Analyse: Eksammens presentationer.

Martin Sig Nørbjerg

June 11, 2022

1 | Reel analyse

2 | Kompleks analyse

2.1 Opgave 1:

(a) Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion på området $G \subseteq \mathbb{C}$, som udlukkende tager relle værdier, dvs $f(G) \subseteq \mathbb{R}$. Hvordan ser f ud?

For at f kan være holomorf på G skal den være differentiabel i alle $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Opskriv f som $f = u + iv$, hvor $u, v : G \to \mathbb{R}$. Det gælder at funktionen er (kompleks) differentiabel hvis og kun hvis, den opfylder Cauchy-Riemann ligningerne

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0)$$

hvor u, v ses som funktioner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Men hvis $f(G) \subseteq \mathbb{R}$, har vi at $v(x, y) = 0$ for alle $z = x + iy \in G$. Heraf følger det at

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) = 0$$

Og heraf at der $\exists c \in \mathbb{R}$ således $v(x, y) = c$ for alle $z = x + iy \in G$ hvilket medfører at $f(z) = c$.

(b) Undersøg om funtionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{|z^2 - \bar{z}^2|}$, er kompleks differentiabel i $z = 0$. Er den tilsvarende funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reel differentiabel?