Signal and Systems

INTRODUCTION

Course Authors:

Nguyễn Quóc Tuấn

Network and Communication Department

Faculty of Electronics and Telecommunications

INTRODUCTION

Mục tiêu môn học

- Cung cấp cho sinh viên các khái niệm và các kỹ thuật cơ bản để mô hình hóa và phân tích các tín hiệu liên tục và rời rạc theo thời gian, và các hệ thống tuyến tính .
- Cho sinh viên một nền tảng phân tích để tiếp tục nghiên cứu, học tập “Kỹ thuật truyền thông” và “Xử lý tín hiệu số “.

INTRODUCTION

- **Các yêu cầu**

  - ❑ Thời lượng: 3 credit
    - 24 giờ lý thuyết
    - 21 x 2 = 42 giờ bài tập
    - 3x2 giờ thực hành
  - ❑ Đánh giá:

    Giữa kì: 30%.

    Cuối kì: 70%
  - ❑ **Tài liệu tham khảo**
    - Signals and Systems

      Thanos Antoulas, Richard Baraniuk, Adam Blair   2003
    - Signal and Systems

      Simon Haykin - 2003

GIỚI THIỆU TÍN HiỆU

❑ Định nghĩa tín hiệu

- Một đại lượng vật lý *truyền tải thông tin* về bản chất của một hiện tượng vật lý

  Ví dụ: Thông tin về tốc độ di chuyển của ôtô trong 1 khoảng thời gian

  Thông tin cuộc trò chuyện qua điện thoại

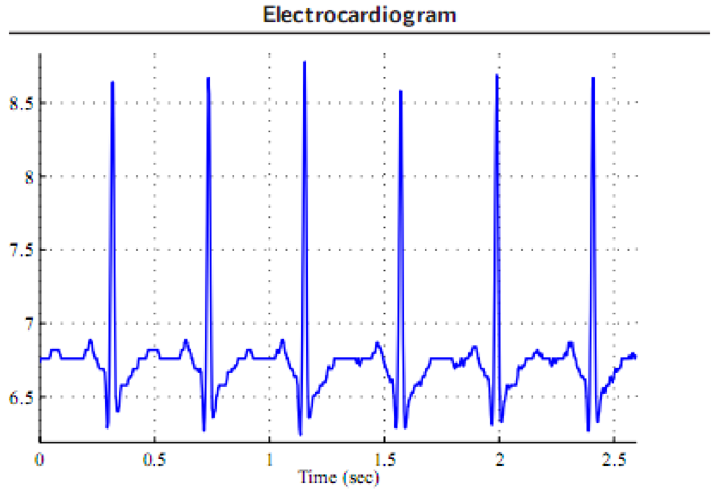
- Đại lượng vật lý -*tín hiệu* có thể biểu diễn dưới dạng hàm thời gian liên tục hoặc rời rạc để tính toán và xử lí

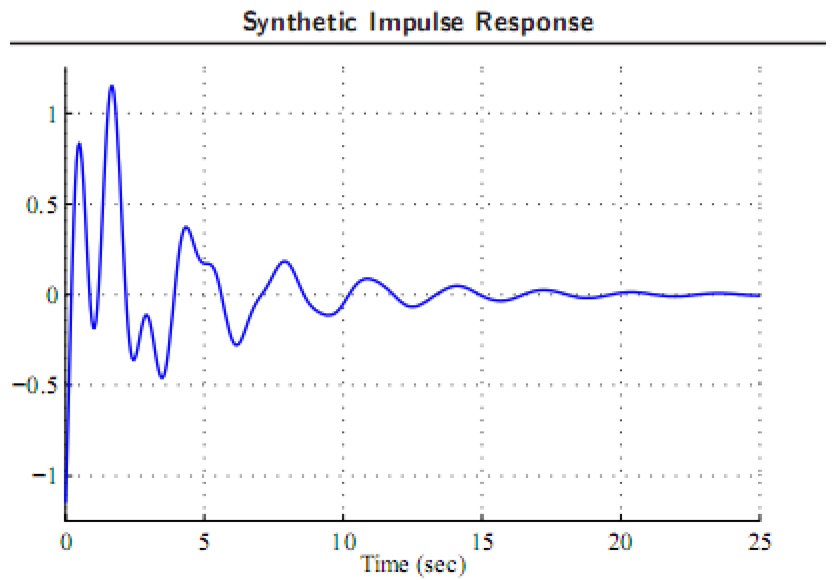
  + Hàm của một hay nhiều biến:

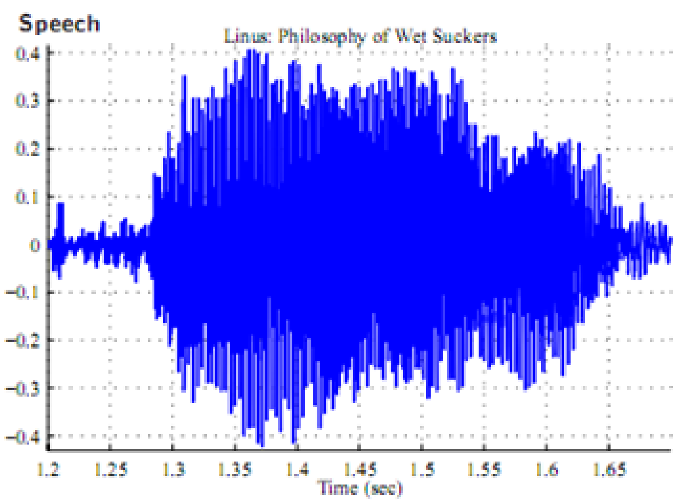
    - Tín hiệu âm thanh: hàm của thời gian (tín hiệu một chiều - t)
    - Ảnh động: (phép chiếu của của một cảnh động vào mặt phẳng ảnh): hàm của 3 biến x, y, t (tín hiệu nhiều chiều)

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Ví dụ về tín hiệu







GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

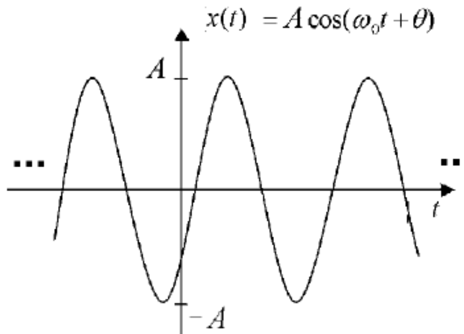
❑ Phân loại tín hiệu

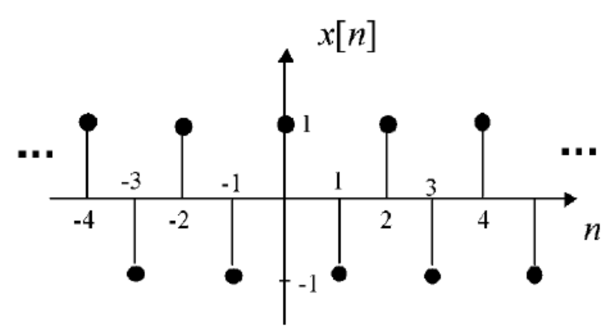
- Tín hiệu thời gian liên tục và rời rạc
- Tín hiệu tương tự và số
- Tín hiệu tuần hoàn và không tuần hoàn
- Tín hiệu nhân quả và không nhân quả
- Tín hiệu chẵn và lẻ
- Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên
- Tín hiệu đa kênh và đa chiều
- Tín hiệu bên trái và phải
- Tín hiệu hữu hạn và vô hạn
- Tín hiệu miền thời gian, miền tần số, miền mã, miền không gian …

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu hàm thời gian

- Tín hiệu thời gian liên tục:
  - Là hàm của các biến liên tục (thời gian)
  - Có thể có giá trị hay biên độ tại thời điểm bất kì liên tục theo thời gian (hữu hạn hay vô hạn)
  - Có bản chất tự nhiên
- Tín hiệu thời gian rời rạc:
  - Là hàm của các biến rời rạc – Chúng có giá trị tại thời điểm xác định xác định với các giá trị nguyên của các biến độc lập (các bước thời gian hữu hạn hay vô hạn)
  - Có thể tạo ra từ tín hiệu liên tục bằng việc *lấy mẫu* tín hiệu liên tục tại những thời điểm nhất định
  - Thường liên quan đến các hệ thống nhân tạo





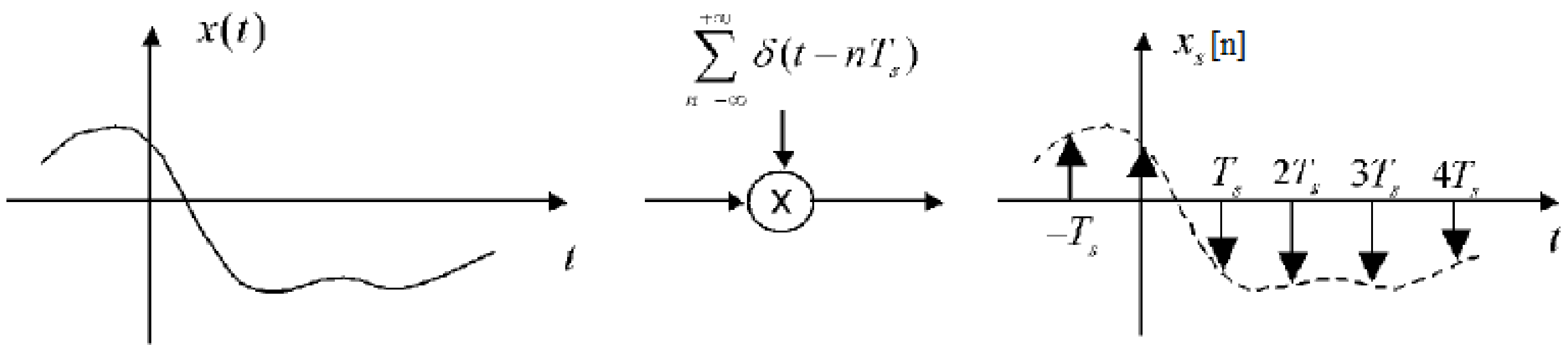
$x[n] = (-1)^n$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu hàm thời gian

