

Transformación Canónica para el Oscilador Armónico

Nicolás Quesada M.

Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Se tiene la transformación :

$$a = \frac{e^{i\omega t}(m\omega q + ip)}{\sqrt{2m\omega}} \quad (1)$$

$$a^* = \frac{e^{-i\omega t}(m\omega q - ip)}{\sqrt{2m\omega}} \quad (2)$$

Se pide mostrar que la transformación $(q, p) \mapsto (a, ia^*)$ es canónica y exhibir su función generatriz.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden ser invertidas para obtener:

$$q = \frac{ae^{-i\omega t} + a^*e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} \quad (3)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a^*e^{i\omega t} - ae^{-i\omega t}) \quad (4)$$

Se buscará una función generatriz de primer tipo. Con ella se pueden escribir las ecuaciones auxiliares:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad (5)$$

$$ia^* = -\frac{\partial F_1}{\partial a} \quad (6)$$

De la ecuación que define a a se puede obtener a p en terminos de a y q así:

$$p = i(mq\omega - e^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}a) \quad (7)$$

y sustituirlo en la primera ecuación auxiliar e integrar para obtener:

$$F_1 = i\left(\frac{1}{2}mq^2\omega - ae^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega}\right) + h(a) \quad (8)$$

La anterior ecuación se puede derivar parcialmente con respecto a a y compararla con la segunda ecuación auxiliar (De la ecuación que define a q en terminos de a y a^* podemos despejar esta última):

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = h'(a) - ie^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega} = -ia^* = i(ae^{-2i\omega t} - e^{-i\omega t}q\sqrt{2m\omega}) \quad (9)$$

Para obtener:

$$h'(a) = ia e^{-2i\omega t} \longrightarrow h(a) = \frac{1}{2}ia^2 e^{-2i\omega t} \quad (10)$$

Finalmente la función buscada es:

$$F_1 = \frac{1}{2}i \left(e^{-2it\omega} a^2 - 2e^{-it\omega} a \sqrt{2m\omega} q + mq^2 \omega \right) \quad (11)$$

Con los anterior se ve que la transformación dada por (1) y (2) es canónica. Veamos como queda el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de las nuevas variables canónicas (a, ia^*) .

El hamiltoniano del oscilador armónico en las variables (q, p) es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (12)$$

Por otro lado el Hamiltoniano transformado es:

$$H'(a, a^*) = H(a, a^*) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (13)$$

Además tenemos que:

$$a^* a = \frac{H}{\omega} \implies H = \omega a^* a \quad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \omega \left(a^2 e^{-2i\omega t} - a e^{-i\omega t} q \sqrt{2m\omega} \right) \quad (15)$$

que al cambiar a q en términos de a y a^* se simplifica enormemente para dar:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\omega a^* a \quad (16)$$

Finalmente $H' = 0$.

Estas transformaciones han hecho que las nuevas coordenadas y momentos sean constantes y que además estos tengan por valor la exponencial de una fase debida a las condiciones iniciales por una función de la energía. Mas exactamente:

$$q = A \cos(\omega t - \phi) \implies p = -A m \omega \sin(\omega t - \phi) \quad (17)$$

entonces

$$a = \frac{A e^{i\phi} \sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\phi} \sqrt{E}}{\sqrt{\omega}} \quad (18)$$

$$a^* = \frac{A e^{-i\phi} \sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\phi} \sqrt{E}}{\sqrt{\omega}} \quad (19)$$