el ángulo que forma el eje del péndulo con la vertical. Así el lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\tilde{x}'^2 + \tilde{z}'^2\right) - mg\tilde{z}. \tag{172}$$

Usando como coordenadas generalizadas $x$ y $\theta$, se reescribe así:

$$\frac{1}{2}m\left(\left(x' + l\cos(\theta)\theta'\right)^2 + \left(2axx' + l\sin(\theta)\theta'\right)^2\right) - mg\left(ax^2 - l\cos(\theta)\right). \tag{173}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} L =& 2a^2mx'^2x^2 - agmx^2 + 2alm\sin(\theta)x'\theta'x + \frac{1}{2}mx'^2 \\ &+ \frac{1}{2}l^2m\cos^2(\theta)\theta'^2 + \frac{1}{2}l^2m\sin^2(\theta)\theta'^2 + glm\cos(\theta) + lm\cos(\theta)x'\theta'. \end{aligned} \tag{174}$$

Lo que puede ser reescrito así:

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\mathbf{q'}^T T \mathbf{q'}, \tag{175}$$

con:

$$\mathbf{q'} = \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix}, \tag{176}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4a^2mx^2 + m & lm\cos(\theta) + 2alm\sin(\theta)\,x \\ lm\cos(\theta) + 2alm\sin(\theta)\,x & l^2m \end{pmatrix}, \tag{177}$$

$$L_0 = glm\cos(\theta) - agmx^2. \tag{178}$$

Para hallar el Hamiltoniano se usa el procedimiento de la ecuación 8.27, página 340, capítulo 8:

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T T^{-1}\mathbf{p} - L_0(q,t). \tag{179}$$

Para este caso la inversa de $T$ es:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}\begin{pmatrix} l^2m & -2alm\sin(\theta)\,x - lm\cos(\theta) \\ -2alm\sin(\theta)\,x - lm\cos(\theta) & 4a^2mx^2 + m \end{pmatrix}, \tag{180}$$

$$\begin{aligned}\det(T) = & l^2m^2 - l^2\cos^2(\theta)\,m^2 + 4a^2l^2x^2m^2 - 4a^2l^2\sin^2(\theta)\,x^2m^2 \\ & - 4al^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,xm^2,\end{aligned} \tag{181}$$

$$\det(T) = m^2l^2\left(\sin(\theta)^2 + 4a^2x^2\cos^2(\theta) - 4ax\cos(\theta)\sin(\theta)\right), \tag{182}$$

$$\det(T) = m^2l^2\left(\sin(\theta) - 2ax\cos(\theta)\right)^2. \tag{183}$$

$$\frac{\mathbf{p}^T T^{-1}\mathbf{p}}{2} = \frac{m\left(l^2p_x^2 - 2lp_\theta p_x\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det(T)}. \tag{184}$$

Finalmente el Hamiltoniano queda así:

$$H = \frac{m\left(l^2p_x^2 - 2lp_\theta p_x\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det(T)} - mgl\cos(\theta) + magx^2, \tag{185}$$

$$H = \frac{l^2p_x^2 - 2lp_\theta p_x\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)}{2l^2m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} - mgl\cos(\theta) + mgax^2. \tag{186}$$

Ahora con el Hamiltoniano hallamos las ecuaciones de Hamilton:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{l p_x - (\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\, p_\theta}{lm\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^2}, \tag{187}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{(4a^2x^2+1)\, p_\theta - l\,(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\, p_x}{l^2 m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^2}, \tag{188}$$

$$\begin{aligned} p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2a}{m}\Bigg( &- gxm^2 + \frac{p_\theta\,(l\sin(\theta)\, p_x - 2axp_\theta)}{l^2\,(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} \\ &- \frac{\cos(\theta)\,(l^2p_x^2 - 2l\,(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\, p_\theta p_x + (4a^2x^2+1)\, p_\theta^2)}{l^2\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3}\Bigg). \end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned} p_\theta' = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = &\frac{1}{l^2 m}\left(-gm^2\sin(\theta)\, l^3 + \frac{p_x p_\theta l}{2a\cos(\theta)\, x - \sin(\theta)}\right) \\ &+ \frac{1}{l^2 m}\frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)}{(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3} \\ &\times \left(l^2p_x^2 - 2l\,(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\, p_\theta p_x + \left(4a^2x^2+1\right) p_\theta^2\right). \end{aligned} \tag{190}$$