- Tín hiệu thời gian rời rạc:

  - Có thể được xác định bằng cách lấy mẫu tín hiệu liên tục



$$x[n] = x(nT_s)$$

Kí hiệu: Tín hiệu thời gian rời rạc x(t)

Tín hiệu thời gian rời rạc x[n]

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu tương tự và số

- Tín hiệu tương tự:
  - Là hàm của các biến liên tục cả thời gian và biên độ
  - Có bản chất bán tự nhiên
- Tín hiệu số:
  - Có thể tạo ra từ các tín hiệu rời rạc
  - Là hàm của các biến rời rạc – Chúng được xác định tại các giá trị nguyên của các biến độc lập
  - Chỉ nhận giá trị tại các điểm xác định từ 1 tập hữu hạn, giá trị tín hiệu số đã được lượng tử hóa
  - Thường liên quan đến các hệ thống nhân tạo

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

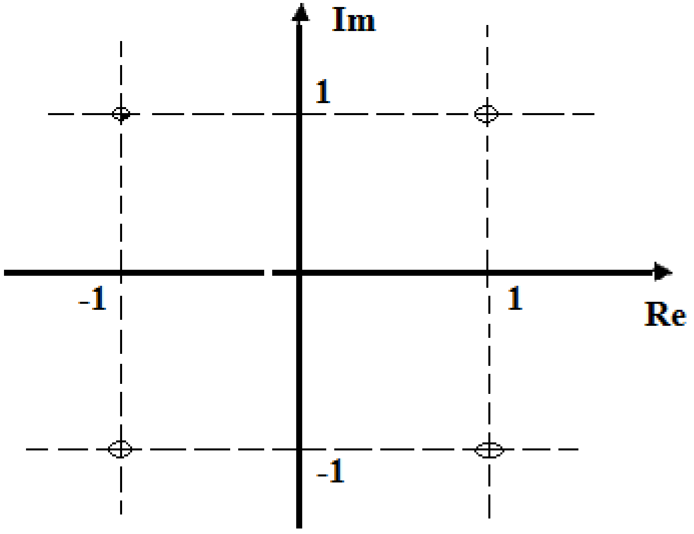
❑ Tín hiệu tương tự và số

- Ví dụ tín hiệu tương tự:

$$s(t) = a.\sin(\omega t + \varphi)$$

- Ví dụ tín hiệu số:

$$00 \rightarrow x_1 = 1 + i$$
$$01 \rightarrow x_2 = 1 - i$$
$$11 \rightarrow x_3 = i - 1$$
$$10 \rightarrow x_4 = i + 1$$



Không chắc liên quan đến thời gian

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu tuần hoàn và không tuần hoàn

- Tín hiệu tuần hoàn: lặp lại chính bản thân tín hiệu sau một khoảng thời gian nhất định

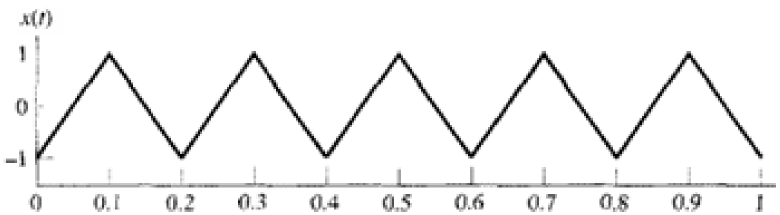
$x(t) = x(t + T)$ với $T > 0$

Hay $x[n] = x[n + N]$ với N nguyên dương, $N \in Z$

- Chu kỳ cơ bản của tín hiệu tuần hoàn là giá trị nhỏ nhất của T thỏa mãn điều kiện trên (T hay N)
- Tần số cơ bản = 1/chu kỳ cơ bản ($f = 1/T$ hay $f = 1/N$)
- Tần số góc cơ bản = 2π*tần số cơ bản ($\omega = 2\pi/T$ rad/s hay $\Omega = 2\pi/N$ rad)
- Tín hiệu không tuần hoàn: không có giá trị nào của T thỏa mãn điều kiện trên hay giá trị của tín hiệu không được lặp lại một cách có chu kỳ

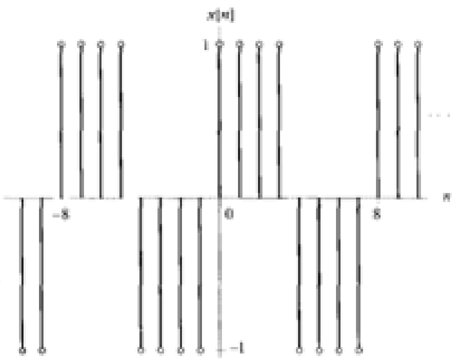
GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Ví dụ

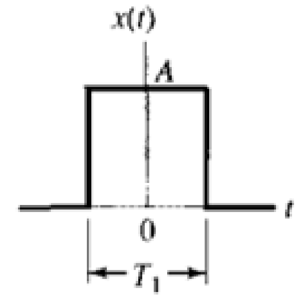


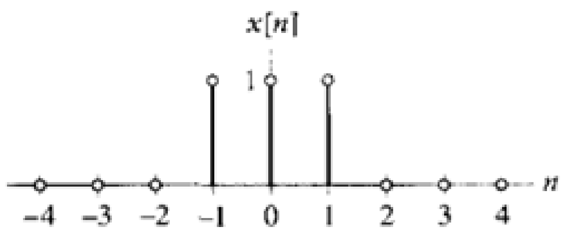
T=? ω=?

N=? Ω=?



Tín hiệu tuần hoàn





Tín hiệu không tuần hoàn

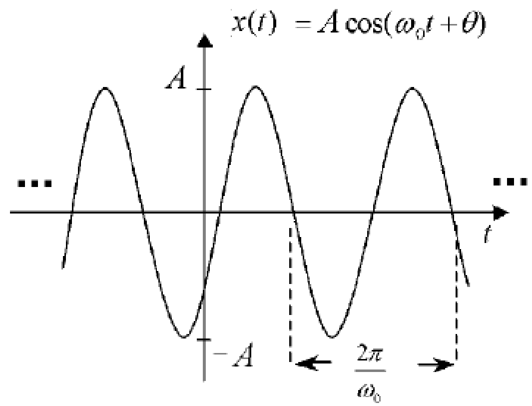
GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Ví dụ

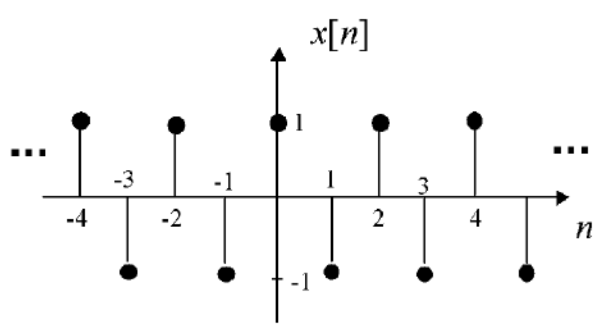
- Xét tín hiệu $x(t) = e^{i\omega_0 t}$. Vậy $x(t+T) = e^{i\omega_0 (t+T)} = e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 T} = x(t).e^{i\omega_0 T}$

  đặt T = $2\pi k/\omega_0$ sao cho k = ±1, ±2 … (k ∈ Z)

  → x(t) là tín hiệu có chu kì lặp lại với chu kì T



Tín hiệu x[n] = (-1)^n là tín hiệu có chu kì lặp lại với chu kì N = 2

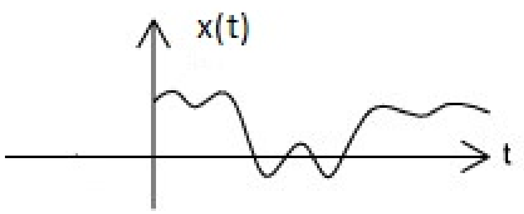


GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu nhân quả và không nhân quả

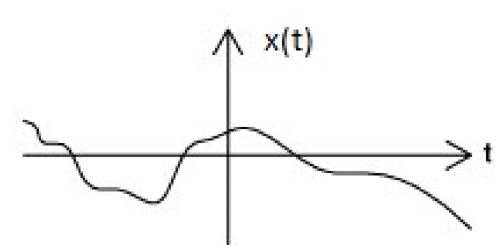
- Tín hiệu nhân quả: giá trị của tín hiệu luôn bằng không trên phần âm của trục thời gian
- Tín hiệu phản nhân quả: giá trị của tín hiệu luôn bằng không trên phần dương của trục thời gian
- Tín hiệu phi (không) nhân quả: tín hiệu có giá trị khác không trên cả phần âm và phần dương của trục thời gian

