머신러닝 / 딥러닝

Linear Regression

- 경사하강법(Gradient Decent Algorithm) -

regression – 손실함수 (loss function)

$$y = Wx + b$$

$$\text{loss function} = E(W,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - y_i]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - (Wx_i + b)]^2$$

- x 와 t 는 training data 에서 주어지는 값이므로, 손실함수(loss function)인 *E(W,b)* 는 결국 W 와 b 에 영향을 받는 함수임.
    - *E(W,b)* 값이 작다는 것은 정답(t, target)과 y = Wx+b 에 의해 계산된 값의 평균 오차가 작다는 의미이며,
    - 평균 오차가 작다는 것은 미지의 데이터 x 가 주어질 경우, 확률적으로 미래의 결과값도 오차가 작을 것이라고 추측할 수 있음
    - 이처럼 training data를 바탕으로 손실 함수 *E(W,b)* 가 최소값을 갖도록 (W, b) 를 구하는 것이 (linear) regression model 의 최종 목적임

gradient decent algorithm – review loss function E(W,b)

$$y = Wx + b$$

$$\text{loss function} = E(W,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - y_i]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - (Wx_i + b)]^2$$

- 손실함수는 오차의 평균값을 나타내기 때문에, 손실함수가 최소값을 갖는다는 것은 실제 정답과 계산 값의 차이인 오차가 최소가 되어, 미지의 데이터에 대해서 결과를 더 잘 예측 할 수 있다는 것을 의미함.

- 이러한 손실함수는 W, b 에 영향을 받기 때문에, 손실함수가 최소가 되는 가중치 W 와 바이어스 b 를 찾는 것이 regression 을 구현하는 최종 목표임

⬇

경사하강법

(gradient decent algorithm)

