

# 2022 천체물리 경진대회 문제

김영민<sup>1</sup> and 김진호<sup>2</sup>

<sup>1</sup>울산과학기술원 (UNIST)

<sup>2</sup>한국천문연구원 (Korea Astronomy and Space Science Institute)

2022년 1월 17 - 21일

## 1 중력파 신호 분석

LIGO와 Virgo 중력파 검출기를 통해 관측된 신호 GW150914와 GW170817은 각각 블랙홀 쌍성병합과 중성자별 쌍성병합과정에서 발생한 중력파 신호들로 확인이 되었다. 지금까지 3번의 관측가동을 통해 총 90여개의 중력파 신호를 관측하였고, 확인된 신호들은 모두 블랙홀과 중성자별로 구성된 쌍성계의 병합 과정에서 발생한 것이다.

중력파신호를 검색하는 방법은 기본적으로 중력파검출기에서 검출된 시계열 데이터에서 이론적으로 알고있는 중력파형모델을 이용하여 matched filtering을 통해 통계적으로 배경신호들에 대해 높은 신호 강도를 보이는 시계열 데이터 정보를 추출하는방법을 이용한다. 검출된 중력파신호의 기본정보를 바탕으로 해당 시계열데이터에 베이지추론방법을 이용하여 중력파신호모델에 대한 모수추정을 통해 관측된 중력파신호발생 천체에 대한 물리량들을 추산하게 된다.

이번 중력파 데이터 분석 문제에서는 임의의 블랙홀 쌍성병합 신호들과 중성자별 쌍성병합 신호들을 LIGO Livingston (L1)과 Hanford(H1) 데이터에 삽입한 가상의 데이터들에서 각 신호들을 찾고 모수추정을 통해 각 쌍성들의 물리상수들을 추론해 보도록 한다.

그리고 문제에서 찾은 중성자별 쌍성병합 신호에 대해서 posterior samples을 이용하여 중성자별 연구에 대한 응용을 경험하는 문제를 풀어보도록 한다. 그 예로, 최근 중성자별에 대한 여러 연구들을 통해 중성자별의 질량과 반경의 비( $C$ )가 조력변형성( $\Lambda$ )과의 관계에서 상태방정식에 크게 의존하지 않는 아래와 관계식을 보여주는 것으로 알려져 있다.

$$C = a_0 + a_1(\ln\Lambda) + a_2(\ln\Lambda) \quad (1)$$

여기서  $a_0 = 0.360$ ,  $a_1 = -0.0355$ ,  $a_2 = 0.000705$  이고,  $C \equiv \frac{GM}{Rc^2}$  이다. 이를 이용해 중력파 신호분석을 통해 얻어진 조력변형성과 질량의 posterior 샘플들로 중성자별의 반경을 추론해 볼 수 있다.

### 블랙홀 쌍성 문제

시계열 데이터는 총 4개 주어진다. BBH1 신호에 대한 LIGO Livingston (L1) 데이터 BBH1-L1.gwf와 LIGO Hanford (H1) 데이터 BBH1-H1.gwf, 그리고 BBH2 신호에 대한 BBH2-L1.gwf, BBH2-H1.gwf 이다. gwf 형식을 읽는 방법에 대해서는 별도 강의로 제공된다.

#### 문제 1: Signal Search [15점]

주어진 시계열 데이터 별로  $\text{SNR} > 15$ 인 중력파 신호들을 찾고, event time, mass parameters ( $M_1$ ,  $M_2$ ), luminosity distance를 찾는 프로그램을 작성하시오. 단, new SNR으로 계산할 경우 15이상이어도 됨.

- 소스파일: prob1.py
- 출력파일: output1.txt

- 첫번째 행에는 BBH1에 대한 4개의 숫자 (event time,  $M_1$ ,  $M_2$ , luminosity distance 순서로)
- 두번째 행에는 BBH2에 대한 4개의 숫자 (event time,  $M_1$ ,  $M_2$ , luminosity distance 순서로)

## 문제 2: Parameter Estimation [15점]

BBH1에 대해 문제 1에서 찾은 event time 주변에서 모수추정을 하시오.  $M_1$ ,  $M_2$ , luminosity distance 의 posterior samples 을 이용하여 50%와 90% credible region을 찾는 프로그램을 작성하시오.

- 소스파일: prob2.py
- 출력파일: output2.txt
  - 첫번째 행에는 50% credible region에 대한 6개의 숫자 ( $M_1$ ,  $M_2$ , luminosity distance 순서로)
  - 두번째 행에는 90% credible region에 대한 6개의 숫자 ( $M_1$ ,  $M_2$ , luminosity distance 순서로)

## 중성자별 쌍성 문제

시계열 데이터가 총 4개 주어진다. BNS1 신호에 대한 LIGO Livingston (L1) 데이터 BNS1-L1.gwf와 LIGO Hanford (H1) 데이터 BNS1-H1.gwf, 그리고 BNS2 신호에 대한 BNS2-L1.gwf, BNS2-H1.gwf 이다. gwf 형식을 읽는 방법에 대해서는 별도 강의로 제공된다.

## 문제 3: Signal Search [15점]

주어진 시계열 데이터 별로  $\text{SNR} > 15$ 인 중력파 신호들을 찾고, event time, mass parameters ( $M_1$ ,  $M_2$ ), tidal deformabilities( $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ), luminosity distance를 찾는 프로그램을 작성하시오. 단, new SNR으로 계산할 경우 15이상이 아니어도 됨.

- 소스파일: prob3.py
- 출력파일: output3.txt
  - 첫번째 행에는 BNS1에 대한 6개의 숫자 (event time,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ , luminosity distance 순서로)
  - 두번째 행에는 BNS2에 대한 6개의 숫자 (event time,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ , luminosity distance 순서로)

**문제 4: Parameter Estimation [15점]**

BNS1에 대해 문제 3에서 찾은 event time 주변에서 모수추정을 하시오.  $M_1, M_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ , luminosity distance 의 posterior samples 을 이용하여 50%와 90% credible region을 찾는 프로그램을 작성하시오.

- 소스파일: prob4.py
- 출력파일: output4.txt
  - 첫번째 행에는 50% credible region에 대한 10개의 숫자 ( $M_1, M_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ , luminosity distance 순서로)
  - 두번째 행에는 90% credible region에 대한 10개의 숫자 ( $M_1, M_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ , luminosity distance 순서로)

**문제 5: Radius estimation in BNS [10점]**

문제 4에서 찾은 중성자별 쌍성 신호에서 산출한  $(M_1, \Lambda_1), (M_2, \Lambda_2)$  posterior samples 들로부터  $\Lambda - C$  관계식을 이용하여 중성자별 반경을 산출하여,  $(M_1, R_1), (M_2, R_2)$ 의 50%, 90% credible region을 찾는 프로그램을 작성하시오.