$\forall t < 0 : f(t) = 0$



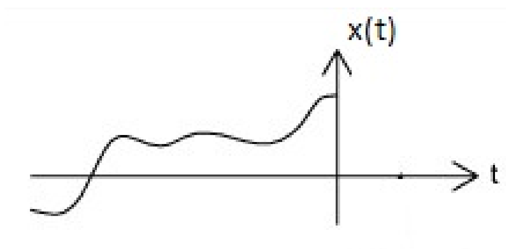
T.hiệu nhân quả

$\forall t : f(t) \neq 0$



T.hiệu phi nhân quả

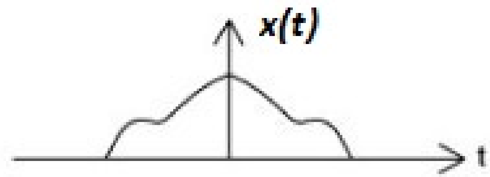
$\forall t > 0 : f(t) = 0$



T.hiệu phản nhân quả

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

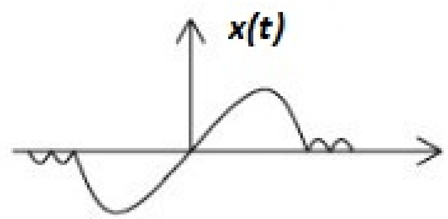
❑ Tín hiệu chẵn và lẻ

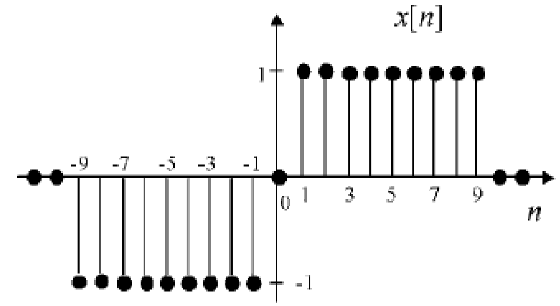


- Tín hiệu chẵn: $x(t) = x(-t)$

  hay $x[n] = x[-n]$

  (Tín hiệu đối xứng qua trục hoành)





- Tín hiệu lẻ: $x(-t) = -x(t)$

  hay $x[n] = -x[-n]$

  (Tín hiệu đối xứng qua trục tung)

- Bất kỳ một tín hiệu nào có thể được biểu diễn như là tổng của một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Trong đó:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Ví dụ:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi t}{T}), & -T \le t \le T \\ 0, \quad t & khác \end{cases}$$

$$x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)$$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu chẵn và lẻ

- Tín hiệu x[n] là lẻ thì $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$

  \+ Do

$$x[n] = -x[-n] \rightarrow x[0] = 0\,,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=1}^{\infty}(x[n] - x[n]) = 0$$

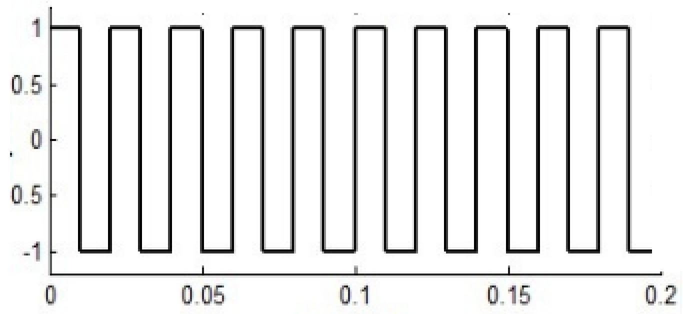
- Tín hiệu $x_1[n]$ là lẻ và $x_2[n]$ là chẵn thì tích $x_1[n]\ x_2[n]$ là lẻ

$$x_1[-n].x_2[-n] = -x_1[n]x_2[n]$$

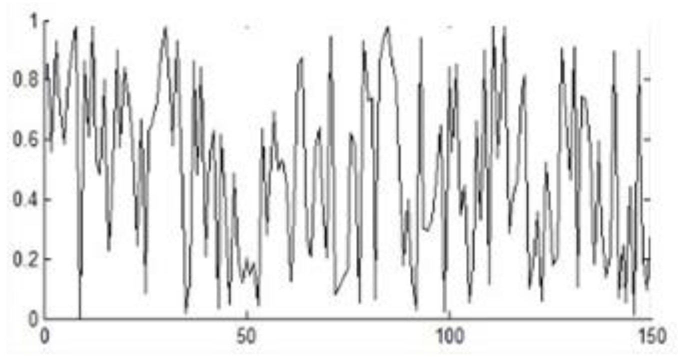
GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên

- Tín hiệu xác định: được mô hình như là một hàm của thời gian, vì thế giá trị của tín hiệu tại bất kỳ thời điểm nào đều có thể tính trước được bằng biểu thức toán học hoặc bảng giá trị



- Tín hiệu ngẫu nhiên: nhiều yếu tố không chắc chắn xuất hiện trước khi tín hiệu xuất hiện, do đó không xác định được chính xác giá trị tại một thời điểm trong tương lai.



GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

Tín hiệu đa kênh và đa chiều

- Tín hiệu đa kênh được biểu diễn dưới dang vector của các tín hiệu đơn kênh

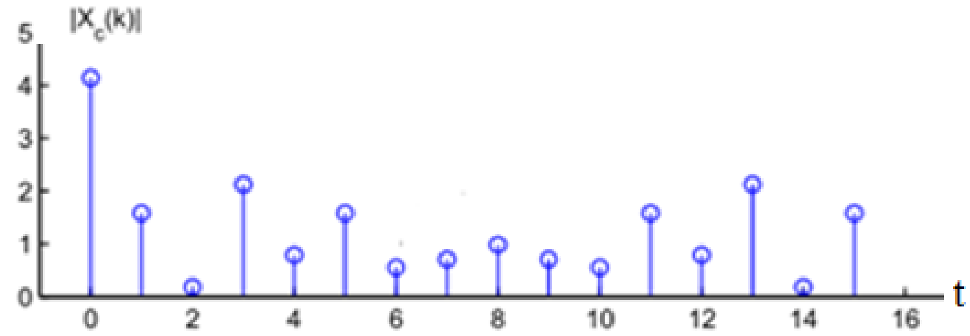
$$F(t) = [f_1(t), f_2(t), \cdots, f_N(t)]$$

+ Ví dụ các tín hiệu biểu tượng OFDM $\quad \mathrm{x} = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t)]$

- Tín hiệu đa chiều là hàm của nhiều biến độc lập

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$$

+ Ví dụ: $\quad f = 12x^2 - 3y$



GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu thuận và nghịch

- Tín hiệu thuận chiều (bên phải): giá trị của tín hiệu luôn bằng 0 kể từ một thời điểm về trước, nghĩa là

$$\forall t < t_0 < \infty : x(t) = 0$$

- Tín hiệu ngược chiều (bên trái): giá trị của tín hiệu luôn bằng 0 kể từ một thời điểm trở về sau, nghĩa là

$$\forall t > t_0 > -\infty : x(t) = 0$$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu hữu hạn và vô hạn

- Tín hiệu có độ dài hữu hạn: tất cả các giá trị khác không của tín hiệu đều nằm trong một khoảng hữu hạn, ngoài khoảng đó giá trị của tín hiệu luôn bằng 0, nghĩa là tồn tại một khoảng hữu hạn sao cho

$$-\infty < t_1 < t_2 < \infty : f(t) = 0 \qquad khi \qquad t \notin [t_1, t_2]$$

- Tín hiệu có độ dài vô hạn: không tồn tại khoảng hữu hạn thỏa mãn điều kiện trên hay miền các giá trị khác không của tín hiệu là vô hạn

GIỚI THIỆU TÍN HiỆU

❑ Tín hiệu năng lượng và công suất

- Năng lượng của một tín hiệu liên tục x(t) và rời rạc x[n] được định nghĩa bởi:

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad E_{[n_1,n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- Một tín hiệu năng lượng hữu hạn là các tín hiệu thỏa mãn: $0 < E_x < \infty$

  → Tín hiệu tuần hoàn không phải là tín hiệu năng lượng do năng lượng là vô hạn

  → Tín hiệu xác định với độ dài hữu hạn là các tín hiệu năng lượng

- Công suất của một tín hiệu được định nghĩa là năng lượng trung bình của tín hiệu trong một khoảng thời gian

$$P_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad P_{[n_1,n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Chú ý rằng $n_2 - n_1 + 1$ là số điểm tín hiệu trong khoảng $[n_1 , n_2]$

- Một tín hiệu công suất hữu hạn khi thỏa mãn: $0 < P_{[n\ n]} < \infty$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu năng lượng và công suất

- Nếu p(t) là công suất tín hiệu tức thời tại thời điểm t thì năng lượng tín hiệu trong khuảng [t_1 t_2] là

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$$

+ Một tín hiệu có năng lượng hữu hạn thì được gọi là *tín hiệu năng lượng*

+ Một tín hiệu tuần hoàn có năng lượng vô hạn thì *không thể là tín hiệu năng lượng*

+ Một tín hiệu có độ dài xác định là tín hiệu năng lượng

- Một tín hiệu có công suất hữu hạn thì được gọi là *tín hiệu công suất*
- Tín hiệu năng lượng có thể không phải là tín hiệu công suất do tín hiệu công suất bằng zero
- Tín hiệu công suất có thể không phải là tín hiệu năng lượng do tín hiệu năng lượng bằng vô cùng - ví dụ sin()

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu năng lượng và công suất

- **Ví dụ** tín hiệu rời rạc thời gian $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 10 \\ 0 & khác \end{cases} \rightarrow E_{[0,10]} = 11$

Tín hiệu năng lượng hữu hạn

- Xét tín hiệu không đổi (DC) x(t) = 4 có năng lượng vô hạn, nhưng công suất

$$P_{\infty} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 4^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{4^2}{2T} 2T = 16$$

