AHA: Eksammens presentationer.

Martin Sig Nørbjerg

June 11, 2022

Results.

Definition 0.1. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ or $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, then it's called 2π periodic if $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Definition 0.2. Fourier rækken skrives

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Skrives på komplex form som

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\theta}$$

hvor $c_0 = \frac{a_0}{2}$ og $c_n = \frac{1}{2}(a_n + sign(n)ib_n)$ for $n \in \mathbb{Z}$

Remark 1. koefficienterne har formen

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-pi}^{pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta$$

og tilsvarende

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

for $n \in \mathbb{N}$ Og såfremt ϕ_n definieres som $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{inx}$ er

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \phi_n\rangle$$

Definition 0.3. En 2π periodisk funktion f kaldes intergrabel hvis

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|\, d\theta < \infty$$

for intergrable f er

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-ik\theta} d\theta$$

veldefinieret for alle $k \in \mathbb{Z}$.

Remark 2. Hvis g er ulige st. $g(\theta) = -g(-\theta)$, så er

$$b_n = 0$$

for $n \in \mathbb{N}$ ellers hvis g lige så er

$$a_n = 0$$

for $n \in \mathbb{N}$

Theorem 0.4 (Bessel's ulighed)**.** *lad f være 2π periodisk, og Riemann integrable, så gælder*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

Lemma 0.5 (Reimann-Lebesgues)**.** *f Riemann integrable og 2π periodisk $\implies$*

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n = 0$$

Definition 0.6. En funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ kaldes **stykvis kont.** hvis f er kont. på $[a, b]$ untagen endeligt mange punkter. x_1, x_2, x_k hvor grænserne for højre og venstre eksister. f kaldes **stykvis glat** hvis f og f' er stykvis kont. på $[a, b]$

Definition 0.7. Partial summen af orden N definieres som:

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{in\theta}$$

Remark 3. Det bemærkes at

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) D_N(\phi) d\phi$$

hvor $D_N = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{in\theta}$ er den såkaldte **dirichlet kerne**.

Theorem 0.8. *Lad f være 2π periodisk og stykvis glat. så gælder det at*

$$\lim_{n \to \infty} S_n^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)], \theta \in [-\pi, \pi]$$

specielt gælder det at f kont i θ medføre at:

$$\lim_{n \to \infty} S_n^f(\theta) = f(\theta)$$

Proposition 0.9. *Lad f kont. og stykvis glat på $[-\pi, \pi]$, så gælder det at*

$$c'_n = inc_n$$

hvilket giver os en mulighed for at beregne kvotienterne for den afledte fourier række

Remark 4. Derudover giver dette resultat af fourier rækken for f konvergere både absolut og uniformt i dette tilfælde på $[-\pi, \pi]$.

Proposition 0.10. *Cauchy-Schwarz ulighed giver at for to reelle følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ gælder at*

$$\sum_n a_n b_n \leq \left(\sum_n a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 0.11 (Weierstrass' M-test)**.** *lad $f_n : A \to \mathbb{C}$ for $n \in \mathbb{Z}$. Hvis der findes en følge $M_n \in (0, \infty)$ st. $|f_n(x)| \leq M_n$ for $x \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ og $\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n \leq \infty$, så konvergere*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$$

uniformt på A.

Theorem 0.12. *Suppose f is 2π periodic and peicewise continues, with forier coef. $a_n, b_n c_n$ and let $F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)d\phi$. If $c_0 = 0$ (this is the same as $a_0 = 0$), then $\forall\theta$ we have*

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\sin(n\theta) - \frac{b_n}{n}\cos(n\theta)\right)$$

Where

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)d\theta$$

Definition 0.13. Gibbs phenomenon: as one adds more and more terms the paritals shums overshoot and undershoot f near the discontinuity.

Definition 0.14.

$$L^2(a,b) = \{f \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

hvor intergralet er det såkaldte lebesgue intergrale.

