Лабораторная работа № 5
«Численные методы решения задачи Коши»

На равномерной сетке с помощью неявного метода трапеций и метода, указанного в варианте задания, найти с шагами $h=0.1$ и $h/2$ численное решение задачи Коши y^h и $y^{h/2}$ соответственно. Для неявного метода трапеций решение уравнений выполнить с помощью метода Ньютона. Сравнить найденное численное решение $y^{h/2}$ с точным решением $u(x)$, т.е. найти $\left\|u-y^{h/2}\right\|_{\omega_{h/2}}=\max\limits_{i=\overline{0,2N}}\left|u_i-y_i^{h/2}\right|$. В одной системе координат построить график функции $u(x)$ и график полученного численного решения $y^{h/2}$. Найти $\dfrac{\left\|y^h-y^{h/2}\right\|_{\omega_h}}{2^p-1}=\dfrac{\max\limits_{i=\overline{0,N}}\left|y_i^h-y_{2i}^{h/2}\right|}{2^p-1}$, где $N=(b-a)/h$, p – порядок точности метода.

По результатам лабораторной работы оформляется отчет. ***В содержание отчета должна быть включена следующая информация:***

- Постановка задачи.
- Применяемые численные методы. Итерационный процесс метода Ньютона для реализации неявного метода трапеций.
- Правило Рунге оценки погрешности.
- Результаты вычислительного эксперимента.
- Выводы.
- Листинг программы с комментариями.

Варианты заданий

Номер варианта	Задача Коши	Точное решение	Явный метод Рунге-Кутты, порядок точности метода
1	$u'=-u^2+\dfrac{u}{x},\quad x\in[1,2],$ $u(1)=\dfrac{2}{3}.$	$u(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$	$\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$ $p=3$
2	$u'=\dfrac{u^2\ln x-u}{x},\quad x\in[1,2],$ $u(1)=0.5.$	$u(x)=\dfrac{1}{\ln x+x+1}$	$\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ \hline & 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}$ $p=3$
3	$u'=\dfrac{u^2+x^2u}{x^3},\quad x\in[1,2],$ $u(1)=0.5.$	$u(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$	$\begin{array}{c\|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$ $p=4$

<table>
<tr><td>4</td><td>$u' = x^2(u^2+1), \quad x \in [0,1],$
$u(0) = 0.$</td><td>$u(x) = tg\left(\frac{x^3}{3}\right)$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$
$p = 3$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$u' = (x-u)^2+1, \quad x \in [0,1],$
$u(0) = 0.5.$</td><td>$u(x) = \frac{x^2-2x-1}{x-2}$</td><td>$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$
$p = 2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$u' = \frac{u \ln u}{x}, \quad x \in [1,2],$
$u(1) = e.$</td><td>$u(x) = e^x$</td><td>$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$
$p = 2$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$u' = \frac{u^2+ux}{x^2}, \quad x \in [1,2],$
$u(1) = 0.5.$</td><td>$u(x) = \frac{x}{2-\ln x}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ \hline & 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{array}$
$p = 3$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$u' = (u+x)^2, \quad x \in [0,1],$
$u(0) = 0.$</td><td>$u(x) = \mathrm{tg}x - x$</td><td>$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$
$p = 2$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$u' = \frac{xu}{u+1} - x, \quad x \in [1,2],$
$u(1) = 2.$</td><td>$u(x) = \sqrt{10-x^2} - 1$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$
$p = 4$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$u' = \frac{u}{x} + \frac{x}{u}, \quad x \in [1,2],$
$u(1) = 1.$</td><td>$u(x) = x\sqrt{2\ln x + 1}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array}$
$p = 3$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$u' = \frac{u}{x} + \frac{x}{u}, \quad x \in [1,2],$
$u(1) = 1.$</td><td>$u(x) = x\sqrt{2\ln x + 1}$</td><td>$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 0 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$
$p = 2$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$u' = -\frac{u}{x}\ln\left(\frac{u}{x}\right), \quad x \in [1,2],$
$u(1) = 1.$</td><td>$u(x) = xe^{\frac{1-x}{x}}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 0 & 3/4 & 1/4 \end{array}$
$p = 3$</td></tr>
</table>