- 소스파일: prob5.py
- 출력파일: output5.txt
  - 첫번째 행에는 50% credible region에 대한 8개의 숫자 ( $M_1, R_1, M_2, R_2$  순서로)
  - 두번째 행에는 90% credible region에 대한 8개의 숫자 ( $M_1, R_1, M_2, R_2$  순서로)

**문제 6: Relation of Radius and Tidal deformability in BNS [15점]**

최근 중성자별 상태방정식 연구들에서는 중성자별 질량  $1.4M_\odot$  일때, 조력변형성( $\Lambda$ )과 반경( $R$ )의 관계가 power law ( $\Lambda \approx R^\alpha$ )를 따름을 보여주고 있다. 문제5에서 구한 결과를 이용하여  $\alpha$ 를 산출하고, 50%, 90% credible region을 찾는 프로그램을 작성하시오.(Bilby를 이용하여 직접 likelihood 함수를 구성하여 결과를 산출하시오.)

- 소스파일: prob6.py
- 출력파일: output6.txt
  - 첫번째 행에는 50% credible region에 대한 2개의 숫자
  - 두번째 행에는 90% credible region에 대한 2개의 숫자

**문제 7: Challenge [15점]**

폴리트로프 상태방정식 ( $P = K\rho^\Gamma$ )을 이용하여 중성자별의 질량, 반경, 조력변형성을 이론적으로 산출해 볼 수 있다. 폴리트로프 상태방정식을 이용하여, 위에서 구한  $(M, \Lambda)$  또는  $(M, R)$ 로부터 likelihood function을 직접 구성하여,  $\Gamma$  posterior samples 을 구하고, 50% credible region을 구하는 프로그램을 작성하시오. (Bilby를 이용하여 직접 likelihood 함수를 구성하여 결과를 산출하시오. LALSIMULATION, Bilby에서 제공하는 TOV solver 사용가능.)

- 소스파일: prob7.py
- 출력파일: output7.txt
  - 첫번째 행에는 50% credible region에 대한 2개의 숫자
  - 두번째 행에는 90% credible region에 대한 2개의 숫자

**주의사항****사용언어**

코드는 python 언어로 작성해야한다.

**단위**

출력을 할 때 사용해야 하는 단위는 다음과 같다.

- even time: s
- mass:  $M_\odot$  (solar mass)
- luminosity distance: Mpc
- neutron star radius: km
- neutron star density: cgs unit
- neutron star pressure: cgs unit

**출력 정밀도**

파일 출력시 정밀도 손실을 방지하기 위해 다음과 같이 소수점 16자리로 출력한다.

```
print("{:.16e}".format(value))
```

## 채점

- 출력에 대한 점수는 정답과의 상대오차로 매겨진다. 구체적인 공식은 다음과 같다.
- $\text{score} \times \min \left[ -\log_{10} \left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \left| \frac{x_{\text{out}}^{(i)} - x_{\text{sol}}^{(i)}}{x_{\text{sol}}^{(i)}} \right|^2} \right), 12 \right] / 12$
- 소스코드를 제출하지 않으면 0점 처리 된다.
- 채점은 제공된 서버의 초기 환경과 동일한 환경에서 진행된다.

## 제출방법

git 원격 저장소에 다음의 파일들을 push 한다.

- prob1.py / output1.txt
- prob2.py / output2.txt
- prob3.py / output3.txt
- prob4.py / output4.txt
- prob5.py / output5.txt
- prob6.py / output6.txt
- prob7.py / output7.txt

## 2 중성자별 구조

일반적으로 별(항성)은 수축하려고 하는 중력과 바깥으로 밀어내려고 하는 압력에 의해 평형을 이루고 있는(정역학적 평형에 있는, hydrostatic equilibrium) 천체이다. 우리가 아는 태양과 같은 일반적인 별은 별 내부 핵융합에 의해서 매우 뜨거운 상태다. 즉 별은 온도와 복사에 의한 압력으로 중력과 평형을 이루고 있다. 하지만 별의 진화의 마지막 단계에 만들어지는 백색왜성과 중성자별은 내부의 모든 핵융합이 멈춘 상태로 온도에 의한 압력을 더 이상 줄 수 없다(온도가 0K라는 것이 아니라 온도로 주는 압력이 다른 압력에 비해 매우 작다).

중성자별의 구조는 내부 고밀도 영역에 대한 상태방정식이 주어진다면 이것을 이용하여 상대론적인 정역학적 평형 상태에 대한 식을 (Tolmann - Oppenheimer - Volkoff equation, TOV) 풀이함으로써 구할 수 있다. 이는 단순히 손으로 풀 수는 없고 수치적인 방법을 통해서만 구할 수 있다.

한편 TOV의 계산 결과는 상대론적인 수치 시뮬레이션의 초기 조건으로 많이 사용된다. 그리고 상대론적인 수치 시뮬레이션은 일반적으로 직교좌표계를 많이 사용한다. 하지만 식 (14)으로 표현되는 좌표계에서 구한 TOV의 해를 직교 좌표계로 곧바로 옮겨오기엔 매우 복잡한 좌표변환을 거쳐야 한다. 물론 직교 좌표계로의 좌표변환이 불가능 한 것은 아니지만 등방좌표계를 (isotropic coordinates) 이용하면 훨씬 수월하게 직교 좌표계로의 변환이 가능하다.. 이번 경진 대회에서는 회전하지 않는 중성자별의 모델을 등방 좌표계에서 (isotropic coordinates) 구해 보고자 한다. 또한 이 좌표계의 도입은 빠르게 회전하는 중성자별의 일반상대론적인 모델을 구하는 기초가 되기 때문에 매우 중요하다.

이번 섹션에서의 모든 문제에 대한 계산은 배정도 (double precision) 실수를 사용하여 (8 바이트 실수형) 계산을 진행한다.

### 문제 1: 할선법을 이용한 비선형 방정식의 해 구하기 (10점)

할선법을 이용하여 아래 방정식의 해를 찾는 코드를 작성하시오.

$$f(x) = 3 + x^2 - xe^{2x} \quad (2)$$

초기 조건으로  $x_1 = 1$ 을 사용하고  $x_2$ 는  $x_1$ 보다 10% 작은 값인  $x_2 = 0.9$  사용한다. 각각의 iteration에 의한  $x_n$ 값과  $|f_n(x)|$  값을 화면에 출력하고 계산은  $|f_n(x)| < 1 \times 10^{-14}$ 이 될 때까지 계산을 지속한다. 여기서  $n$ 은 iteration의 횟수이다.

- 컴파일 스크립트: compile1.sh
- 실행 스크립트: run1.sh
- 실행 제한시간: 1초
- 화면출력:
  - 각 행별로  $n$ , 해, 해의 함수값(숫자 3개)을 출력

- 출력파일: output1.txt
- 작은 해(숫자 1개)를 출력

## 문제 2: 유한 차분법과 완화법을 이용한 뿌아송 방정식 풀이 (20점)

밀도분포  $\rho_0$ 에 의한 중력포텐셜은 다음 뿌아송 방정식을 (Poisson's equation) 통해 기술된다.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho_0 \quad (3)$$

1차원 구면좌표계에서 이 방정식을 써 보면

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi\rho_0 \quad (4)$$

이 된다. 이때 밀도 분포를 아래와 같이 가정하면

$$\rho_0(r) = \begin{cases} \rho_c \left(1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right), & \text{if } r \leq r_s. \\ 0, & \text{if } r > r_s. \end{cases} \quad (5)$$

해석적인 중력 포텐셜을 구할 수 있다. 그 값은 다음과 같다.