Las anteriores expresiones para $p_x'$ y $p_\theta'$ se pueden reorganizar así:

$$\begin{aligned} p_\theta' = &\frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\, p_x^2}{m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3} \\ &+ \left(\frac{2a\cos(\theta)\, x - \sin(\theta)}{lm\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^2} - \frac{2\,(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)^2}{lm\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3}\right) p_\theta p_x \\ &+ \frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)\,(4a^2x^2+1)\, p_\theta^2}{l^2 m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3} - glm\sin(\theta)\,. \end{aligned} \tag{191}$$

$$\begin{aligned} p_x' = &-\frac{2a\cos(\theta)\, p_x^2}{m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3} \\ &+ \left(\frac{2a\sin(\theta)}{lm\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^2} + \frac{4a\cos(\theta)\,(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\, x)}{lm\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3}\right) p_\theta p_x \\ &+ \left(-\frac{4xa^2}{l^2 m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^2} - \frac{2\cos(\theta)\,(4a^2x^2+1)\, a}{l^2 m\,(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\, x)^3}\right) p_\theta^2 - 2agmx. \end{aligned} \tag{192}$$

# Capítulo 9

## Ejercicio 9.9

Sea $u$ una función de $r^2, p^2, \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$. Para mostrar que $[u, \mathbf{L}] = 0$ es suficiente ver que $[r^2, \mathbf{L}] = 0$, $[p^2, \mathbf{L}] = 0$ y $[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, \mathbf{L}] = 0$, ya que:

$$
\begin{aligned}
[u, \mathbf{L}] =& \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} = && (193)\\
=& \left(\frac{\partial u}{\partial (r^2)}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial (p^2)}\frac{\partial p^2}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} && (194)\\
&- \left(\frac{\partial u}{\partial (r^2)}\frac{\partial r^2}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial (p^2)}\frac{\partial p^2}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial p_i}\right)\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\\
=& \left(\frac{\partial u}{\partial (r^2)}\left(\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial r^2}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial (p^2)}\left(\frac{\partial p^2}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial p^2}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right) && (195)\\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\left(\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right)\\
=& \frac{\partial u}{\partial (r^2)}[r^2, \mathbf{L}] + \frac{\partial u}{\partial (p^2)}[p^2, \mathbf{L}] + \frac{\partial u}{\partial (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, \mathbf{L}]. && (196)
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos los corchetes de Poisson de la anterior expresión:

$$
\begin{aligned}
[x_l x_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] =& \epsilon_{ijk}([x_l x_l, x_i]p_j + x_i[x_l x_l, p_j]), && (197)\\
=& -\epsilon_{ijk}(p_j([x_i, x_l]x_l + x_l[x_i, x_l]) + x_i([p_j, x_l]x_l + x_l[p_i, x_l])).
\end{aligned}
$$

Pero $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ y $[x_i, p_j] = -[p_j, x_i] = \delta_{ij}$. Así entonces:

$$
[x_l x_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = -\epsilon_{ijk}(2x_i x_l[p_j, x_l]) = 2\epsilon_{ijk}x_i x_j = \epsilon_{ijk}x_i x_j + \epsilon_{jik}x_j x_i = 0. \qquad (198)
$$

Para el segundo término tenemos:

$$
\begin{aligned}
[p_l p_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] =& \epsilon_{ijk}(p_j[p_l p_l, x_i] + x_i[p_l p_l, p_j]) = -\epsilon_{ijk}(p_j[x_i, p_l p_l])\\
=& -\epsilon_{ijk}2p_j p_l[x_i, p_l] = -2\epsilon_{ijk}p_j p_i = 0. && (199)
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
[x_l p_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] =& \epsilon_{ijk}([x_l p_l, x_i]p_j + x_i[x_l p_l, p_j])\\
=& -\epsilon_{ijk}(p_j([x_i, x_l]p_l + x_l[x_i, p_l]) + x_i([p_j, x_l]p_l + x_l[p_j, p_l]))\\
=& -\epsilon_{ijk}p_j x_i + \epsilon_{ijk}x_i p_j = 0. && (200)
\end{aligned}
$$