gradient decent algorithm – 손실함수(loss function) 계산

➢ 계산을 쉽게 하고 손실함수의 모양을 파악하기 위해 E(W,b)에서 바이어스 b = 0 가정

[예] 다음과 같은 Training Data 에서, W 값에 대한 손실함수 E(W,b) 계산

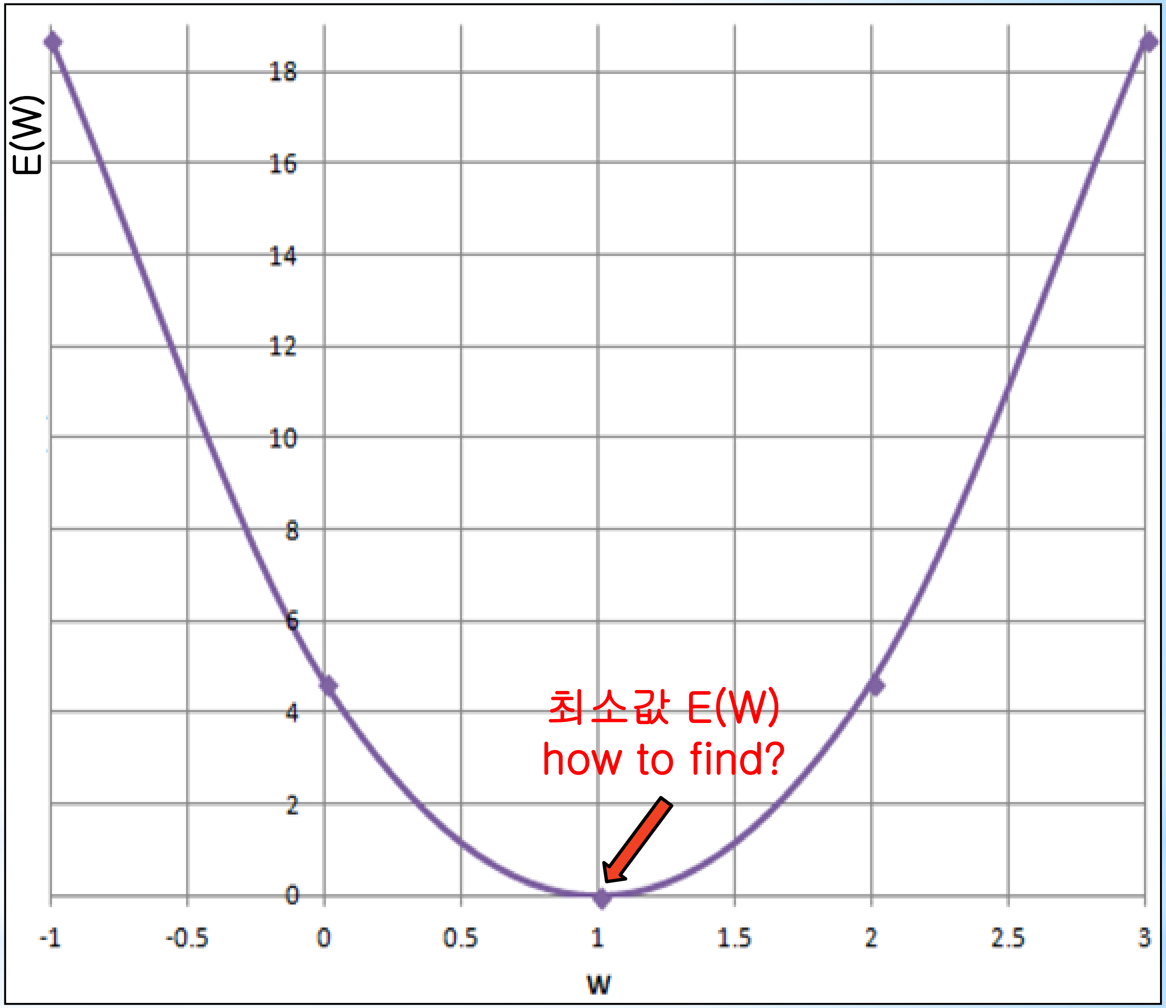
training data

x	t
1	1
2	2
3	3

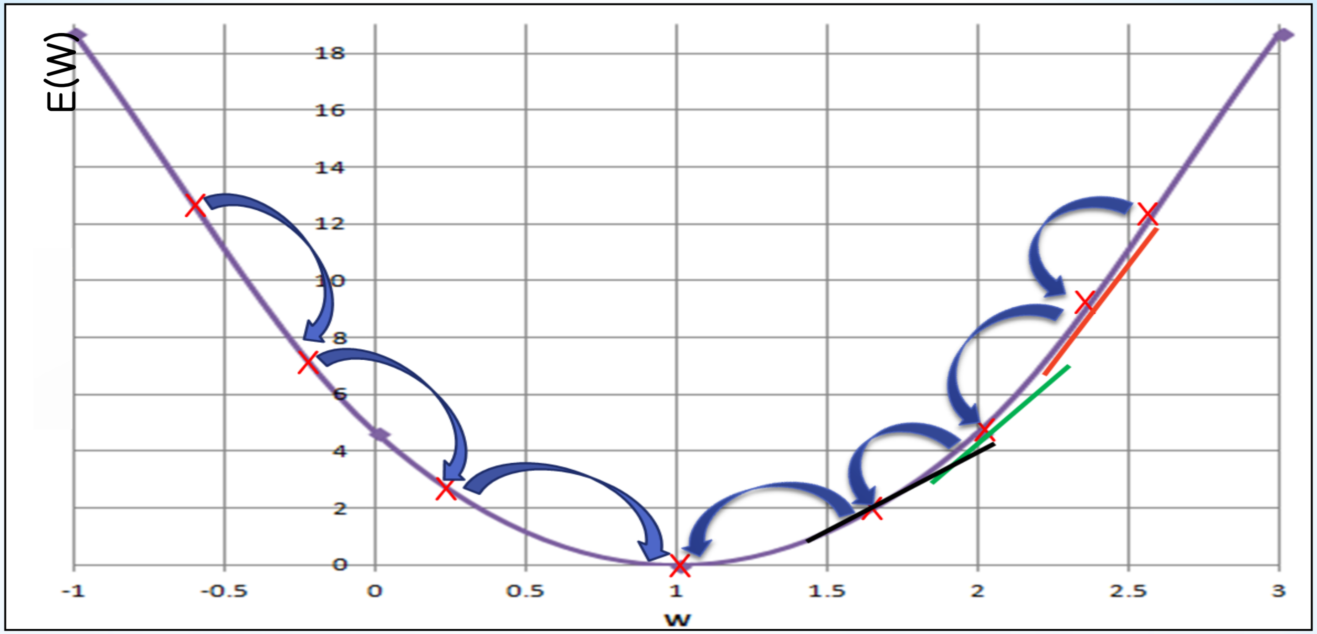
W = -1	$E(-1,0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[t_i-(-1\cdot x_i+0)]^2 = \frac{[1-(-1\cdot 1+0)]^2 + [2-(-1\cdot 2+0)]^2 + [3-(-1\cdot 3+0)]^2}{3} = 18.7$
W = 0	$E(0,0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[t_i-(0\cdot x_i+0)]^2 = \frac{[1-(0\cdot 1+0)]^2 + [2-(0\cdot 2+0)]^2 + [3-(0\cdot 3+0)]^2}{3} = 4.67$
W = 1	$E(1,0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[t_i-(1\cdot x_i+0)]^2 = \frac{[1-(1\cdot 1+0)]^2 + [2-(1\cdot 2+0)]^2 + [3-(1\cdot 3+0)]^2}{3} = 0$
W = 2	$E(2,0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[t_i-(2\cdot x_i+0)]^2 = \frac{[1-(2\cdot 1+0)]^2 + [2-(2\cdot 2+0)]^2 + [3-(2\cdot 3+0)]^2}{3} = 4.67$
W = 3	$E(3,0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[t_i-(3\cdot x_i+0)]^2 = \frac{[1-(3\cdot 1+0)]^2 + [2-(3\cdot 2+0)]^2 + [3-(3\cdot 3+0)]^2}{3} = 18.7$