- Chú ý: Công suất của tín hiệu tuần hoàn có thể tính chỉ trong 1 chu kì. Xét tín hiệu x(t) = C.e$^{i\,\omega\,t}$

$$P_{\infty} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left| C.e^{i\omega_0 t} \right|^2 dt = \frac{|C|^2}{T} \int_{0}^{T} dt = |C|^2$$

Trong đó e$^{i\,\omega\,t}$ có công suất bằng 1

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Tín hiệu năng lượng và công suất

- Tín hiệu rời rạc thời gian $x[n] = x_o[n] + x_e[n]$

$$E_{[n_1,n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left|x[n]\right|^2 = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left|x_o[n] + x_e[n]\right|^2$$

$$= \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x_o^2[n] + x_e^2[n] + 2\,\underbrace{x_o[n]x_2[n]}_{=0} \right| = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left|x_o[n]\right|^2 + \sum_{n=n_1}^{n_2} \left|x_e[n]\right|^2$$

- Tương tự

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|x_o(t) + x_o(t)\right|^2 dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left| x_o^2(t) + 2x_o(t)x_e(t) + x_e^2(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|x_o(t)\right|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left|x_e(t)\right|^2 dt$$

Năng lượng của tín hiệu được coi là tổng năng lượng tín hiệu chẵn và năng lượng tín hiệu lẻ

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ thực

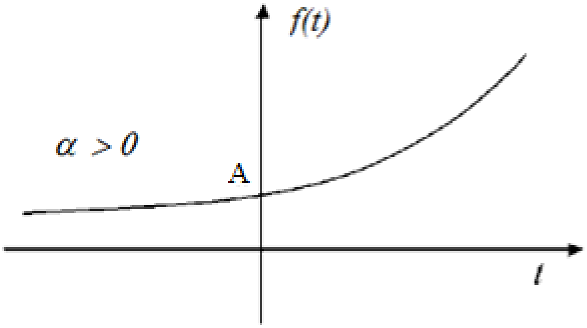
- **Tín hiệu mũ thực thời gian liên tục** được định nghĩa như sau:

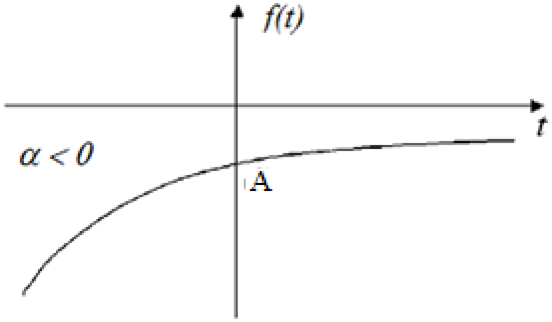
$$f(t) = A.e^{\alpha t} \qquad A \neq 0\,,\, \alpha \in R$$

Nếu $\alpha > 0$: hàm mũ tăng, $\alpha < 0$: *hàm* mũ giảm

- Ví dụ: Điện áp trên tụ của mạch tích phân

$$V_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$





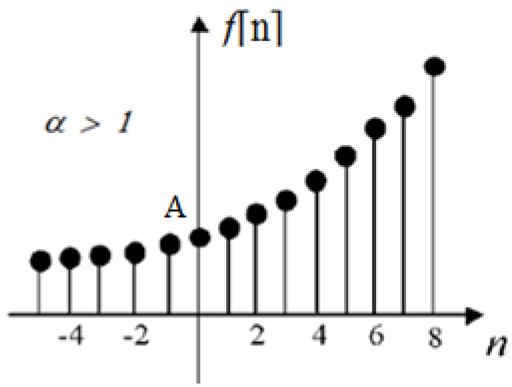
GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

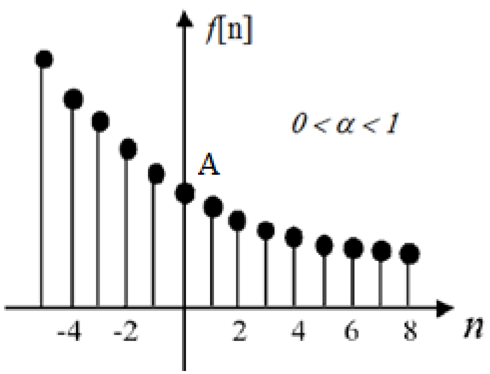
❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ thực

- **Tín hiệu mũ thực thời gian rời rạc** được định nghĩa như sau:

$$f[n] = A.r^n \qquad A, r = e^{\alpha} \in R$$

Nếu $\alpha > 0$: hàm mũ tăng, $\alpha < 0$: *hàm* mũ giảm





GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ phức

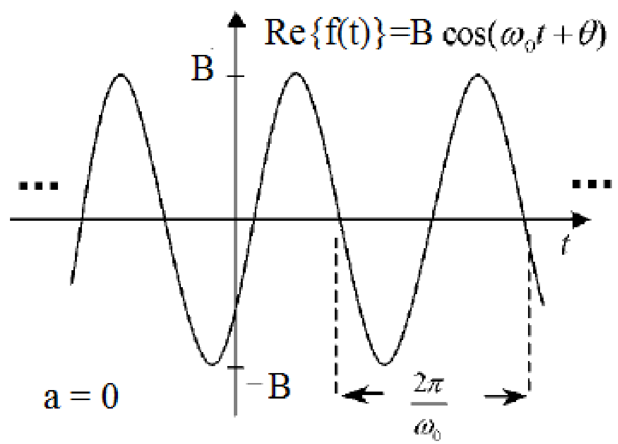
- **Tín hiệu mũ phức thời gian liên tục** được định nghĩa như sau:

$$f(t) = A.e^{\alpha t} \quad A, \alpha \in C \quad \text{đặt} \quad A = Be^{i\theta}; \quad B, \theta \in R \text{ và } B > 0$$

$$\rightarrow f(t) = Be^{i\theta t}.e^{\alpha t} = B.e^{a.t}e^{i(\omega_0 t+\theta)} \qquad \alpha = a + i\omega_0$$

Dùng biểu thức Euler ta có $f(t) = B.e^{at}\cos(\omega_0 t + \theta) + i.B.e^{at}\sin(\omega_0 t + \theta)$

- Phần thực và ảo của *f(t)* cả hai đều sinusoidal có biên độ thay đổi theo $B.e^{at} \in R$
  - Khi a = 0 $\text{Re}[f(t)] = B.\cos(\omega_0 t + \theta)$
    $\text{Im}[f(t)] = B.\sin(\omega_0 t + \theta)$



B là biên độ tín hiệu, ω_0 là tần số góc [rad/s] và θlà pha của tín hiệu. Rõ ràng là $\theta = \omega t$. Chu kì của tín hiệu T = $2\pi/\omega$. Tín hiệu này còn được biểu diễn dưới dạng $B.\cos(\omega_0 t + \theta)$ trong đó tần số

f = 2π/T (Hz)

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ phức

- Phần thực và ảo của *f(t)* cả hai đều sinusoidal có biên độ thay đổi theo a $\neq$ 0

$$f(t) = B.e^{at}\cos(\omega_0 t + \theta) + i.B.e^{at}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

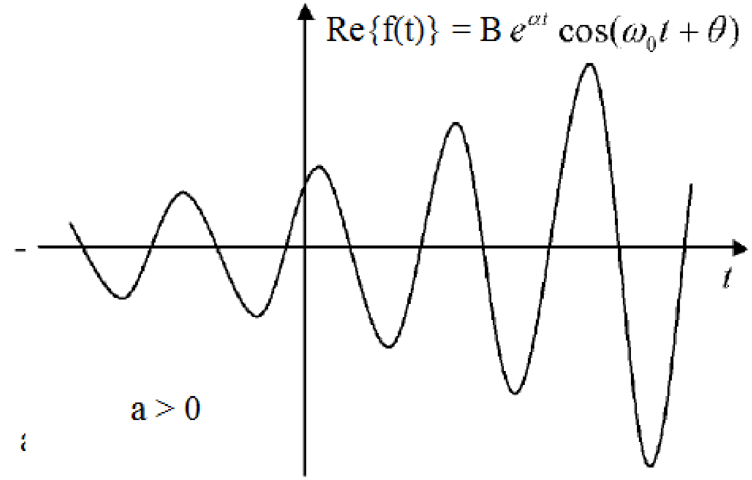
$$\mathrm{Re}[f(t)] = Be^{at}\cos(\omega t + \theta)$$
$$\mathrm{Im}[f(t)] = Be^{at}\sin(\omega t + \theta)$$

Biên độ

$$\|f(t)\| = \sqrt{\mathrm{Re}(f(t))^2 + \mathrm{Im}(f(t))^2}$$

Pha

$$\phi = \arctan\frac{\mathrm{Im}(f(t))}{\mathrm{Re}(f(t))}$$



GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ phức

- **Tín hiệu mũ phức rời rạc thời gian** được định nghĩa như sau:

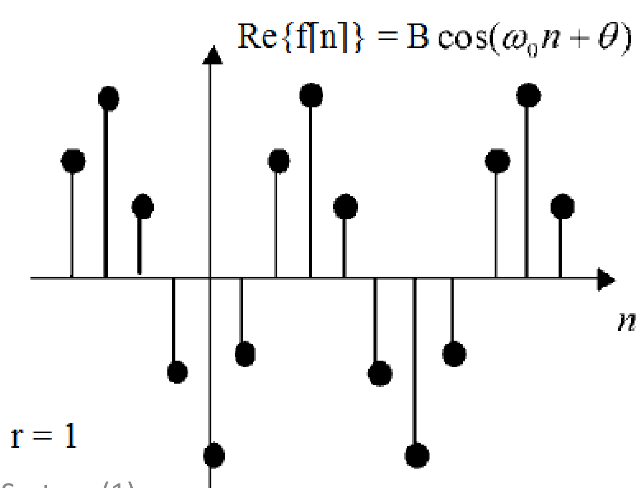
$$f[n] = A.\alpha^n \quad A, \alpha \in C \quad \text{đặt} \quad A = Be^{i\theta}; \quad B, \theta \in R \text{ và } B > 0$$

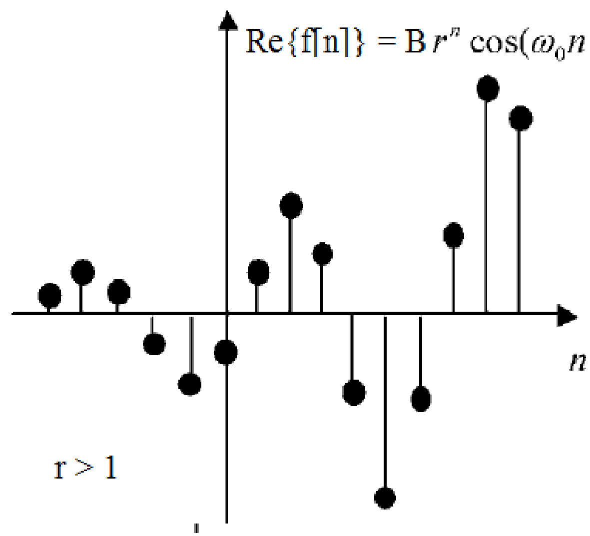
$$\alpha = r.e^{i\omega_0}; \quad r, \omega_0 \in R \text{ và } r > 0$$

$$\rightarrow f[n] = B r^n e^{i\theta} . e^{i\omega_0 n} = B.r^n \, e^{i(\omega_0 n + \theta)}$$

Dùng biểu thức Euler ta có $f[n] = B.r^n \cos(\omega_0 n + \theta) + i.B.r^n \sin(\omega_0 n + \theta)$

- Rõ ràng là độ lớn của r (hay α) xác định mức độ tăng giảng (hằng số thời gian) của f[n]





GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm mũ phức

- **Tín hiệu mũ phức rời rạc thời gian**

$$f[n] = Ae^{\omega_0 n} \quad \forall a \in C, \omega_0 \in R$$

+ *f*[n] nói chung không tuần hoàn

+ *f*[n] tuần hoàn với chu kì N khi

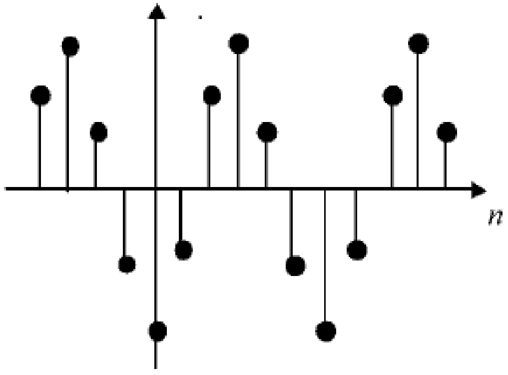
$$f[n] = Ae^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\cdots,N \qquad \rightarrow \quad f_k[n] = f_{k+N}[n]$$

Dùng biểu thức Euler ta có tín hiệu dạng sin rời rạc được biểu diễn dưới dạng

$$f[n] = A\cos(\Omega n + \phi)$$

Trong đó , Ω là tần số góc chia cho chu kì lấy mẫu [rad/s] . Để tín hiệu tuần hoàn với chu kì N ta phải có

$$\Omega N = 2\pi k \text{ , } \forall k \in Z$$

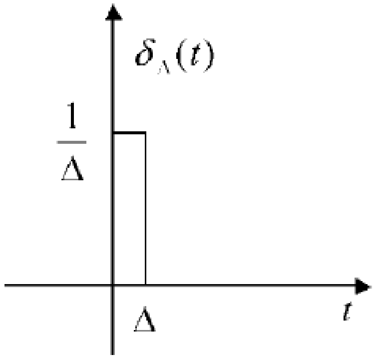


GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm xung đơn vị

- Hàm xung liên tục đơn vị δ(t) xác định bởi

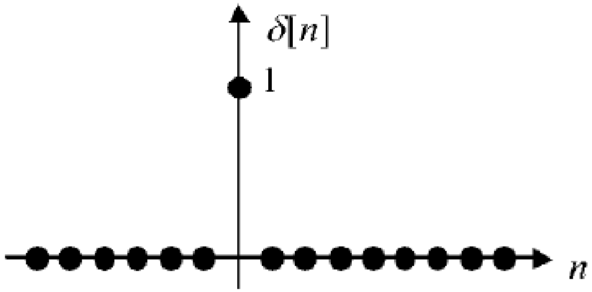
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & khác \end{cases}$$



Khi $\Delta \to 0$ thì $\delta_\Delta(t) \to \delta(t)$ hàm Dirac trở thành xung đơn vị

- Hàm xung Dirac - xung rời rạc đơn vị δ[n] xác định bởi

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



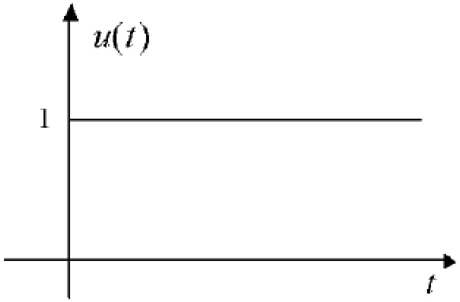
- Ví dụ: $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]$$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Một số tín hiệu cơ bản – Hàm xung nhảy bậc đơn vị

- Hàm xung liên tục nhảy bậc đơn vị u(t) xác định bởi

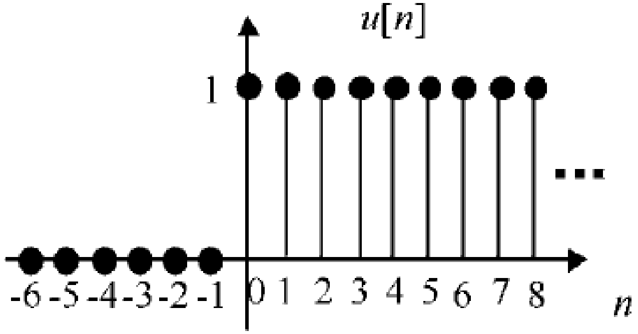


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Xung nhảy bậc đơn vị được sử dùng nhằm xem xét hành vi hệ thống và được gọi là đáp ứng xung hệ thống

- Hàm xung rời rạc nhảy bậc đơn vị u[n] xác định bởi

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$



→ $$u[n] = \sum_{k=0}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Đặc tính lấy mẫu của xung rời rạc nhẩy bậc đơn vị quan trọng trong lí thuyết lấy mẫu và nhân chập

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k].\delta[n-k] \qquad \rightarrow \ \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ Ví dụ

- Hãy tìm chu kì tín hiệu $x(t) = \cos(13\pi t) + 2\sin(4\pi t)$

$$x(t+T) = \cos(13\pi t + 13\pi T) + 2\sin(4\pi t + 4\pi T)$$

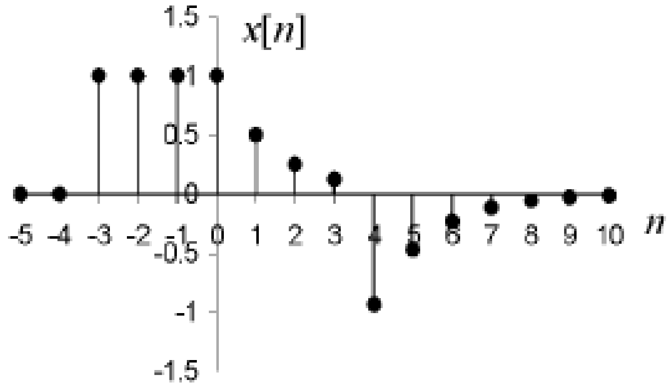
Biểu thức trên đúng nếu 13πT= 2πk và 4πT = 2πp ∀k, p ∈ Z do đó

$$T = \frac{2k}{13} = \frac{p}{2} \rightarrow \frac{p}{k} = \frac{4}{13}$$

Nếu ta có p = 4 và k = 13 thì chu kì T = 2

- Vẽ dạng tín hiệu

$$x[n] = u[n+3] - u[n] + 0.5^n u[n] - 0.5^{n-4} u[n-4]$$



CÁC PHÉP TOÁN TÍN HIỆU

❑ Các phép toán

- Tỷ lệ: $y(t) = cx(t)$,

  $y[n] = cx[n]$, c: hệ số tỷ lệ
- Cộng tín hiệu: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
- Nhân tín hiệu: $y(t) = x_1(t)\, x_2(t)$

  $y[n] = x_1[n]\, x_2[n]$
- Vi phân tín hiệu:

  $$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
- Tích phân tín hiệu: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)$

