

Modélisation, Graphes et Algorithmes

Projet : calcul d'un couplage dans un graphe biparti

- Joachim Larrouy : joachim.larrouy@etu.univ-orleans.fr
- Nathan Rissot : nathan.rissot@etu.univ-orleans.fr

Utilisation

Le programme a été développé et testé uniquement avec la version 3.13 de python, nous ne pouvons pas garantir le bon fonctionnement dans une version antérieure à celle ci

Le programme attend en argument un chemin vers le fichier contenant la représentation de l'échiquier mutilé, et un nom pour le fichier de sortie en cas de succès de pavage.

```
py ./main.py <fichier_entrée.txt> <nom_fichier_sortie>
```

Partie Théorique

Question 1

Expliquez pourquoi le graphe représentant l'échiquier mutilé est un graphe biparti.

Soit le graphe $G = (V, E)$ représentant l'échiquier tel qu'indiqué dans l'énoncé. Soit deux ensembles N et B tel que $V = N \sqcup B$, chaque sommet représentant une case noire (resp. blanche) est placé dans l'ensemble N (resp. B).

Deux sommets appartiennent à une arête de E ssi les cases de l'échiquiers qu'ils représentent sont adjacentes, comme chaque case de l'échiquier (mutilé ou non) ne peut être adjacente qu'à des cases de l'autre couleur, les sommets du graphe ne peuvent eux aussi n'être adjacents qu'à des sommets représentant des cases de l'autre couleur.

(Bonus: le graphe G est 2-colorable, ce qui est évident sachant qu'il est bipartite, une bipartition étant équivalente à une 2-coloration.)

Donc:

$$\nexists (v_1, v_2) \in E \text{ tq } v_1, v_2 \in B \text{ et } \nexists (v_1, v_2) \in E \text{ tq } v_1, v_2 \in N$$

la séparation de l'ensemble V entre N et B selon la couleur de la case représentée est donc bien une bipartition du graphe.

Question 2

Montrez que ce graphe contient au plus $2n$ arêtes, où n est le nombre de cases de l'échiquier mutilé.

On note $n_{i,j}$ le sommet du graphe représentant la case de l'échiquier aux coordonnées i, j et soit m le nombre d'arêtes de G ($m = |E|$).

Nous cherchons à reconstruire le graphe d'un échiquier mutilé en ajoutant un à un les sommets représentant une case à notre graphe. Pour cela on choisit de les ajouter dans l'ordre suivant :

Parmi les cases qui ne sont pas encore représentées possédant le plus petit indice i , nous choisissons celle possédant le plus petit indice j . (ie. la case la plus en haut à gauche n'ayant pas encore été ajoutée.)

Cas de base : Prenons un échiquier contenant une seule case, ce graphe respecte bien la propriété $m = 0 \leq 2n = 2$

Récurrence : Prenons un échiquier mutilé de taille $N - 1$, auquel on veut rajouter une case $n_{i',j'}$. Par hypothèse de récurrence, il possède la propriété : $(m - 2) \leq 2(n - 1)$.

Rajoutons cette case. De par notre méthode de construction : cette nouvelle case peut avoir pour voisins $n_{i'-1,j'}$ ou $n_{i',j'-1}$. On ajoute donc au maximum 2 arêtes si ces deux voisins existent. ce qui nous donne donc $(m - 2) + 2 \leq 2(n - 1 + 1)$. On a bien : $m \leq 2n$.

note : S'il possède moins de deux voisins, la propriété reste vraie : $a + b \leq c + 2$ est vrai si : $a \leq c$ et $b \leq 2$.

Question 3

Expliquez en quoi un couplage parfait, dans le graphe représentant l'échiquier mutilé, est utile pour le paver des dominos.

Chaque arête de E représente une paire de cases adjacentes de l'échiquier. Un couplage est un sous ensemble de E , c'est à dire une collection de paires de cases adjacentes, ne se chevauchant pas les unes les autres.

Un couplage parfait est donc une collection de paires de cases adjacentes telles que toutes les cases soient incluses, sans qu'il y ait de chevauchement.

Une collection de paires de cases adjacentes telles que toutes les cases soient couvertes sans chevauchement est un pavage avec des dominos.

Implémentation

Nous avons choisi de représenter les sommets sous forme de chaîne de caractères décrivant leur position de l'échiquier "<couleur:B|N>-<x>:<y>", les arêtes (et arcs) comme des tuple(sommet, sommet). Les Graphes sont représentés par une classe Graph ayant comme attribut les ensembles B , N de sommets, et l'ensemble E des arêtes

Remarque: l'ensemble des sommet V est aussi conservé et est calculé comme $N \cup B$.

Nous avons choisi d'utiliser des set pour leur transparence avec la formalisation et la simplicité d'écriture des opérations.

Question 5

Écrire une fonction `construire_niveaux` qui attend en paramètre un graphe G_M et qui construit le graphe des niveaux ainsi que la valeur k .

- **Entrée** : le graphe G_M .
- **Sortie** : H le graphe des niveaux, k le nombre de niveau de H .

```
fonction construire_niveaux(GM, k) {
    soit freeN (resp. freeB) l'ensemble des sommets noirs (resp.
    blancs) libres, c-a-d N (resp B) privé des sommets captifs, donc
    appartenant à des arcs retourné  $B \rightarrow N$  au lieu de  $N \rightarrow B$ :
    freeN =  $N \setminus \{y \mid (x,y) \in E \text{ et } y \in N\}$ 
    freeB =  $B \setminus \{x \mid (x,y) \in E \text{ et } x \in B\}$ 

    itération actuelle  $\leftarrow$  freeN
    listeNiveaux[0]  $\leftarrow$  freeN

    si itération actuelle est vide, alors {
        retourner le graphe vide et 0
    }

    k  $\leftarrow$  0
    tant que l'on a pas atteint un sommet de freeB {
        pour chaque sommet n de l'itération actuelle {
            pour chaque sommet voisin de n {
                ajouter le sommet à l'itération suivante
                ajouter le sommet dans H.N ou H.B selon sa couleur
                ajouter l'arc entre n et son voisin dans H.E
            }
        }
        k++
        listeNiveaux[k]  $\leftarrow$  itération suivante
        si on a trouvé un sommet de freeB dans l'itération suivante,
    alors {
        on retourne le graphe H(HN, HB, HE, listeNiveaux) et k
    } sinon {
        si itération suivante est vide, alors {
            cas d'échec, le graphe n'est pas pavable,
            retourner le graphe H(HN, HB, HE, listeNiveaux) et k
        }
        itération actuelle  $\leftarrow$  itération suivante
        itération suivante  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
    }
}
```

Question 7 - chemins augmentants

Écrire une fonction `chemins_augmentants` qui se charge de calculer l'ensemble P de chemins utilisés par l'algorithme de HopcroftKarp

- **Entrée** : H^T le graphe transposé de H .
- **Sortie** : une liste de chemins augmentants.

```
fonction chemins_augmentants(HT) {  
    ajouter les sommets <START> avant les sommet du niveau k et <END>  
    après les sommets du niveau 0  
    ajouter les arcs entre <START> et les sommets du niveau k et entre  
<END> et les sommets du niveau k  
    sommet autorisé ← HT.V  
  
    chemins trouvés ← ∅  
  
    tant qu'il existe des chemins trouvable {  
        trouver un chemin de <START> à <END> avec la recherche en  
profondeur en ne passant que par des sommets autorisés  
  
        sommet autorisé ← sommet autorisé \ sommets du chemin  
  
        chemins trouvés ← chemins trouvés U chemin  
    }  
    retourner les chemins trouvés  
}
```