Theorem 0.15. *$L^2(a,b)$ er et hilbertrum (fuldstændigt normeret vektorum)*

Theorem 0.16 (Sætningen om domineret konvergens)**.** *Lad $D \subseteq \mathbb{R}^k$ være et område. Antag, at $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, er en følge af funktioner på D og at phi, g er funktioner på D, således*

i) $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ og $\int_D \phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$ (Her er $d\mathbf{x}$ det såkaldte lebesgue mål) *ii)* $|g_n(\mathbf{x})| \leq \phi(\mathbf{x})$*, for alle* $\mathbf{x} \in D, n \in \mathbb{N}$*.*

iii) $g_n(\mathbf{x}) \to g(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x} \in D$*.*

så gælder det at

$$\int_D g_n(\mathbf{x})d\mathbf{x} \to \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Definition 0.17. Følgende vektorrum spiller en stor rolle:

$$L^1(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mid ||x||_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty\}$$

$$L^1(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mid ||x||_2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty\}$$

$$L^\infty(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mid ||x||_\infty := \sup_n |x_n| < \infty\}$$

Remark 5. Det kan vises at $L^1(\mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{Z}) \subset L^\infty(\mathbb{Z})$, bemærk at det her er over $\mathbb{Z}$! og at $L^2(\mathbb{Z})$ er et hilbertrum.

Definition 0.18. Kroneckers delta følge:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Definition 0.19. Lad $y = T(x)$, hvor $T : V \to V$ være et diskrettids system.

- Systemet kaldes lineært hvis $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in V$
- Systemet kaldes tidsinvariant, hvis

  $$y' = T(x') \text{ hvor } \begin{cases} x'_n = x_{n-k} y'_n = y_{n-k} \end{cases}$$

  for alle $k \in \mathbb{Z}$
- Systemet kaldes BIBO-stabilt (bounded-in, bounded-out) hvis

  $$x \in L^\infty(\mathbb{Z}) \implies y = T(x) \in L^\infty(\mathbb{Z})$$
- Systemet kaldes hukommelsesløst hvis for x, x' gælder at

  $$x_k = x'_k \implies T(x)_k = T(x')_k$$
- Systemet kaldes kausal hvis det for x, x' og $k \in \mathbb{Z}$ gælder at:

  $$1_{-\infty,\dots,k}x = 1_{-\infty,\dots,k}x' \implies 1_{-\infty,\dots,k}T(x) = 1_{-\infty,\dots,k}T(x')$$

  hvor $(1_{-\infty,\dots,k}x)_l = \begin{cases} x_l, & l \leq k \\ 0, & l > k \end{cases}$ for $l \in \mathbb{Z}$

Definition 0.20. Lad $T : V \to V$ være både lineært og tidsinvariant, så defineres impulsresponsen som $h = T(\delta)$.

Remark 6. Vi har

$$y = T(x) = T\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \delta_{n-k}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k T(\delta_{n-k}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{n-k} = h * x$$

1 | Fourierrækker

Lad $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ være en stykvis kontinuert funktion, så benytter vi notationen

$$f(x-) := \lim_{h \to 0-} f(x-h) \text{ og } f(x+) := \lim_{h \to 0+} f(x-h)$$

bemærk at det selvfølgeligt skal gælde at $x \in [a, b]$.

Lemma 1.1. *Lad* $D_N = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{in\phi}$ *(dirichlet kernen) og* $S_N^f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\phi}$ *(Fourier partial summen) så er*

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{i(N+1)\phi} - \mathrm{e}^{-iN\phi}}{\mathrm{e}^{i\phi} - 1} \tag{1.1}$$

og

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta) d\theta = \int_{0}^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

og

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) D_N(\phi) d\phi \tag{1.3}$$

Remark 7. Skal (1.3) dette forståes som en slags endelig konvolution?

Theorem 1.2. *Lad $f(\theta)$ være en 2π-periodisk og stykvis glat funktion. Så gælder det, at*

$$\lim_{N \to \infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)], \textit{ for } \theta \in [-\pi, \pi]$$

specielt gælder det at hvis f er kont. i θ, så gælder:

$$\lim_{N \to \infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$$

Proof. Vi har,

$$\frac{1}{2} f(\theta-) = f(\theta-) \int_{-\pi}^{0} D_N(\theta) d\theta \text{ og } \frac{1}{2} f(\theta+) = f(\theta+) \int_{0}^{\pi} D_N(\theta) d\theta$$

per ligning (1.2). Så

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\left[f(\theta-) + f(\theta+)\right] &\overset{(a)}{=} \int_{-\pi}^{0} \left[f(\theta + \phi) - f(\theta-)\right] D_N(\phi) d\phi + \int_{0}^{\pi} \left[f(\theta + \phi) - f(\theta+)\right] D_N(\phi) d\phi \\ &\overset{(b)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \left[\mathrm{e}^{i(N+1)\phi} - \mathrm{e}^{-iN\phi}\right] d\phi = c_{-N-1} - c_N \end{aligned}$$

hvor (a) følger af ligning (1.3) og (b) af ligning (1.1), og funktionen g definieres som

$$g(\phi) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta+\phi) - f(\theta-)}{e^{i\phi} - 1}, & -\pi < \phi < 0 \\ \dfrac{f(\theta+\phi) - f(\theta+)}{e^{i\phi} - 1}, & 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