Si $\mathbf{F} = u\mathbf{r} + v\mathbf{p} + w\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, donde $u, v, w$ son funciones del mismo tipo que las del literal anterior, se pide mostrar que $[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk}F_k$. Para ver lo anterior calculemos por separado las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
[ux_i, L_j] =& u[x_i, L_j], && (201)\\
[vp_i, L_j] =& v[p_i, L_j], && (202)\\
[wL_i, L_j] =& w[L_i, L_j], && (203)
\end{aligned}
$$

ya que $[u, L_j] = [v, L_j] = [w, L_j] = 0$. Ahora basta calcular las anteriores expresiones:

$$[x_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = \epsilon_{ijk}(p_j[x_l, x_i] + x_i[x_l, p_j]) = \epsilon_{ilk} x_i, \tag{204}$$

$$[p_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = \epsilon_{ijk}(x_i[p_l, p_j] + p_j[p_l, x_i]) = -\epsilon_{ljk} p_j = \epsilon_{jlk} p_j, \tag{205}$$

$$\begin{aligned}[\epsilon_{lmi} x_l p_m, \epsilon_{abj} x_a p_b] &= \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(x_a[x_l p_m, p_b] + p_b[x_l p_m, x_a]) \\ &= -\epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(x_a([p_b, x_l]p_m) + p_b([x_a, p_m]x_l)) \\ &= -\epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(-x_a p_m \delta_{bl} + \delta_{am} p_b x_l).\end{aligned} \tag{206}$$

Finalmente:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}\delta_{bl} x_a p_m - \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}\delta_{am} p_b x_l = \epsilon_{lmi}\epsilon_{alj} x_a p_m - \epsilon_{lmi}\epsilon_{mbj} p_b x_l = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{207}$$

Reuniendo todo lo anterior:

$$[F_i, L_j] = u\epsilon_{ijk} x_k + v\epsilon_{ijk} p_k + \epsilon_{ijk} w L_k. \tag{208}$$

## Ejercicio 9.28

Para este problema tenemos que los momentos canónicos están dados por:

$$p_k = m\dot{x}_k + \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j. \tag{209}$$

De estos se obtiene fácilmente que:

$$v_k = \dot{x}_k = \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j}{m}. \tag{210}$$

Así entonces:

$$[v_k, v_l] = \left[\frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j}{m}, \frac{p_l - \frac{q}{2}\epsilon_{abl} B_a x_b}{m}\right], \tag{211}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(\left[p_k, -\frac{q}{2}\epsilon_{abl} B_a x_b\right] - \left[\frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j, p_l\right]\right), \tag{212}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(-\frac{q}{2}\epsilon_{abl} B_a [p_k, x_b] - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i [x_j, p_l]\right), \tag{213}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(\frac{q}{2}\epsilon_{abl} B_a \delta_{kb} - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i \delta_{jl}\right) = \frac{1}{m^2}\left(\frac{q}{2}\epsilon_{akl} B_a - \frac{q}{2}\epsilon_{ilk} B_i\right), \tag{214}$$

$$= \frac{1}{m^2}\frac{q}{2}\left(\epsilon_{akl} B_a + \epsilon_{ikl} B_i\right) = \frac{q}{m^2}\epsilon_{akl} B_a. \tag{215}$$

Por otro lado:

$$[x_l, v_k] = \left[x_l, \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j}{m}\right] = \frac{\delta_{lk}}{m}, \tag{216}$$

$$[p_l, \dot{x}_k] = \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk} B_i x_j}{m} = \frac{-q\epsilon_{ijk} B_i}{2m}[p_l, x_j] = \frac{q\epsilon_{ijk} B_i}{2m}\delta_{lj} = \frac{q\epsilon_{ilk} B_i}{2m}, \tag{217}$$

$$[x_k, \dot{p}_l] = [x_k, [p_l, H]] = -[H, [x_k, p_l]] - [p_l, [H, x_k]] = -[p_l, -\dot{x}_k] = [p_l, \dot{x}_k] = \frac{q\epsilon_{ilk} B_i}{2m}. \tag{218}$$

Para el último cálculo es necesario encontrar una expresión para $\dot{p}_a$, para esto usamos las ecuaciones de Hamilton:

$$H = \frac{\left(p_i - \frac{q}{2}B_j x_k \epsilon_{ijk}\right)\left(p_i - \frac{q}{2}B_l x_n \epsilon_{iln}\right)}{2m}. \tag{219}$$

Con estas se encuentran fácilmente los $\dot{p}_a$:

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x_a} = \frac{q}{2}B_l \epsilon_{ila}\left(p_i - \frac{q}{2}B_j x_k \epsilon_{ijk}\right) + \frac{q}{2}B_j \epsilon_{ija}\left(p_i - \frac{q}{2}B_l x_n \epsilon_{iln}\right). \tag{220}$$

Y se calcula el corchete de Poisson:

$$[p_b, \dot{p}_a] = \frac{1}{2m}\left(-\frac{q^2}{4}B_j B_l \epsilon_{ijk}\epsilon_{ila}[p_b, x_k] - \frac{q^2}{4}B_l B_j \epsilon_{iln}\epsilon_{ija}[p_b, x_n]\right), \tag{221}$$

$$= \frac{q^2}{8m}B_l B_j(\epsilon_{ijb}\epsilon_{ila} + \epsilon_{ilb}\epsilon_{ija}) = \frac{q^2}{4m}(B_l B_l \delta_{ba} - B_a B_b). \tag{222}$$

## Ejercicio 9.30

Supongamos que $Q, R$ son constantes de movimiento, entonces:

$$[Q, H] = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{223}$$

$$[R, H] = -\frac{\partial R}{\partial t}. \tag{224}$$

Evaluemos las siguientes cantidades:

$$[[Q,R],H] = [R,[H,Q]] + [Q,[R,H]] = [R, \frac{\partial Q}{\partial t}] + [Q, -\frac{\partial R}{\partial t}], \tag{225}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)\frac{\partial Q}{\partial p_i}.$$

Por otro lado:

$$-\frac{\partial [Q,R]}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial p_i}\frac{\partial R}{\partial x_i}\right), \tag{226}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial p_i}. \tag{227}$$

Para ver que $[Q, R]$ es constante de movimiento es suficiente comparar las 2 últimas expresiones y notar que las derivadas parciales conmutan.

Para mostrar que si $F$ y $H$ son constantes de movimiento entonces $\frac{\partial^n F}{\partial t^n}$ es constante de movimiento, basta notar que $[F, H] = -\frac{\partial F}{\partial t}$ es constante de movimiento, *i.e.*:

$$\frac{d[F,H]}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0. \tag{228}$$

Para probar que esto es cierto para la $n$-ésima derivada se usa inducción:
Se probó para $n=1$, se cumple *i.e.*: $\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right)=0$.
Ahora supongamos que se cumple para $n$, es decir: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^n F}{\partial t^n}\right)=[\frac{\partial^n F}{\partial t^n},H]+\frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}}=0$, pero como por hipótesis $\frac{\partial^n F}{\partial t^n}$ es constante de movimiento, entonces $[\frac{\partial^n F}{\partial t^n},H]$ también lo es y por lo tanto $\frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}}=-[\frac{\partial^n F}{\partial t^n},H]$ también es constante de movimiento.

Finalmente, tomando $F=x-\frac{pt}{m}$ y $H=\frac{p^2}{2m}$ se verifica fácilmente que:

$$\left[x-\frac{pt}{m},\frac{p^2}{2m}\right]=\left[x,\frac{p^2}{2m}\right]=\frac{2p}{2m}\left[x,p\right]=\frac{2p}{2m}=-\frac{\partial F}{\partial t}=-\left(-\frac{p}{m}\right)\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{p}{m}. \tag{229}$$

## Ejercicio 9.31

Sea $u=\ln(p+im\omega q)-i\omega t$ y $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$.
Entonces:

$$[u,H]=\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p}=\left(\frac{im\omega}{p+imq\omega}\right)\frac{p}{m}-mq\omega^2\left(\frac{1}{p+imq\omega}\right)=i\omega. \tag{230}$$

Por otro lado, claramente $\frac{\partial u}{\partial t}=-i\omega$, por lo tanto $u$ es una constante de movimiento.
Como sabemos las soluciones explícitas del problema, podemos ver que es exactamente $u$,

$$q(t)=q_0\cos\omega(t-t_0)+\frac{p_0}{m\omega}\sin\omega(t-t_0), \tag{231}$$

$$p(t)=p_0\cos\omega(t-t_0)-q_0m\omega\sin\omega(t-t_0), \tag{232}$$

$$u=\ln(p(t)+im\omega q(t))-\omega t=-i\omega t_0+\ln\left(p_0+im\omega q_0\right). \tag{233}$$

# Capítulo 10

## Ejercicio 10.5

Se pide mostrar que $S=\frac{1}{2}m\left(q^2+\alpha^2\right)\omega\cot(\omega t)-mq\alpha\omega\csc(\omega t)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico. Para este caso dicha ecuación es:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2\right]+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{234}$$