CÁC PHÉP TOÁN TÍN HIỆU

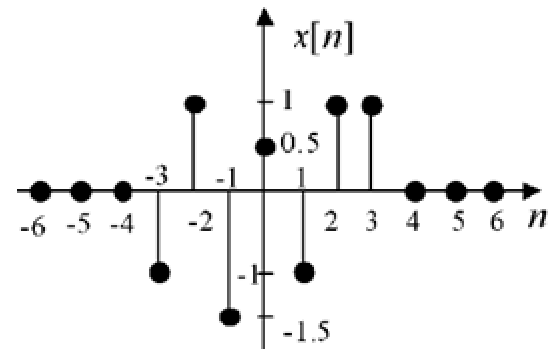
❑ Chia tỷ lệ thời gian

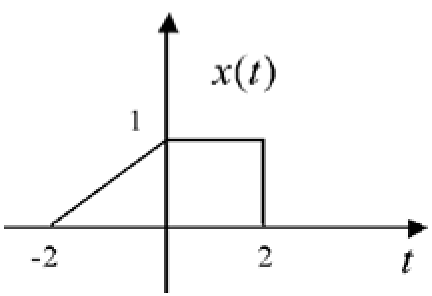
- Phép chia tỷ lệ thời gian nhằm làm biến thời gian nhân với hằng số thực dương α làm thay đổi bề rộng tín hiệu

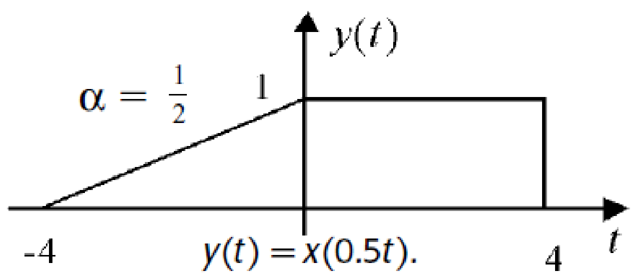
$$y(t) = x(\alpha t)$$

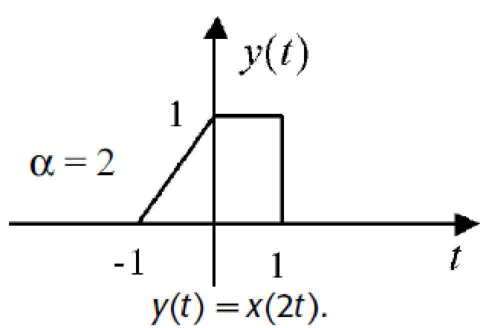
$$y[n] = x[\alpha n]$$

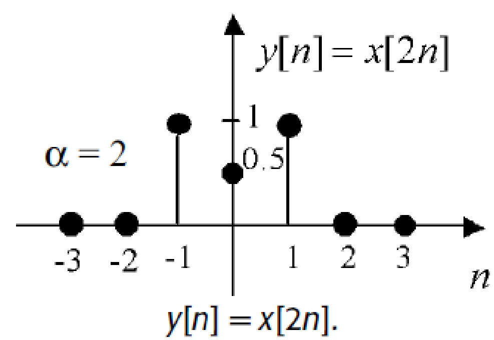
- Khi $0 < \alpha < 1$ thì tín hiệu nhận được sẽ giãn ra còn $\alpha > 1$ thì tín hiệu nhận được sẽ co lại











CÁC PHÉP TOÁN TÍN HIỆU

❑ Lật tín hiệu

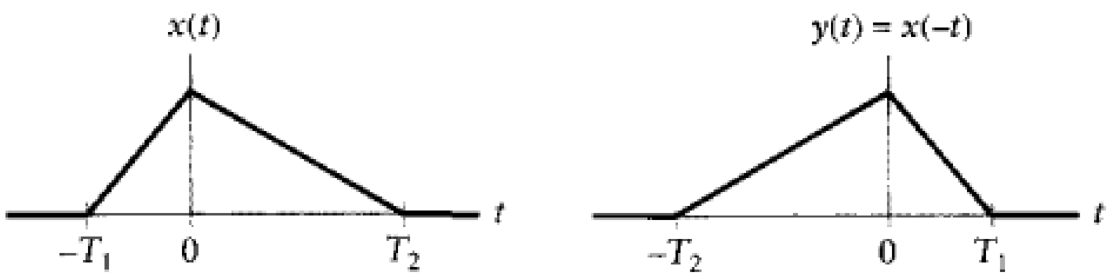
- Lật tín hiệu (hay α = -1) bằng cách thay t $\rightarrow$ -t

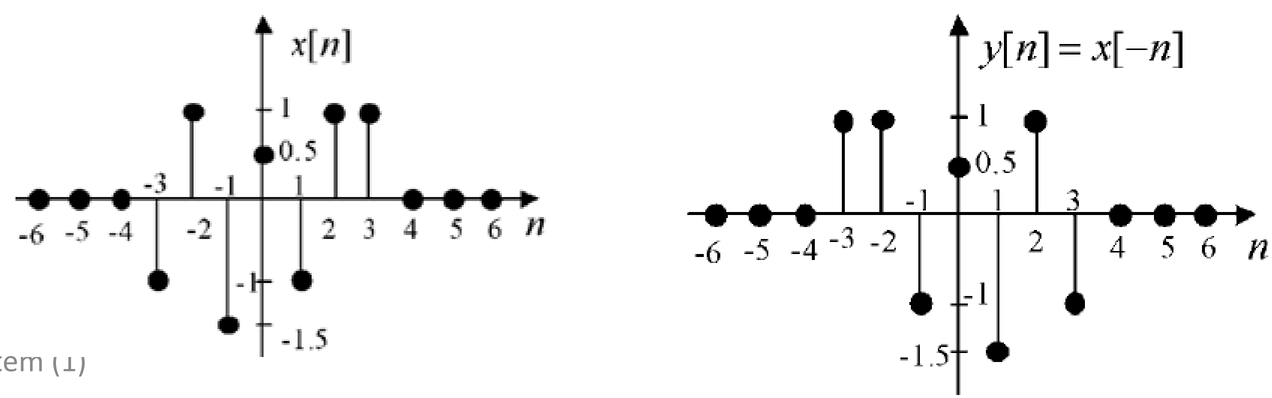
$$y(t) = x(-t)$$

$$y[n] = x[-n]$$

- Phép lật tín hiệu chẵn là chính nó

  Phép lật tín hiệu lẻ là giá trị âm của chính nó





CÁC PHÉP TOÁN TÍN HIỆU

Bài tập 1.41-1.57

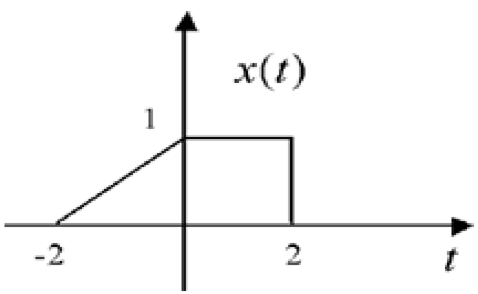
❑ Dịch thời gian

- Phép dịch thời gian nhằm làm trễ hay tiến tín hiệu

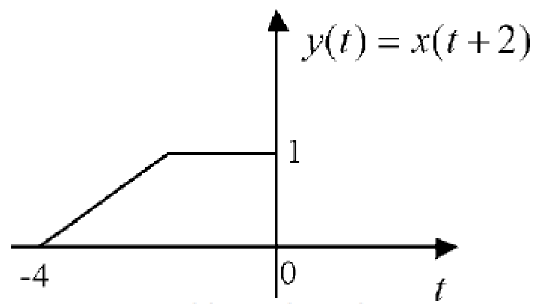
  y(t) = x(t+T)

  y[n] = x[n+k]   với k nguyên, dương

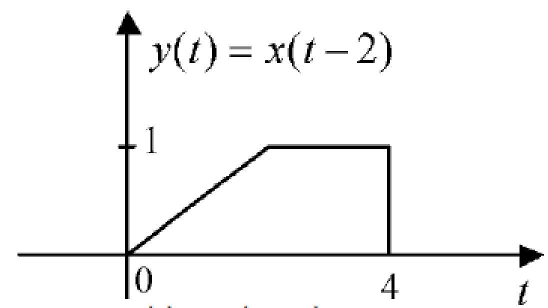
-



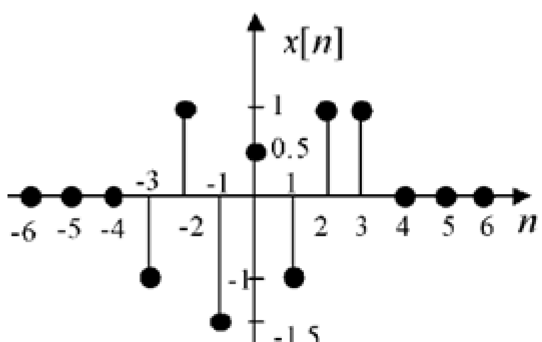
$x(t)$

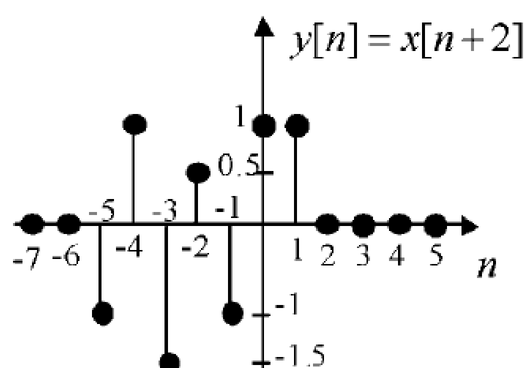


$y(t) = x(t + 2).$



$y(t) = x(t - 2).$





$y[n] = x[n + 2].$

CÁC PHÉP TOÁN TÍN HIỆU

Phép tính nhân chập

- Phép nhân chập tín hiệu liên tục được định nghĩa

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Như vậy dịch tín hiệu (trễ tín hiệu) là phép toán nhân chập

$$x(t) * \delta(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \delta(\tau - T) d\tau = x(t-T)$$