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi\rho_c \left( \frac{r_s^2}{2} - \frac{r^2}{3} + \frac{r^4}{10r_s^2} \right), & \text{if } r \leq r_s. \\ -\frac{8}{15}\pi\rho_c \frac{r_s^3}{r}, & \text{if } r > r_s. \end{cases} \quad (6)$$

이제 이 방정식을  $r = \infty$ 까지 확장할 수 있는 좌표 변환을 이용하여 (식 46, 47) 뿌아송 방정식을 (식 4) 변환해 보면 다음과 같다.

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d\Phi}{ds} = 4\pi\rho_0 r_s^2 (1-s)^{-4} \quad (7)$$

식 (7)을 유한 차분법을 이용하여 차분화 하고 (식 39, 41) 완화법을 이용하여 구해 보시오. 밀도분포는 식 (5)을 사용하고 중심밀도는  $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$ 을 사용한다. 초기 조건은  $\Phi = 0$ 으로 하고 경계조건은  $s = 0$ 에서  $\frac{d\Phi}{ds} = 0$ 이고  $s = 1$ 에서  $\Phi = 0$ 이다. 그리고  $s = 0$ 에서는 식 (41)을 이용하여 차분화 할 수 있다. 제출시 매 10000번 iteration 마다  $|r_i|$ 의  $L_1, L_\infty$  norm 그리고 식 (6)로 표현되는 해석해와의 차이  $L_1, L_\infty$  norm을 출력하시오. 여기서 n은 n번째 완화법을 사용한 해 이다. 함수  $q(x)$ 에 대한 수치적인 해  $q_i$ 에 대한  $L_1, L_\infty$ 의 정의는 다음과 같다.

$$L_1 = \Delta s \sum_{i=1}^N |q_i| \quad (8)$$

$$L_\infty = \max_i |q_i|$$

여기서  $\Delta s$ 는 격자의 크기이다. 그리드의 갯수는 513개로 하고  $r_s = 8$ 으로 가정한다. 계산은  $r_i$ 에 대한  $L_\infty$  norm의 크기가  $1 \times 10^{-14}$ 보다 작아질때까지 계산을 지속한다.

- 컴파일 스크립트: compile2.sh



- 실행 스크립트: run2.sh
- 실행 제한시간: 5초
- 화면출력:
  - 각 행별로  $n/10000$ , relative change에 대한 ( $L_1$  norm,  $L_\infty$  norm), exact error에 대한 ( $L_1$  norm,  $L_\infty$  norm)를 출력 (5개의 숫자)
- 출력파일: output2.txt
  - 총 513개의 행에 대해 첫번째 열에는  $s$ , 두 번째 열에는 최종 수치해  $\Phi$ 의 값을 출력

### 문제 3: 주어진 밀도 분포로 인한 시공간의 휘어짐 구하기 (20점)

문제 2에서 우리는 주어진 밀도 분포로부터 뿌아송 방정식을 풀어 중력포텐셜을 구했다. 이번 문제는 주어진 밀도 분포에서 아인슈타인 방정식을 만족하는 해를 찾는 문제이다. 아인슈타인 방정식을 (식 18) 등 좌표계에서 (식 27) 풀어보고 적절한 조합을 찾아보면 식 (31)로 쓸 수 있다. 이제 식 (31)을 2번 문제와 같이 식 (46)과 (47)을 이용하여 좌표 변환을 해보면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 &= -4\pi e^{2\lambda} r_s^2 (1-s)^{-4} (\rho_0 h - P), \\ \frac{d^2 \nu}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d\nu}{ds} + \left( \frac{d\nu}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\nu}{ds} \right) \left( \frac{d\lambda}{ds} \right) &= 4\pi e^{2\lambda} r_s^2 (1-s)^{-4} (\rho_0 h + 2P) \end{aligned} \quad (9)$$

문제 2번과 같이 식 (9)을 유한 차분법을 이용하여 차분화 하고 (식 39, 41) 완화법을 이용하여 구해 보시오. 밀도분포는 문제 2번과는 다르게 아래와 같은  $s$  좌표에 대한 포물선 프로파일을 사용한다.

$$\rho_0(s) = \begin{cases} \rho_c (1 - 4s^2), & \text{if } s \leq \frac{1}{2}. \\ 0, & \text{if } s > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

그리고 polytropic 상태방정식을 (식 25) 가정한다. 여기서  $K = 100$ ,  $\Gamma = 2$ 를 사용한다. 중심밀도는  $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$ 을 사용하고  $r_s = 8$ 을 사용한다. 초기 조건은  $\nu = \lambda = 0$ 으로 하고 경계조건은  $s = 0$ 에서  $\frac{d\nu}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} = 0$ 이고  $s = 1$ 에서  $\nu = \lambda = 0$ 이다.

식 (9)의 첫번째 식은  $\lambda$ 만의 방정식이기 때문에  $\lambda$ 의 결과를 가지고 두번째식으로 부터  $\nu$ 를 구할 수 있다. 제출시 매 10000번 iteration 마다  $r_i$ 의  $L_1$ ,  $L_\infty$  norm에 대하여 출력한다. 이 경우에는 해석적 해가 존재하지 않으므로 해석해와의 차이는 구하지 않는다. 그리드의 갯수는 513개로 하고 2번 문제와 마찬가지로  $r_i$ 에 대한  $L_\infty$  norm의 크기가  $1 \times 10^{-14}$ 보다 작아질때까지 계산을 하고 멈추도록 한다.

- 컴파일 스크립트: compile3.sh
- 실행 스크립트: run3.sh
- 실행 제한시간: 20초

- 화면출력:
  - 각 행별로  $n$ , relative change에 대한 ( $L_1$  norm,  $L_\infty$  norm)를 출력 (3개의 숫자)
- 출력파일: output3.txt
  - 총 513개의 행에 대해 첫번째 열에는  $s$ , 두 번째 열에는 최종 수치해  $\nu$ , 세 번째 열에는 최종 수치해  $\lambda$ 의 값을 출력

#### 문제 4: 할선법을 이용한 중성자별 크기 구하기 (20점)

문제 3에서 주어진 밀도로 부터 시공간의 휘어짐을 계산하였다. 이제 시공간의 휘어짐으로 부터 정역학적 평형 상태에 대한 밀도 분포를 구해야 한다. 이는 식 (37)으로 부터 구할 수 있다. 이 식이 의미하는 바는  $r_s$ 와  $C$ 을 알면 주어진  $\nu$ 로부터 밀도의 분포를 구할 수 있다는 것을 의미한다.  $r_s$ 와  $C$ 의 값은 경계조건을 통해서 구할 수 있다. 지금 부터 별의 중심에 해당하는 값은  $c$ 를 붙이고 별의 표면에 해당하는 물리량은  $s$ 를 붙일 것이다. 우리는 중심의 밀도를 고정하였기 때문에  $h_c$ 값을 알 수 있고 별 표면에서는 밀도가 0이 되기 때문에  $h_s = 1$ 로 수렴하게 된다. 따라서 별 중심과 별 표면에 대한 경계조건을 써 보면

$$\begin{aligned}\ln h_c + \nu_c &= C, \\ \nu_s &= C,\end{aligned}\tag{11}$$

이 된다. 따라서 우리는 쉽게  $C$ 값을 찾을 수 있다. 문제는  $r_s$ 를 찾는 것이 문제인데 위의 식에 나타나지 않고  $\nu$ 값에 영향을 주기 때문이다. 따라서 우리는  $r_s$ 의 값을 할선법을 통해서 구할 것이다. 먼저 우리가 할선법으로 풀어야 할 방정식은 아래와 같다.

$$f = \ln h_c + \nu_c - \nu_s\tag{12}$$

이제 초기 조건  $r_s^2 = 64$ 을 ( $r_s = 8$ ) 이용하여  $f_1$ 의 값을 찾고  $r_s^2$ 의 값을 1% 줄여서  $f_2$ 값을 찾아본다. 그리고 문제 1에서 했던것과 같이 할선법을 적용하여  $f = 0$ 으로 만드는  $r_s^2$  값을 찾아내 본다. 제출시  $n$ ,  $r_s^2$ , 및  $f_n$ 의 값을 매  $n$ 마다 출력하라.  $f_n < 1 \times 10^{-10}$ 가 될 때 까지 계산을 지속한다.