gradient decent algorithm – 손실함수 (loss function) 형태

W	E(W)
-1	18.7
0	4.67
1	0
2	4.67
3	18.7



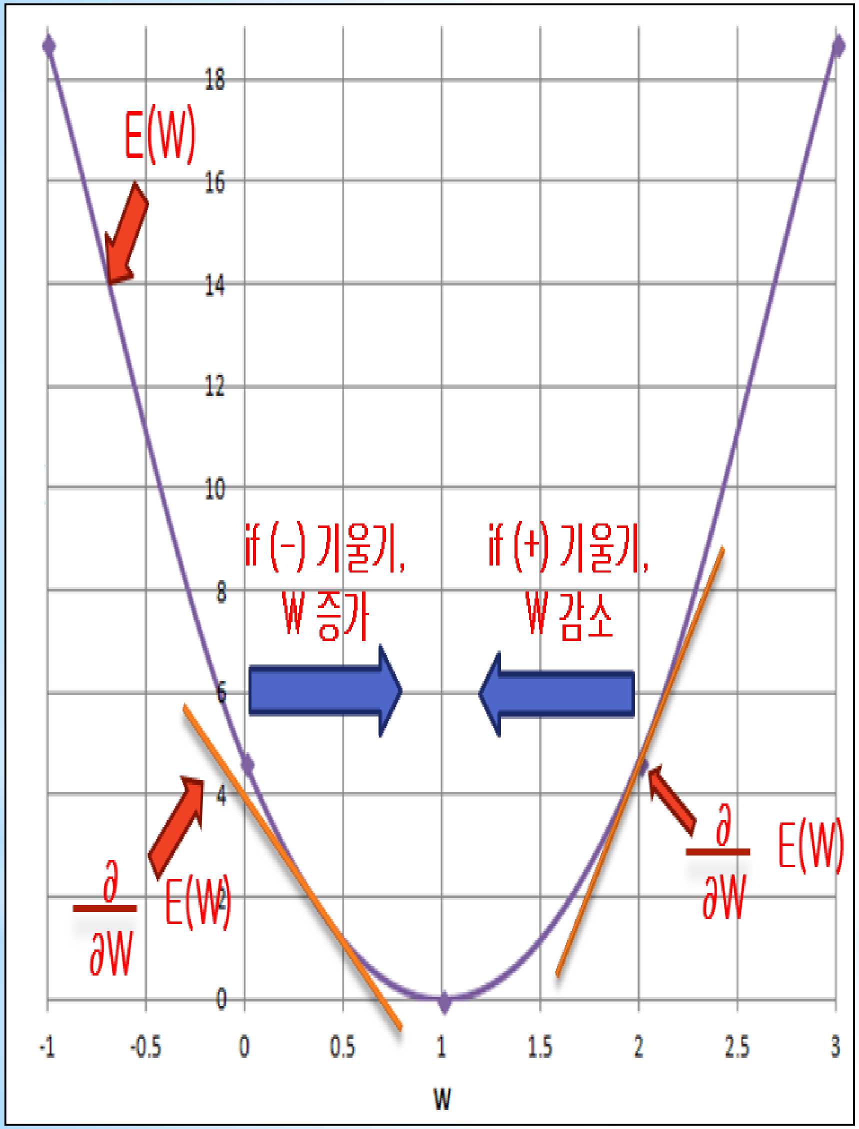
gradient decent algorithm – 경사하강법 원리



- ① 임의의 가중치 W 선택 ② 그 W 에서의 직선의 기울기를 나타내는 미분 값 (해당 W 에서의 미분, ∂E(W)/∂W) 을 구함 ③ 그 미분 값이 작아지는 방향으로 W 감소(또는 증가) 시켜 나가면 ④ 최종적으로 기울기가 더 이상 작아지지 않는 곳을 찾을 수 있는데, 그 곳이 손실함수 E(W) 최소값임을 알 수 있음.