Funktion g er stykvis glat for $\phi \neq 0$ (hvis $\phi = 0$, får vi et problem i brøken), da f er stykvis glat. Vi har derudover at

$$\lim_{\phi \to 0+} g(\phi) = \lim_{\phi \to 0+} \frac{f(\theta+\phi) - f(\phi+)}{e^{i\phi} - 1} \overset{(c)}{=} \lim_{\phi \to 0+} \frac{f'(\theta+\phi)}{ie^{i\phi}} = \frac{f'(\theta)}{i}$$

hvor (c) følger af l'Hopitalz regel og tilsvarende at

$$\lim_{\phi \to 0-} g(\phi) = \frac{f'(\theta-)}{i}$$

så g er stykvist kontinuert og dermed Riemann intergrabel på $[-\pi, \pi]$. i følge Reimann-Lebesgues lemma gælder det derfor, at

$$C_N := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-iN\theta} d\theta \to 0 \text{ når } N \to \pm\infty$$

og vi har derfor at

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\left[f(\theta-) + f(\theta+)\right] = c_{-N-1} - c_N \to 0 \text{ når } N \to \infty$$

Hvilket afslutter beviset. ■

2 | DFT, herunder FFT

Definition 2.1. Lad $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^n$, så er **den diskrete fouriertransformation (DFT)** er en invertibel lineær transformation

$$\mathbf{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

defineret som

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})_k = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \text{ for } k = 0, 1, \ldots, N-1$$

hvor $W_N = \mathrm{e}^{-2\pi/N}$.

Lemma 2.2. *Givet* $[x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]^T$*, så gælder det for* $0 \leq L \leq N$*, at*

$$y_n = x_{<n-L>_N} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Y_k = X_k \mathrm{e}^{-2\pi i k L/N}$$

Theorem 2.3. *Givet* $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots x_{N-1}]^T$ *og* $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \ldots y_{N-1}]^T$*, så gælder det at*

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \circledast \mathbf{y} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Z_k = X_k Y_k$$

Proof. Vi har,

$$\begin{aligned}
Z_k &= \sum_{n=0}^{N} z_n \mathrm{e}^{-2\pi i k n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{<n-m>_N} \right) \mathrm{e}^{-2\pi i k n/N} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\sum_{n=0}^{N} y_{<n-m>_N} \mathrm{e}^{-2\pi i k n/N} \right) \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\mathrm{e}^{-2\pi i k m/N} Y_k \right) \\
&= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m \mathrm{e}^{-2\pi i k m/N} \right) Y_k = X_k Y_k
\end{aligned}$$

hvor (a) følger af lemmaet. ■

Remark 8. Filtertoeri ect. fungere altså derfor i dette DFT setup.

Bemærk at *FFT*'en gør det muligt at reducere fra $O(N^2)$ operationer til $O(N\log(N))$

Fremgangs måde for FFT Givet $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots x_{N-1}]^T$, hvor N er lige. Så har vi

$$X_k = \sum_{n=0,2,\dots,N-2} x_k \mathrm{e}^{-2\pi ikn/N} + \sum_{n=1,3,\dots,N-1} x_k \mathrm{e}^{-2\pi ikn/N}$$

sætter vi

$$x_m^0 = x_{2m}, \quad m = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$
$$x_l^1 = x_{2l+1}, \quad l = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

så fåes

$$X_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_m^0 \mathrm{e}^{-2\pi ikm/N} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x_k \mathrm{e}^{-2\pi ikl/N}$$
$$= X_k^0 + \mathrm{e}^{2\pi ik/N} X_k^1, \text{ for } k = 0,1,\dots,N-1$$

Dette er en sum af to $n/2$ punkts DFT'er. Det smarte er nu at X_k^0 og X_k^1 er $\frac{N}{2}$-periodiske. Desuden har vi for $W_N = \mathrm{e}^{-2\pi i/N}$:

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k \cdot W_N^{\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

da $W_N^{\frac{N}{2}} = \mathrm{e}^{2\pi i\left(\frac{N}{2}\right)/2} = \mathrm{e}^{-i\pi} = -1$. Det gælder derfor at:

$$X_k = X_k^0 + W_N^k X_k^1, \quad k = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$
$$X_{k+\frac{N}{2}} = X_k^0 - W_N^k X_k^1, \quad k = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

Vi får altså $X_{k+\frac{N}{2}}$ “gratis”.