- 컴파일 스크립트: compile4.sh
- 실행 스크립트: run4.sh
- 실행 제한시간: 1분
- 화면출력:
  - 각 행별로  $n$ ,  $r_s^2$ ,  $f_n$ 를 출력 (숫자 3개)
- 출력파일: output4.txt
  - $r_s^2$  (숫자 1개)을 출력

## 문제 5: 반복을 통한 최종 중성자별 구조 구하기 (30점)

문제 4번에서  $r_s$ 의 값을 구하였고 이를 통해서 우리는  $C$ 의 값을  $\nu$ 의 값으로 알 수 있다 ( $C = \nu_s$ ). 이제 새로운  $C$ 값으로 부터 새로운 밀도 분포를 구할 수 있다. 이는 식 (37) 이용하여 엔탈피를 ( $h$ ) 구하고 식 (26)를 이용하여 주어진 엔탈피 값에서 밀도와 압력으로 환산한다. 단  $\ln h$ 의 값이 음수가 될 경우는 별의 바깥쪽이기 때문에  $\rho_0 = P = 0$ 로 설정한다. 그리고 이 새로운 밀도 분포를 이용하여 문제 3번부터의 과정을 다시 반복 할 수 있다.

반복을 통해 수렴하는 밀도 분포를 구해 보시오. 단 문제 4번에서 찾는  $r_s^2$  값은 10번을 반복할 때 까지 원하는 정확도로 수렴하지 않는다면 그때까지의 값을 쓰고 다음 사이클로 넘어간다. 3번 문제에서 5번 문제까지를 한 사이클로 정의 하였을때  $r_s$  값과  $C$ 값이 이전 사이클과의 차이가  $1 \times 10^{-6}$ 보다 작아질 때까지 반복하시오. 제출시 각 사이클당  $r_s$  값과  $C$ 값을 화면에 출력하고 최종 밀도의 분포를 ( $\rho_0(s)$ ) 파일로 출력하시오.

- 컴파일 스크립트: compile5.sh
- 실행 스크립트: run5.sh
- 실행 제한시간: 8분
- 화면출력:
  - 각 행별로  $n$ ,  $(r_s^2, C)$ 의 값,  $(r_s^2, C)$ 의 relative change (숫자 5개)
- 출력파일: output5.txt
  - 총 513개의 행에 대해 첫번째 열에는  $s$ , 두 번째 열에는 최종 수치해  $\rho_0$  값을 출력

## 주의사항

### 사용언어

코드는 Fortran, C, C++, Python 중 하나의 언어로 작성해야 한다.

### 출력 정밀도

파일 출력시 정밀도 손실을 방지하기 위해 다음과 같이 소수점 16자리로 출력한다.

Fortran:

```
write(*, '(ES23.16)') value
```

C:

```
printf("%.16e", value)
```

C++:

```
cout << scientific << setprecision(16) << value << endl;
```

Python:

```
print("{:.16e}".format(value))
```

## 채점

- 출력에 대한 점수는 정답과의 상대오차로 매겨진다. 구체적인 공식은 다음과 같다.

$$\bullet \text{ score} \times \min \left[ -\log_{10} \left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \left| \frac{x_{\text{out}}^{(i)} - x_{\text{sol}}^{(i)}}{x_{\text{sol}}^{(i)}} \right|^2} \right), -\log_{10}(\text{tolerance}) \right] / [-\log_{10}(\text{tolerance})]$$

- tolerance 값은 문제별로 상이.
- 소스코드를 제출하지 않으면 0점 처리 된다.
- 채점은 제공된 서버의 초기 환경과 동일한 환경에서 진행된다.
- 각 문제별로 컴파일 스크립트를 먼저 실행 한 뒤 실행 스크립트를 실행한다.
- 실행 스크립트가 문제에 설정된 제한시간 내에 종료되지 않으면 자동으로 종료시키고 그 때까지의 출력파일 기준으로 채점한다.

## 제출방법

git 원격 저장소에 다음의 파일들을 push 한다.

- compile1.sh / run1.sh
- compile2.sh / run2.sh
- compile3.sh / run3.sh
- compile4.sh / run4.sh
- compile5.sh / run5.sh

### 3 중성자별 구조 설명 자료

일반적으로 별(항성)은 수축하려고 하는 중력과 바깥으로 밀어내려고 하는 압력에 의해 평형을 이루고 있는(정역학적 평형에 있는, hydrostatic equilibrium) 천체이다. 우리가 아는 태양과 같은 일반적인 별은 별 내부 핵융합에 의해서 매우 뜨거운 상태다. 즉 별은 온도와 복사에 의한 압력으로 중력과 평형을 이루고 있다. 하지만 별의 진화의 마지막 단계에 만들어지는 백색왜성과 중성자별은 내부의 모든 핵융합이 멈춘 상태로 온도에 의한 압력을 더 이상 줄 수 없다(온도가 0K라는 것이 아니라 온도로 주는 압력이 다른 압력에 비해 매우 작다).

여기서 비교적 질량이 작은 별(태양 질량의 약 8배 이하의 별)의 마지막은 백색왜성으로 진화하는데 이 천체는 전자의 축퇴압으로 유지된다(높은 질량의 백색왜성은 상대론적 전자의 축퇴압). 그리고 비교적 무거운 별(태양 질량의 약 8배 이상의 별)은 최종적으로 찬드라세카 한계 질량(태양 질량의 약 1.4배)을 넘어서게 되면서 더 이상 전자의 축퇴압으로 유지되지 못하고 중성자별로 진화한다.

축퇴압으로 유지되는 별은 우리가 아는 상식과는 조금 벗어난 특징을 보인다. 일반적으로 별은 질량이 커질수록 그 크기와 밝기가 모두 커지게 되지만 축퇴압으로 유지되는 별은 질량이 커질수록 별의 크기가 작아지는 특징이 있다.

이제 중성자별 내부로 들어가면서 중성자별 내부에서 어떠한 일이 발생하는지에 대하여 알아보자. 중성자별 표면에서 내부로 들어가면 물질이 점점 응축되어 밀도가  $10^7 \text{g/cm}^3$ 에 이르게 되는데 이 밀도에서 역 베타붕괴(inverse beta decay)가 일어나게 된다. 역 베타붕괴란 물질의 원자핵 속의 양성자가 전자와 결합해 중성자로 변하게 되는 과정이다.