- 이처럼, W에서의 직선의 기울기인 미분 값을 이용하여, 그 값이 작아지는 방향으로 진행하여 손실함수 최소값을 찾는 방법을 경사하강법(gradient decent algorithm) 이라고 함

gradient decent algorithm – W 값 구하기



W 에서의 편미분 ∂E(W)/∂W
해당 W 에서 기울기(slope)를 나타냄

⇒ ∂E(W)/∂W 양수 (+) 값을 갖는다면,
W 는 왼쪽으로 이동시켜야만(감소),
손실함수 E(W) 최소값 찾음

⇒ ∂E(W)/∂W 음수 (−) 값을 갖는다면,
W 는 오른쪽으로 이동시켜야만(증가),
손실함수 E(W) 최소값 찾음

$$W = W - \alpha \frac{\partial E(W,b)}{\partial W}$$

α 는 학습율(learning rate) 이라고 부르며,
W 값의 감소 또는 증가 되는 비율을 나타냄

gradient decent algorithm – 손실함수 E(W,b) 최소값이 되는 W, b

➢ linear regression 목표는 training data 특성 / 분포를 가장 잘 나타내는

임의의 직선 $y = Wx + b$ 에서의 [W, b] 를 구하는 것

$$y = Wx + b$$

$$E(W,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - y_i]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i - (Wx_i + b)]^2$$

손실함수 E(W,b) 최소값을 갖는 W

손실함수 E(W,b) 최소값을 갖는 b

$$W = W - \alpha\frac{\partial E(W,b)}{\partial W}$$

$$b = b - \alpha\frac{\partial E(W,b)}{\partial b}$$

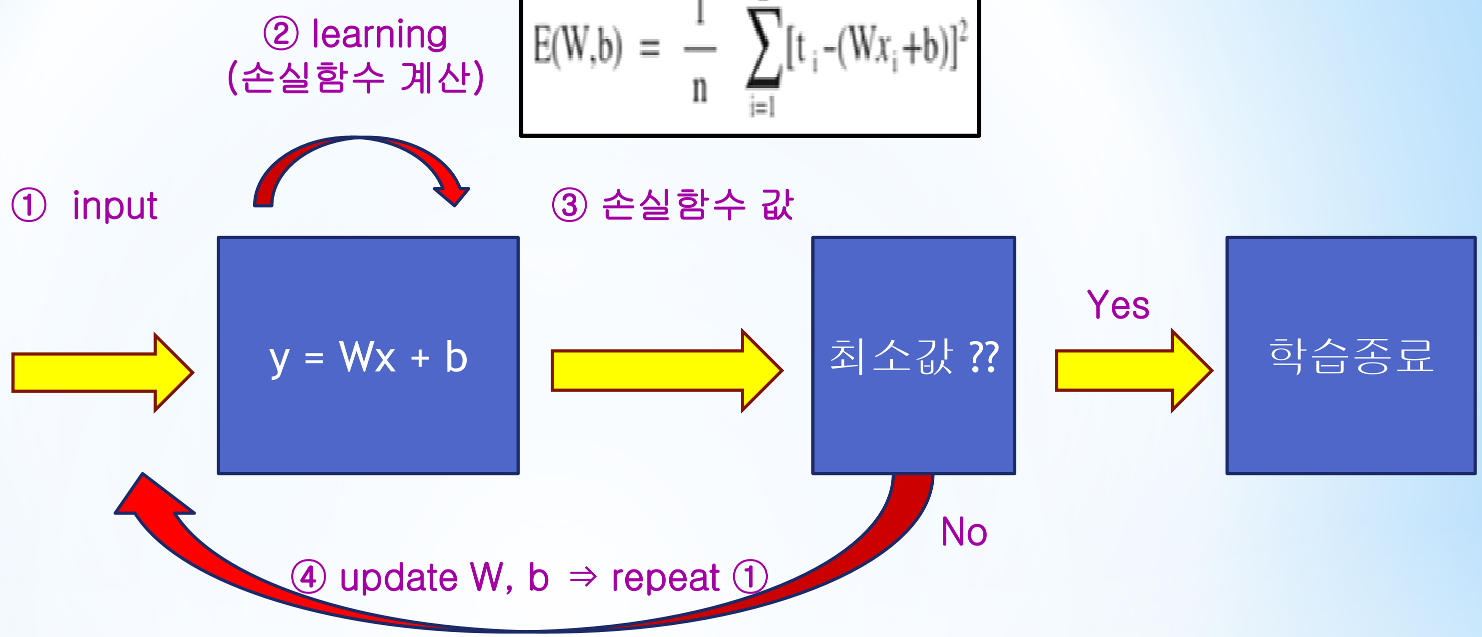
※ α 는 학습율(learning rate) 이라고 부르며, W 값의 감소 또는 증가 되는 비율을 나타냄

Regression 에서의 [W, b] 계산 프로세스

입력 (x)	정답 (t)
x_1	t_1
x_2	t_2
...	...
...	...
x_n	t_n

training data

$$E(W,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i-(Wx_i+b)]^2$$



$$W = W - \alpha\frac{\partial E(W,b)}{\partial W}$$

$$b = b - \alpha\frac{\partial E(W,b)}{\partial b}$$