3 | DTS og filterteori

Et lineært tidsinvariant system $y = T(x)$, beskrevet ved $y = h * x$, hvor h er impulsresponsen $h = T(\delta)$ **Hvad er det for et delta?**. Vi definier er den såkaldte **DTFT (discrete-time fourier transform)** af følgen $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, som

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \mathrm{e}^{-in\omega}$$

hvis $x \in L^2(\mathbb{Z})$, så an vi definiere den inverse transform som:

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{iN})\mathrm{e}^{in\omega} d\omega$$

Vi tager nu DTFT af impuls responsen $h = T(\delta)$:

$$H(\mathrm{e}^{i\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \mathrm{e}^{-in\omega},$$

og givet $x \in L^2(\mathbb{Z})$, lader vi

$$X(\mathrm{e}^{i\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \mathrm{e}^{-in\omega},$$

$H(\mathrm{e}^{i\omega})$ kaldes for frekvens responsen af filtret.

Proposition 3.1. *For $y = h * x$ gælder det at $Y(\mathrm{e}^{i\omega}) = H(\mathrm{e}^{i\omega})X(\mathrm{e}^{i\omega})$*

Proof.

$$\begin{aligned}
Y(\mathrm{e}^{i\omega}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \mathrm{e}^{-in\omega} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{n-k} \right) \mathrm{e}^{-in\omega} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \mathrm{e}^{-ik\omega} h_{n-k} \mathrm{e}^{-i(n-k)\omega} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \mathrm{e}^{-ik\omega} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-k} \mathrm{e}^{-i(n-k)\omega} \right) \\
&= X(\mathrm{e}^{i\omega}) H(\mathrm{e}^{i\omega})
\end{aligned}$$

∎

Men da vi har ligheder hele vejen igennem kan vi vende processen om. Det vil sige at vi kan designe et 2π-periodisk filter $H(\mathrm{e}^{i\omega})$, med ønskede egenskaber. Også definere H, et entydigt linært tidsinvariant system T

Allpass filtre

Et filter h kaldes allpass, hvis $\left|H(e^{i\omega})\right| = 1$. Lad $y = h * x$. Det gælder at

$$||y||_2^2 \overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi}\,||Y||^2 = \frac{1}{2\pi}\,||H \cdot X||^2 = \frac{1}{2\pi}\,||X||^2 \overset{(a)}{=} ||X||_2^2$$

hvor vi har benyttet parsevals ligning for at få lighed (a) og (a). Allpass filtre bevare altså $||\cdot||_2$-normen (energi?).

4 | Foldning og Fourierintergraler

Definition 4.1. For $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieres foldningen af f og g som

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

såfremt intergralet eksistere.

Remark 9. Bemærk at her tolkes $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$ som $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} \int_{-n}^{m} h(x)dx$

Theorem 4.2. *Lad $g \in L^1(\mathbb{R})$ med $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ definier*

$$\alpha = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx, \quad \beta = \int_{0}^{\infty} g(x)dx$$

Antag, at f er stykvis kont. og begrænset. Da gælder, at

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} f * g_\varepsilon(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-), \text{ hvor } x \in \mathbb{R}$$

specielt gælder det at hvis f er kont, i $x \in \mathbb{R}$ er

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} f * g_\varepsilon(x) = f(x), \text{ hvor } x \in \mathbb{R}$$