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e. \quad (13)$$

여기서  $\nu_e$ 는 중성미자다. 즉 이 과정을 통해 원자의 핵이 점점 중성자가 많은 상태로 변하게 된다. 또한 많은 중성미자(neutrino)가 방출된다. 이제 조금 더 내부로 들어 가보면 밀도가 점점 높아지면서 원자의 핵이 더 많이 중성자로 변하게 된다. 밀도가  $4.3 \times 10^{11} \text{g/cm}^3$ 에 이르게 되면 원자 속의 중성자가 지나치게 많아지게 되어 더 이상 안정된 원자로 유지되지 못하게 되면서 중성자가 원자 속에서 튀어 나오기 시작한다(중성자 드립, neutron drip). 따라서 이렇게 나온 중성자는 어디에 속박되지 않은 자유 중성자를 구성하게 되는데 이는 중성자로 이루어진 초유체(superfluid)를 구성하게 된다는 것을 의미한다. 이러한 상태는  $10^{14} \text{g/cm}^3$  정도까지 유지되고 이보다 더 높은 에너지 상태에 대한 것은 아직까지 잘 알려져 있지 않다. 따라서 중성자별의 구조를 알기 위해서는 앞에서 설명한 다양한 밀도에 따라 물리적 상황에 맞는 압력에 대한 정보를 잘 알아야 한다. 다시 말하면 밀도-압력에 대한 정보를 알면 중성자별의 구조에 대하여 알 수 있다. 이러한 정보를 물질에 대한 상태방정식(equation of state)이라고 한다. 중성자별의 내부물질 특히 밀도가  $10^{14} \text{g/cm}^3$  이상의 중성자별 중심은 아직 미지의 영역이고 다양한 물질의 상태 그리고 구성 물질에 따라 다양한 상태방정식이 제시되고 있다. 자세한 중성자별의 구조와 상태방정식에 대한 내용은 거울학교 돌팻날 수업에서 자세히 다룰 예정이다.

그럼 중성자별 모델은 어떻게 구할 수 있을까? 중성자별 내부 고밀도 영역에 대한 상태방정식이 주어

| 단위 물리량 | Conversion factor       | cgs 단위 물리량                          |
|--------|-------------------------|-------------------------------------|
| 길이     | $GM_{\odot}/c^2$        | $1.48 \times 10^5 \text{cm}$        |
| 시간     | $GM_{\odot}/c^3$        | $4.93 \times 10^{-6} \text{s}$      |
| 질량     | $M_{\odot}$             | $1.99 \times 10^{33} \text{g}$      |
| 밀도     | $c^6/(G^3 M_{\odot}^2)$ | $6.18 \times 10^{17} \text{g/cm}^3$ |

표 1:  $c = G = M_{\odot} = 1$ 일 경우 단위 물리량.

지면 이것을 이용하여 상대론적인 정역학적 평형 상태에 대한 식(Tolmann - Oppenheimer - Volkoff equation, TOV)을 풀이함으로써 우리는 중성자별에 대한 모델을 구할 수 있다. 이는 단순히 손으로 풀 수는 없고 수치적인 방법을 통해서 구할 수 있다. 이번 경진대회에서는 구대칭이 있는 중성자별의 구조에 대한 방정식을 수치적으로 풀이함으로써 중성자별 구조에 대한 이해를 높이고자 한다. 이번 실습의 모든 단위는  $c = G = M_{\odot} = 1$ 인 단위를 사용하고 이 단위를 이용하면 대략 길이 단위는 1.5km 정도가 된다. 보다 자세한 유닛은 표 1에 정리해 두었다.

시공간을 다루는 시간에 따라 변하지 않는 메트릭을 (metric) 아래와 같이 쓰면

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (14)$$

일반적인 TOV 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다 [1, 2].

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{M}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (15)$$

여기서  $P$ 는 압력,  $\rho$ 는 에너지 밀도로  $\rho = \rho_0 + \rho_0 \epsilon$ 으로 쓸 수 있고  $\epsilon$ 은 단위 부피당 내부에너지 (specific internal energy)이다. 또한  $M$ 은 중심에서 거리  $r$ 까지의 내부 질량으로

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho dr \quad (16)$$

으로 쓸 수 있다. 그리고  $\nu$ 는 다음 식으로 기술된다.

$$\frac{d\nu}{dr} = -\left(\frac{2}{P + \rho}\right) \frac{dP}{dr} \quad (17)$$

TOV방정식은 아쉽게도 해석적인 해는 알려져 있지 않다. 하지만 식 (15)-(17)은  $r$  대한 1차 전미분 방정식으로 (Ordinary Differential Equation, ODE) Runge-Kutta와 같은 다양한 ODE 풀이 방법을 통해 쉽게 구할 수 있다.

그림 1은 식 (15) - (17)을 Runge-Kutta 방법을 통해 구한 결과이다. 여기서  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$ ,  $\rho_{\max} = 1.28 \times 10^{-3}$ 을 사용하였다. 이 경우 별의 질량이 대략  $1.4M_{\odot}$ 이 된다. 왼쪽 그림은 별 중심에서 거리에 따른 밀도이고 오른쪽 그림은 중심에서 거리  $r$ 까지의 식 (16)으로 기술 되는 내부 질량이다.

TOV의 계산 결과는 상대론적인 수치 시뮬레이션의 초기 조건으로 많이 사용된다. 특히 직교좌표계를 도입하면  $\theta = 0$ 인 지점에서의 특이점을 제거할 수 있어 수치 계산 과정에서 굉장히 중요하다. 일반적으로 상대론적인 수치 시뮬레이션은 직교좌표계를 많이 사용하는데 위에서 구한 TOV의 해를 직교 좌표계로 곧

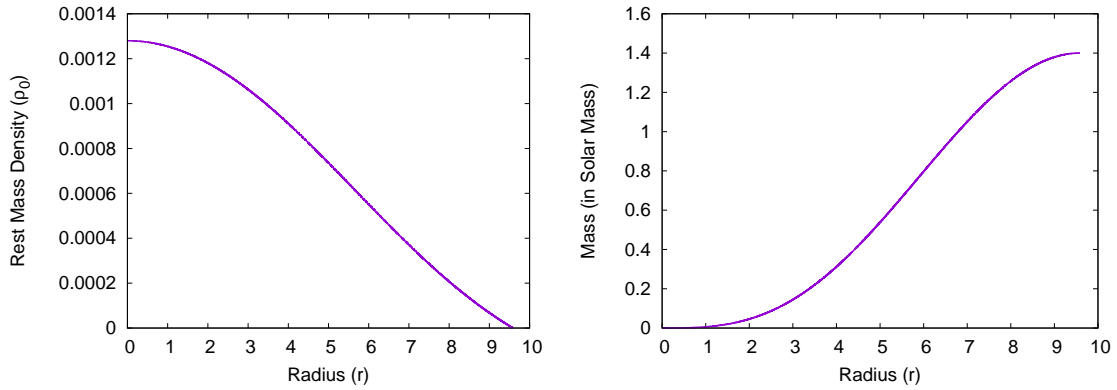


그림 1:  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$ ,  $\rho_{\max} = 1.28 \times 10^{-3}$ 에 대한 TOV 방정식의 해. 이 경우 질량이  $1.4M_{\odot}$ 인 별의 모델을 구할 수 있다. 왼쪽: 별 중심에서 거리에 따른 밀도, 오른쪽: 중심에서 거리  $r$ 까지의 내부 질량 (식 16)

바로 옮겨오기엔 매우 복잡한 좌표변환을 거쳐야 한다. 물론 직교 좌표계로의 좌표변환이 불가능 한 것은 아니다.<sup>1</sup> 하지만 이번 경진 대회에서는 회전하지 않는 중성자별의 모델을 직교좌표계로의 변환이 비교적 손쉬운 등방 좌표계에서 (isotropic coordinates) 구해 보고자 한다. 또한 이 좌표계의 도입은 회전하는 빠르게 회전하는 중성자별 모델을 구하는 기초가 되기 때문에 매우 중요하다.

