Transformación Canónica para el Oscilador Armónico

Nicolás Quesada

Se tiene la transformación :

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{e^{i\omega t}(m\omega q + ip)}{\sqrt{2m\omega}} && (1)\\
a^* &= \frac{e^{-i\omega t}(m\omega q - ip)}{\sqrt{2m\omega}} && (2)
\end{aligned}
$$

Se pide mostrar que la transformación $(q,p) \longmapsto (a, ia^*)$ es canónica y exhibir su función generatriz.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser invertidas para obtener:

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{ae^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} && (3)\\
p &= i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(a^* e^{i\omega t} - ae^{-i\omega t}\right) && (4)
\end{aligned}
$$

Se buscará una función generatriz de primer tipo. Con ella se pueden escribir las ecuaciones auxiliares:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} && (5)\\
ia^* &= -\frac{\partial F_1}{\partial a} && (6)
\end{aligned}
$$

De la ecuación que define a a se puede obtener a p en terminos de a y q asi:

$$p = i\left(mq\omega - e^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}a\right) \tag{7}$$

y sustituirlo en la primera ecuación auxiliar e integrar para obtener:

$$F_1 = i\left(\frac{1}{2}mq^2\omega - ae^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega}\right) + h(a) \tag{8}$$

La anterior ecuación se puede derivar parcialmente con respecto a a y compararla con la segunda ecuación auxiliar (De la ecuación que define a q en terminos de a y a^* podemos despejar esta última):

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = h'(a) - ie^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega} = -ia^* = i\left(ae^{-2i\omega t} - e^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega}\right) \tag{9}$$

Para obtener:

$$h'(a) = iae^{-2i\omega t} \longrightarrow h(a) = \frac{1}{2}ia^2 e^{-2i\omega t} \tag{10}$$

Finalmente la función buscada es:

$$F_1 = \frac{1}{2} i \left(e^{-2it\omega} a^2 - 2e^{-it\omega} a \sqrt{2m\omega} q + mq^2 \omega \right) \tag{11}$$

Con los anterior se ve que la transformación dada por (1) y (2) es canónica. Veamos como queda el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de las nuevas variables canónicas (a, ia^*).
El hamiltoniano del oscilador armónico en las variables (q, p) es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{12}$$

Por otro lado el Hamiltoniano transformado es:

$$H'(a, a^*) = H(a, a^*) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{13}$$

Además tenemos que:

$$a^* a = \frac{H}{\omega} \Longrightarrow H = \omega a^* a \tag{14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \omega \left(a^2 e^{-2i\omega t} - a e^{-i\omega t} q \sqrt{2m\omega} \right) \tag{15}$$

que al cambiar a q en términos de a y a^* se simplifica enormemente para dar:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\omega a^* a \tag{16}$$

Finalmente $H' = 0$.

Estas transformaciones han hecho que las nuevas coordenadas y momentos sean constantes y que además estos tengan por valor la exponencial de una fase debida a las condiciones iniciales por una función de la energía. Mas exactamente:

$$q = A\cos(\omega t - \phi) \Longrightarrow p = -Am\omega \sin(\omega t - \phi) \tag{17}$$

entonces

$$a = \frac{Ae^{i\phi}\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\phi}\sqrt{E}}{\sqrt{\omega}} \tag{18}$$

$$a^* = \frac{Ae^{-i\phi}\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\phi}\sqrt{E}}{\sqrt{\omega}} \tag{19}$$