Esto se hace directamente calculando las derivadas que aparecen en la anterior ecuación:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2\right]=\frac{1}{2m}\left[(mq\omega\cot(\omega t)-m\alpha\omega\csc(\omega t))^2+m^2\omega^2q^2\right], \tag{235}$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\left(q^2-2\alpha\cos(\omega t)q+\alpha^2\right)\csc^2(\omega t). \tag{236}$$

La última igualdad se obtiene al tener en cuenta que $1+\cot^2 z = \csc^2 z$ y que $\cot z \csc z = \cos z \csc^2 z$. Por otro lado:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2}m\omega^2\left(q^2 - 2\alpha\cos(t\omega)q + \alpha^2\right)\csc^2(\omega t). \tag{237}$$

Comparando las 2 últimas igualdades se ve que la $S$ dada es efectivamente solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Conocida $S$ podemos escribir las ecuaciones de transformación:

$$p = mq\omega\cot(\omega t) - m\alpha\omega\csc(\omega t) \Rightarrow \alpha = q\cos(\omega t) - \frac{p\sin(\omega t)}{m\omega}, \tag{238}$$

$$\beta = m\omega(\alpha\cos(\omega t) - q)\csc(\omega t). \tag{239}$$

Para mostrar que la $S$ dada genera la solución correcta del problema del oscilador armónico lo primero que hay que notar que tanto el nuevo momento conjugado $\alpha$ como su coordenada generalizada $\beta$ son constantes de movimiento y por lo tanto podemos escribir:

$$\alpha = q\cos(\omega t) - \frac{p\sin(\omega t)}{m\omega} = \alpha(t_0) = q(t_0)\cos(\omega t_0) - \frac{p(t_0)\sin(\omega t_0)}{m\omega}, \tag{240}$$

$$\beta = m\omega(\alpha\cos(\omega t) - q)\csc(\omega t) = \beta(t_0) = m\omega(\alpha\cos(\omega t_0) - q(t_0))\csc(\omega t_0). \tag{241}$$

El valor de $\alpha(t_0)$ puede ser sustituido en la última ecuación para obtener:

$$\begin{aligned}
&\cot(\omega t)\left(\cos(\omega t_0)q(t_0) - \frac{p(t_0)\sin(\omega t_0)}{m\omega}\right) - \csc(\omega t)q, \\
&\quad = \cot(\omega t_0)\left(\cos(\omega t_0)q(t_0) - \frac{p(t_0)\sin(\omega t_0)}{m\omega}\right) - \csc(\omega t_0)q(t_0).
\end{aligned} \tag{242}$$

De la anterior ecuación se puede obtener $q$ así:

$$q = \cos(\omega(t-t_0))q(t_0) + \frac{p(t_0)\sin(\omega(t-t_0))}{m\omega}. \tag{243}$$

Para obtener $p$ basta igualar $\alpha = \alpha(t_0)$, despejar $p$ y sustituir la expresión anterior para obtener:

$$p = \csc(\omega t)(m\omega\cos(\omega t)q - m\omega\cos(\omega t_0)q(t_0) + p(t_0)\sin(\omega t_0)), \tag{244}$$

$$= \cos(\omega(t-t_0))p(t_0) - m\omega q(t_0)\sin(\omega(t-t_0)). \tag{245}$$

Que es evidentemente la solución al problema.

## Ejercicio 10.6

Para solucionar este problema es mejor comenzar escribiendo el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kr^2 + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}. \tag{246}$$

El campo magnético es homogéneo en la dirección $z$, $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$, por lo tanto el vector de potencial magnético viene dado:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}B\left(-\mathbf{i}y + \mathbf{j}x\right) = \frac{1}{2}Br\mathbf{u}_\theta. \tag{247}$$

Teniendo en cuenta que $v = \dot{r}\mathbf{u_r} + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$, entonces el lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}qr^2\dot{\theta}. \tag{248}$$

Con el lagrangiano podemos obtener los momentos conjugados generalizados así:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \tag{249}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}Bqr^2 + m\dot{\theta}r^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\frac{2p_\theta}{r^2} - Bq}{2m}. \tag{250}$$