## 등방좌표계에서 TOV 방정식

먼저 구 대칭이 있는 별에 대한 모델을 구하기 위해서는 아인슈타인 장방정식의 (Einstein field equation) 풀이가 필요하다. 이 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (18)$$

여기에서  $g_{ab}$ 는 시공간 메트릭으로 등방 좌표계에서 구대칭이 있을 경우에 대한 메트릭에 대한 자세한 설명은 후술 할 것이다.  $R_{ab}$ ,  $R$ 는 시공간의 곡률을 나타내는 리치텐서 (Ricci tensor)과 리치스칼라로 (Ricci scalar) 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{bc}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d, \quad (19)$$

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (20)$$

$\Gamma_{bc}^a$ 는 Christoffel symbol로

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (21)$$

이다. 또한  $T_{ab}$ 는 energy momentum tensor로 이상 기체에 대한  $T_{ab}$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$T^{ab} = \rho_0 h u^a u^b + P g^{ab} \quad (22)$$

<sup>1</sup><https://einstein toolkit.org/thornguide/EinsteinInitialData/TOVSolver/documentation.html>

여기서  $\rho_0$ ,  $h$ ,  $P$ 는 기체의 움직임을 따라가는 관측자가 (comoving observer) 측정한 기체의 밀도, 엔탈피 (specific enthalpy), 압력을 의미한다. 또한  $u^a$ 는 기체의 4차원 속도 (four-velocity) 이다. 그리고 이 상기체 상태방정식으로 부터

$$P = (\Gamma - 1) \rho_0 \epsilon \quad (23)$$

(여기서  $\epsilon$ 은 내부에너지) 엔탈피는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$h = 1 + \epsilon + \frac{P}{\rho_0} = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0} \quad (24)$$

천체물리학적 천체에는 이보다 조금 더 간단한 상태방정식을 가정할 경우가 많다. 기체의 압력은 밀도의 함수로만 표현하는 방법인데 (barotropic equation of state) 이중 가장 대표적인 경우가 아래와 같이 밀도의 지수형태로 표현하는 상태방정식이다 (polytropic equation of state).

$$P = K \rho_0^\Gamma = K \rho_0^{1 + \frac{1}{N}}. \quad (25)$$

여기서  $\Gamma = 1 + 1/N$ 이고  $K$ 와  $N$  값을 각각 polytropic constant, polytropic index라고 한다. 식 (24), (25)로 부터 엔탈피로 부터 밀도와 압력의 값에 대하여 환산이 다음과 같이 가능하다.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left[ \frac{h - 1}{K(1 + N)} \right]^N, \\ P &= K \rho_0^{1 + \frac{1}{N}} \end{aligned} \quad (26)$$

백색왜성과 같이 전자의 축퇴압으로 유지되는 별은 이 값이 잘 알려져 있는데 밀도가 낮은 영역에서는  $N = 3/2$ 에 가깝고 점점 밀도가 높아질수록  $N = 3$ 으로 접근하는 형태로 나타난다. 중성자별의 경우에는 내부 물질에 따라 다양한 상태를 보일 수 있어 polytropic equation of state로 내부 물질을 기술 하는데 한계가 있다. 하지만 이번 대회에서는 가장 기본적인  $N = 1$ 인 상태방정식을 통해 중성자별의 모델을 구해보고자 한다.

이제 좌표계를 도입하여 아인슈타인 장방정식을 (식 18) 풀어보자. 등방 좌표계에서 구 대칭이 있고 시간에 따라 변화하지 않는 시공간 메트릭은 일반적으로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} \left( dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (27)$$

여기서 모든 메트릭 성분은  $t$ 에 대한 의존성이 없고  $\nu$ 와  $\lambda$ 는  $r$ 만의 함수이다. 메트릭의 0이 아닌 각각의 성분을 써보면 다음과 같다.

$$g_{tt} = -e^{2\nu(r)}, \quad g_{rr} = e^{2\lambda(r)}, \quad g_{\theta\theta} = e^{2\lambda(r)} r^2, \quad g_{\phi\phi} = e^{2\lambda(r)} r^2 \sin^2 \theta. \quad (28)$$

식 (21)을 이용하여 이 메트릭에서 0이 아닌 Christoffel symbol들을 구해보면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \nu', \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\nu-\lambda)} \nu', \quad \Gamma_{rr}^r = \lambda', \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r^2 \lambda' - r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\sin^2 \theta (r^2 \lambda' + r), \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \lambda' + \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \lambda' + \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (29)$$



여기에서 '은  $r$ 에 대한 미분이다. 이제 식 (19)과 (29)을 이용하여 아인슈타인 장방정식을 (식 18) 적어보면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} G_t^t &= e^{-2\lambda} \left[ (\lambda')^2 + 2\lambda'' + \frac{4}{r}\lambda' \right], \\ G_r^r &= e^{-2\lambda} \left[ 2\nu'\lambda' + (\lambda')^2 + \frac{2}{r}(\nu' + \lambda') \right], \\ G_\theta^\theta &= G_\phi^\phi = e^{-2\lambda} \left[ (\nu')^2 + \nu'' + \lambda'' + \frac{1}{r}(\nu' + \lambda') \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)은 2개의 미지수에 대한 3개의 방정식으로 이것을 풀기 위해서는 이중 2개를 선택하거나 세가지 식을 잘 조합하여 2개의 식으로 만들어 풀면 된다. 일반적으로 많이 조합하는 방법은

$$\begin{aligned} G_t^t &= e^{-2\lambda} \left[ (\lambda')^2 + 2\lambda'' + \frac{4}{r}\lambda' \right] = 8\pi T_t^t = -8\pi (\rho_0 h - P), \\ G_i^i - G_t^t &= 2e^{-2\lambda} \left[ \nu'' + (\nu')^2 + \nu'\lambda' + \frac{2}{r}\nu' \right] = 8\pi (T_i^i - T_t^t) = 8\pi (\rho_0 h + 2P). \end{aligned} \quad (31)$$

이다.