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

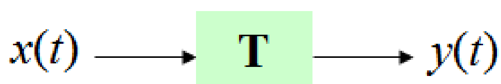
❑ Định nghĩa

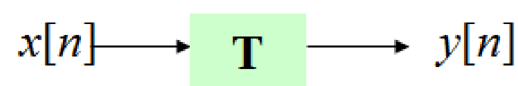
- Một hệ thống là một thực thể mô tả hoạt động bằng toán học khi có tín hiệu lối vào (kích thích) và sinh ra tín hiệu lối ra (đáp ứng)

- Theo biểu diễn toán học, hệ thống được đặc trưng bởi mối quan hệ giữa tín hiệu lối vào và tín hiệu lối ra

$y(t) = \mathbf{T}[x(t)]$

$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$





T : phép biến đổi đặc trưng cho hệ thống

▪ Mô hình toán học hệ thống để *giải* hệ thống

+ Khi gửi tín hiệu x(t) qua hệ thống T biết trước mô hình toán học sẽ tính được y(t)

+ Khi gửi tín hiệu x(t) qua hệ thống T thu được y(t) sẽ hiểu được hoạt động hệ thống với mô hình toán học tính toán được…

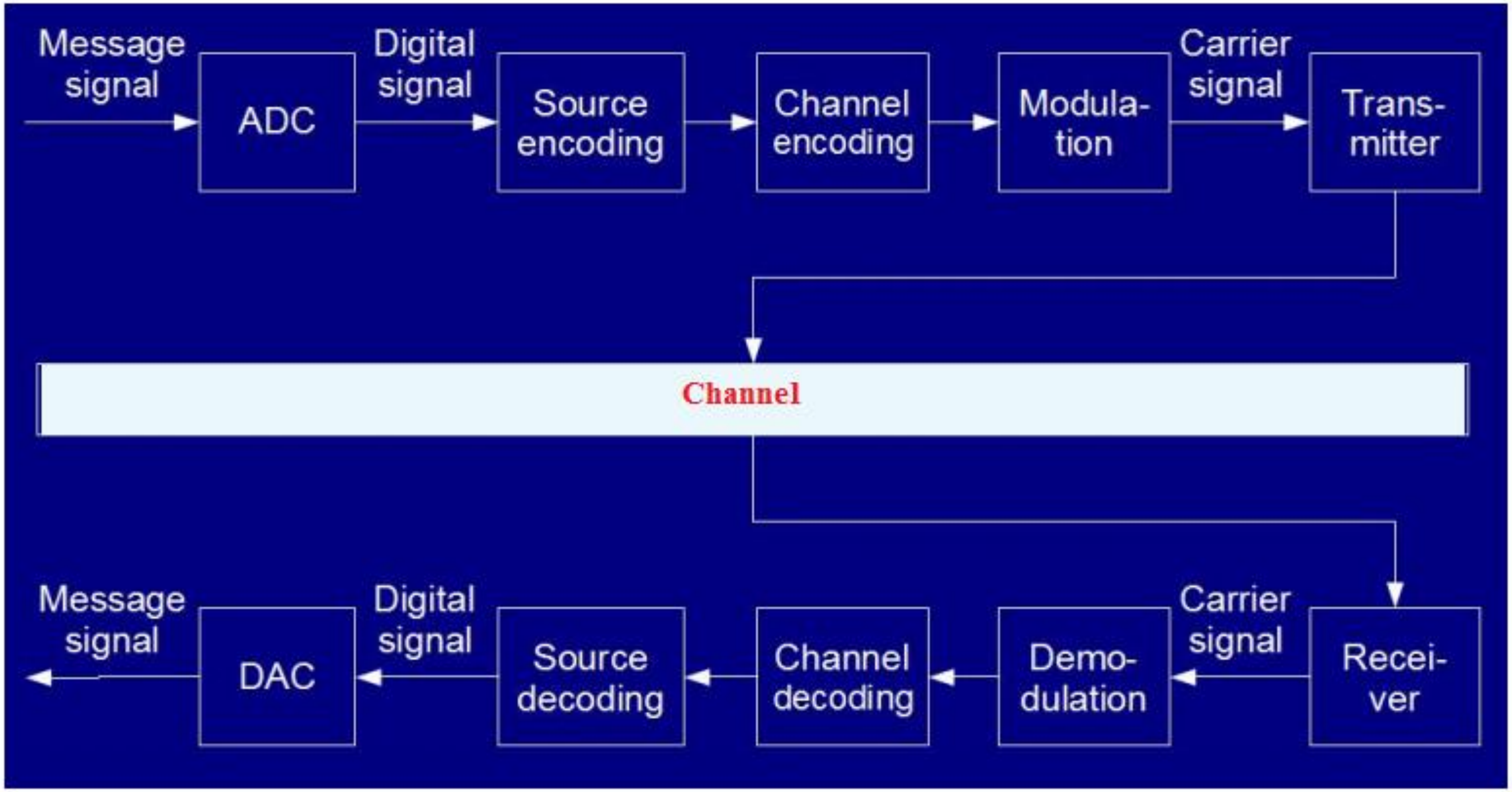
GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Mô hình toán học của hệ thống

- Mối quan hệ giữa lối vào của hệ thống và lối ra của hệ thống, còn gọi là hành vi của hệ thống, được biểu diễn bằng một mô hình toán học
- Mô hình toán học cho phép xác định hệ thống: xác định tín hiệu lối ra khi biết tín hiệu lối vào
- Mô hình toán học được sử dụng trong việc phân tích và thiết kế hệ thống

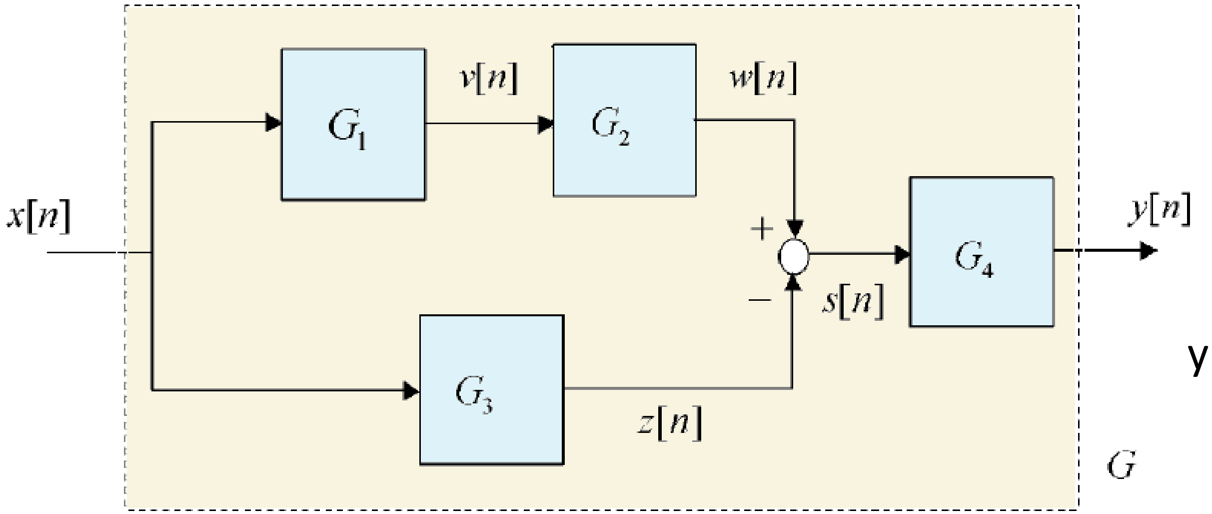
GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Ví dụ mô hình hệ thống



GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Ví dụ mô hình hệ thống



y[n] = Gx[n]

Sao cho $\upsilon[n] = G_1(x[n])$

$w[n] = G_2(\upsilon[n])$

$z[n] = G_3(x[n])$

$s[n] = w[n] - z[n]$

$y[n] = G_4(s[n])$

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Kết nối hệ thống

- Kết nối liên tiếp

Hệ thống trên cho $w[n] = G_2\, \upsilon[n] = G_2\,(G_1\, x[n])$

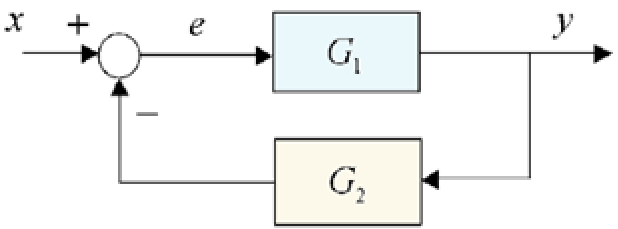
- Kết nối song song

Theo hệ thống trên $s[n] = w[n] – z[n] = G_2\,(G_1\, x[n]) - G_3\, x[n]$

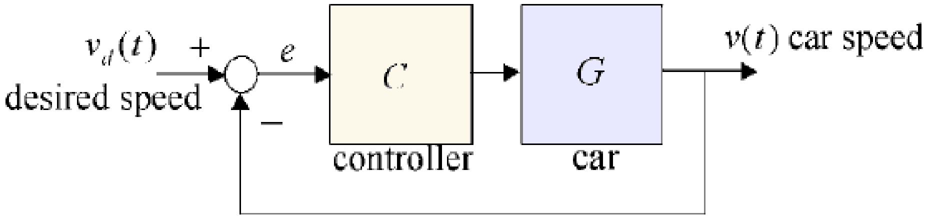
- Hệ thống có phản hồi

$e = x – G_2\, y$

$y = G_1 e$



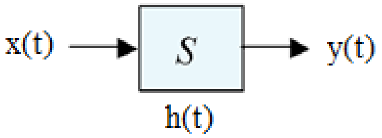
Ví dụ: Xét hệ thống điều khiển ô tô sao cho vận tốc ô tô được giữ gần với điểm đặt với G bàn đạp động cơ và C là bộ điều khiển khi có lỗi lối vào (e)