Proof. Bemærk at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx$ for alle $\varepsilon > 0$. Dette giver os

$$\begin{aligned} f * g_\varepsilon(x) - \alpha f(x+) - \beta f(x-) = &\int_{-\infty}^{0} \left[f(x-y) - f(x+)\right] g_\varepsilon(y)dy \\ &+ \int_{0}^{\infty} \left[f(x-y) - f(x-)\right] g_\varepsilon(y)dy \end{aligned}$$

ved at benytte ligning (**??**). Givet $\delta > 0$, så vælges $c > 0$ således $|f(x-y) - f(x-)| < \delta$ for $0 < y < c$. Vi har,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^c \left[f(x-y) - f(x-)\right] g_\varepsilon(y)dy \right| \le \delta \int_0^c |g_\varepsilon(y)|\, dy &= \delta \int_0^{c/\varepsilon} |g(y)|\, dy \\ &\le \delta \int_0^{\infty} |g(y)|\, dy \to 0 \end{aligned}$$

når $\delta \to 0$, lad nu $m \in \mathbb{R}$ således at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (f er jo antaget til at være begrænset) så gælder det at

$$\left| \int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)]\, g_\varepsilon(y) dy \right| \leq 2M \int_c^\infty |g_\varepsilon(y)|\, dy$$
$$\leq 2M \int_{c/\varepsilon}^\infty |g(y)|\, dy \to 0$$

når $\varepsilon \to 0+$ hvilket medfører at

$$\int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)]\, g_\varepsilon(y) dy \to 0 \text{ når } \varepsilon \to 0+$$

og tilsvarende ses at

$$\int_\infty^0 [f(x-y) - f(x+)]\, g_\varepsilon(y) dy \to 0 \text{ når } \varepsilon \to 0+$$

dette medfører at

$$f * g_\varepsilon(x) - \alpha f(x+) - \beta f(x-) \to 0 \text{ når } \varepsilon \to 0+ \qquad \blacksquare$$

Remark 10. Vi har $\alpha f(x+) + \beta f(x-) = (\alpha + \beta) f(x) = f(x)$ hvis f er kont. i x.

5 | Plancherels ligning

Vi betragter en glat fkt. f med komp. støtte. Den opfylder, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, samt $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, idet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f(\xi)} \right|^2 d\xi \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \hat{f(x)} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f(x)} \right| d\xi < \infty$$

for g "af samme type som" f:

$$\begin{aligned} 2\pi \langle f, g \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{ix\xi} \, d\xi \right) \overline{g(x)} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-ix\xi} g(x)} \, dx \, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \, d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \end{aligned}$$

Special tilfælde $f = g$, får vi **Plancherels ligning**:

$$2\pi \, ||f||^2 = 2\pi \langle f, f \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = ||\hat{f}||^2$$

Vi udvider nu til $L^2(\mathbb{R})$. For et generelt $f \in L^2(\mathbb{R})$ vælger vi en følge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ af glatte fkt. med komp. støtte, hvor $||f - f_n|| \to 0$, når $n \to \infty$. Vi definiere så

$$\hat{f} = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n \quad (\text{grænseværdi i } L^2(\mathbb{R}))$$

Det giver mening da $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, nødvendigsvis er en Cauchy-følge i $L^2(\mathbb{R})$, pga. konvergensen $f_n \to f$, og i følge Plancherels ligning

$$\left| \left| \hat{f}_n - \hat{f}_m \right| \right|^2 = 2\pi \, ||f_n - f_m||^2 \to 0 \text{ når } n, m \to \infty$$

Altså er $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Cauchy-følge i det fuldstændige rum $L^2(\mathbb{R})$. Grænseværdien $\lim_{n \to \infty} \hat{f}_n := \hat{f}$, eksistere altså i $L^2(\mathbb{R})$, (da der er tale om en Cauchy følge.)

Heraf følger det at Plancherels ligning holder for alle $f \in {}^2(\mathbb{R})$, idet:

$$||f||_2^2 = \lim_{n \to \infty} ||f_n||^2 = 2\pi \lim_{n \to \infty} ||\hat{f}_n||^2 = 2\pi ||\hat{f}||^2$$

Plancherels ligning har mange anvendelser eksempelvis kan vi vise at et allpass filter bevare L^2 normen. Et filter h kaldes allpass, hvis $\left|H(\mathrm{e}^{i\omega})\right| = 1$. Lad $y = h * x$. Det gælder at

$$||y||_2^2 \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2\pi}\,||Y||^2 = \frac{1}{2\pi}\,||H \cdot X||^2 = \frac{1}{2\pi}\,||X||^2 \stackrel{(a)}{=} ||X||_2^2$$

hvor vi har benyttet parsevals ligning for at få lighed (a) og (a). Allpass filtre bevare altså $||\cdot||_2$-normen (energi?).

6 | Korttids-Fouriertransformen, herunder spektogrammer.