한편 아인슈타인 장방정식은 에너지와 운동량의 보존 식을 만족한다 (Bianchi identity),

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (32)$$

여기서  $\nabla$ 는 공변미분을 (covariant derivative) 의미하고 임의의 텐서에 대한 공변미분은 아래와 같이 정의된다.

$$\nabla_c T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} = \partial_c T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} + \Gamma_{cd}^{a_1} T_{b_1 \dots b_s}^{d \dots a_r} + \dots + \Gamma_{cd}^{a_r} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots d} - \Gamma_{b_1 c}^d T_{d \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} - \dots - \Gamma_{b_s c}^d T_{b_1 \dots d}^{a_1 \dots a_r} \quad (33)$$

이제 에너지와 운동량 보존식과 (식 32) 공변미분의 정의를 (식 33) 이용하여 적어보면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla_a T_b^a &= \partial_a T_b^a + \Gamma_{ac}^a T_b^c - \Gamma_{ab}^c T_c^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} T_b^a) - \Gamma_{ab}^c T_c^a. \end{aligned} \quad (34)$$

여기서  $\sqrt{-g}$ 는 시공간 메트릭의 determinant로 식 으로 기술되는 구대칭이있는 등방좌표계에서 이 값은  $\sqrt{-g} = e^{\nu+3\lambda} r^2 \sin \theta$ 이다. 위 식은 아래 Christoffel symbol의 성질을 이용하였다 ([3] 참고).

$$\Gamma_{ab}^a = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_b (\sqrt{-g}) \quad (35)$$

식 (34)에서  $r$ 방향의 운동량 보존 식을 보기 위해서  $b = r$ 으로 한 뒤  $T_{ab}$ 의 정의와 (식 22) 0이 아닌 Christoffel symbol의 값을 (식 29) 이용하여 다시 써보면 아래의 식이 나오게 된다.

$$\begin{aligned} \nabla_a T_r^a &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} T_r^a) - \Gamma_{ar}^c T_c^a \\ &= P' + \rho_0 h \nu' = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

식 (36)을 식 (24)과 (25)을 이용해서 다시 적어보면

$$\ln h + \nu = C \quad (37)$$

으로 쓸 수 있다. 여기서  $C$ 는 상수 값이다.

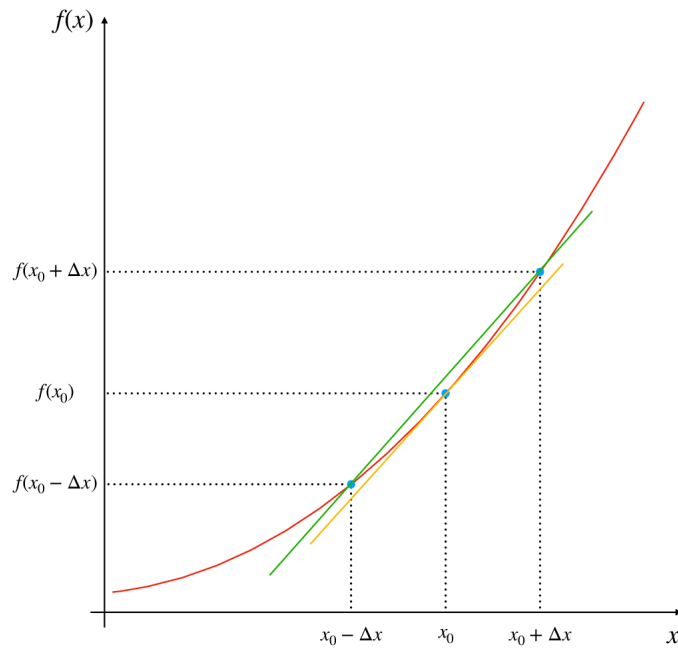


그림 2: 공간의 차분화 (discretization).  $x$ 축으로  $h$ 의 간격으로 일정하게 나누었을 경우에 대한 그림이다. 녹색선은 2차오더 유한 차분법을 이용하여  $x_0$ 에서  $f'(x_0)$ 를 구한 것이고 노란선은 실제  $f'(x_0)$ 의 값을 나타낸다.

## 유한차분법

유한차분법이란 (Finite Difference Method, FDM) 은 연속된 공간에서 정의된 미분방정식을 차분방정식으로 근사시켜 풀어내는 방법으로, 손으로 풀기 어려운 복잡한 문제의 근사해를 구하는 데 많이 사용되는 수치해석 기법 중 하나이다. 공간에서 연속인 방정식을 컴퓨터로 풀기 위해서는 공간을 차분화 (discretization) 하는 과정이 필요하다.

그림 2는  $x$ 축으로  $\Delta x$  크기로 공간을 차분화 하였을때의 그림이다. 녹색선은 2차오더 유한 차분법을 이용하여  $x_0$ 에서  $f'(x_0)$ 를 구한 것이고 노란선은 실제  $f'(x_0)$ 의 값을 나타낸다.  $h$ 가 줄어들수록 유한차분법을 이용하여 구한 도함수는 실제값과의 차이는 작아진다. 이때  $x_0$ 를 기준으로  $f(x_0 + \Delta x)$ 와  $f(x_0 - \Delta x)$ 를 테일러 전개를 해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\Delta x^3 \\ f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)\Delta x^3 \end{aligned} \quad (38)$$

식 (38)로부터 우리는  $f'(x_0)$ 와  $f''(x_0)$ 의 근사값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ f''(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (39)$$

식 (39)은  $\Delta x^2$ 까지 정확도 오더를 만족하는 식이다. 따라서 식 (39)은 2차 오더 유한 차분법이다.

수치 계산에서는 항상 그리드의 양 옆의 값이 존재하는 것은 아니다. 특히 수치 바운더리에서는 인접한 그리드가 바운더리를 넘어가기 때문에 다른 세 점으로 미분값을 추정해야 한다. 만약  $x_0$ 를 기준으로  $f(x_0 - \Delta x)$ 이 존재하지 않는다면  $f(x_0 + \Delta x)$ 와  $f(x_0 + 2\Delta x)$ 를 이용해 구하게 되는데 이 두값에 대한 테일러 전개를 해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\Delta x^3 \\ f(x_0 + 2\Delta x) &= f(x_0) + 2f'(x_0)\Delta x + 2f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{4}{3}f'''(x_0)\Delta x^3 \end{aligned} \quad (40)$$

따라서 식 (40)에서  $f'(x_0)$ 와  $f''(x_0)$ 의 근사값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{-f(x_0 + 2\Delta x) + 4f(x_0 + \Delta x) - 3f(x_0)}{2\Delta x} \\ f''(x_0) &= \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (41)$$

반대의 경우에도 마찬가지로 결정 할 수 있다.

## 완화법을 이용한 타원형 미분방정식 풀이

아래와 같이 표현되는 2계 편미분 방정식은 (Partial Differential Equation, PDE)

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + g = 0 \quad (42)$$

$B^2 - 4AC$  값을 기준으로 크게 세가지로 구분할 수 있다 (1계 미분항의 계수는 상관이 없다).

- $B^2 - 4AC > 0$ : 쌍곡선형 편미분 방정식 (Hyperbolic PDE)
- $B^2 - 4AC = 0$ : 포물선형 편미분 방정식 (Parabolic PDE)
- $B^2 - 4AC < 0$ : 타원형 편미분 방정식 (Elliptic PDE)

그리고 각각의 편미분 방정식의 형태에 따라 수치적인 풀이법이 차이가 난다. 이번 경진대회에서 풀이할 식을 살펴보면 (식 31) 타원형 편미분 방정식임을 알 수 있다. 일반적으로 타원형 편미분 방정식은 이 세가지 편미분 방정식의 종류 중 가장 수치적으로 계산시간이 많이 필요한 방정식이다.

