

Transformación Canónica para el Oscilador Armónico

Nicolás Quesada

Se tiene la transformación

$$a = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad (1a)$$

$$a^* = \frac{m\omega q - ip}{\sqrt{2m\omega}}. \quad (1b)$$

Se pide mostrar que la transformación $(q, p) \mapsto (a, ia^*)$ es canónica y exhibir su función generatriz.

Las ecuaciones (1a) y (1b) pueden ser invertidas para obtener:

$$q = \frac{a + a^*}{\sqrt{2m\omega}}, \quad (2a)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a^* - a). \quad (2b)$$

Se buscará una función generatriz de primer tipo. Con ella se pueden escribir las ecuaciones auxiliares

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad (3a)$$

$$ia^* = -\frac{\partial F_1}{\partial a}. \quad (3b)$$

De la ecuación que define a a se puede obtener a p en términos de a y q así

$$p = i(mq\omega - \sqrt{2m\omega}a) \quad (4)$$

y sustituirlo en la primera ecuación auxiliar e integrar para obtener

$$F_1 = i\left(\frac{1}{2}mq^2\omega - aq\sqrt{2m\omega}\right) + h(a). \quad (5)$$

La anterior ecuación se puede derivar parcialmente con respecto a a y compararla con la segunda ecuación auxiliar (de la ecuación que define a q en términos de a y a^* podemos despejar esta última)

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = h'(a) - iq\sqrt{2m\omega} = -ia^* = i(a - q\sqrt{2m\omega}), \quad (6)$$

para obtener

$$h'(a) = ia \longrightarrow h(a) = \frac{1}{2}ia^2. \quad (7)$$

Finalmente la función buscada es

$$F_1 = \frac{1}{2}i(a^2 - 2a\sqrt{2m\omega}q + mq^2\omega). \quad (8)$$

Con lo anterior se ve que la transformación dada por (1a) y (1b) es canónica. Veamos como queda el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de las nuevas variables canónicas (a, ia^*) .

El hamiltoniano del oscilador armónico en las variables (q, p) es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (9)$$

Por otro lado el Hamiltoniano transformado es

$$H'(a, a^*) = H(a, a^*) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (10)$$

Además tenemos que

$$a^*a = \frac{H}{\omega} \implies H = \omega a^*a \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Finalmente

$$H' = \omega a^*a. \quad (13)$$

Como (a, ia^*) son variables canónicas se cumple que $\{a, ia^*\} = 1$ y que su dinámica está dada por las ecuaciones de Hamilton. Con lo anterior es directo calcular las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt}a = \{a, \omega a^*a\} = \omega(\{a, a^*\}a + a^*\{a, a\}) = -i\omega a, \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dt}a^* = \{a^*, \omega a^*a\} = \omega(\{a^*, a^*\}a + a^*\{a^*, a\}) = i\omega a^*, \quad (14b)$$

y su solución

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} \quad (15a)$$

$$a^*(t) = a^*(0)e^{i\omega t} \quad (15b)$$