Conocidos los momentos conjugados generalizados podemos escribir el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H =& \dot{\theta}p_\theta + \dot{r}p_r - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{B^2q^2r^2}{8m} + \frac{1}{2}kr^2 - \frac{Bqp_\theta}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}, \\ =& \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right). \end{aligned} \tag{251}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi para el presente problema toma la forma:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{252}$$

Como $\theta$ es una variable cíclica, es útil escribir la función principal de Hamilton como:

$$S(r, \theta, E, \alpha_\theta, t) = W_r(r, E) + W_\theta(\theta, \alpha_\theta) - Et = W_r(r, \alpha) + \theta\alpha_\theta - Et. \tag{253}$$

Sustituyendo en la ecuación de Hamilton-Jacobi y teniendo en cuenta que $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha_\theta$, se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta}\right)}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right), \\ &= \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right) = E. \end{aligned} \tag{254}$$

La anterior ecuación puede ser resuelta para $W_r$ así:

$$W_r = \int \sqrt{2mE - mkr^2 - \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2} dr. \tag{255}$$

Finalmente obtenemos que la función principal de Hamilton es:

$$S(r,\theta,E,p_\theta)=\int\sqrt{2mE-mkr^2-\left(\frac{p_\theta}{r}-\frac{rqB}{2}\right)^2}dr+\theta p_\theta-Et. \tag{256}$$

Note que si $p_\theta(t=0)=0\Rightarrow p_\theta(t)=0\ \forall t$ (ya que $p_\theta$ es constante de movimiento), la integral para $W_r$ se hace mucho más sencilla:

$$W_r=\int\sqrt{2mE-\left(mk+\left(\frac{qB}{2}\right)^2\right)r^2dr}. \tag{257}$$

Al sustituir lo anterior en la función principal de Hamilton se obtiene:

$$S=m\int\sqrt{\frac{2E}{m}-\left(\frac{k}{m}+\left(\frac{qB}{2m}\right)^2\right)r^2dr}-Et=m\int\sqrt{\frac{2E}{m}-\left(\omega_0^2+\omega_c^2\right)r^2dr}-Et. \tag{258}$$

Si $p_\theta=0$ entonces además:

$$\dot\theta=\frac{-qB}{2m}\Rightarrow\theta=\frac{-qB}{2m}(t-t_0)+\theta(t_0). \tag{259}$$

Pero $\frac{k}{m}=\omega_0^2$ no es más que la frecuencia "natural" del oscilador armónico y $\frac{qB}{2m}=\omega_c$ es la frecuencia ciclotrónica debida al campo magnético. Finalmente se ve que si se compara la última ecuación con la ecuación de un oscilador armónico que no esté en presencia de campo magnético, entonces ambas ecuaciones tienen la misma forma excepto porque en este ejemplo el oscilador se mueve con una frecuencia efectiva $\omega^2=\omega_0^2+\omega_c^2$. Así entonces radialmente la partícula se mueve como un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega=\sqrt{\omega_0^2+\omega_c^2}$ y además rota con velocidad angular constante $\frac{-qB}{2m}=\omega_c$.

## Ejercicio 10.13

El hamiltoniano del problema viene dado por:

$$H=E=\frac{p^2}{2m}+F|x|. \tag{260}$$

De la anterior ecuación podemos obtener a $p$ como función de $x$ así:

$$p=\sqrt{2m}\sqrt{E-F|x|}. \tag{261}$$

Con la anterior ecuación podemos obtener la variable de acción para el problema:

$$J=\oint p\ dx=\oint\sqrt{2m}\sqrt{E-F|x|}dx=4\sqrt{2m}\int_0^{E/F}\sqrt{E-F|x|}dx=\frac{8\sqrt{2m}}{3}\frac{E^{3/2}}{F}. \tag{262}$$

La integral ha sido evaluada usando el hecho de que la función sobre el contorno cerrado de integración recorre cuatro veces el camino desde 0 hasta $x = \frac{E}{F}$ (que es el punto de retorno) y un sencillo cambio de variable $y = E - F|x|$. De la última ecuación se puede obtener a $E = H$ como función de $J$:

$$H = \frac{3^{2/3}\left(\frac{FJ}{\sqrt{m}}\right)^{2/3}}{4\sqrt[3]{2}}. \tag{263}$$

Con lo anterior en mente y usando que la frecuencia $\nu = \frac{\partial H}{\partial J}$ y que $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\partial J}{\partial H}$, entonces:

$$T = \frac{4\sqrt{2mE}}{F}. \tag{264}$$