이제 타원형 편미분 방정식의 일반적인 풀이 중 하나인 완화법을 (relaxation method) 알아보기로 하자. 먼저 간단한 예를 위해서 아래 1차원 방정식의 풀이를 생각해보자.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x). \quad (43)$$

위 방정식을 풀기 위해서 1차원 격자를 만들어 보면 그림 3 처럼 표시 할 수 있다. 여기서 계산의 도메인 크기  $[x_1 : x_N]$ 을  $N$ 개의 격자로 나눈 그림이다. 격자의 크기는  $\Delta x = (x_N - x_1)/(N - 1)$ 으로 정할 수 있다. 임의의  $x_i$  위치에서 식 (39)을 이용해서 식 (43)을 차분화 해보면

$$r_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} - g_i \Delta x^2 = 0 \quad (44)$$



그림 3: 유한차분법을 위한 1차원 격자의 구조.

으로 쓸 수 있다. 따라서 식 (48)을 이용하여 식 (44)을 풀어보면  $i$ 번째 그리드의 함수 값은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f_i^{\text{new}} \leftarrow f_i - r_i / \left( \frac{\partial r_i}{\partial f_i} \right) = f_i + r_i / 2 \quad (45)$$

즉 식 (45)을 모든 그리드에 대하여 지속적으로 적용 시키면 천천히 우리가 원하는 해를 찾아갈 수 있다. 그리고 이러한 수치적인 방법을 완화법이라고 (Relaxation Method) 한다. 이번 경진대회에서는 완화법을 이용하여 중력장을 기술하는 푸아송 방정식 (Poisson's equation) 풀어보고 이를 확장하여 아인슈타인 방정식 (식 (31)) 풀어볼 것이다.

## 좌표변환

일반상대론에서 일반적으로 경계조건을 표현하기는 매우 어렵다. 하지만 적절한 좌표 변환을 통해서 수치 계산의 경계를 무한대까지 확장 할 경우 별에 의한 시공간의 휘어짐이 없어지기 때문에 경계조건이 매우 간단해 진다 (flat space 조건). 따라서 식 (27)에서  $\nu(r \rightarrow \infty) = \lambda(r \rightarrow \infty) = 1$ 을 만족하게 된다.

좌표  $r$ 을 무한대까지 확장할 수 있는 무수히 많은 좌표변환이 존재하지만 이번 문제에서는 아래와 같은 좌표 변환을 사용할 것이다.

$$r = r_s \left( \frac{s}{1-s} \right). \quad (46)$$

여기서  $r_s$ 는 별의 크기를 의미한다. 이 좌표변환은  $s = [0 : 1]$ 이  $r = [0 : \infty]$ 을 커버하게 된다.

이제 이 좌표 변환이 주는 1계 및 2계 미분값은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{ds}{dr} \frac{d}{ds} = \frac{(1-s)^2}{r_s} \frac{d}{ds} \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{(1-s)^2}{r_s^2} \frac{d}{ds} \left( (1-s)^2 \frac{d}{ds} \right) = \frac{(1-s)^4}{r_s^2} \left[ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{2}{1-s} \frac{d}{ds} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

## 할선법 (Secant Method)

비선형적인 방정식의 ( $f(x) = 0$ ) 해를 구하는 방법 중 가장 일반적으로 많이 쓰이는 방법은 Newton-Raphson 방법이다. Newton-Raphson 방법은  $f(x)$ 값과  $f'(x)$ 의 값으로 해를 찾아가는 방법이다.

$$x^{n+1} \leftarrow x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} \quad (48)$$

Newton-Raphson 방법은 매우 빠르게 해에 수렴 할 뿐만 아니라 해를 찾는데 실패하는 경우가 적어서 일반적으로 많이 쓰인다.

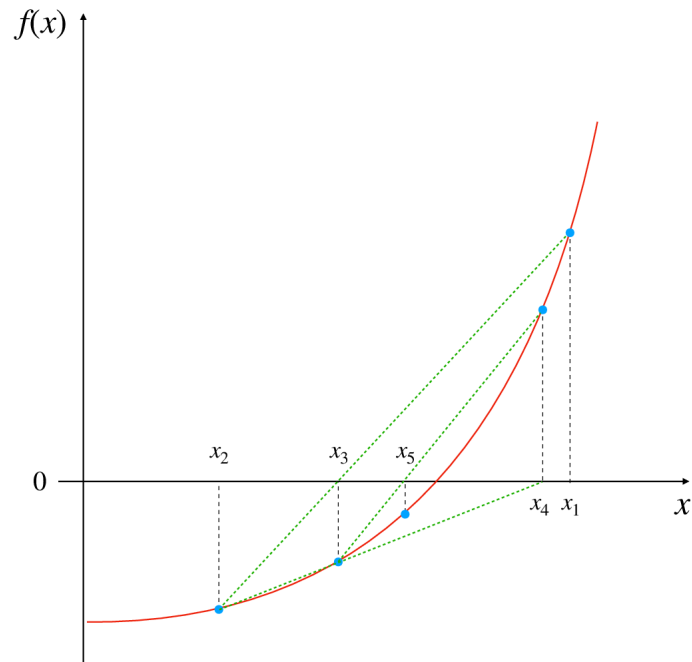


그림 4: 할선법의 모식도. 할선법은 함수의 미분값을 모르거나 수치적으로 구할수 밖에 없을때 Newton-Raphson 방법을 사용하기 어렵다. 이 경우에 함수의 값 만으로 해를 찾아가는 방법인 할선법이 유용하게 쓰일 수 있다.

식 (48)에서도 알 수 있듯이 Newton-Raphson 방법은 주어진 위치에서  $f$ 의 도함수를 ( $f'(x)$ ) 찾아야 한다. 하지만 풀려고 하는 식이 매우 복잡한 함수이어서 미분값을 구하는 작업에 지나치게 많은 계산량을 요구하거나 식 자체가 수치적인 방법으로만 구할 수 있을 경우엔 미분값을 추정하기 매우 까다롭다. 따라서 이경우엔 함수 값으로만 해를 찾아갈 수 있는 할선법을 매우 유용하게 이용할 수 있다.

그림 4은 할선법에 대한 그림이다. 먼저  $x^n$ 과  $x^{n+1}$  두 위치와 이 함수값으로 두 점을 잇는 선을 그리고 이것이  $x$ 축과 만나는  $x$  절편을 찾아내고 이것이  $x^{n+2}$ 로 하는 방법이다.

$$x^{n+2} \leftarrow x^{n+1} - \frac{f(x^{n+1})(x^{n+1} - x^n)}{f(x^{n+1}) - f(x^n)} \quad (49)$$

이 방법은 기울기를 이용해 다음 해를 찾아가는 점에서 Newton-Raphson 방법과 닮아 있지만 기울기를 구하는 방법이 두 점을 이용한다는 점에서 차이점이 있다. 따라서 식 (49)를 자세히 살펴보면 Newton-Raphson방법의 식 (48)에서  $f'(x^n)$ 을 두점에서 ( $x^{n+1}, x^n$ ) 구한 기울기 값을 치환한 식이 된다.

## References

- [1] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. , 1934.
- [2] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, "On massive neutron cores," *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 374–381, Feb 1939.
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972.