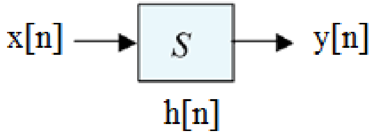
GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

- **Hệ thống liên tục**: các tín hiệu vào, tín hiệu ra và các tín hiệu sử dụng trong hệ thống đều là các tín hiệu thời gian liên tục



- Hệ thống thời gian rời rạc: tín hiệu vào và tín hiệu ra là các tín hiệu thời gian rời rạc



GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

- **Hệ thống không có nhớ**: là hệ thống mà giá trị tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào giá trị tín hiệu tức thời lối vào

Ví dụ:

$$y[n] = x[n]^2$$

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t)}$$

- Hệ thống có nhớ: là hệ thống mà giá trị tín hiệu ra phụ thuộc vào giá trị tín hiệu tức thời lẫn giá trị trong quá khứ của tín hiệu lối vào

Ví dụ:

$$y[n] = x[n+1] + x[n] + x[n-1]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

- **Hệ thống nhân quả**: là hệ thống mà giá trị tín hiệu ra phụ thuộc vào giá trị tức thời lối vào HOẶC giá trị trong quá khứ của tín hiệu lối vào

- Tức là nếu

$$y_1 = Gx_1 \text{ , } y_2 = Gx_2 \text{ và } x_1(\tau) = x_2(\tau) \quad \forall \tau \in [-\infty, t]$$

Thì $y_1(\tau) = y_2(\tau) \forall \tau \in [-\infty, t]$

Ví dụ: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-N] \quad N \geq 1$

- Hệ thống phi nhân quả là hệ thống mà giá trị tín hiệu ra phụ thuộc vào cả giá trị trong tương lạicủa tín hiệu lối vào

Ví dụ: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-k]$

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

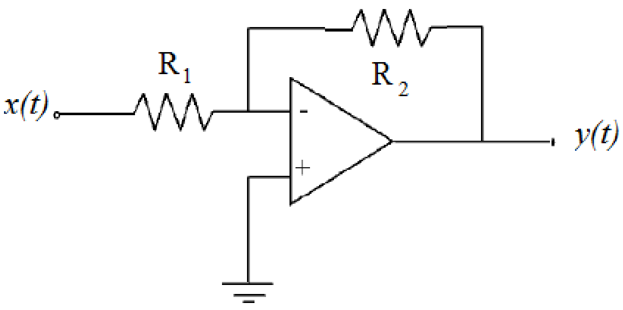
- Hệ thống G là **tuyến tính** nếu nó có thuộc tính cộng và tính đồng nhất

  hay nếu $y_1 = G(x_1)$

  $y_2 = G(x_2)$ thì

  + thuộc tính cộng : $y_1 + y_2 = G(x_1 + x_2)$

  + thuộc tính đồng nhất: $ay_1 = G(ax_1)$ $\forall$ $a \in C$



Ví dụ: mạch điện bên ta có $y(t) = (R_2 / R_1).x(t)$

→ Đây là hệ tuyến tính

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

▪ Hệ thống TĨNH hay được gọi là hệ thống **bất biến** nếu có sự dịch chuyển thời gian đầu vào dẫn đến sự dịch chuyển tương ứng của tín hiệu đầu ra (hay quan hệ vào / ra không phụ thuộc vào thời điểm bắt đầu).

- Tức là nếu $y[n] = G(x[n])$ thì với $x[n-N]$ ta có $y[n-N] = G(x[n-N])$

G được gọi là hệ thống bất biến

Ví dụ: y(t) = sin (x(t)) là hệ bất biến do y(t-T) = sin (x(t-T))

▪ Hệ thống là không bất biến khi quan hệ vào phụ thuộc vào thời điểm bắt đầu

Ví dụ: y[n] = n.x[n] là hệ không bất biến do

$$y_1[n] = n\,x[n-N] \neq (n-N)\,x[n-N] = y[n-N] \quad \forall N \text{ nguyên}$$

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Hệ thống

- Trong thực tế các hệ thống thường thay đổi theo thời gian và là hệ thống là không bất biến
  + Các hệ thống KHÔNG bất biến phức tạp
  + Các hệ thống được gọi là bất biến khi xét trong khoảng thời gian [t_1 , t_2]

- Để đơn giản hệ thống được gọi là bất biến khi xét $-\infty \leftarrow t_1$, $t_2 \rightarrow \infty$

- Hệ thống tuyến tính, bất biên (**LTI**) được khảo sát trong chương trình môn học

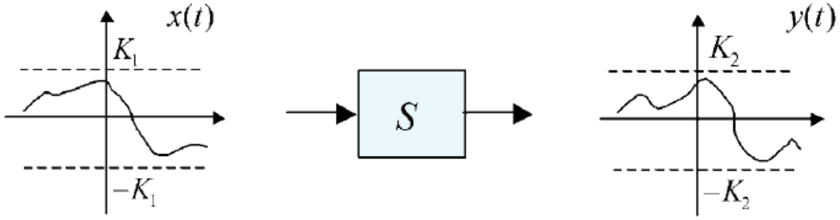
GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Đặc tính cơ bản của hệ thống – Ổn định

- Hệ thống được gọi là ổn định chỉ khi tín hiệu vào được giới hạn, tín hiệu ra được giới hạn (BIBO) tức là y(t) = S x(t) là BIBO nếu

$$\forall K_1 > 0\,, \exists K_2 > 0$$
$$|x(t)| < K_1\,, -\infty < t < \infty \quad \Rightarrow |y(t)| < K_2\,, -\infty < t < \infty$$

- Đây là đặc tính hết sức quan trọng đối với các hệ thống có phản hồi, các bộ lọc tương tự và số



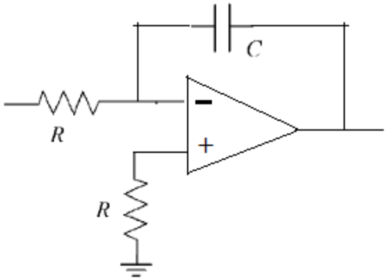
- Hệ thống được gọi là không ổn định khi tín hiệu vào được giới hạn, tín hiệu ra không giới hạn (no-BIBO)

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Đặc tính cơ bản của hệ thống – Ổn định

- Ví dụ: điên áp và dòng điện qua điện trở R được xác định bởi U(t) = R.I(t) thì đây là hệ BIBO vì nếu I(t) được giới hạn K_1 thì U(t) được giới hạn K_2 sao cho K_2 = R.K_2

- Ví dụ hệ mạch tích phân



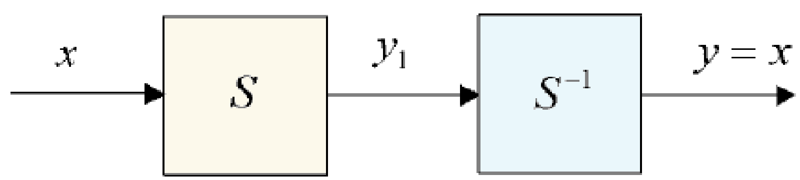
không BIBO do ???

GIỚI THIỆU HỆ THỐNG

❑ Đặc tính cơ bản của hệ thống – Khả nghịch

- Một hệ thống được gọi là khả nghịch nếu với ín hiệu lối vào luôn có thể khôi phục duy nhất tín hiệu đó tại lối ra . Tức là y = S^{-1} (S (x)) = x

hay $$x_1 \neq x_2 \text{ , } y_1 = Sx_1 \text{ , } y_2 = Sx_2 \rightarrow y_1 \neq y_2$$



Ví dụ: Hệ nghịch đảo của $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ là vi phân $y[n] - y[n-1]$

y_1(t) = 2x(t) với y(t) = (1/2)x(t)

GIỚI THIỆU TÍN HIỆU

❑ **Bài tập 1.58-1.77**

❑ **Ví dụ**

- **Xét đặc tính hệ thống**

$$y[n] = x[1-n]$$

+ Có nhớ : **Không** do y[0] = x[1] phụ thuộc vào tương lai của tín hiệu

+ Bất biến thời gian: **Không** do $y_1[n] = Sx[n-N] = x[1-n-N] \neq x[1-(n-N+] = x[1-n+N] = y[n-N]$

+ Tuyến tính : **Có** do đặt $y_1[n] = Sx_1[n] = x_1[1-n]$ và $y_2[n] = Sx_2[n] = x_2[1-n]$ thì với

$x[n] = \alpha.x_1[n] + \beta.x_2[n] \rightarrow y[n] = x[1-n] = \alpha.x_1[1-n] + \beta.x_2[1-n] = \alpha.y_1[n] + \beta.\ y_2[n]$

+ Nhân quả : **Không** do y[0] = x[1] phụ thuộc vào tương lai của tín hiệu lối vào

+ Ổn định : **Có** do $|x[n]| < B\ \forall n \rightarrow |y[n]| < B\ \forall n$

Cám ơn